

# *La mécanique des fluides*

Thierry Alboussière

20 juin 2006

# *La mécanique des fluides*

Thierry Alboussière

20 juin 2006

## 1. Historique

# *La mécanique des fluides*

Thierry Alboussière

20 juin 2006

1. Historique
2. Approche de type *système dynamique*

# *La mécanique des fluides*

Thierry Alboussière

20 juin 2006

1. Historique
2. Approche de type *système dynamique*
3. Quelles équations pour le mouvement des fluides



# *La mécanique des fluides*

Thierry Alboussière

20 juin 2006

1. Historique
2. Approche de type *système dynamique*
3. Quelles équations pour le mouvement des fluides
4. Calcul numérique des écoulements fluides

# *La mécanique des fluides*

Thierry Alboussière

20 juin 2006

1. Historique
2. Approche de type *système dynamique*
3. Quelles équations pour le mouvement des fluides
4. Calcul numérique des écoulements fluides
5. Les couches limites

# *La mécanique des fluides*

Thierry Alboussière

20 juin 2006

1. Historique
2. Approche de type *système dynamique*
3. Quelles équations pour le mouvement des fluides
4. Calcul numérique des écoulements fluides
5. Les couches limites
6. La stabilité

# *La mécanique des fluides*

Thierry Alboussière

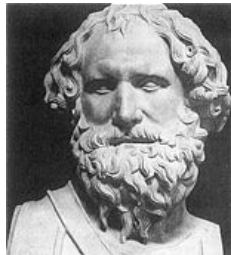
20 juin 2006

1. Historique
2. Approche de type *système dynamique*
3. Quelles équations pour le mouvement des fluides
4. Calcul numérique des écoulements fluides
5. Les couches limites
6. La stabilité
7. La turbulence

# *L'héritage technique des chinois, des grecs, des arabes, des romains*

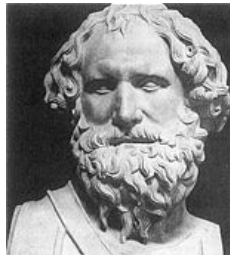


# *Archimède et l'équilibre statique des fluides*

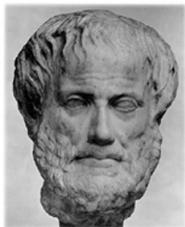


# Archimède et l'équilibre statique des fluides

Archimède (287–212 av. JC)  
formule quantitativement les  
forces exercées par les fluides :  
*“Tout corps plongé dans un fluide reçoit une poussée verticale dirigée vers le haut égale au poids du fluide déplacé”*



# *Aristote (384–322 av. JC)*



*La nature  
a horreur  
du vide...*

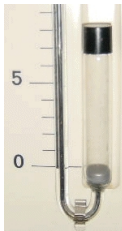


## *Pascal et la pression*

Pascal (1623–1662) définit la notion de pression et prouve au Puy de Dôme que la pression atmosphérique est due au poids de l'atmosphère.

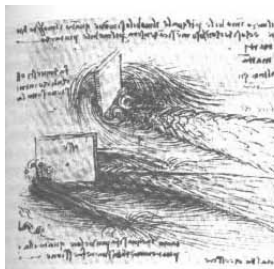
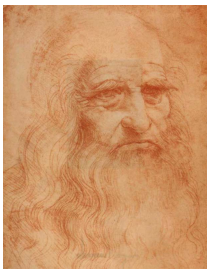


## *Pascal et la pression*

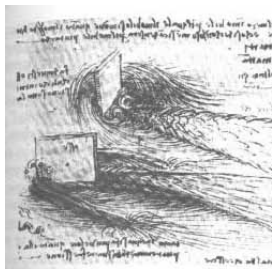
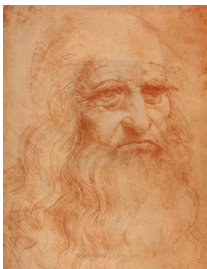


La pression exercée par la colonne d'air de l'atmosphère est compensée par le poids de la colonne de mercure. À l'extrémité haute le vide exerce une pression nulle.

# Léonard De Vinci (1452 – 1519)



# Léonard De Vinci (1452 – 1519)



- Décrit les mouvements fluides
- Invente le terme *turbulence*, *turbolenza*

# Isaac Newton (1642 – 1727)



le produit de la masse et de l'accélération  
est égal à la somme des forces exercées

## Leonhard Euler (1707 – 1783)

détermine l'équation des fluides **par-faits** qui s'écoulent sans résistance (viscosité nulle).

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p.$$



## *Le paradoxe de d'Alembert (1717–1783)*



“Un corps se mouvant à vitesse constante dans un fluide parfait ne subit ”

## *Le paradoxe de d'Alembert (1717–1783)*



“Un corps se mouvant à vitesse constante dans un fluide parfait ne subit ni **trainée** ”

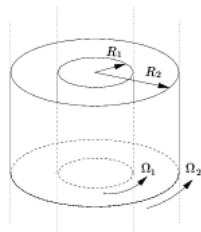


## *Le paradoxe de d'Alembert (1717–1783)*



“Un corps se mouvant à vitesse constante dans un fluide parfait ne subit ni **trainée** ni **portance**.”

