$$A = B$$

Preuves automatiques de certaines identités, d'après M. Petkovšek, H. Wilf et D. Zeilberger

Nicolas Brisebarre
Arénaire, LIP, ENS Lyon
LArAl, Univ. St-Étienne

27 avril 2004

Rappels

Factorielle :

- $0! = 1$;
- si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n - 1 \times n$.

Coefficient binomial : pour $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, on pose

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ (parfois noté } C_n^k\text{)}$$
$$= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+2) \times (n-k+1)}{k!}.$$

Nombre de choix de k éléments parmi n.

On a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Séries

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec $u_k \in \mathbb{C}$ pour tout k.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Si $\lim_{n\to+\infty} v_n$ existe, on note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ cette limite.

Soit $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$, on pose $w_m = \sum_{k=m}^{-1} u_k$. Si $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{m\to-\infty} w_m$ existent, on note $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k$ la somme de ces limites.

Exemple. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{1}{2^k}$. On a $v_n = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$ $= 2(1-(1/2)^{n+1}) \to 2$ qd $n \to +\infty$. Donc, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 2$.

Irrationalité

Un nombre x est dit rationnel s'il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ t.q. $x = \dfrac{p}{q}$.

Exemples : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (Pythagoriciens, 500 A.C.), $e \notin \mathbb{Q}$ (Euler, 1737, exo), $\pi \notin \mathbb{Q}$ (Lambert, 1761), $e^{\pi} \notin \mathbb{Q}$ (Gel'fond, 1929).

Questions : $e + \pi \notin \mathbb{Q}$? $e\pi \notin \mathbb{Q}$? $\pi^{e} \notin \mathbb{Q}$?

Preuves d'irrationalité

Soit $x \in \mathbb{R}$. Un moyen de montrer $x \notin \mathbb{Q}$: trouver $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec v_n et $w_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ t. q.

- $v_n x - w_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{n\to+\infty} v_n x - w_n = 0$.

Preuve. Si $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$|v_n x - w_n| = \frac{|v_n p - q w_n|}{q} \geq \frac{1}{q}$$

car $|v_n p - q w_n| \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Or, $\lim_{n\to+\infty} |v_n x - w_n| = 0$: contradiction. $\square$

La fonction zêta de Riemann

Soit $s \in \mathbb{C}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, on pose $u_k(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s}$.

Si $\operatorname{Re} s > 1$, on a $u_k(s)$ converge qd $k \to +\infty$.

On pose $\lim_{k\to+\infty} u_k(s) = \zeta(s)$ définie pour $\operatorname{Re} s > 1$.

En fait, on peut définir ζ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Fonction fondamentale en Maths et en Physique.

Problème : Irrationalité des $\zeta(l)$ pour $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$.

Soit $l \in \mathbb{N}, l \neq 0$, on a

$$\zeta(2l) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2l}} = (-1)^{l-1} \frac{(2\pi)^{2l}}{2(2l)!} \underbrace{B_{2l}}_{\in\mathbb{Q}} \notin \mathbb{Q}$$

Irrationalité de $\zeta(2l+1) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2l+1}}$, $l \in \mathbb{N}, l \neq 0$?

Théorème . (Apéry, 1979).

$$\zeta(3) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} \notin \mathbb{Q}.$$

À partir de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\zeta(3)$, construction de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ avec $|a_n - b_n\zeta(3)| \to 0$ “assez vite” $\Rightarrow$ existence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ avec $|v_n - w_n\zeta(3)| \neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} |v_n - w_n\zeta(3)| = 0 \Rightarrow \zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

H. Cohen, A. van der Poorten.

Soient

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k}$$

avec

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}.$$

On a $a_n \in \mathbb{Q}, b_n \in \mathbb{N}$.

Résultat clé : montrer que a_n et b_n satisfont à

$$n^3 u_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1} + (n-1)^3 u_{n-2} = 0.$$

Preuve : D. Zagier. Méthode du *creative telescoping*.

F. Beukers.

Preuves d'identités

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Première méthode. Dénombrement.

Soit I un ensemble à n éléments. Nombre de parties de I est 2^n.

Nombre de parties de $I =$ le nombre de parties de I à 0 élément $+$ nbre de parties de I à 1 élément $+ \ldots +$ nbre de parties de I à $n-1$ éléments $+$ nbre de parties de I à n éléments i.e. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.

