Consistance globale sur les intervalles avec des *domaines de consistance*.

Application à la fusion de données

Amadou Gning et Philippe Bonnifait

Heudiasyc UMR UTC/CNRS 6599
Compiègne

Introduction

- Problématique :
  - Localiser en temps réel une voiture de façon garantie
  - Des capteurs redondants (capteurs ABS + angle au volant + gyromètre …+ GPS)
- Approche basée sur l'analyse par intervalles
  - On s'intéresse à l'utilisation de la propagation de contraintes
  - On présente une nouvelle approche par **Domaine de Consistance**

PLan

- Rappels
  - Problème de satisfaction de contraintes
  - Consistance
- Domaine de consistance
  - Définition
  - Intérêt
  - Propriétés
  - Théorèmes
  - 2 exemples linéaire et non linéaire
- Application au problème de localisation
- Conclusion
- Perspectives

Problème de satisfaction de contraintes
Constraint Satisfaction Problem ou CSP

- $\mathcal{H}$: $(F(x) = 0 \mid x \in [x])$
  - [x] pavé de IR^n
  - F système de m contraintes $f_j(x) = 0, \quad j \in \{1,\ldots, m\}$
- $S = \{x \in [x] \mid F(x) = 0\}$: ensemble solution de $\mathcal{H}$
- Contracter $\mathcal{H}$:

  remplacer [x] par [x]' tel que $S \subset [x]' \subset [x]$

Problème de satisfaction de contraintes

- Projection intervalle selon une contrainte et une dimension

$$\Pi_{f_i,j}([x]) = [\{x_j \in [x_j] \mid \exists x_k \in [x_k] \text{ pour tout } k \in I\text{-}\{i\} \text{ et } (f_i(x_1 \ldots x_n) = 0)\}]$$

- Résolveur R_{f_i} pour une contrainte f_i

C'est un contracteur tel que $R_{f_i}([x])$ soit le plus grand pavé vérifiant :

$R_{f_i}([x]) \subset [x]$ *et* $R_{f_i}([x])$ *consistant avec* f_i.

- Algorithme de waltz / propagation de contraintes

Soit J = $\{j_1, \ldots, j_p\}$ ensemble d'indices de 1 à p dans un ordre quelconque.
Les contraintes sont prises consécutivement selon J :

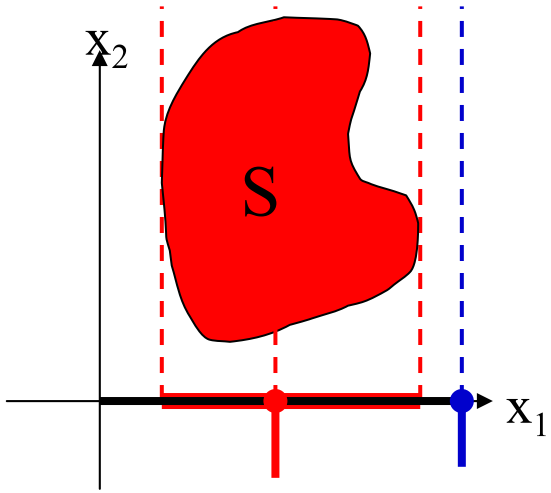
Tant que la contraction de [x] est assez grande *répéter*

