Probabilités et applications en algorithmique

Durée de l'examen : 3 heures
Seules les notes de cours et de TD sont autorisées.

23 mai 2002

1 Graphes aléatoires

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On appelle "triangle de G" un sous-ensemble de $\{x, y, z\}$ de trois sommets distincts de G tel que $\{x, y\}$, $\{y, z\}$ et $\{z, x\}$ sont tous les trois dans E.

On rappelle que la distance de deux sommets du graphe est la longueur (en nombre d'arêtes) du plus court chemin entre ces sommets (s'il n'existe pas de chemin entre les deux sommets on décide que leur distance est $+\infty$). Le diamètre du graphe est le maximum des distances entre deux sommets du graphe.

Soit $p \in]0, 1[$. On travaille dans le modèle de graphe aléatoire $G(n, p)$.

1. Soient x et y deux sommets distincts. Calculez la probabilité de l'évênement suivant :
$$\exists z \; \{z, x\} \in E \wedge \{z, y\} \in E.$$
2. Calculez la probabilité de l'évênement :
$$\{x, y\} \text{ est l'un des cotés d'un triangle.}$$
3. Soit E_x l'évênement $\exists y \neq x \; \forall z \; \neg(\{z, x\} \in E \wedge \{z, y\} \in E)$. Calculez $\lim_{n \to +\infty} P[E_x]$.
4. En déduire $\lim_{n \to +\infty} P[G(n, p) \text{ contient un triangle}]$.
5. Calculer $\lim_{n \to +\infty} P[\text{ tout sommet de } G(n, p) \text{ est inclus dans un triangle}]$.
6. Calculez l'espérance du nombre de triangles de $G(n, p)$.
7. Calculez $\lim_{n \to +\infty} P[\text{diamètre}(G(n, p)) \leq 2]$ et $\lim_{n \to +\infty} P[\text{diamètre}(G(n, p)) = 2]$.

2 Pile ou Face ?

Dans cette partie on étudie des suites infinies de tirages à pile ou face, indépendants et identiquement distribués. On appelle p la probabilité d'obtenir un pile et q celle d'obtenir un face. On supposera $p > 0$, $q > 0$ et bien sûr $p + q = 1$.

1. Soit X le "temps" (c'est-à-dire le nombre de tirages) nécessaire pour obtenir un pile. Dans cette question on demande de calculer de deux manières différentes l'espérance de cette variable aléatoire.
   (a) Calculez EX par une méthode directe.
   (b) Calculez la série génératrice de X. Rappelez comment on peut calculer l'espérance à partir de la série génératrice, et retrouvez le résultat de la question précédente.
2. Calculez maintenant la variance de X par la méthode des séries génératrices.
3. Soit Y le temps nécessaire pour obtenir deux piles consécutifs et $e = EY$. Justifiez l'équation $e = 2p^2 + pq(2 + e) + q(1 + e)$ et en déduire la valeur de e.
4. Trouver de même une équation satisfaite par la série génératrice de Y, et calculer cette série génératrice. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
5. Soit $U \in \{P, F\}^\infty$ le mot infini aléatoire sur l'alphabet $\{P, F\}$ engendré par la suite des tirages. On s'intéresse maintenant à la première occurence du motif "PPF" (un Pile, suivi d'un Pile, suivi d'une Face). Proposez une chaine de Markov à 4 états $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ qui modélise la recherche de ce motif dans U. Chaque changement d'état devra correspondre à la lecture d'une lettre de U. On notera q_0 l'état initial. Quel est l'état "final" (c'est-à-dire l'état qui indique qu'on vient de lire le motif PPF) ?
6. Soit H_i la fonction génératrice du temps nécessaire pour passer de q_i à l'état final. Etablir un système d'équations reliant les H_i. En déduire H_0 dans le cas général, puis donner l'expression de H_0 dans le cas particulier $p = q = 1/2$.
7. On s'intéresse maintenant à un jeu entre deux joueurs A et B. Le joueur A l'emporte si le motif PPF apparait avant le motif PFF. Déterminer la probabilité p_A de victoire de A dans le cas général, puis dans le cas particulier $p = q = 1/2$.

   Indication : en s'inspirant des questions précédentes, on pourra écrire un système d'équations dont p_A est l'une des inconnues.