## *Les expériences de Couette (1858–1943)*

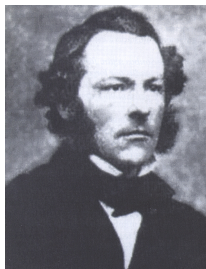


À faible vitesse, la force nécessaire est proportionnelle à la vitesse différentielle et inversement proportionnelle à l'épaisseur de fluide. Il identifie la viscosité du fluide au coefficient de proportionnalité.

$$F = \mu \frac{\delta U}{\delta R}$$

## *Georges Stokes (1819–1903)*

Mathématicien, il établit rigoureusement l'équation des fluides **visqueux**.



$$\mathbf{0} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

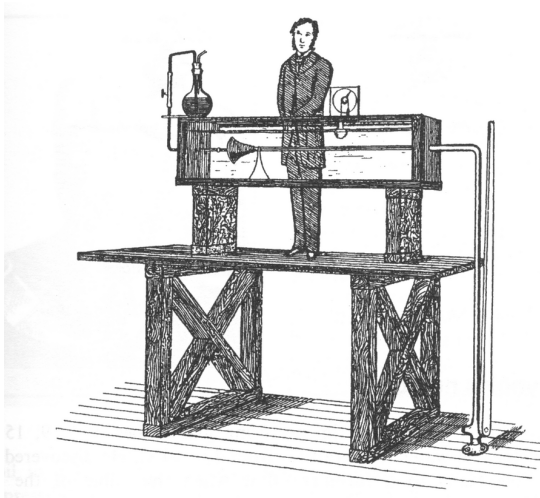
# Navier (1785–1836)



Il fait la synthèse de l'équation d'Euler des fluides parfaits et celle de Stokes pour les fluides visqueux : l'équation de Navier-Stokes

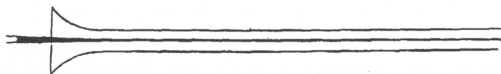
$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

# *Les expériences de Reynolds (1842–1912)*



Reynolds  
découvre  
un critère  
d'apparition  
des **instabilités**

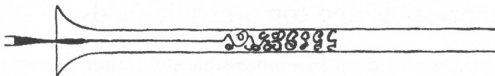
# Les expériences de Reynolds



(a) Laminar flow



(b) Turbulent flow



(c) Turbulent flow (observed by electric spark)

$$Re = UD/\nu$$

$U$  vitesse moyenne

$D$  diamètre

$\nu$  viscosité  
cinématique

**Transition** instable  
vers  $Re \simeq 2000$

## *L'histoire de la mécanique des fluides*

- Les réalisations des chinois, des grecs, des arabes, des romains
- L'équilibre statique des fluides : **Archimède, Pascal**
- Description des mouvements fluides : **De Vinci**
- Les lois de la mécanique : **Newton**
- Les fluides parfaits : **Euler, d'Alembert**
- Les fluides visqueux : **Stokes**
- L'équation visco-inertielle de Navier-Stokes : **Navier**
- Les expériences de **Reynolds**
- L'étude des instabilités : **Orr, Lin, Joseph, Arnold**
- L'étude de la turbulence : **Leray, Kolmogorov**

# *Le système dynamique Navier-Stokes*

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$



# *Le système dynamique Navier-Stokes*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{F}(\mathbf{u})$$

# *Le système dynamique Navier-Stokes*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{F}(\mathbf{u})$$

**Une condition initiale** : le champ de vitesse  $\mathbf{u}_0$ , c'est-à-dire un champ de vecteur défini en tout point d'un domaine  $\mathcal{D}$ .

# Le système dynamique Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{F}(\mathbf{u})$$

**Une condition initiale** : le champ de vitesse  $\mathbf{u}_0$ , c'est-à-dire un champ de vecteur défini en tout point d'un domaine  $\mathcal{D}$ .

**L'espace des phases** : l'ensemble des champs de vecteurs définis dans  $\mathcal{D}$ , qui satisfont  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  et des conditions aux limites, par exemple,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur le bord  $\partial \mathcal{D}$ .

# *Combien de degrés de liberté ?*

L'espace des phases est de dimension infinie !

## *Combien de degrés de liberté ?*

L'espace des phases est de dimension infinie !

En régime chaotique, on parle alors de **chaos spatio-temporel**

## *Combien de degrés de liberté ?*

L'espace des phases est de dimension infinie !

En régime chaotique, on parle alors de **chaos spatio-temporel**

Non seulement l'évolution temporelle de la vitesse en un point donné est complexe, mais à un instant donné la distribution spatiale de la vitesse est complexe également

## *Stabilité des mouvements visqueux*

Si la viscosité est suffisamment grande (ou le nombre de Reynolds inférieur à une valeur critique), on peut montrer que l'attracteur du système dynamique de Navier-Stokes est un point.