$$[x] = R_{f_{j_1}}(\cdots(R_{f_{j_p}}([x]))\cdots)$$

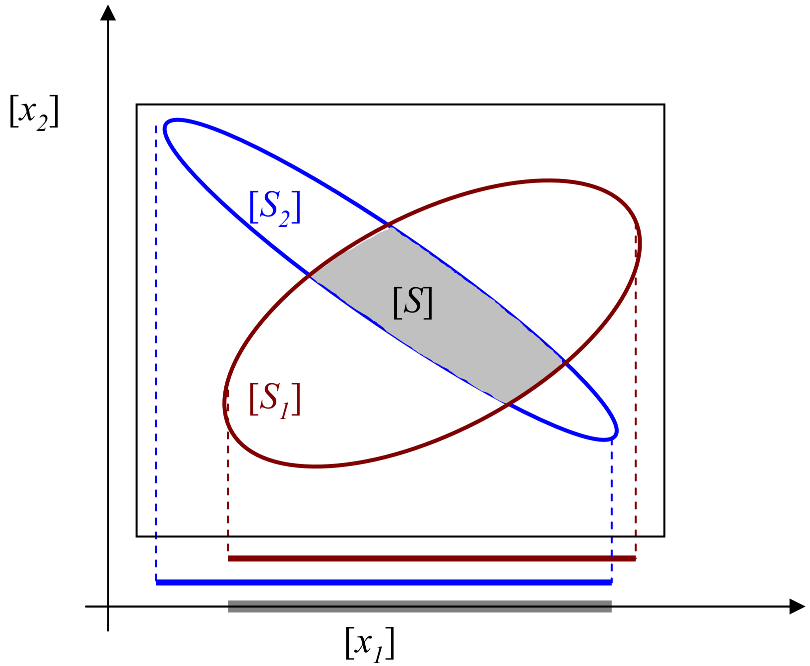
Fin tant que

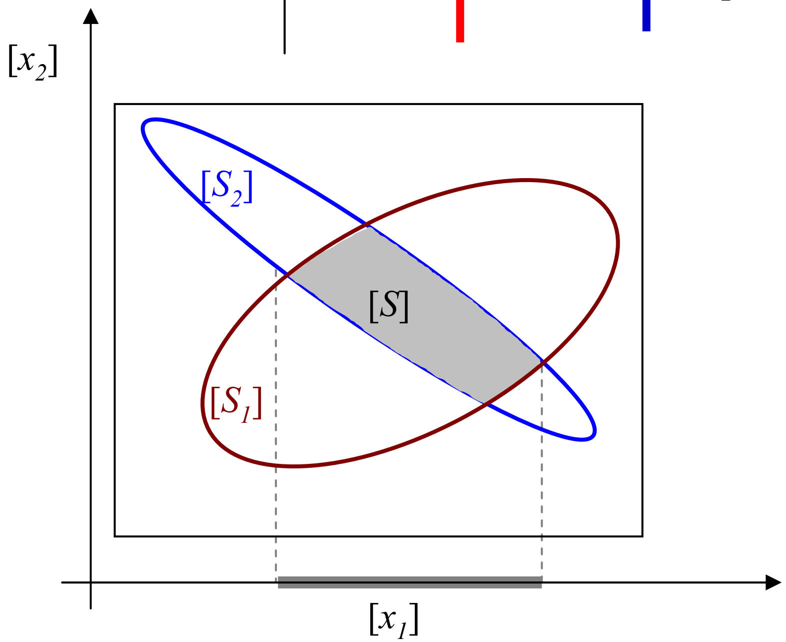
Consistance

- consistance d'un point

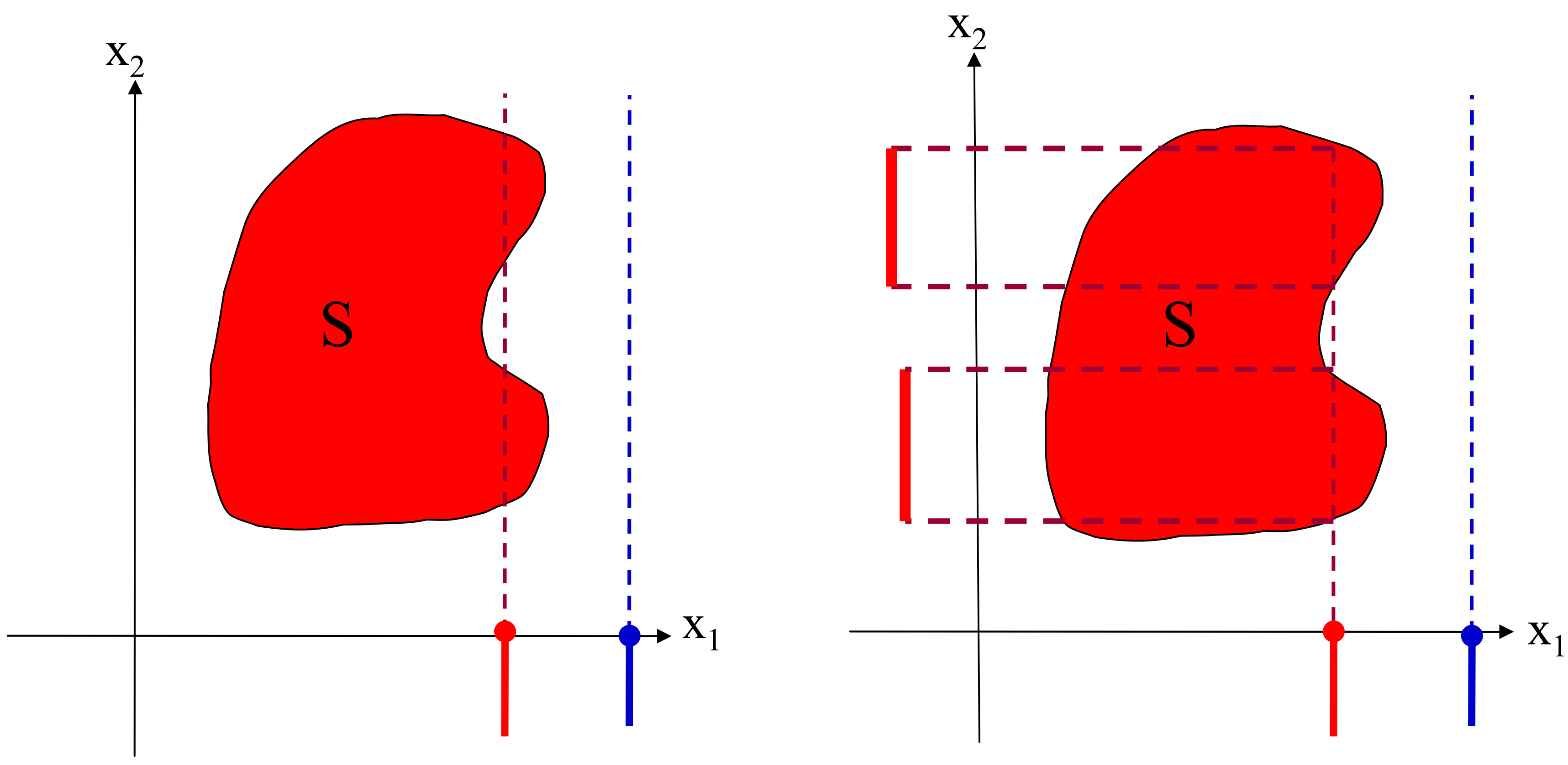


- consistance d'un intervalle





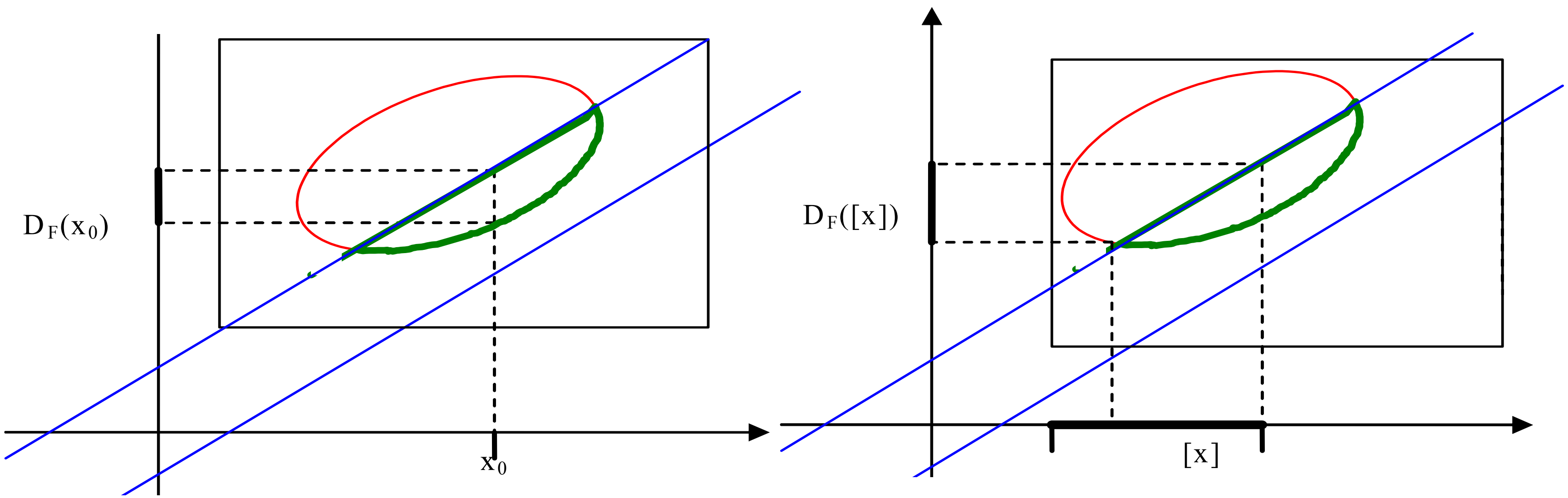
Consistance



- Rappels
  - Problème de satisfaction de contraintes
  - Consistance
- Domaine de consistance
  - Définition
  - Intérêt
  - Propriétés
  - Théorèmes
  - 2 exemples linéaire et non linéaire
- Application au problème de localisation
- Conclusion
- Perspectives

Définition des domaines de consistance

$\mathcal{H}$: ($x \in [x]$ |F(x) =0)



$D_F(x_0)$ domaine de consistance associé à la valeur x_0

$D_F([x])$ domaine de consistance associé à l'intervalle $[x]$

Définition des domaines de consistance

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$$
$$J = (1, 3, 4, 6, 7)$$
$$K = (2, 5, 8, 9)$$

$$\left.\begin{array}{r} x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) \\ J = (1, 3, 4, 6, 7) \\ K = (2, 5, 8, 9) \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_J = (x_1, x_3, x_4, x_6, x_7) \\ [x_J] = ([x_1], [x_3], [x_4], [x_6], [x_7]) \end{array}$$

- Domaine de consistance d'un sous-vecteur noté $D_F(x_J)$:

$$D_F(x_J) = \{x_K \mid F(x_J \times x_K) = 0\}$$

- Domaine de consistance d'un sous-pavé noté $D_F([x_J])$:

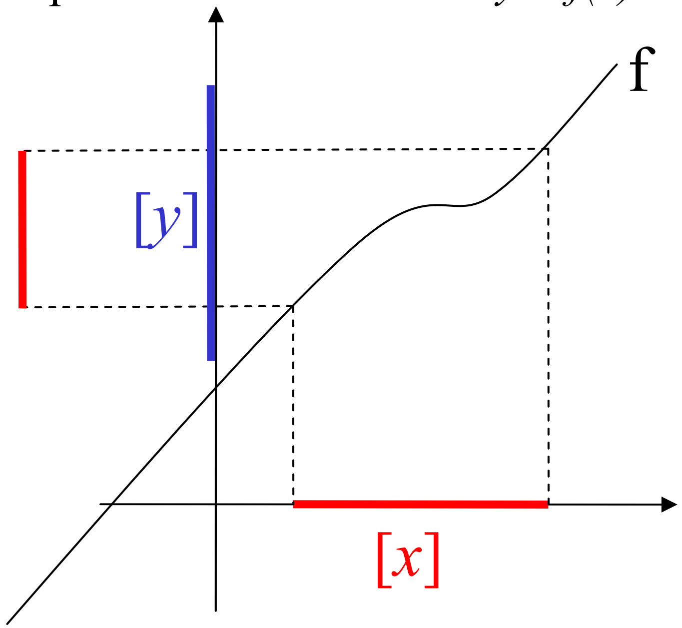
$$D_F([x_J]) = \{x_K \mid \exists\, x_J \in [x_J] \text{ et } F(x_J \times x_K) = 0\}$$

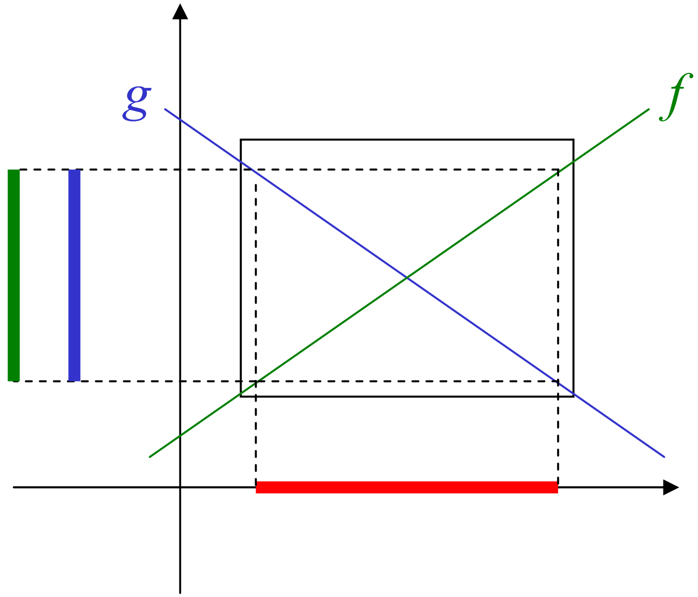
- Rappels
  - Problème de satisfaction de contraintes
  - Consistance
- Domaine de consistance
  - Définitions
  - Intérêt
  - Propriétés
  - Théorèmes
  - 2 exemples linéaire et non linéaire
- Application au problème de localisation
- Conclusion
- Perspectives

Intérêt des domaines de consistance

2 propriétés intéressantes

Exemple d'une contrainte f : $y = f(x)$





$$\left.\begin{aligned} D_f([x]) &= f([x]) \\ \Pi_f([y]) &= \big[[y] \cap f([x])\big] \end{aligned}\right\} \; \Pi_f([y]) = \big[[y] \cap D_f([x])\big]$$

$$D_F([x]) \subset D_f([x]) \cap D_g([x])$$

le calcul d'une projection utilise le calcul d'un domaine de consistance

On ré-exprime la propriété de consistance locale avec la notion de domaine de consistance

Intérêt des domaines de consistance

De façon générale pour la projection d'une contrainte f_i sur une dimension j on peut écrire

$$\prod_{f_i,j}([x]) = [x_j] \cap D_{f_i}\Big(\bigtimes_{k \in I-\{j\}} [x_k]\Big)$$

$\Updownarrow$

La projection d'une contrainte sur une dimension est équivalente à un calcul de domaine de consistance !

Intérêt des domaines de consistance

Un résolveur R_f d'une contrainte f ⇔ un produit de projection

$$R_f[x] = \mathop{\times}_{k=1}^{n}\left(\prod\nolimits_{f,k}([x])\right) \Rightarrow R_f[x] = \mathop{\times}_{k=1}^{n}\left([x_k] \cap D_{f,k}\left(\mathop{\times}_{r\in I-\{k\}}^{n}([x_r])\right)\right)$$

Algorithme de Waltz :

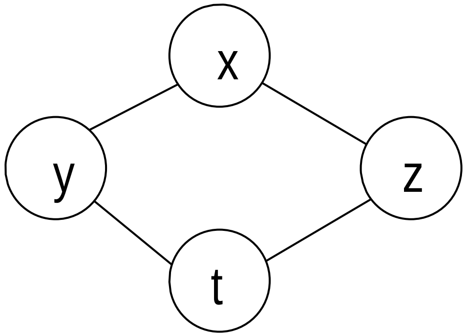
➔Tant que la contraction de [x] est assez grande :

$$[x] = R_{f_{j_1}}(\cdots(R_{f_{j_p}}([x]))\cdots)$$

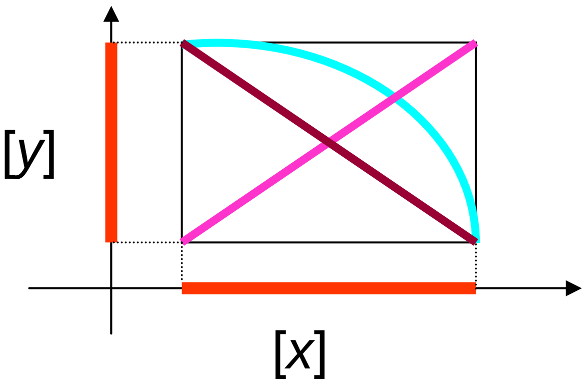
Un algorithme de Waltz s'écrit comme un calcul de domaines de consistance !

Intérêt des domaines de consistance

présence de cycles



non résolu en temps connu !
consistance locale !



consistance locale mais pas de solution !