Seconde méthode. Binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

$a = b = 1 \Longrightarrow$ OK.

Prouver $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Première méthode. Combinatoire (preuve bijective).

Soit $I = \{a_1, \ldots, a_{2n}\}$.

$\displaystyle\binom{n}{k}$ = nbre de choix de k élts parmi les élts $a_1, \ldots, a_n$.

$\displaystyle\binom{n}{n-k}$ = nbre de choix de $n-k$ élts parmi les élts $a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$.

D'où, $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ = nbre de choix de k élts parmi les élts $a_1, \ldots, a_n$ et de $n-k$ élts parmi les élts $a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$.

Nbre de choix de n élts parmi $2n$ est $\displaystyle\binom{2n}{n}$ mais aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Seconde méthode. Séries génératrices.

Binôme de Newton :

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k :$$

coef. de x^n dans $(1+x)^{2n}$ est $\displaystyle\binom{2n}{n}$.

Mais

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) :$$

coef. de x^n dans $(1+x)^{2n}$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Simplification

Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$? $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^3$? $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{k}$?

`[50] Develop computer programs for simplifying sums that involve binomial coefficients.`

Exercice 1.2.6.63 du livre “The Art of Computer Programming, Volume 1” de Donald E. Knuth.

Notre héros : Doron Zeilberger.

`http ://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/`

Son fidèle serviteur : Shalosh B. Ekhad.

Mais aussi H. Wilf et M. Petkovšek.

Livre “$A = B$” téléchargeable depuis

http ://www.cis.upenn.edu/~wilf/AeqB.html

Objectifs :

– Preuves automatiques (=par ordinateur), vérifiables par l'utilisateur, de certaines récurrences linéaires : montrer que $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$ satisfont à

$$n^3 u_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1} + (n-1)^3 u_{n-2} = 0.$$

– Preuves automatiques (=par ordinateur), vérifiables par l'utilisateur, de certaines identités (A=B) : montrer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

– Simplifications automatiques de certaines expressions : on se donne $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ et l'on obtient $f(n) = \binom{2n}{n}$.

Preuves automatiques d'identités hypergéométriques

Observation de D. Zeilberger (1982) : si l'on veut prouver une identité de la forme $f(n) = g(n)$, il suffit de

– Trouver une relation de récurrence satisfaite par $f(n)$.

– Montrer que $g(n)$ satisfait la même relation de récurrence.

– Vérifier que $f(n)$ et $g(n)$ coïncident en un nombre fini d'entiers consécutifs suffisant.

$\Longrightarrow$ Chercher des algorithmes pour établir des récurrences linéaires.

Cadre

On considère

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k)$$

où F est doublement hypergéométrique :

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} \text{ et } \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \in \mathbb{Q}(n,k).$$

Remarque . *On peut travailler sur un corps de caractéristique nulle* $\mathbb{K}$.

Exemple : $f(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Définition . *On dira qu'une fonction* $f(n)$ *est hypergéométrique si* $f(n+1)/f(n) \in \mathbb{K}(n)$.

Exemples : $n!, 2^n$ mais pas $3^n + 1$.

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k)$$

Recherche d'algorithmes donnant une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux satisfaite par $f(n)$:

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) f(n+j) = 0,$$

avec $a_j(n) \in \mathbb{Q}[n], j = 0, \ldots, J$.

Cas $J = 1$.

Récurrences d'ordre 1

On a $a_1(n)f(n+1)+a_0(n)f(n)=0$ i.e. $f(n+1)=-\frac{a_0(n)}{a_1(n)}f(n)$ avec $a_0(n),\ a_1(n)\in\mathbb{Q}[n]$.

On a donc

$$f(n+1)=\frac{a_0(n)}{a_1(n)}\frac{a_0(n-1)}{a_1(n-1)}f(n-1)=\cdots$$
$$=(-1)^{n+1}f(0)\frac{a_0(n)}{a_1(n)}\frac{a_0(n-1)}{a_1(n-1)}\cdots\frac{a_0(1)}{a_1(1)}\frac{a_0(0)}{a_1(0)}$$

Exemples. $f(n+1)-2f(n)=0\Rightarrow f(n)=f(0)\,2^n$.

$f(n+1)-(n+1)f(n)=0\Rightarrow f(n)=f(0)\,n!$.

La méthode de Sœur Celine

Sœur Mary Celine Fasenmyer (1906-1996).