Le nombre de **Reynolds** est le **paramètre** clef de la nature des solutions de Navier-Stokes.

Aux grands nombres de Reynolds, l'attracteur a une dimension très élevée (mais finie !). C'est la **turbulence**.

# *Les fluides parfaits*

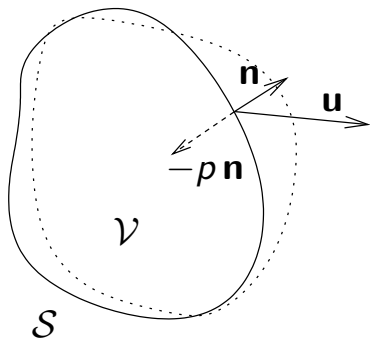
Densité constante, viscosité nulle

Chaque “particule” fluide obéit à la loi de Newton

Contrainte : le volume de tout ensemble de particules reste constant (rôle de la pression)



## L'équation de continuité

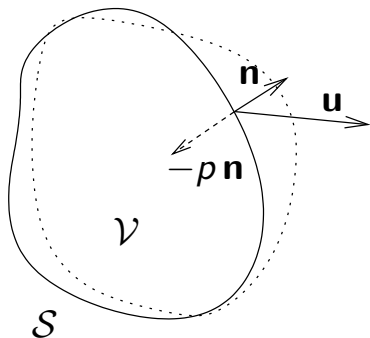


$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \, d\mathcal{V} = 0$$

## L'équation de continuité



$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \, d\mathcal{V} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

## *L'équation d'Euler*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} \, d\mathcal{V} = - \oint_{\mathcal{S}} p \mathbf{n} \, d\mathcal{S}$$

## *L'équation d'Euler*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} \, d\mathcal{V} = - \oint_S p \mathbf{n} \, dS$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} \, d\mathcal{V} + \oint_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = - \int_{\mathcal{V}} \nabla p \, d\mathcal{V}$$

## *L'équation d'Euler*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} \, d\mathcal{V} = - \oint_{\mathcal{S}} p \mathbf{n} \, d\mathcal{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, d\mathcal{S} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla p \, d\mathcal{V}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \mathbf{u}) \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} -\nabla p \, d\mathcal{V}$$

## L'équation d'Euler

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} \, d\mathcal{V} = - \oint_S \rho \mathbf{n} \, dS$$

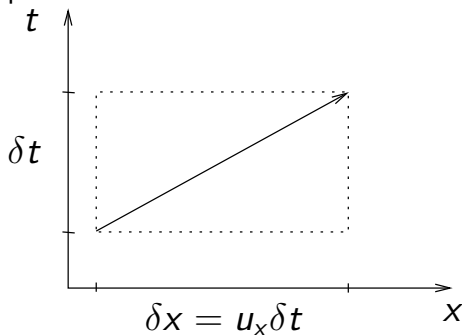
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} \, d\mathcal{V} + \oint_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = - \int_{\mathcal{V}} \nabla p \, d\mathcal{V}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \mathbf{u}) \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} -\nabla p \, d\mathcal{V}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p.$$

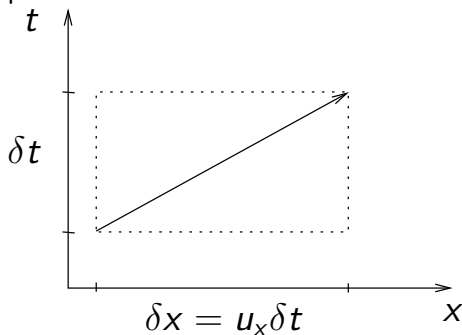
## L'équation d'Euler

La dérivée temporelle  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  est la dérivée particulière



## L'équation d'Euler

La dérivée temporelle  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  est la dérivée particulière



$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p.$$



## Réversibilité

$$\mathbf{u} \longleftrightarrow -\mathbf{u}$$

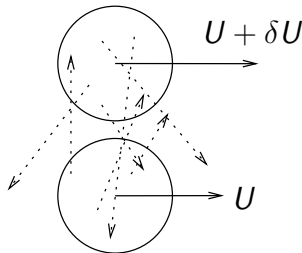
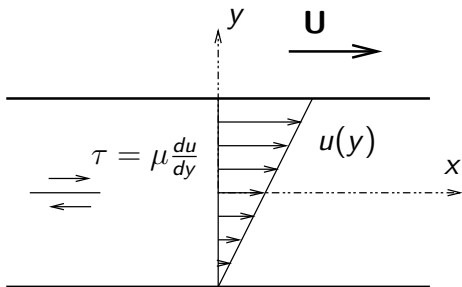
$$p \longleftrightarrow p$$

$$t \longleftrightarrow -t$$

L'écoulement symétrique est également solution

Conséquences : pas de traînée. L'absence de portance est plus technique à montrer.