Un algorithme de Waltz $\Leftrightarrow$ calcul de domaines de consistance de contraintes prises une à une

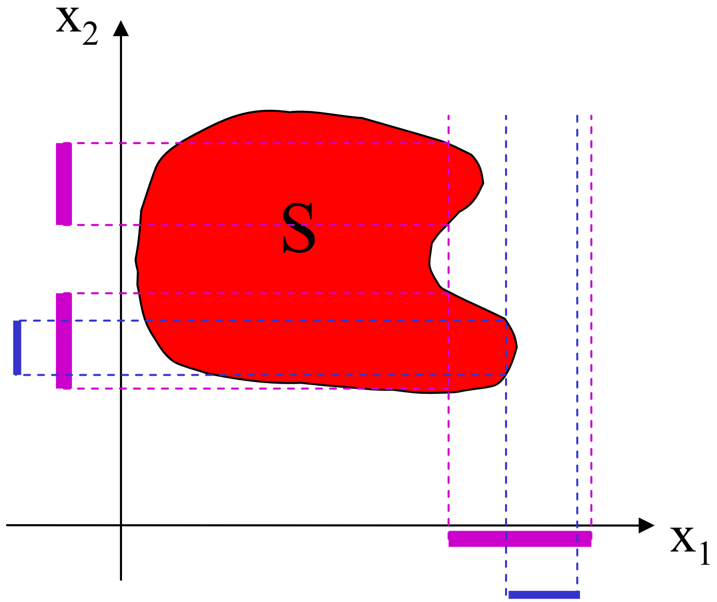
$$\text{Or } D_F([x]) \subset \bigcap_{i=1\ldots p} D_{f_i}([x])$$

On se propose d'utiliser les propriétés des domaines de consistance en présence de cycles

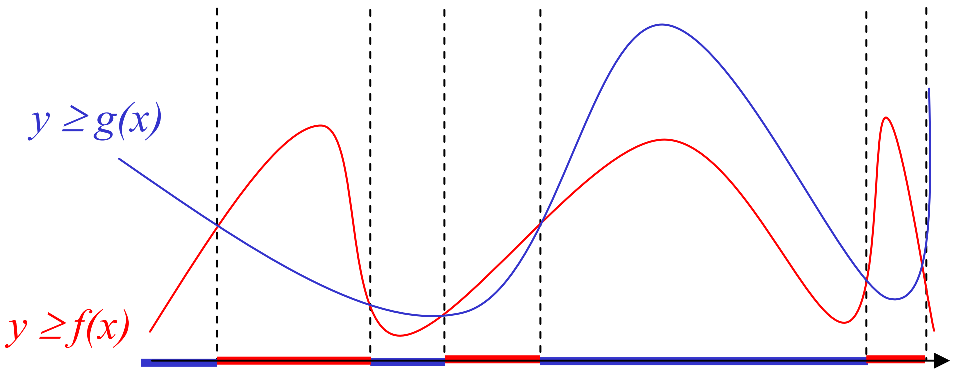
- Rappels
  - Problème de satisfaction de contraintes
  - Consistance
- Domaine de consistance
  - Définition
  - Intérêt
  - Propriétés
  - Théorèmes
  - 2 exemples linéaire et non linéaire
- Application au problème de localisation
- Conclusion
- Perspectives

Propriétés

- Monotonie : $[y] \subset [z] \Rightarrow D_F([y]) \subset D_F([z])$



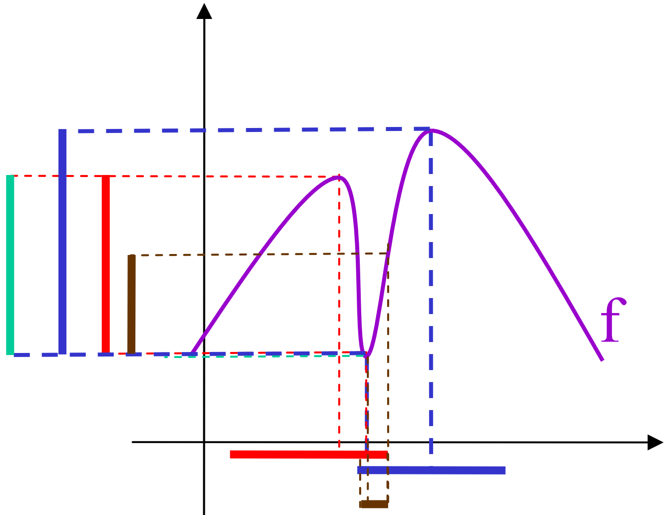
- Union :
  - $D_F([x_J]) = \bigcup_{x_J \in [x_J]} D_F(x_J).$
  - $[z] = \bigcup_{1 \le i \le p} [z_{J,i}]$ Alors $D_F([z]) = \bigcup_{1 \le i \le p} D_F([z_{J,i}])$



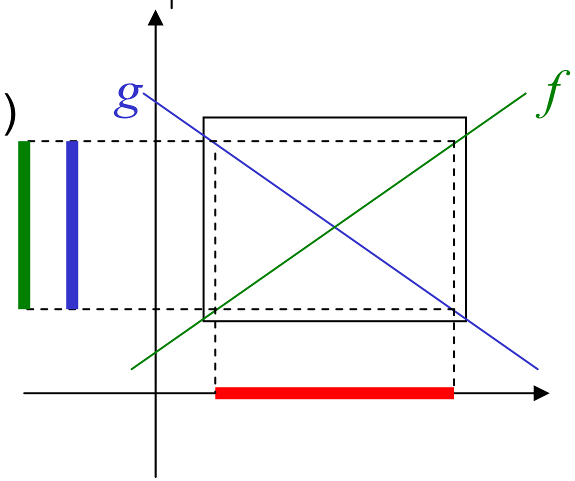
Propriétés

- <u>Intersection</u> :

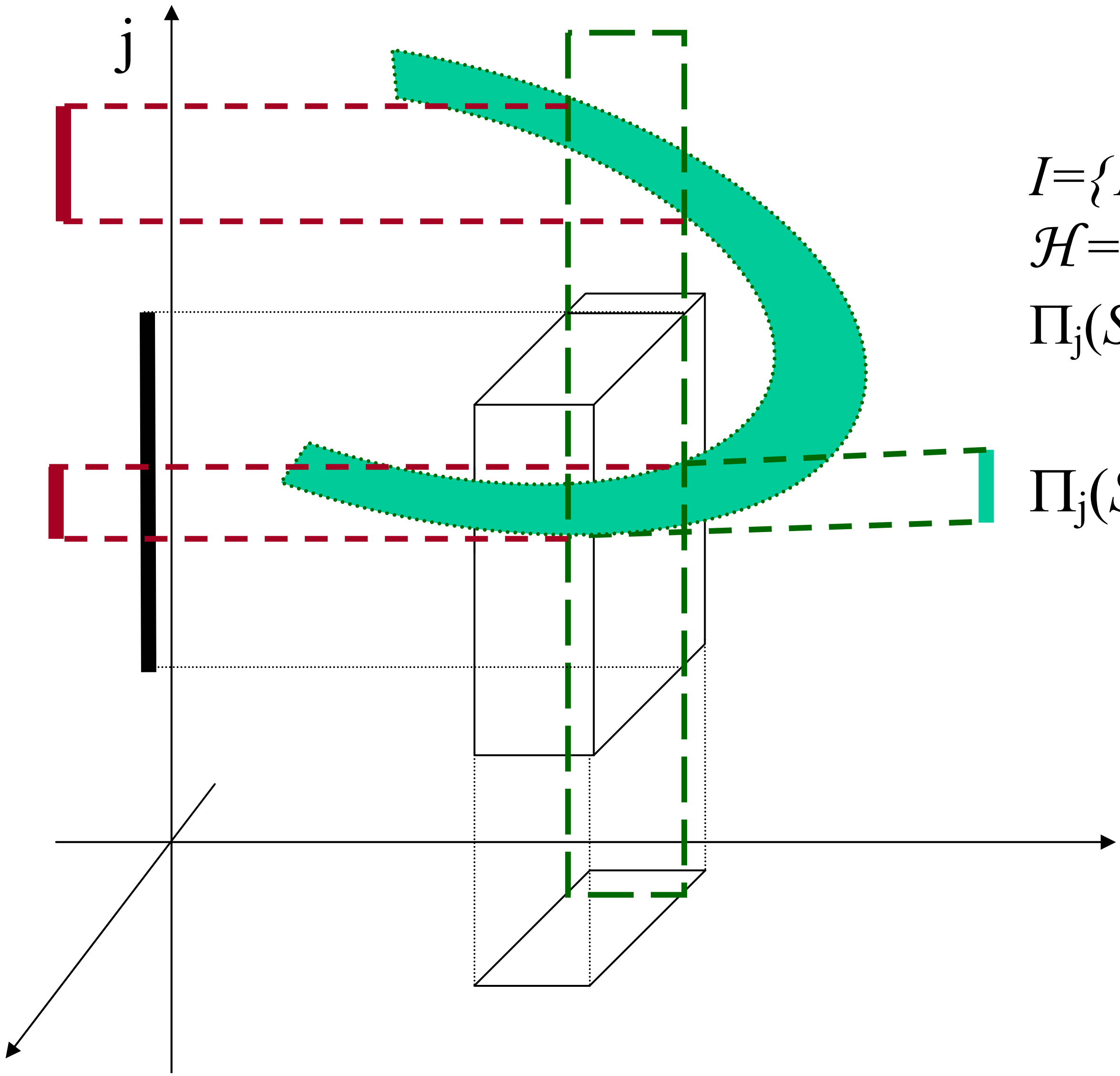
$$[z] = \bigcap_{1 \le i \le p} [z_{J,i}] \text{ alors } D_F([z]) \subset \bigcap_{1 \le i \le p} D_F([z_{J,i}])$$



- <u>Système de contraintes</u> :
  - G(x) = 0 sous-partie de F(x) = 0 $\Rightarrow$ $D_F([x_J]) \subset D_G([x_J])$
  - G(x) = 0 équivalent à F(x) = 0 $\Rightarrow$ $D_F([x_J]) = D_G([x_J])$
  - $D_F([x]) = \bigcap_{i=1\ldots p} D_{f_i}([x])$



Théorème 1: obtention du pavé globalement consistant avec le calcul de domaines de consistance



$$\left.\begin{array}{l} I=\{1\ldots n\} \\ \mathcal{H}=(F(x)=0,\ x\in[x]) \\ \Pi_j(S) \text{ projection de } S \text{ selon j} \end{array}\right\}$$

$$\Pi_j(S) = [x_j] \cap D_F\Big(\mathop{\times}_{i\in I-\{j\}} [x_i]\Big)$$

$$\Pi_j(S) = [x_j] \cap D_F(\bigtimes_{i \in I-\{j\}} [x_i])$$

Résoudre le CSP ⇔ savoir calculer pour tout j :

$$D_F(\bigtimes_{i \in I-\{j\}} [x_i])$$

Les 2 théorèmes suivants fournissent des méthodologies pour calculer ce domaine de consistance