On se donne $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k)$ avec $\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}$ et $\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \in \mathbb{Q}(n,k)$, et $I, J \in \mathbb{N}$. On cherche une récurrence de la forme

$$\sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} \underbrace{a_{i,j}(n)}_{\in \mathbb{Q}[n]!!} F(n-j, k-i) = 0.$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} a_{i,j}(n) F(n-j, k-i) = 0$$

i.e.

$$\sum_{j=0}^{J} \left(\sum_{i=0}^{I} a_{i,j}(n) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n-j, k-i)}_{= f(n-j)} \right) = 0.$$

i.e.

$$\sum_{j=0}^{J}\left(\underbrace{\sum_{i=0}^{I} a_{i,j}(n)}_{P_j(n)\in\,\mathbb{Q}[n]}\right) f(n-j)=0.$$

Soit $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

```
>read(EKHAD):
>celine((n,k)->k*n!/(k!*(n-k)!),1,1);
The full recurrence is
b[3]*n*F(n-1,k)-(n-1)*b[3]*F(n,k)+b[3]*F(n-1,k-1)*n == 0
```

On ignore $b[3] : nF(n-1,k) - (n-1)F(n,k) + nF(n-1,k-1) = 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Longrightarrow n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n-1,k)}_{f(n-1)} - (n-1) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k)}_{f(n)} + n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n-1,k-1)}_{f(n-1)} = 0$$

i.e

$$2nf(n-1) - (n-1)f(n) = 0$$

d'où $f(n) = n2^{n-1}$.

Définition . *Une fonction* $F(n,k)$ *est dite hypergéométrique appropriée si*

$$F(n,k) = P(n,k)\frac{\prod_{i=1}^{uu}(a_i n + b_i k + c_i)!}{\prod_{j=1}^{vv}(u_j n + v_j k + w_j)!}x^k$$

où x *est une indéterminée,* $P \in \mathbb{Q}[n,k]$*,* $a_i, b_i, c_i,$ $u_j, v_j, w_j \in \mathbb{Z}$*,* uu *et* $vv \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*.*

Théorème Fondamental (Verbaeten, 1974) . *Soit* $F(n,k)$ *un terme hypergéometrique approprié. La fonction* F *satisfait une relation de récurrence* k*-libre : il existe* $I, J \in \mathbb{N}$ *et des polynômes* $a_{i,j}(n)$, $0 \le i \le I, 0 \le j \le J$ *tels que*

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} a_{i,j}(n)F(n-j,k-i) = 0.$$

De plus, on a des bornes explicites pour I *et* J*.*

L'algorithme de R. Gosper (1978)

Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k$, avec t_k hypergéométrique : $t_{k+1}/t_k \in \mathbb{K}(k)$.

Question : Existe-t'il z_k hypergéométrique tel que $z_{k+1} - z_k = t_k$? Si oui,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k = s_n.$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} z_k = s_n.$$

Or, $\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} z_k$ d'où

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} z_k = z_n + \sum_{k=1}^{n-1} z_k - z_0 - \sum_{k=1}^{n-1} z_k = z_n - z_0.$$

$s_n = z_n - z_0$: forme “simple” pour s_n !

Exemple. Somme des n premiers entiers non nuls ?

$$k = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

L'algorithme de R. Gosper

Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k$, avec t_k hypergéométrique : $t_{k+1}/t_k \in \mathbb{K}(k)$.

Question : Existe-t'il z_k hypergéométrique tel que $z_{k+1} - z_k = t_k$? Si oui, $s_n = z_n - z_0$: forme "simple" pour s_n !

Analogue des primitives : trouver F t.q. $F' = f$. Si oui, on a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Gosper : – donne z_k s'il existe,

– assure sa non-existence sinon.

Question : Existe-t'il z_k hypergéométrique tel que $z_{k+1} - z_k = t_k$? Si oui, $z_n = s_n + z_0$: forme "simple" pour s_n !

Exemples : Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} kk!$

```
In[1]:=<<gosper.m
In[2]:=GosperSum[k k!, k]
Out[2]=k!
```

qui signifie $z_k = k!$.

```
In[3]:=GosperSum[k k!, {k,0,n-1}]
Out[3]=-1 + n!
```

qui signifie $s_n = -1 + n!$.

Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

```
In[4]:=GosperSum[k^3, {k,0,n}]

          n^4+2 n^3+n^2
Out[4]=-------------
                4
```

qui signifie $s_n = \dfrac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$.