## Et la viscosité ?



$$\mathbf{0} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

# Réversibilité

$$\mathbf{u} \longleftrightarrow -\mathbf{u}$$

$$p \longleftrightarrow -p$$

L'écoulement symétrique est également solution

# *Fluide réel*

Un fluide réel est à la fois inertiel et visqueux (même faiblement)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

## *Fluide réel*

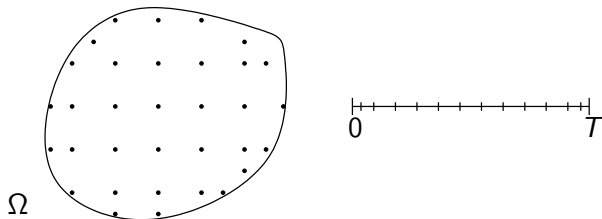
Un fluide réel est à la fois inertielle et visqueux (même faiblement)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

Du coup, on perd la réversibilité !

## Méthodes numériques

$\mathbf{u}$  est définie sur un domaine  $\Omega \subset \mathcal{R}^3$  et sur un intervalle de temps  $[0; T]$

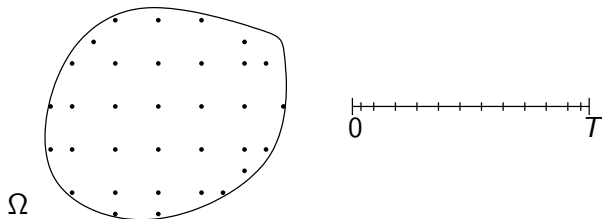


Discrétisation des équations :

1. en temps : explicite, implicite, Runge-Kutta

## Méthodes numériques

$\mathbf{u}$  est définie sur un domaine  $\Omega \subset \mathcal{R}^3$  et sur un intervalle de temps  $[0; T]$

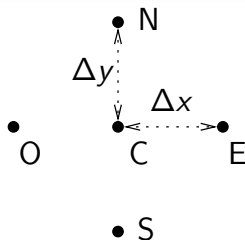


Discrétisation des équations :

1. en temps : explicite, implicite, Runge-Kutta
2. en espace :
  - différences finies
  - volumes finis
  - éléments finis
  - méthodes spectrales

## Les différences finies

une équation  
par nœud



Les dérivées partielles sont remplacées par des différences :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p^E - p^O}{2\Delta x} \quad (\text{ordre deux})$$

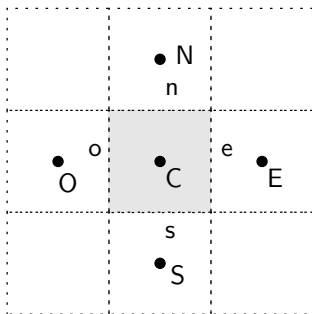
$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{\frac{u_x^N - u_x^C}{\Delta y} - \frac{u_x^C - u_x^S}{\Delta y}}{\Delta y} = \frac{u_x^N - 2u_x^C + u_x^S}{(\Delta y)^2}$$

- faciles à mettre en œuvre
- difficiles à adapter à un maillage non structuré
- la “conservation” n’est pas satisfaite



## Les volumes finis

une équation  
par volume

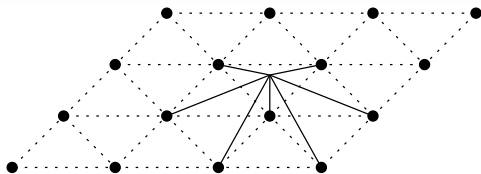


Le domaine est découpé en volumes disjoints le recouvrant, centrés sur les points du maillage.

Les équations intégrales sont appliquées sur chaque volume, les grandeurs étant interpolées entre les points du maillage.

- conservation de la masse, de la QDM, ... sur chaque volume
- prise en compte de la taille de chaque volume
- adaptation possible aux maillages non structurés

## Les éléments finis



Des fonctions élémentaires engendrent un espace de recherche, sous-espace de l'espace de recherche initial

$$u = u_i e_i$$

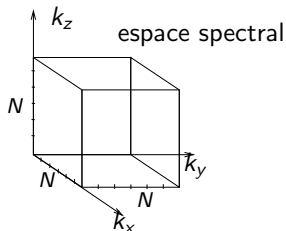
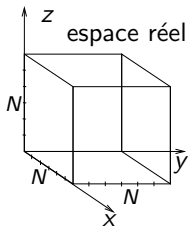
Les équations sont projetées sur les fonctions élémentaires

$$\int e_i E q(u_i e_i) dV$$

- projection de la solution sur le sous-espace
- Très bien adaptée aux maillages non structurés
- matrices obtenues moins faciles à traiter

## Les méthodes spectrales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k_x, k_y, k_z} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$



continuité :  $\text{div } \mathbf{u} = 0 \longrightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$

Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

$$\rho \frac{\partial \hat{u}_\gamma}{\partial t} + \rho i k_j \hat{u}_\delta * \hat{u}_j \left[ l_{\gamma\delta} - \frac{k_\delta k_\gamma}{k^2} \right] = -\mu k^2 \hat{u}_\gamma$$

# *Les méthodes spectrales*

- erreur décroît exponentiellement avec  $N$
- discrétisation maximale :  $2048^3$  (FFT)
- boîte périodique seulement (turbulence théorique)

## Discretisation en temps

Schéma explicite  $\frac{\partial u}{\partial t} = F(u) \longrightarrow \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = F(u^n)$

Schéma implicite  $\frac{\partial u}{\partial t} = F(u) \longrightarrow \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = F(u^{n+1})$

Schéma explicite et implicite sont d'ordre un. Des schémas d'ordre plus élevés peuvent être utilisés (Runge-Kutta,...)