Théorème 2 : choix judicieux de variables ponctuelles ou intervalles pour le calcul d'un domaine de consistance

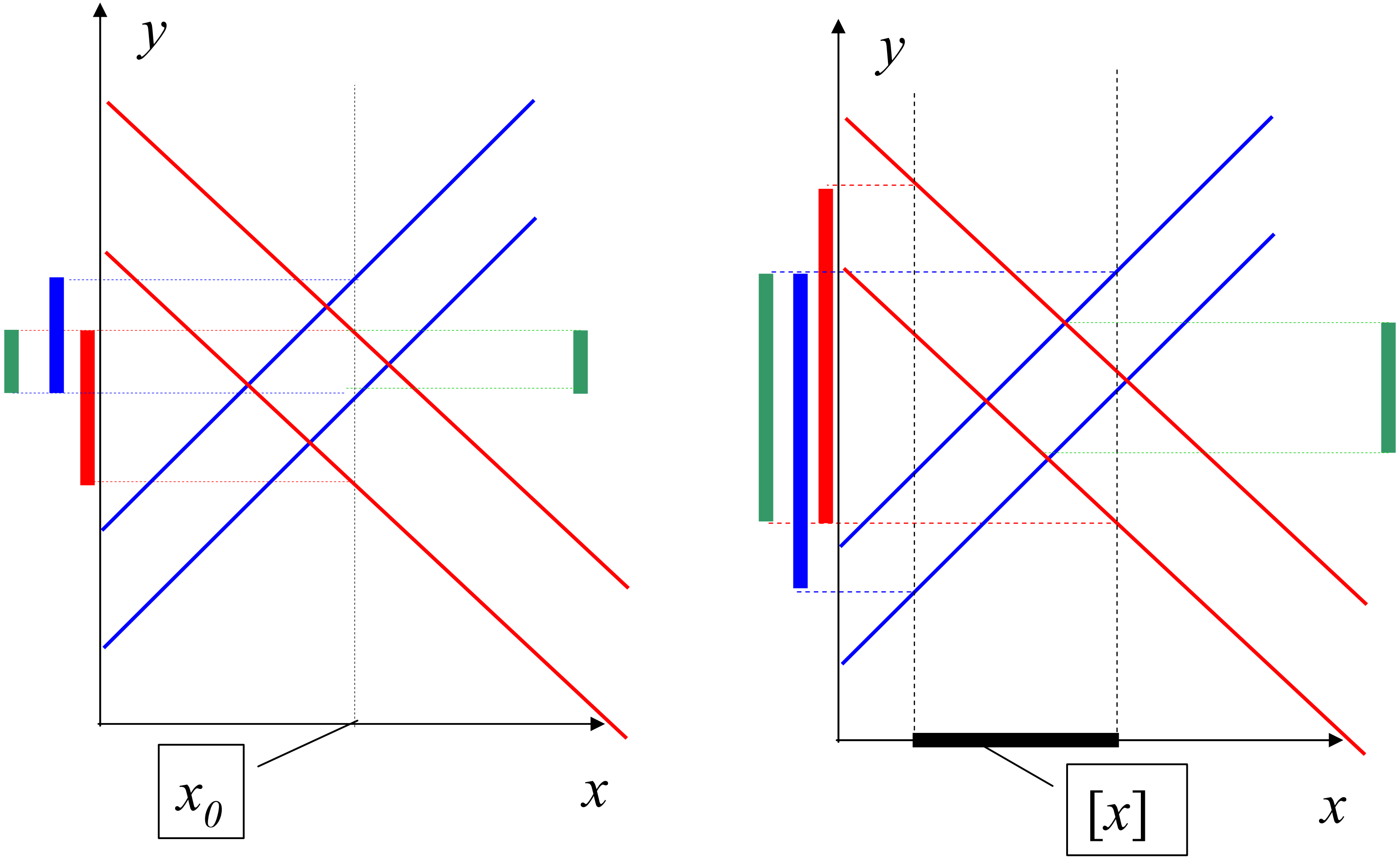
Le domaine de consistance calculé pour F est inclus dans l'intersection des domaines de consistances calculés avec les f_i : $D_F([x]) \subset \bigcap_{i=1\dots p} D_{f_i}([x])$

x_J^{1-} composantes de x_J apparaissant une fois au plus

x_J^{1+} composantes de x_J apparaissant deux fois au moins

➔ $D_F([x_J^{1-}] \times x_J^{1+}) = \bigcap_{i=1\dots p} D_{f_i}([x_J^{1-}] \times x_J^{1+})$

Théorème 2 : illustration



Théorème 3 : simplification du calcul de domaines de consistance en présence de cycles

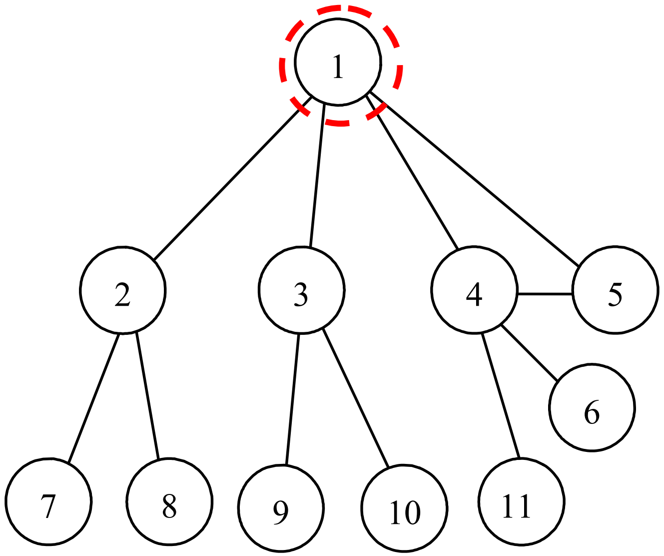
Pour $j \in 1 \dots n$: calcul de $D_F(\underset{i \in I-\{j\}}{\times}[x_i])$

➔ on traite en 2 sous-parties :

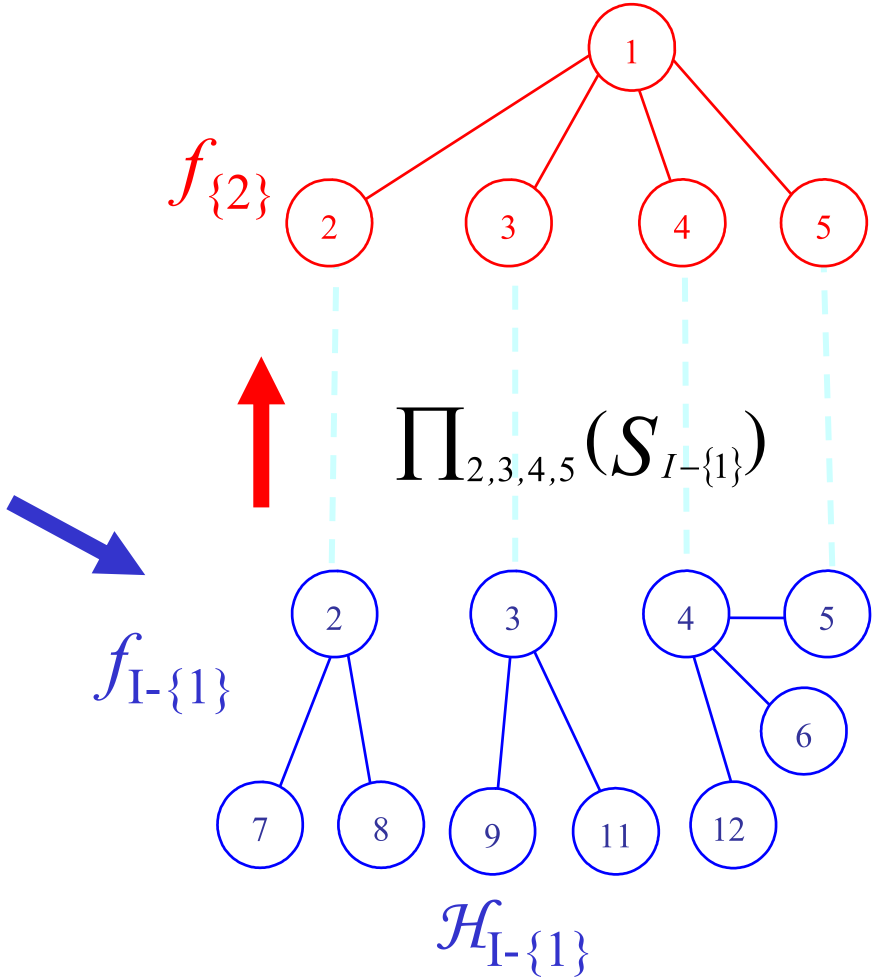
- ✓ Un nouveau CSP sans la variable x_j
  - $f_{I-\{j\}}$ contraintes F indépendantes de x_j
  - $\mathcal{H}_{I-\{j\}} = (f_{I-\{j\}}(y) = 0, y \in \underset{i \in I-\{j\}}{\times}[x_i])$
  - $S_{I-\{j\}}$ l'ensemble solution du CSP $\mathcal{H}_{I-\{j\}}$
- ✓ $f_{\{j\}}$ relie x_j uniquement aux q variables d'indices $j_1, \dots, j_q$ ($q \le n$)

$$\rightarrow D_F(\underset{i \in I-\{j\}}{\times}[x_i]) = D_{f_{\{j\}}}(\Pi_{j_1 \dots j_q}(S_{I-\{j\}}))$$

