

Analyse des systèmes à retards: Application du calcul par intervalles

Michaël Di Loreto

IRCCyN, CNRS UMR-6597,
Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes,
Ecole des Mines de Nantes, 44321 Nantes,
France.

`Michael.Di-Loreto@irccyn.ec-nantes.fr`

GDR Méthodes Ensemblistes pour l'Automatique, Jeudi 3 Février 2005

systemes à retards

systemes à retards

- classe de systemes de dimension infinie.
- systeme dont l'état à un instant $t \in \mathbb{R}$ donné, dépend de son évolution sur une période finie passée.

systemes à retards

- classe de systèmes de dimension infinie.
- système dont l'état à un instant $t \in \mathbb{R}$ donné, dépend de son évolution sur une période finie passée.

exemples (Niculescu, Kolmanovskii, Hale)

- phénomènes de transports et de communications
- dynamiques des populations (reproduction, extinction, développement)
- systèmes économiques (évolution des marchés financiers, fluctuations des prix, politique d'investissement, ...)
- propagations physiques
- systèmes biologiques et physiologiques.

systemes de representation

systemes de representation

- équation différentielle sur un espace abstrait linéaire de dimension infinie (Curtain & Schwartz, Kolmanovskii, Rabah)

systemes de representation

- équation différentielle sur un espace abstrait linéaire de dimension infinie (Curtain & Schwartz, Kolmanovskii, Rabah)
- équation différentielle fonctionnelle: évolution dans un espace de dimension finie, ou dans un espace fonctionnel (Niculescu, Partington)

systemes de representation

- équation différentielle sur un espace abstrait linéaire de dimension infinie (Curtain & Schwartz, Kolmanovskii, Rabah)
- équation différentielle fonctionnelle: évolution dans un espace de dimension finie, ou dans un espace fonctionnel (Niculescu, Partington)
- équation différentielle sur un anneau d'operateur (Kamen, Hautus, Conte & Perdon)

systèmes de représentation

- équation différentielle sur un espace abstrait linéaire de dimension infinie (Curtain & Schwartz, Kolmanovskii, Rabah)
- équation différentielle fonctionnelle: évolution dans un espace de dimension finie, ou dans un espace fonctionnel (Niculescu, Partington)
- équation différentielle sur un anneau d'opérateur (Kamen, Hautus, Conte & Perdon)

distinction de 2 classes différentes

systèmes de représentation

- équation différentielle sur un espace abstrait linéaire de dimension infinie (Curtain & Schwartz, Kolmanovskii, Rabah)
- équation différentielle fonctionnelle: évolution dans un espace de dimension finie, ou dans un espace fonctionnel (Niculescu, Partington)
- équation différentielle sur un anneau d'opérateur (Kamen, Hautus, Conte & Perdon)

distinction de 2 classes différentes

- équation fonctionnelle différentielle retardée (RFDE)

systemes de representation

- équation différentielle sur un espace abstrait linéaire de dimension infinie (Curtain & Schwartz, Kolmanovskii, Rabah)
- équation différentielle fonctionnelle: évolution dans un espace de dimension finie, ou dans un espace fonctionnel (Niculescu, Partington)
- équation différentielle sur un anneau d'opérateur (Kamen, Hautus, Conte & Perdon)

distinction de 2 classes différentes

- équation fonctionnelle différentielle retardée (RFDE)
- équation fonctionnelle différentielle neutre (NFDE)

systèmes de représentation

- équation différentielle sur un espace abstrait linéaire de dimension infinie (Curtain & Schwartz, Kolmanovskii, Rabah)
- équation différentielle fonctionnelle: évolution dans un espace de dimension finie, ou dans un espace fonctionnel (Niculescu, Partington)
- équation différentielle sur un anneau d'opérateur (Kamen, Hautus, Conte & Perdon)

distinction de 2 classes différentes

- équation fonctionnelle différentielle retardée (RFDE)
- équation fonctionnelle différentielle neutre (NFDE)

retard distribué / discret

$$\dot{x}(t) = \int_{-\tau}^0 [d\eta(\theta)]x(t + \theta), \quad \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^r A_i x(t - \tau_i)$$

exemple 1 (industrie chimique): (Niculescu, Wang, Christofides, Ray)