Le choix entre différents schémas (même d'ordre égal) influence la résolution numérique.

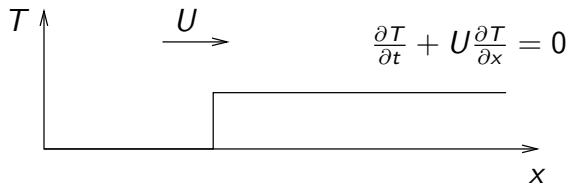
## *Stabilité et viscosité numérique*

Stabilité : un schéma de discrétisation instable peut conduire à des divergences, alors que l'on sait que la vraie solution est bornée

viscosité : le schéma numérique peut conduire à une viscosité apparente plus grande que la viscosité donnée en entrée

Exemple : transport de la température  $1D$ , instationnaire

## Stabilité et viscosité numériques



marche de  
température

Explicite aval  $\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta T} = -U \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x}$

Explicite amont  $\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta T} = -U \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x}$

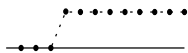
Implicite aval  $\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta T} = -U \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{\Delta x}$

Implicite amont  $\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta T} = -U \frac{T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}$

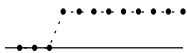
## Stabilité et viscosité numériques

Schéma explicite amont :  $T_i^{n+1} - T_i^n = -\frac{U\Delta T}{\Delta x}(T_i^n - T_{i-1}^n)$

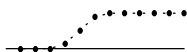
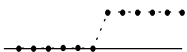
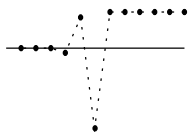
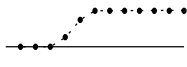
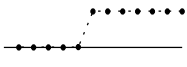
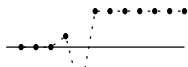
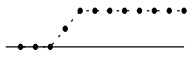
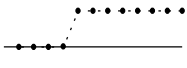
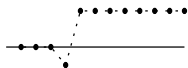
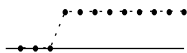
$U\Delta T > \Delta x$



$U\Delta T = \Delta x$



$U\Delta T < \Delta x$





## *L'analyse numérique*

Variables  $u_i, v_i, w_i, p, \dots$

On construit un grand vecteur solution  $\phi_i$ , de taille : nombre de mailles par nombre de variables

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = A\phi + B$$

Chaque ligne de calcul fait intervenir les variables sur les mailles voisines. La matrice est très creuse et de forme bande

## *Logiciels de mécanique des fluides*

Logiciels commerciaux généraux :

CFX, FLOW3D, Fluent (Vol finis)

Fidap (Elts finis)

Femlab (Elts finis), FreeFem (gratuit, Inria)

Logiciels spécifiques (souvent Vol finis)

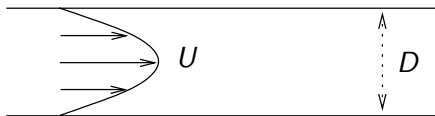
Combustion

Compressible

Diphasique

Performances actuelles : jusqu'à 100 millions de points de maillage.

## Analyse dimensionnelle



$\frac{\rho U D}{\mu}$  est inférieur à 2000 : solution **laminaire**

$\frac{\rho U D}{\mu}$  est supérieur à 2000 : **turbulence**

Variables dimensionnelles :  $U$ ,  $D$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ , de dimension  $m s^{-1}$ ,  $m$ ,  $kg m^{-1} s^{-1}$ ,  $kg m^{-3}$ .

4 variables, 3 dimensions  $\rightarrow$  1 nombre adimensionnel

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

$$\rho \frac{U^2}{D}$$

$$\mu \frac{U}{D^2}$$

$$\text{Inertie/Viscosité} \sim Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu}$$

# Équations adimensionnelles

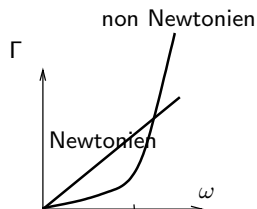
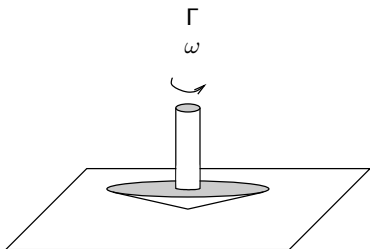
Variables adimensionnelles

$$\mathbf{u}_a = \frac{\mathbf{u}}{U}, t_a = \frac{tU}{D}$$

Équation adimensionnelle

$$\frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t_a} + (\mathbf{u}_a \cdot \nabla_a) \mathbf{u}_a = -\nabla_a p_a + \frac{1}{Re} \Delta_a \mathbf{u}_a$$

## *Faibles nombres de Reynolds*



### Rhéologie

Comportement rhéologiques non linéaires : difficultés numériques.  
Applications : bitumes, gels, dentifrice, polymères, sang, ...