Théorème 3 : illustration



$$calcul \quad de \quad D_F(\times_{i \in I - \{1\}}[x_i])$$

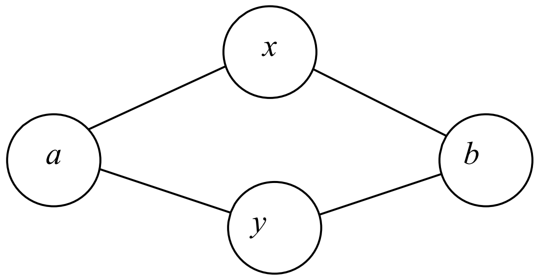


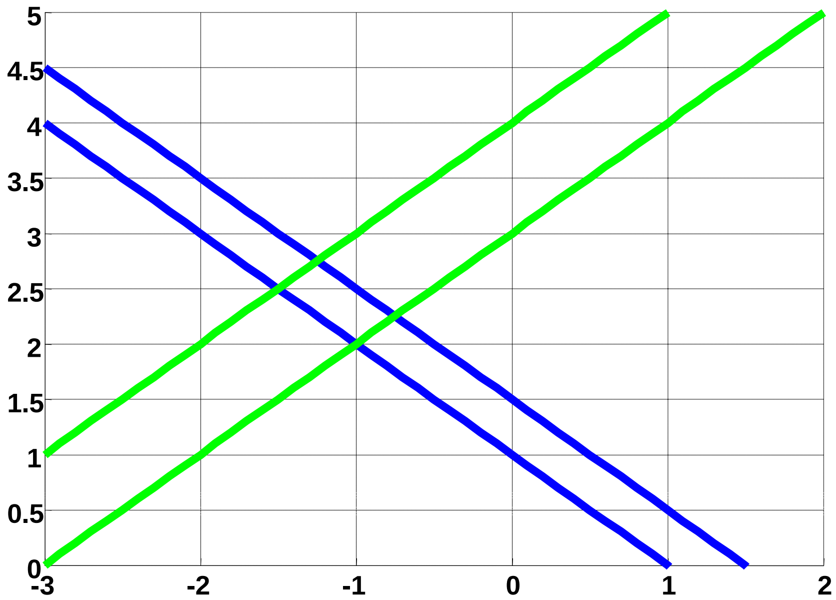
- Rappels
  - Problème de satisfaction de contraintes
  - Consistance
- Domaine de consistance
  - Définition
  - Intérêt
  - Propriétés
  - Théorèmes
  - 2 exemples linéaire et non linéaire
- Application au problème de localisation
- Conclusion
- Perspectives

Exemple linéaire

$\mathcal{H}$ =(F(a, b, x, y) = 0 | $(a \times b \times x \times y) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$)

où F: $\begin{cases} y + x = a \\ y - x = b \end{cases}$





Exemple linéaire

$X = (a, b, x, y)$

Calculons par exemple $\Pi_4(S)$

<u>Théorème 1</u> : On utilise : $\Pi_4(S) = [y] \cap D_F([a]\times[b]\times[x])$

<u>Théorème 2</u> : x apparaît 2 fois

➔ on calcule $D_F([a]\times[b]\times x)$ avec l'intersection des domaines de consistance des contraintes prises séparément

Exemple linéaire

– <u>Étape 1</u> :expression de $D_F([a]\times[b]\times x)$ pour un $x \in [x]$

$$D_F([a]\times[b]\times x) = D_{f1}([a]\times[b]\times x) \cap D_{f2}([a]\times[b]\times x)$$

$$= ([a]-x)\cap([b]+x)$$

$$\begin{aligned} y + x &= a \\ y - x &= b \end{aligned}$$

$$= [a_1-x, a_2-x] \cap [b_1+x, b_2+x]$$

$$= [\mathrm{Sup}(a_1-x, b_1+x), \mathrm{Inf}(a_2-x, b_2+x)]$$

$$D_F([a]\times[b]\times[x]) = \bigcup_{x\in[x]} D_F([a]\times[b]\times x)$$

Exemple linéaire

– Étape 2 : évaluation des bornes en fonction de x

$$\Delta(x) = (a-x)-(x+b) = a-b-2x$$

On cherche à utiliser la propriété :

$$[z] = \bigcup_{1 \le i \le p} [z_{J,i}] \text{ Alors } D_F([z]) = \bigcup_{1 \le i \le p} D_F([z_{J,i}])$$

Notons $x_{ab} = \dfrac{a-b}{2}$

	$]-\infty, x_{ab}]$	$[x_{ab}, +\infty[$
$\Delta(x)$	>0	<0
$\mathrm{Sup}\{a-x, b+x\}$	$a-x$	$b+x$
$\mathrm{Inf}\{a-x, b+x\}$	$b+x$	$a-x$

Exemple linéaire

	$]-\infty, x_{a,b}]$	$[x_{a,b}, +\infty[$
$\Delta(x)$	>0	<0
$\mathrm{Sup}\{a-x, b+x\}$	$a-x$	$b+x$
$\mathrm{Inf}\{a-x, b+x\}$	$b+x$	$a-x$

$x_{a_1,b_1} \leq x_{a_2,b_2}$

	$P_1 =]-\infty, x_{a_1,b_1}]$	$P_2 = [x_{a_1,b_1}, x_{a_2,b_2}]$	$P_3 = [x_{a_2,b_2}, +\infty[$
$\mathrm{Sup}\{a_1-x, b_1+x\}$	a_1-x	b_1+x	b_1+x
$\mathrm{Inf}\{a_2-x, b_2+x\}$	b_2+x	b_2+x	a_2-x
$D_F([a]\times[b]\times x)$	$[a_1-x, b_2+x]$	$[b_1+x, b_2+x]$	$[b_1+x, a_2-x]$

➔ 3 secteurs (P_1, P_2, P_3) où les bornes de $D_F([a]\times[b]\times x)$ sont connues

Exemple linéaire

– Étape 3: calcul de $D_F([a]\times[b]\times[x])$ connaissant $D_F([a]\times[b]\times x)$ $\forall x$

$$[x] = \bigcup_{i=1,2,3} [x]\cap P_i \Rightarrow$$

$$[a]\times[b]\times[x] = \bigcup_{i=1,2,3} [a]\times[b]\times([x]\cap P_i) = \bigcup_{i=1,2,3} \bigcup_{x\in[x]\cap P_i} ([a]\times[b]\times x)$$

$$D_F([a]\times[b]\times[x]) = \bigcup_{i=1,2,3} \bigcup_{x\in[x]\cap P_i} D_F([a]\times[b]\times x)$$

→ Pour P_1 on a : $\bigcup_{x\in[x]\cap P_1} D_F([a]\times[b]\times x) = \bigcup_{x\in[x]\cap P_1} [a_1-x, b_2+x]$

! Union d'intervalles propres et impropres!
Eviter : $[4\ 1] \cup [5\ 6] = [4\ 6]$

Exemple linéaire

→ Pour P_1 :

$$\bigcup_{x\in[x]\cap P_1} D_F([a]\times[b]\times x) = \bigcup_{x\in[x]\cap P_1} [a_1-x,\ b_2+x]$$

	$]-\infty, x_{a,b}]$	$[x_{a,b}, +\infty[$
$\Delta(x)$	>0	<0
$\mathrm{Sup}\{a-x, b+x\}$	$a-x$	$b+x$
$\mathrm{Inf}\{a-x, b+x\}$	$b+x$	$a-x$

Les intervalles se trouvant dans cette réunion sont vides selon la position de x par rapport à x_{a_1,b_2}

i.e. $[a_1-x,\ b_2+x] = \phi \Leftrightarrow x \in\ ]-\infty, x_{a_1,b_2}]$

Notons $P_{1,S} = P_1 \cap [x_{a_1,b_2}, +\infty[$

$$\bigcup_{x\in[x]\cap P_1} D_F([a]\times[b]\times x) = \bigcup_{x\in[x]\cap P_{1,S}} D_F([a]\times[b]\times x)$$

$$= [\,Inf_{x\in[x]\cap P_{1,S}}\{a_1-x\},\ Sup_{x\in[x]\cap P_{1,S}}\{b_2+x\}\,]$$

Exemple linéaire

$$\bigcup_{x\in[x]\cap P_1} D_F([a]\times[b]\times x) = [Inf_{x\in[x]\cap P_{1,S}}\{a_1-x\},\ Sup_{x\in[x]\cap P_{1,S}}\{b_2+x\}]$$

Notons $[x] \cap P_{1,S} = [\underline{x}_{P_1}, \overline{x}_{P_1}]$, on a du fait de la monotonie des fonctions b_2+x et a_2-x :

$$\bigcup_{y\in[y]\cap P_1} D_F([a]\times[b]\times[x]) = [a_1-\overline{x}_{P_1},\ b_2+\overline{x}_{P_1}].$$

On tient le même raisonnement pour P_2 et P_3 pour obtenir des ensembles $P_{2,S}$ et $P_{3,S}$

	$P_1 =]-\infty, x_{a_1,b_1}]$	$P_2 = [x_{a_1,b_1}, x_{a_2,b_2}]$	$P_3 = [x_{a_2,b_2}, +\infty[$
$D_F([a]\times[b]\times[x])$	$[a_1-\overline{x}_{P_1}, b_2+\overline{x}_{P_1}]$	$[b_1+\underline{x}_{P_2}, b_2+\overline{x}_{P_2}]$	$[b_1+\underline{x}_{P_3}, a_2-\underline{x}_{P_3}]$

➔ 3 secteurs ($P_{1,S}$, $P_{2,S}$, $P_{3,S}$) où $D_F([a]\times[b]\times[x])$ connus

Exemple linéaire

Algorithme solveCD(y) : input([a], [b], [x], [y]), output([y])

$x_{a_1,b_1} = \frac{a_1 - b_1}{2}$, $x_{a_2,b_2} = \frac{a_2 - b_2}{2}$, $x_{a_2,b_1} = \frac{a_2 - b_1}{2}$, $x_{a_1,b_2} = \frac{a_1 - b_2}{2}$

$P_1 =]-\infty, \min(x_{a_1,b_1}, x_{a_2,b_2})]$, $P_2 = [\min(x_{a_1,b_1}, x_{a_2,b_2}), \max(x_{a_1,b_1}, x_{a_2,b_2})]$, $P_3 = [\max(x_{a_1,b_1}, x_{a_2,b_2}), +\infty[$

$P_{1,S} = P_1 \cap [x_{a_1,b_2}, +\infty[$, $P_{2,S} = P_2$, $P_{3,S} = P_3 \cap]\infty, x_{a_2,b_1}]$

$[x_{P_1}] = [x] \cap P_{1,S}$, $[x_{P_2}] = [x] \cap P_{2,S}$, $[x_{P_3}] = [x] \cap P_{3,S}$