Soit $s_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}$.

```
In[5]:=GosperSum[Binomial[n,k], {k,0,m}]
Out[5]=Sum[Binomial[n,k], {k,0,m}]
```

$\Longrightarrow$ il n'existe pas z_k hypergéométrique sur $\mathbb{Q}(n)$ ($z_{k+1}/z_k \in \mathbb{Q}(n)(k)$) tel que $z_{k+1} - z_k = \binom{n}{k}$.

Soit $s_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}$.

```
In[6]:=GosperSum[(-1)^k Binomial[n,k],{k,0,m}]

         (-1)^m (-m+n) Binomial[n,m]
Out[6]=-----------------------------
                     n
```

i.e. $s_m = (-1)^m \frac{n-m}{n} \binom{n}{m}$.

L'algorithme de D. Zeilberger (*Creative telescoping*)

Sœur Celine + R. Gosper.

Soit $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k)$. On cherche $(a_j(n))_{0\leq j\leq J} \in \mathbb{Q}(n)$, $G(n,k)$ avec $G(n,k)/F(n,k) \in \mathbb{Q}(n,k)$, tels que $\lim_{k\to\pm\infty} G(n,k) = 0$ et

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n)F(n+j,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J} a_j(n)F(n+j,k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [G(n,k+1) - G(n,k)]$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=0}^{J} a_j(n) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n+j,k)}_{f(n+j)} = \lim_{k\to+\infty} G(n,k) - \lim_{k\to-\infty} G(n,k) = 0$$

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) F(n+j,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \tag{1}$$

L'algorithme de Zeilberger fournit (1) et sa preuve : son certificat $R(n,k) = G(n,k)/F(n,k)$. On divise (1) par $F(n,k)$

$$\sum_{j=0}^{J} \underbrace{a_j(n)}_{\in \mathbb{Q}[n]} \underbrace{\frac{F(n+j,k)}{F(n,k)}}_{\in \mathbb{Q}(n,k)} = \underbrace{\frac{G(n,k+1)}{F(n,k)}}_{\in \mathbb{Q}(n,k)} - \underbrace{\frac{G(n,k)}{F(n,k)}}_{\in \mathbb{Q}(n,k)}.$$

Notation. N : “shift”. Si f est une fonction, $Nf : x \mapsto f(x+1)$.

La récurrence $(n+2)f(n+1) - n^3 f(n) = 0$ s'écrit $((n+2)N - n^3)f(n) = 0$.

Soit $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$ (associée à $\zeta(3)$).

```
>read(EKHAD):
>F:=(n,k)->binomial(n,k)^2 *binomial(n+k,k)^2:
>ct(F(n,k),2,k,n,N);
```

$$(n+1)^3 - (17n^2+51n+39)(2n+3)N + (n+2)^3N^2,$$

$$\frac{-4(2n+3)(4n^2+12n+8+3k-2k^2)k^4}{(n+1-k)^2(n+2-k)^2} \tag{2}$$

Ce qui signifie

$$(n+1)^3F(n,k) - (17n^2+51n+39)(2n+3)F(n+1,k) \\ +(n+2)^3F(n+2,k) = G(n,k+1) - G(n,k),$$

avec $G(n,k) = (2) \times F(n,k)$.

$$(n+1)^3F(n,k)-(17n^2+51n+39)(2n+3)F(n+1,k)$$
$$+(n+2)^3F(n+2,k)=G(n,k+1)-G(n,k), \quad (3)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(3)\Longrightarrow$$

$$(n+1)^3b_n-(17n^2+51n+39)(2n+3)b_{n+1}+(n+2)^3b_{n+2}=0$$

Montrer $f_1(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{n} = f_2(n).$

Preuves automatiques d'identités hypergéométriques

Observation de D. Zeilberger (1982) : si l'on veut prouver une identité de la forme $f(n) = g(n)$, il suffit de

– Trouver une relation de récurrence satisfaite par $f(n)$.

– Montrer que $g(n)$ satisfait la même relation de récurrence.

– Vérifier que $f(n)$ et $g(n)$ coïncident en un nombre fini d'entiers consécutifs suffisant.

$\Longrightarrow$ Chercher des algorithmes pour établir des récurrences linéaires.