### Tribologie

Frottement de surfaces en mouvement relatif. Paliers, roulements, laminoirs...

### Sédimentation

Sable, boues,

## Mélange chaotique, microfluidique

Un mouvement fluide “simple” peut engendrer des trajectoires chaotiques  $\frac{dx_p}{dt} = \mathbf{u}$ .

Mélange de ciments, de pâtes, réactants,... MEMS

Concentration :  $\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D \Delta c$

$$\tau \sim \frac{\delta^2}{D} \longrightarrow \delta \sim \sqrt{D\tau}$$

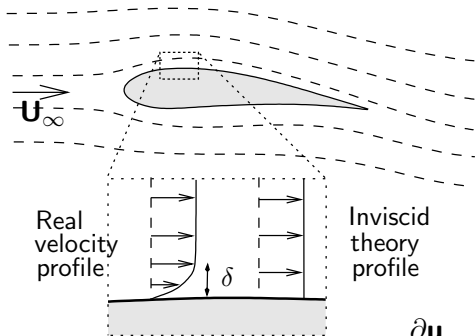








# Les couches limites – Prandtl (1875–1953)



$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

$$\rho \frac{U^2}{L} \qquad \mu \frac{U}{\delta^2}$$

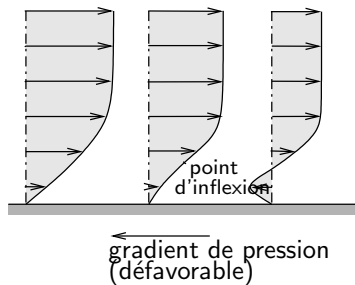
Les termes visqueux sont comparables aux termes inertiels à une échelle  $\delta \sim L \left( \frac{\nu}{UL} \right)^{1/2}$

$$\frac{\delta}{L} \sim Re^{-1/2}$$

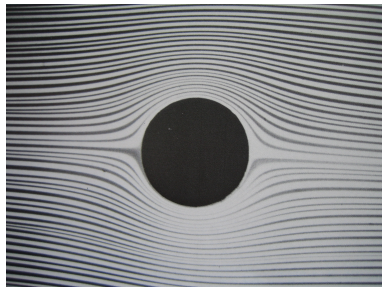
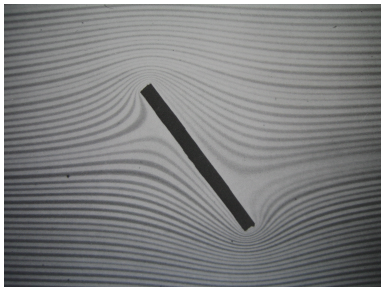
## *Pas de réversibilité*



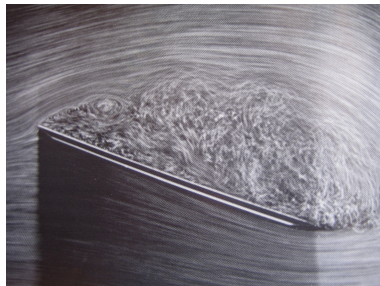
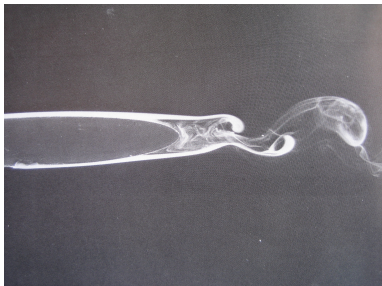
## Séparation des couches limites



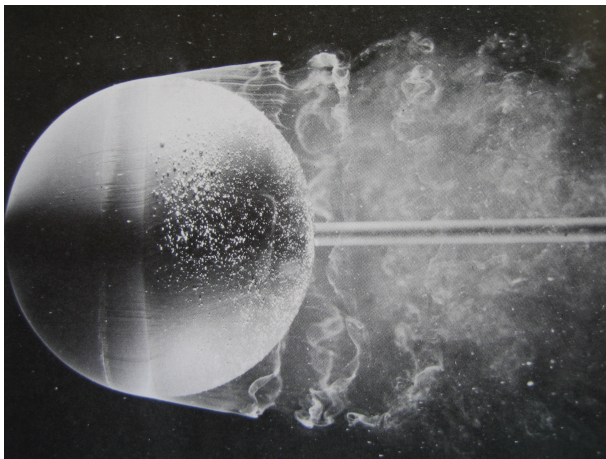
# Écoulement parfaits “imaginaires”