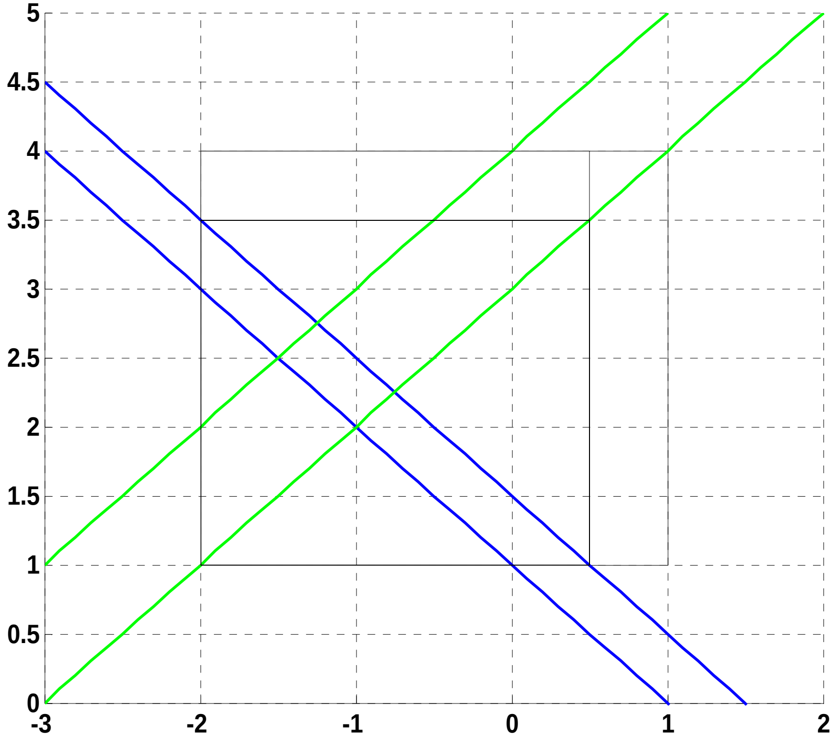
if $[x_{P_1}] \neq \phi$, $[y_{S_1}] = [y] \cap [a_1 - \overline{x}_{p_1}, b_2 + \overline{x}_{p_1}]$ else $[y_{S_1}] = \phi$ end
if $(x_{a_1,b_1} < x_{a_2,b_2})$
 if $[x_{P_1}] \neq \phi$, $[y_{S_2}] = [y] \cap [b_1 + \underline{x}_{P_2}, b_2 + \overline{x}_{p_2}]$ else $[y_{S_2}] = \phi$ end
else
 if $[x_{P_1}] \neq \phi$, $[y_{S_2}] = [y] \cap [a_1 - \underline{x}_{P_2}, a_2 - \overline{x}_{p_2}]$ else $[y_{S_2}] = \phi$ end
end
if $[x_{P_2}] \neq \phi$, $[y_{S_3}] = [y] \cap [b_1 + \underline{x}_{P_3}, a_2 - \underline{x}_{P_3}]$ else $[y_{S_3}] = \phi$ end

Calcul de domaines de consistance

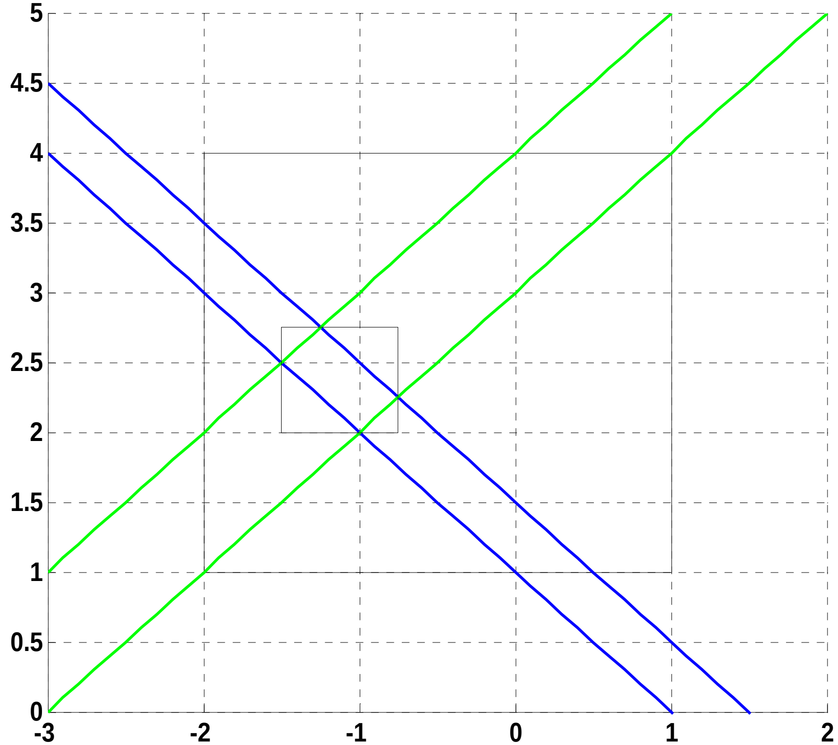
$[y] = [[y] \cap ([y_{S_1}] \cup [y_{S_2}] \cup [y_{S_3}])]$.

Comparaison des contractions obtenues

Waltz



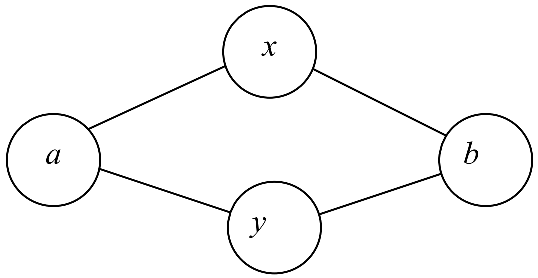
Domaines de consistance

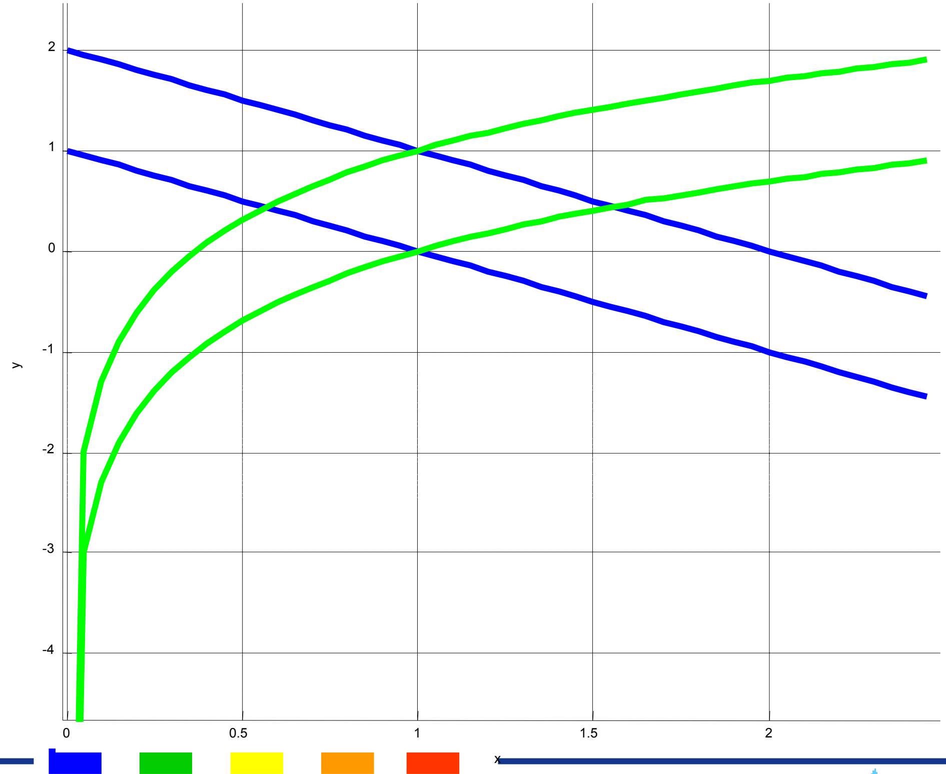


Exemple non linéaire

$\mathcal{H}$ =(F(a, b, x, y) = 0 | $(a \times b \times x \times y) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$)