Montrer $f_1(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{n} = f_2(n)$.

$$\text{ct} \Rightarrow -(n+2)^2 f_1(n+2) + (7n^2+21n+16) f_1(n+1) \\ +8(n+1)^2 f_1(n) = 0.$$

$$\text{ct} \Rightarrow -(n+2)^2 f_2(n+2) + (7n^2+21n+16) f_2(n+1) \\ +8(n+1)^2 f_2(n) = 0.$$

f_1 et f_2 sol. de

$$f(n+2) = \frac{7n^2+21n+16}{(n+2)^2} f(n+1) + \frac{8(n+1)^2}{(n+2)^2} f(n).$$

On a $f_1(0) = f_2(0) = 1$ et $f_1(1) = f_2(1) = 2 \Longrightarrow f_1(n) = f_2(n)$.

Le phénomène WZ (H. Wilf-D. Zeilberger)

Donne des preuves succintes d'identités connues $+$ permet d'en découvrir de nouvelles.

Prouver $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(n,k) = g(n)$ i.e. $f(n) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k) = 1$ avec

$$F(n,k) = \frac{H(n,k)}{g(n)} \text{ doublement hypergéométrique.}$$

Il suffit de montrer $f(0) = 1$ et $f(n+1) = f(n)$.

$$\text{WZ : } F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

avec $G(n,k)$ explicite. $R(n,k) = G(n,k)/F(n,k)$: certificat WZ.

Gosper appliqué à $F(n+1,k) - F(n,k)$.

Prouver $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2k}{k} 4^{n-k} = \binom{2n}{n}$ i.e.

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}\binom{2k}{k} 4^{n-k}}{\binom{2n}{n}} = 1.$$

Il suffit de montrer $f(0) = 1$ et $f(n+1) = f(n)$.

$$\text{WZ : } F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

avec certificat WZ $R(n,k) = G(n,k)/F(n,k) = \dfrac{2k-1}{2n+1}$ i.e.

$G(n,k) = (-1)^k \binom{n}{k}\binom{2k}{k} 4^{n-k} \dfrac{2k-1}{2n+1}$.

WZ : obtenir de nouvelles identités

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \tag{4}$$

On somme sur les n ! (hypothèses supplémentaires).

Théorème . *Soient F et G sol. de (4), si*

- *pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k = \lim_{n \to +\infty} F(n,k)$ existe et est finie,*
- $\lim_{L \to -\infty} G(n,L) = 0$,

alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} G(n,k) = \sum_{j \leq k-1} (f_j - F(0,j)).$$

D'autres façons d'obtenir de nouvelles identités (cf. Chap. 7 de "A=B").

Exemples

Notre brave $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. On a $F(n,k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$. Gosper donne

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \tag{5}$$

avec $G(n,k) = \frac{-3n+2k-3}{2(2n+1)} \frac{n!^2}{(k-1)!^2(n-k+1)!^2\binom{2n}{n}}$.

$$\text{Théorème} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} G(n,k) = \sum_{j \leq k-1} (f_j - F(0,j)).$$

avec $f_j = \lim_{n \to +\infty} F(n,j) = 0$ et $F(0,j) = \delta_{0,j}$ qui donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n-2k+1}{2n+1} \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}} = 2.$$

Démontrer l'identité de Vandermonde

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{a}{k}\binom{n}{k} = \binom{n+a}{a}$$

On obtient le certificat WZ $\dfrac{k^2}{(-1+k-n)(1+a+n)}$ et la nouvelle identité

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+a+1}{n}} = \frac{a+1}{(k+1)\binom{a}{k+1}}$$

valable pour tout entier $a > k \geq 0$

L'algorithme Hyper (M. Petkovšek)

Soit

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) f(n+j) = 0 \tag{6}$$

avec $a_j(n) \in \mathbb{Q}(n)$. Hyper donne toutes les solutions $f(n)$ hypergéométriques ($f(n+1)/f(n) \in \mathbb{Q}(n)$) de (6) et assure leur non-existence sinon.

Hyper : $\{\frac{f_1(n+1)}{f_1(n)}, \ldots, \frac{f_J(n+1)}{f_J(n)}\}$.