# *En réalité*



# *En réalité*



## *Enjeu pratique*

Exploiter la séparation des couches limites : par exemple, pour décoller au bord de fuite des ailes d'avion → **portance**  
Éviter de créer des zones recirculantes qui dissipent beaucoup d'énergie → **traînée**

## Stabilité linéaire

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}$$

$\mathbf{u}_0$  solution. Plus une petite perturbation  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}$   
 Eq( $\mathbf{u}$ ) - Eq ( $\mathbf{u}_0$ )

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}}$$

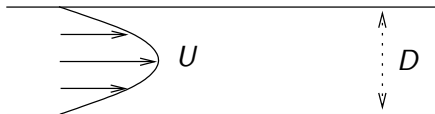
$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}})$$

$\mathbf{u}_0$  stationnaire  $\longrightarrow \mathcal{L}$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$  commutent  $\longrightarrow$  base commune de vecteurs propres  $\tilde{\mathbf{u}} = \Sigma e^{\sigma t} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$

Problème aux valeurs propres  $\sigma \tilde{\mathbf{f}} = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{f}})$

Si une valeur propre a une partie réelle positive, la solution est linéairement instable.

## Écoulements de Poiseuille



Le nombre de Reynolds critique de l'écoulement de Poiseuille plan vaut  $UD/\nu = 5772$ . Au-delà, cette solution simple est encore valable, mais ne se trouve jamais réalisée...

Dans d'autres cas (Poiseuille circulaire), on ne trouve pas de seuil ( $UD/\nu = \infty$ ). En revanche, si on augmente le nombre de Reynolds, une perturbation finie de taille de plus en plus faible suffit à rendre l'écoulement instable puis turbulent.

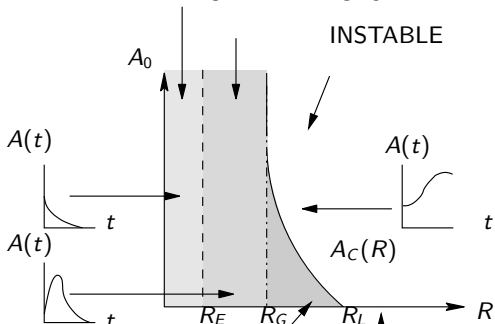


# Les différentes notions de stabilité

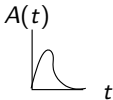
STABILITE GLOBALE MONOTONE

STABILITE GLOBALE

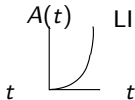
INSTABLE



$A(t)$



$A(t)$



LINEAIREMENT INSTABLE

## *La turbulence*

### **Un problème existentiel ...**

Partant d'un champ de vitesse  $C^\infty$  dans un domaine borné, on ne sait pas si les équations de Navier-Stokes deviennent singulières en un temps fini !

Euler, ou Navier-Stokes en dimension 2 : solutions régulières

Euler, ou Navier-Stokes en dimension 3 : ?? **1 million de dollars** à gagner, en tant que l'un des 7 problèmes de l'institut Clay

Calculs numériques et analytiques : recherche de singularités

## La turbulence

### Un problème existentiel ...

Partant d'un champ de vitesse  $C^\infty$  dans un domaine borné, on ne sait pas si les équations de Navier-Stokes deviennent singulières en un temps fini !

Euler, ou Navier-Stokes en dimension 2 : solutions régulières

Euler, ou Navier-Stokes en dimension 3 : ?? **1 million de dollars** à gagner, en tant que l'un des 7 problèmes de l'institut Clay

Calculs numériques et analytiques : recherche de singularités

*Werner Heisenberg the great quantum physicist said: "When I die, I will ask God two questions. Why is there relativity? Why is there turbulence? I am sure he will answer the first."*

# *La turbulence*

## **Un problème pratique ...**

En attendant de savoir si le problème est bien posé, on a besoin de calculer des écoulements turbulents.

Quelle est la difficulté ? Comment choisir la maille d'espace ?  
Comment choisir le pas de temps ?

## *Cascade de Richardson*

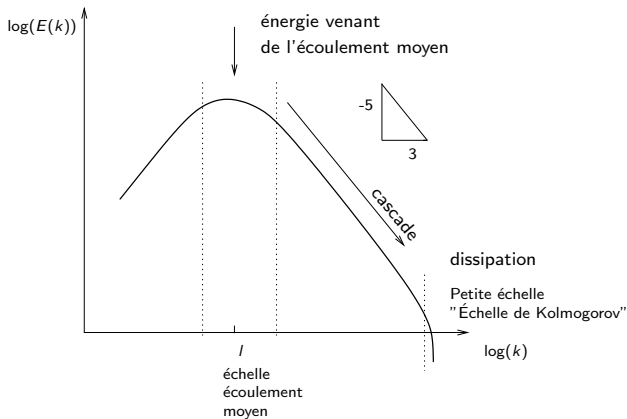
*"Big fleas have little fleas  
that sit on their back to bite them  
And little fleas have lesser fleas  
And so on ad infinitum"*