où F: $\begin{cases} y + x = a \\ y - \ln(x) = b \end{cases}$

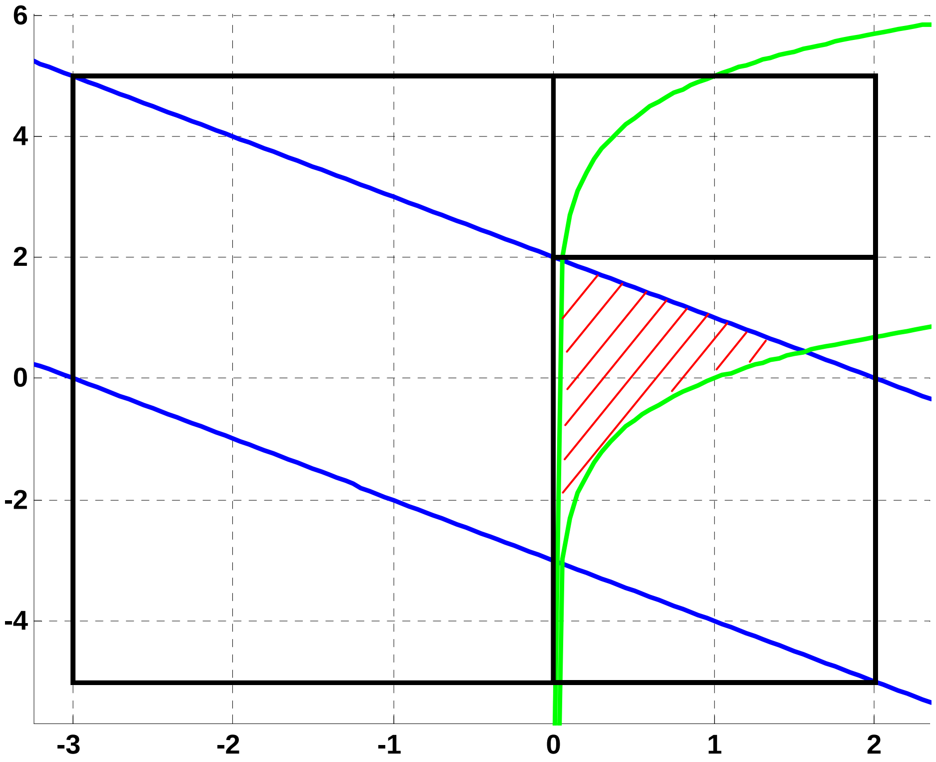




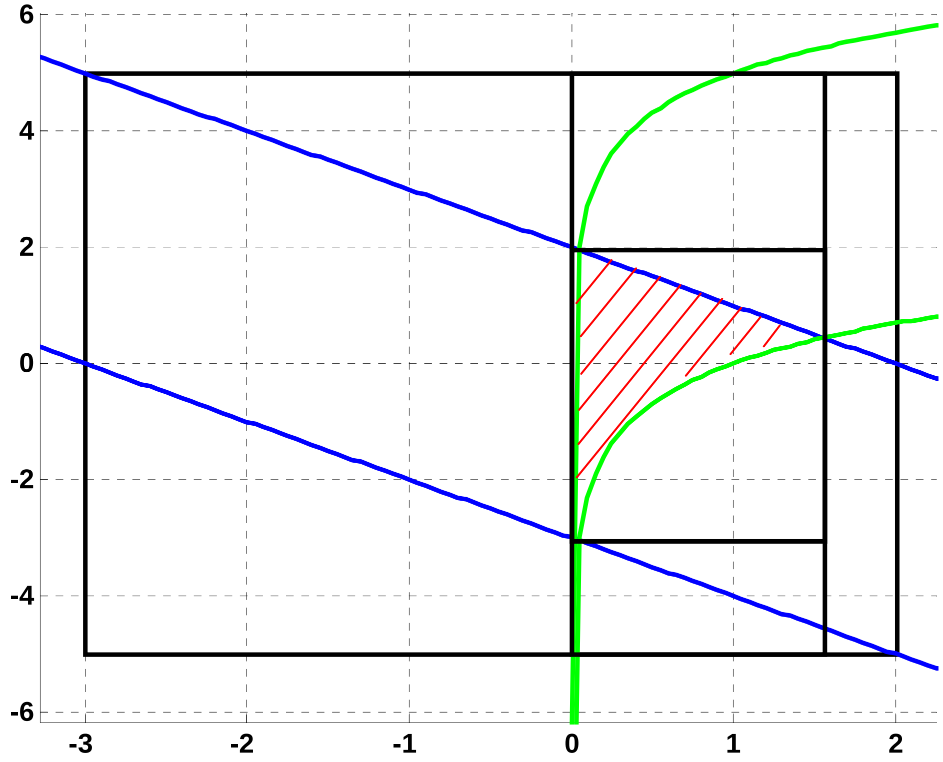
Exemple non linéaire

Avec le même raisonnement

Waltz



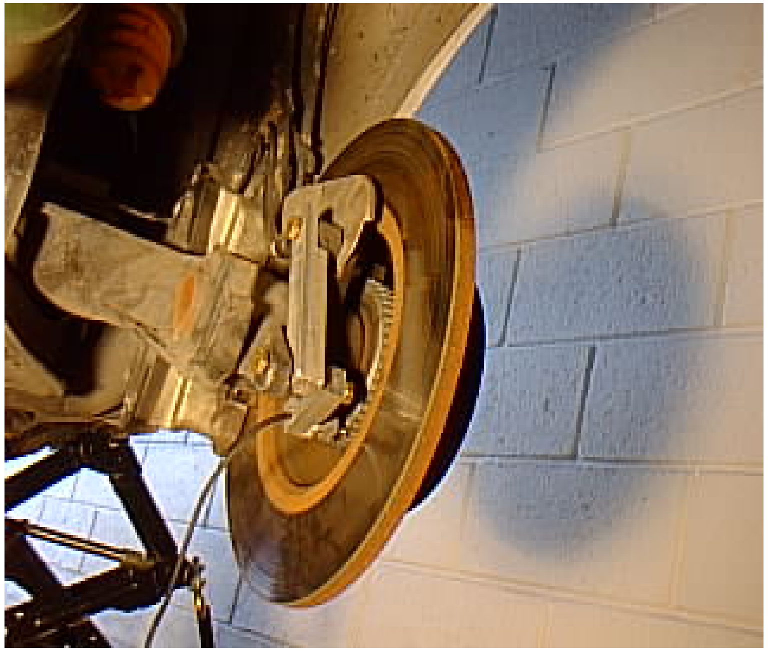
Domaines de consistance



PLan

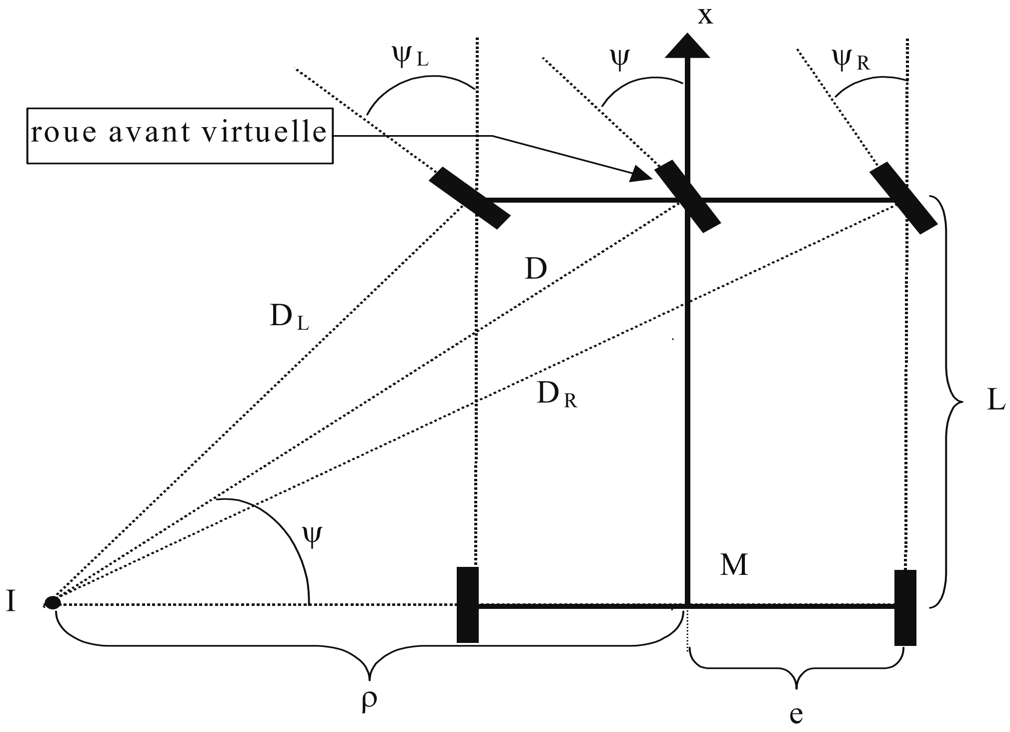
- Rappels
  - Problème de satisfaction de contraintes
  - Consistance
- Domaine de consistance
  - Définition
  - Intérêt
  - Propriétés
  - Théorèmes
  - 2 exemples linéaire et non linéaire
- Application au problème de localisation
- Conclusion
- Perspectives

Résultats sur des données réelles

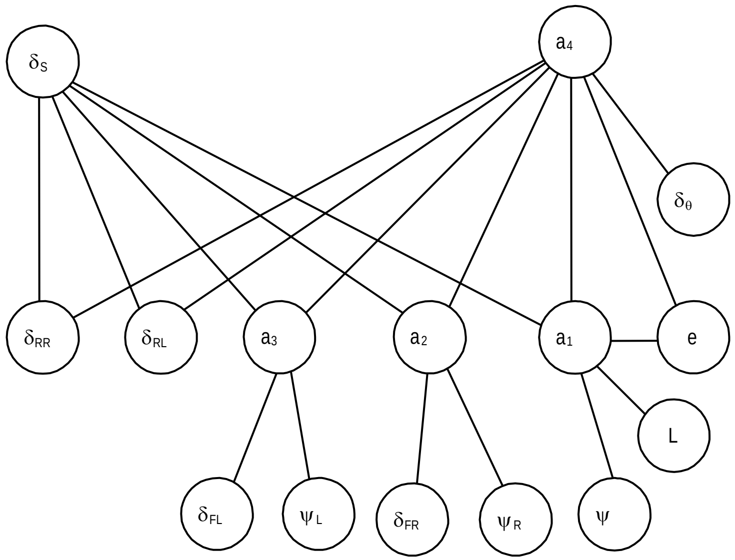


Fusion des données des 4 ABS et de l'angle au volant

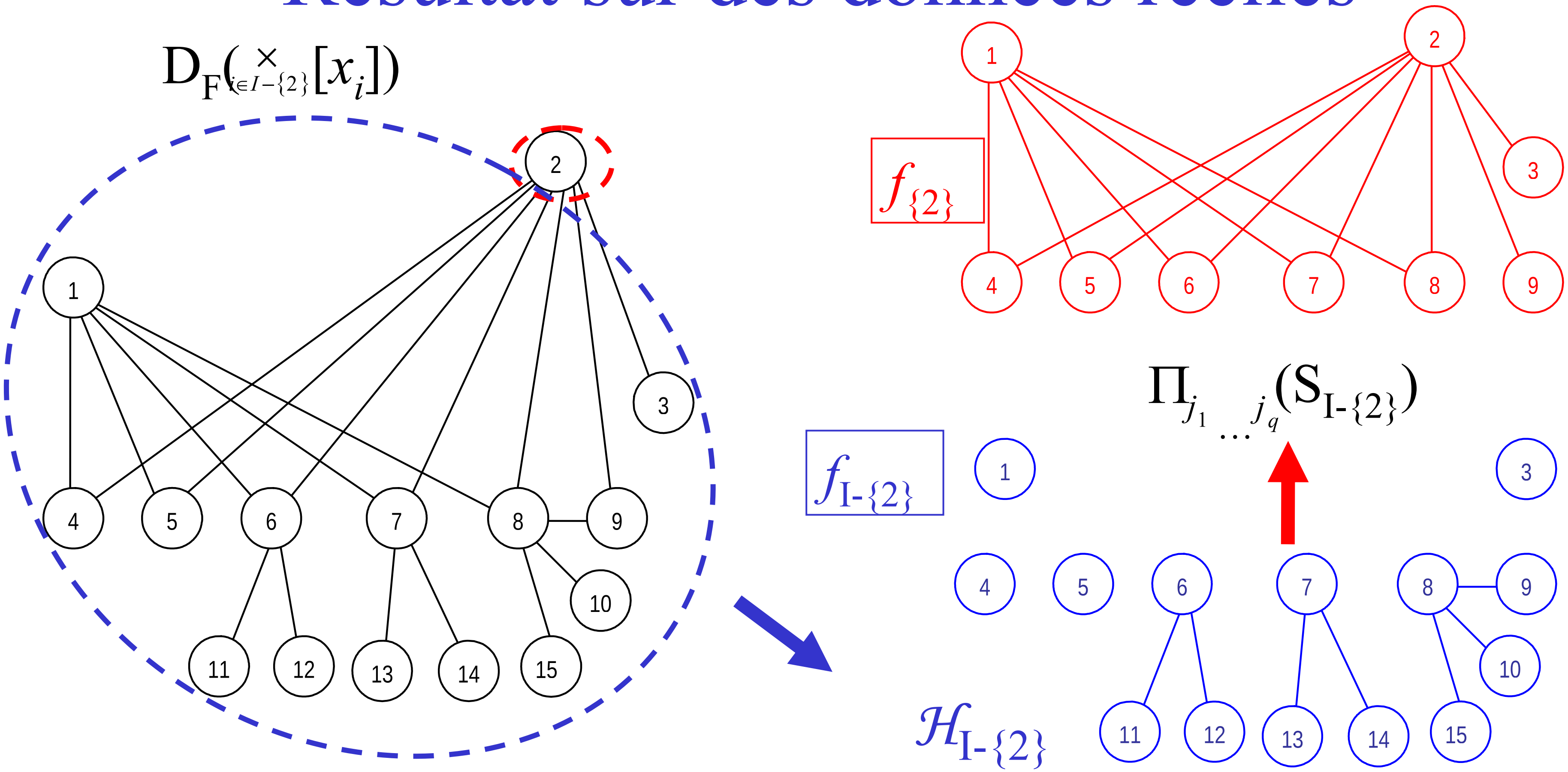
Résultat sur des données réelles



$$
\begin{cases}
\tan(\psi) = L.\dfrac{\delta_\theta}{\delta_S} = L.\dfrac{e\cdot\delta_\theta}{e\cdot\delta_S} \\
\delta_{RL} = \delta_S - e.\delta_\theta \\
\delta_{RR} = \delta_S + e.\delta_\theta \\
\delta_{FL}.\cos(\psi_L) = \delta_S - e.\delta_\theta \\
\delta_{FR}.\cos(\psi_R) = \delta_S + e.\delta_\theta
\end{cases}
$$