? solutions hypergéométriques $f_j(n)$ de

$$9(n+2)f(n+2) - 3(n+4)f(n+1) - 2(n+3)f(n) = 0.$$

```
In[1]:= << Hyper
In[2]:=Hyper[ 9(n+2) f[n+2]
       -3(n+4) f[n+1]
       - 2 (n+3) f[n] == 0,
       f[n], Solutions-> All]
         2 7+3n     1
Out[2]= {- ----, - -}
         3 4+3n     3
```

On a donc $\dfrac{f_1(n+1)}{f_1(n)} = \dfrac{2}{3}\dfrac{7+3n}{4+3n}$ i.e. $f_1(n) = \dfrac{3n+4}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $\dfrac{f_2(n+1)}{f_2(n)} = -\dfrac{1}{3}$ i.e. $f_2(n) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Solution générale $f(n) = \lambda f_1(n) + \mu f_2(n), \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$.

Récapitulatif : réalisation du programme

"A=B", M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$), on considère

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k)$$

où F est doublement hypergéométrique :

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} \text{ et } \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \in K(n,k).$$

On voudrait savoir si f peut s'écrire ou non sous la forme d'une combinaison linéaire sur $\mathbb{K}$ de termes hypergéométriques $g(n)$: $g(n+1)/g(n) \in \mathbb{K}(n)$.

On considère donc

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k).$$

1) Sous de bonnes hypothèses, il existe $J \in \mathbb{N}$, $P_0, \ldots, P_J \in \mathbb{K}[n]$ tels que

$$\sum_{0 \leq j \leq J} P_j(n) f(n+j) = 0. \tag{7}$$

L'algorithme de Zeilberger donne cette récurrence. Si elle est d'ordre 1 : terminé sinon

2) Connaissant (7), l'algorithme Hyper (M. Petkovšek) donne f sous la forme d'une combinaison linéaire sur $\mathbb{K}$ de termes hypergéométriques si une telle forme existe et nous assure de sa non-existence sinon.

Exemples :

1)

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{3k+1}{k}\binom{3n-3k}{n-k}}{3k+1}$$

```
>read(EKHAD):
>F:=(n,k)->binomial(3*k+1,k) *binomial(3n-3k,n-k)/(3*k+1):
>zeil(F(n,k),k,n,N);
```

$$-81(3n+2)(3n+4)(n+1)f(n)$$
$$+12(2n+3)(9n^2+27n+22)f(n+1)$$
$$-4(2n+5)(2n+3)(n+2)f(n+2)=0.$$

```
In[1]:= << Hyper

In[2]:=Hyper[-81 (3n+2) (3n+4) (n+1) f[n]
        +12 (2n+3) (9n^2+27n+22) f[n+1]
        - 4 (2n+5) (2n+3) (n+2) f[n+2] == 0,
        f[n], Solutions-> All]

           27(1+n)   3(2+3n)(4+3n)
Out[2]= {-------, --------------}
           2(3+2n)   2(1+n)(3+2n)
```

Il existe λ et μ dans $\mathbb{Q}$ tels que

$$f(n) = \lambda 27^n / \left[(2n+1)\binom{2n}{n}\right] + \mu \binom{3n+1}{n}.$$

Il existe λ et μ dans $\mathbb{Q}$ tels que

$$f(n) = \lambda 27^n / \left[(2n+1)\binom{2n}{n}\right] + \mu\binom{3n+1}{n}.$$

Or,

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{3k+1}{k}\binom{3n-3k}{n-k}}{3k+1}.$$

On a $f(0) = 1$ et $f(1) = 4 \Longrightarrow \lambda = 0$ et $\mu = 1$.

On a donc trouvé (et prouvé !)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{3k+1}{k}\binom{3n-3k}{n-k}}{3k+1} = \binom{3n+1}{n}.$$

Remarque . *Ordre de la récurrence.*

2)

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3$$

`zeil` nous donne

$$-8(n+1)^2 f(n) - (12 + 21n + 7n^2) f(n+1) + (n+2)^2 f(n+2) = 0$$

```
In[1]:= << Hyper

In[2]:=Hyper[-8 (n+1)^2 f[n]
             - (12+21n+7n^2)f[n+1]
             + (n+2)^2 f[n+2] == 0,
             f[n], Solutions-> All]
Out[2]= {}
```

$f(n)$ n'est pas une combinaison linéaire sur $\mathbb{Q}$ de termes hypergéométriques.

3)

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{k}$$

On sait $g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $h(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} = \frac{1}{2}\left(4^n + \binom{2n}{n}\right)$.

On prouve (travail) que $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{k}$ n'a pas de forme simplifiée "jolie".