*Jonathan Swift*

*"Big whirls have little whirls  
that sit on their back to bite them  
Little whirls have lesser whirls  
And so on to viscosity"*

*Lewis Richardson*

# Cascade de Kolmogorov



$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{v}$$

$$E = \int_V \frac{\mathbf{v}^2}{2} dV$$

$$E = \int_{\hat{V}} \frac{\hat{\mathbf{v}}^2}{2} d\hat{V}$$

$$E = \int_0^\infty E(k) dk$$

## *Analyse dimensionnelle de Kolmogorov*

Distribution de l'énergie turbulente  $E = \int E(k)dk$

$$E(k) = f(k, \epsilon)$$

où  $\epsilon$  est le taux de dissipation de la turbulence

Dimensionnellement :  $E(k) = \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$

L'échelle telle que  $Re \sim 1$  est l'échelle de Kolmogorov

$$\eta = \frac{l}{Re^{3/4}}$$

## Calculs futuristes et optimistes

Reynolds possible actuellement en 2006, avec  $2048^3$

$$Re \sim 2048^{4/3} \sim 26000$$

Autour d'une aile d'avion  $L \sim 1m$ ,  $U \sim 100m.s^{-1}$ ,  
 $\nu \sim 10^{-5}m^2.s^{-1}$  d'où  $Re \sim 10^7$ . Il faut  $\frac{\eta}{L} \sim Re^{-3/4} \sim \frac{1}{200000}$

Il faut multiplier le nombre de point dans une direction, par 100 par rapport à 2006. Donc le nombre total de nœuds  $N_t$  par le cube, 1 million.

La puissance de calcul est au moins proportionnelle à  $N_t^{4/3}$ , 100 millions de fois plus qu'aujourd'hui.

Loi de Moore : fois 2 tous les 18 mois  $\longrightarrow$  dans 40 ans !



## *Les ingénieurs et la turbulence*

Remplacer le calcul direct (DNS Direct Numerical Simulation) par un modèle. Modèle des contraintes de Reynolds.

Différentes méthodes

- viscosité turbulente
- méthode  $k - \epsilon$
- *Reynolds Stress modelling*
- LES (Large Eddy Simulation)

## Viscosité turbulente et Méthode $k - \epsilon$

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} + \rho \overline{u'_j u'_i}$$

$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial y}$$

On estime la “viscosité turbulente” par analyse dimensionnelle

$$\mu_t \sim \rho \tilde{u} l$$

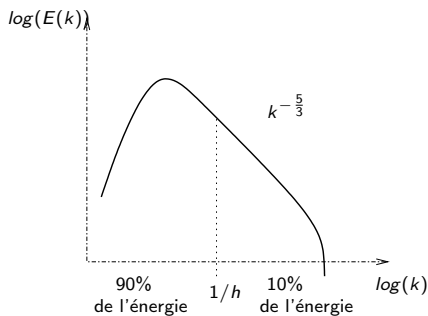
Énergie turbulente  $k$  et dissipation spécifique de la turbulence  $\epsilon$

$$\mu_t \sim \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

+ deux équations de transport (approchées) pour  $k$  et  $\epsilon$

Méthode la plus utilisée dans l'industrie. Coefficients ajustés pour les cas connus.

# Large Eddy Simulation



Les grands tourbillons sont résolus exactement, et les petits sont modélisés par une viscosité turbulente.

Avantages : les grandeurs fluctuantes sont calculées, meilleurs résultats

Moins cher que la DNS, plus cher que  $k - \epsilon$

Incertitude sur l'influence des petites échelles sur les grandes...

## *Quelques commentaires*

- La mécanique des fluides est une science à la fois jeune et ancienne

## *Quelques commentaires*

- La mécanique des fluides est une science à la fois jeune et ancienne
- Elle bénéficie à plein de l'essor du numérique

## *Quelques commentaires*

- La mécanique des fluides est une science à la fois jeune et ancienne
- Elle bénéficie à plein de l'essor du numérique
- mais en demande toujours plus...

## *Quelques commentaires*

- La mécanique des fluides est une science à la fois jeune et ancienne
- Elle bénéficie à plein de l'essor du numérique
- mais en demande toujours plus...
- Elle offre de nombreux problèmes de stabilité

## *Quelques commentaires*

- La mécanique des fluides est une science à la fois jeune et ancienne
- Elle bénéficie à plein de l'essor du numérique
- mais en demande toujours plus...
- Elle offre de nombreux problèmes de stabilité
- Elle constitue un problème mathématique fondamental



## *Quelques commentaires*

- La mécanique des fluides est une science à la fois jeune et ancienne
- Elle bénéficie à plein de l'essor du numérique
- mais en demande toujours plus...
- Elle offre de nombreux problèmes de stabilité
- Elle constitue un problème mathématique fondamental
- Peut-être connectée, notre capacité à modéliser correctement la turbulence