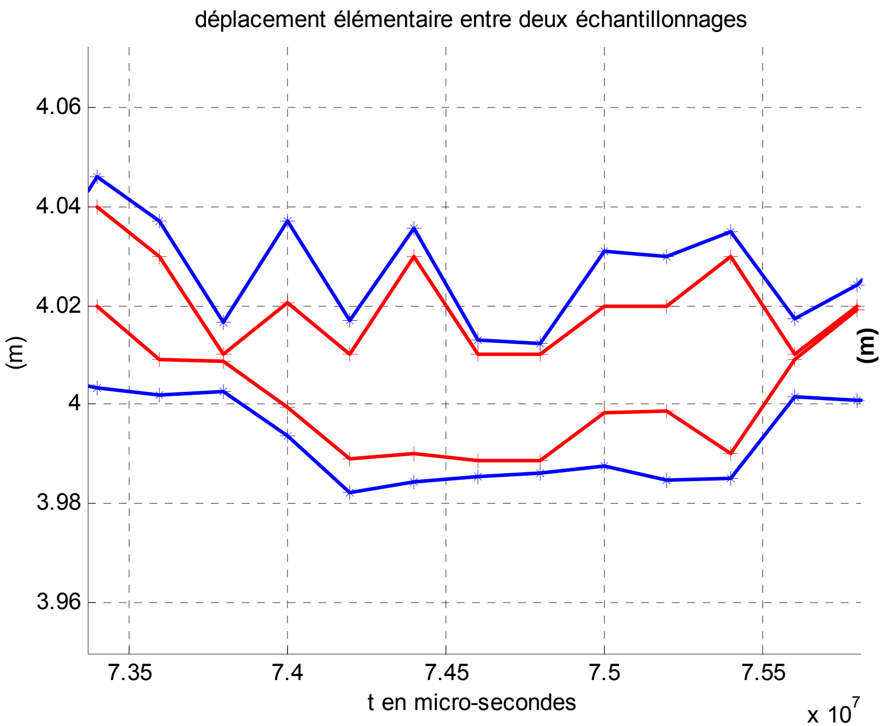


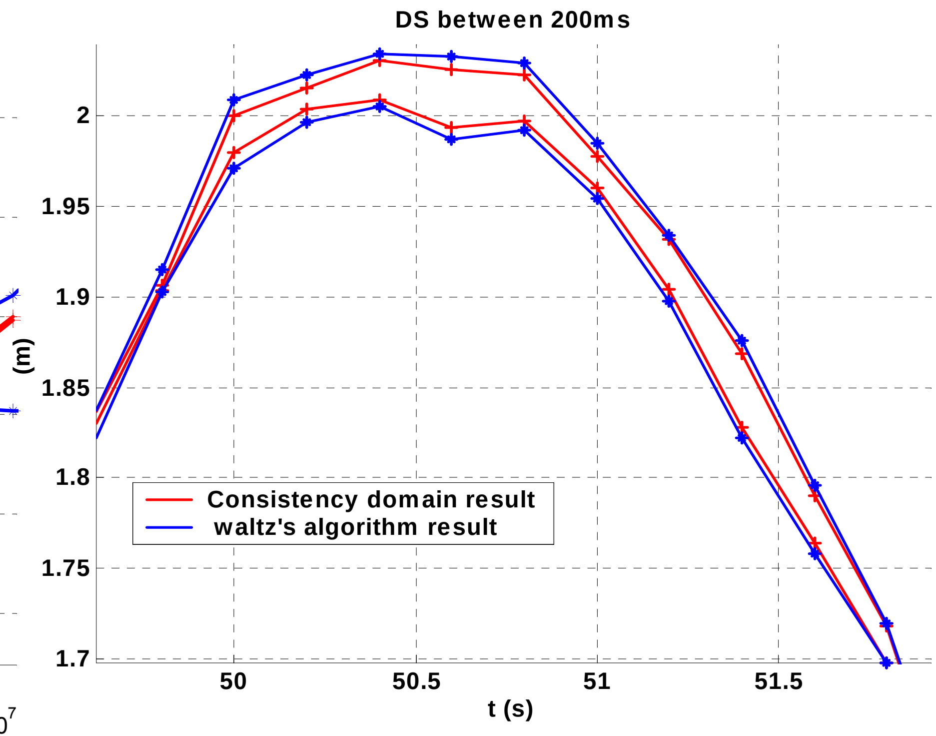
Résultat sur des données réelles



Raisonnements similaires à l'exemple traité avec un recours au théorème 3 en surcroît

Résultat sur des données réelles



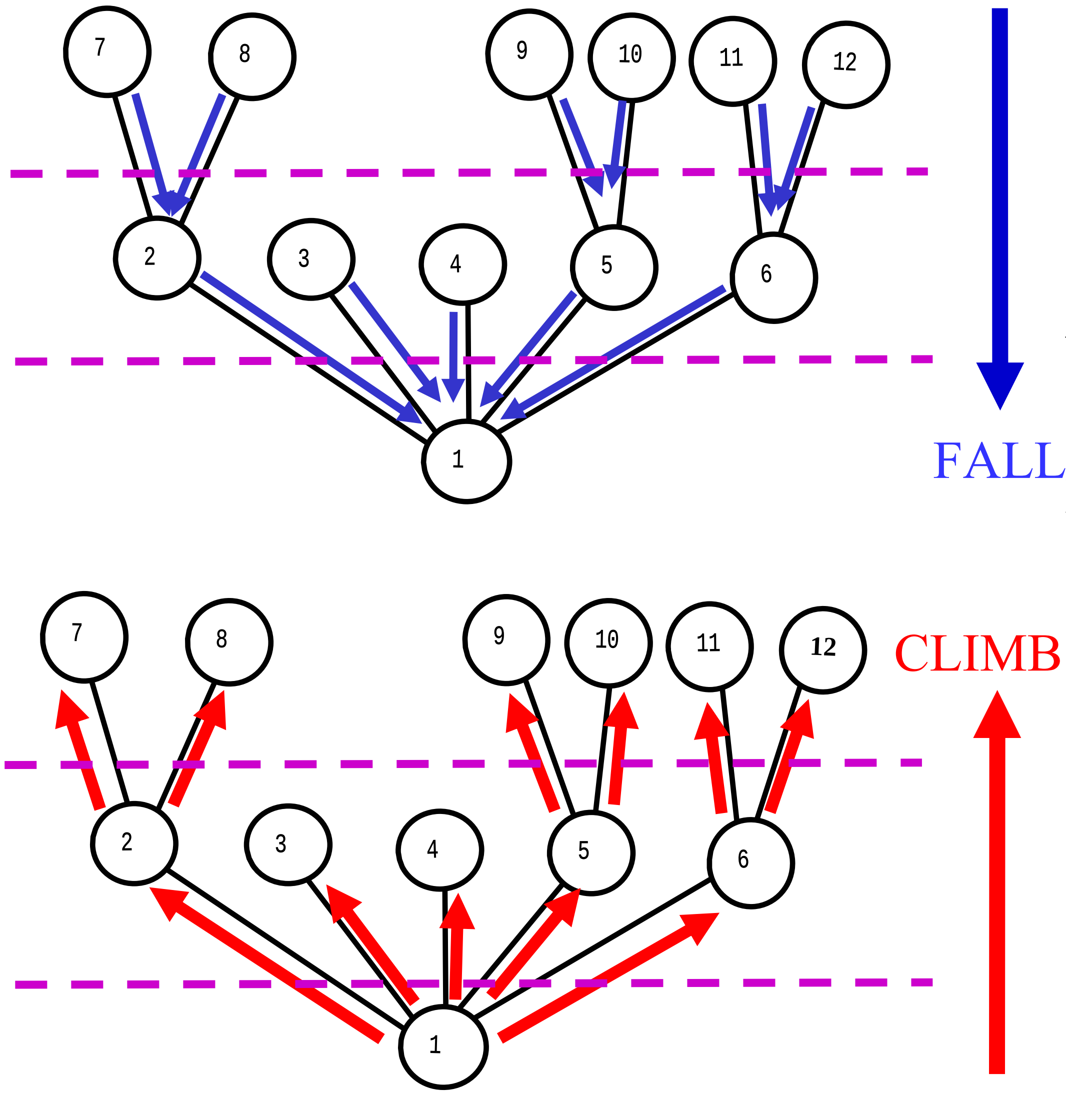


Conclusion

- Contribution théorique : approche par domaines de consistance
  - permet de traiter les cycles en un temps connu
  - Atteint la consistance globale
  - On ne sait pas comment la rendre automatisable / on est pas dans une optique de solveur
- Indépendance vis-à-vis des non-linéarités
- Validation sur des données réelles
- Dans notre problème, on est plutôt confronté à des inconsistances de capteurs

perspectives

- Essayer d'identifier la classe des cycles, la classe des contraintes pour lesquelles le calcul sur les domaines de consistance est faisable
- La propriété d'un graphe structuré en arbre ➔ vectorisation



Non prise en compte compte d'une structure d'arbre : risque de parcourir $2\times(l-1)+1$ avec un algorithme de type Waltz au lieu d'1 tour