Prolongements et généralisations

G. Almkvist et D. Zeilberger.

Soit $F(n,y)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$. Trouver la récurrence satisfaite par

$$a_n := \int F(n,y) \mathrm{d}y$$

avec

$$\frac{F(n+1,y)}{F(n,y)} \in \mathbb{Q}(n,y) \text{ et } \frac{\partial F(n,y)}{\partial y} \frac{1}{F(n,y)} \in \mathbb{Q}(n,y).$$

Analogie récurrence - équation différentielle

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) f(n+j) = 0, \text{ i.e. } \left(\sum_{j=0}^{J} a_j(n) N^j \right) f(n) = 0,$$

avec N : "shift". Si f est une fonction, $Nf : n \mapsto f(n+1)$.

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(x) f^{(j)}(x) = 0, \text{ i.e. } \left(\sum_{j=0}^{J} a_j(x) D^j \right) f(x) = 0,$$

avec D : dérivation. Si f est une fonction, $Df : x \mapsto f'(x)$.

Soit $F(x,y)$ avec $x,\ y \in \mathbb{R}$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par

$$f(x) := \int F(x,y)\mathrm{d}y$$

avec

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\frac{1}{F(x,y)} \in \mathbb{Q}(x,y) \text{ et } \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{1}{F(x,y)} \in \mathbb{Q}(x,y).$$

Démo. Calculer $R(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{y^2}-y^2}\mathrm{d}y$.

Fonctions holonomes (F. Chyzak)

Définition. : page de F. Chyzak.

`http ://pauillac.inria.fr/algo/chyzak/`

Exemples.

1) Utilité de l'étape de récurrence.

Soient

$$f_1(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r} \binom{n}{s} \binom{n+r}{r} \binom{n+s}{s} \binom{2n-(r+s)}{n}$$

et

$$f_2(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k}^4 .$$

On montre que f_1 et f_2 sont solutions de

$$(n+2)^3 f(n+2) - 2(2n+3)(3n^2+9n+7) f(n+1) \\ -4(4n+3)(4n+5)(n+1) f(n) = 0.$$

Comme $n+2 \neq 0$ si $n \in \mathbb{N}$, $f_1(0) = f_2(0)$ et $f_1(1) = f_2(1)$, on a $f_1 = f_2$.

2) Montrer l'identité de Calkin

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \right) = \frac{n}{2} 8^n + 8^n - \frac{3n}{4} 2^n \binom{2n}{n}$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)u_{n+2} - (7n+12)u_{n+1} - 4(2n+1)u_n = (18n-20)8^n.$$

Hyper (M. Petkovšek) donne $u_n = \dfrac{n}{2} 8^n + 8^n - \dfrac{3n}{4} 2^n \dbinom{2n}{n}$.

3) Équation différentielle.

Soit

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \sin \frac{z}{1+z^2}\, \mathrm{d}z,$$

f solution de

$$\begin{aligned} t^2 f^{(10)}(t) + 18t f^{(9)}(t) + 3(24+t^2) f^{(8)}(t) + 48t f^{(7)}(t) \\ +(2t^2+169) f^{(6)}(t) + 36t f^{(5)}(t) + (117-2t^2) f^{(4)}(t) \\ -3(t^2-9) f''(t) - 6t f'(t) - (t^2+1) f(t) + 1 = 0. \end{aligned}$$

Programmes

Package Ekhad (Maple) (page de D. Zeilberger) : Soeur Celine, creative telescoping, ...

http ://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/programs.html

Package Sumtools de Maple 8 : Gosper, Zeilberger, ...

Programmes Maple et Mathematica disponibles sur la page du livre "$A = B$".

http ://www.cis.upenn.edu/~wilf/AeqB.html

Bibliothèque Maple `algolib` du projet Algo (Inria)

http ://algo.inria.fr/libraries/software.html

Références

A=B, M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996.

Hypergeometric Summation, W. Koepf, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, 1998.

Decision procedure for indefinite hypergeometric summation, R. W. Gosper Jr, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **75**, 1978, 40-42.

Some generalized hypergeometric polynomials, M. C. Fasenmyer, Ph.D. Dissertation, University of Michigan, 1945.

Fonctions holonomes en calcul formel, F. Chyzak, Thèse, École Polytechnique, 1998.

Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, R. Apéry, Journées Arithmétiques de Luminy, Astérisque **61**, 1979, 11–13.

A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$, A. van der Poorten, Math. Intelligencer **1**, 1978, 195–203.