- réaction chimique du premier ordre, exotherme, irréversible du composant A en un produit de réaction B :



- réacteur infiniment mélangé avec recirculation.
- transformation non instantanée: il existe une quantité de A qui se transforme plus tard en B :

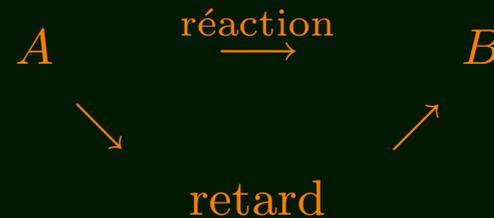


exemple 1 (industrie chimique): (Niculescu, Wang, Christofides, Ray)

- réaction chimique du premier ordre, exotherme, irréversible du composant A en un produit de réaction B :



- réacteur infiniment mélangé avec recirculation.
- transformation non instantanée: il existe une quantité de A qui se transforme plus tard en B :



$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{q}{V} [\lambda A_0 + (1 - \lambda)A(t - \tau) - A(t)] - K_0 e^{-\frac{Q}{T}} A(t),$$

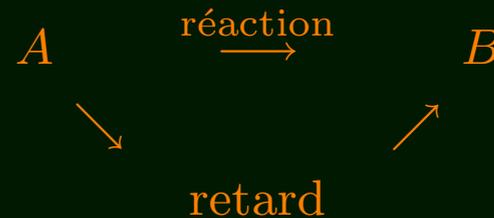
avec $A(t)$ la concentration du composant A .

exemple 1 (industrie chimique): (Niculescu, Wang, Christofides, Ray)

- réaction chimique du premier ordre, exotherme, irréversible du composant A en un produit de réaction B :



- réacteur infiniment mélangé avec recirculation.
- transformation non instantanée: il existe une quantité de A qui se transforme plus tard en B :



$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{q}{V} [\lambda A_0 + (1 - \lambda)A(t - \tau) - A(t)] - K_0 e^{-\frac{Q}{T}} A(t),$$

avec $A(t)$ la concentration du composant A .

↪ système asymptotiquement stable (indépendamment de la taille du retard)

exemple 2 (réseaux neuronaux): (Kolmanovskii)

Réseau Hopfield:

- chaque unité est décrite par une tension u_i sur l'entrée du $i^{\text{ème}}$ neurone et chaque neurone est caractérisé par une capacité C_i et une fonction de transfert f_i .

exemple 2 (réseaux neuronaux): (Kolmanovskii)

Réseau Hopfield:

- chaque unité est décrite par une tension u_i sur l'entrée du $i^{\text{ème}}$ neurone et chaque neurone est caractérisé par une capacité C_i et une fonction de transfert f_i .
- les liaisons entre neurones sont modélisées par des matrices de connexion (T_{ij}) , où T_{ij} a la valeur $1/R_{ij}$ quand la sortie de l'unité j est liée à l'entrée de l'unité i par une résistance R_{ij} .

exemple 2 (réseaux neuronaux): (Kolmanovskii)

Réseau Hopfield:

- chaque unité est décrite par une tension u_i sur l'entrée du $i^{\text{ème}}$ neurone et chaque neurone est caractérisé par une capacité C_i et une fonction de transfert f_i .
- les liaisons entre neurones sont modélisées par des matrices de connexion (T_{ij}) , où T_{ij} a la valeur $1/R_{ij}$ quand la sortie de l'unité j est liée à l'entrée de l'unité i par une résistance R_{ij} .
- Pour des unités identiques, i.e. $C_i = C$, $f_i = f$, $R_i = R$, et si on suppose qu'il y a un retard dans le transfert $f_i = f$, on a

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f[x_j(t - \tau)], \quad 1 \leq i \leq n.$$

exemple 2 (réseaux neuronaux): (Kolmanovskii)

Réseau Hopfield:

- chaque unité est décrite par une tension u_i sur l'entrée du $i^{\text{ème}}$ neurone et chaque neurone est caractérisé par une capacité C_i et une fonction de transfert f_i .
- les liaisons entre neurones sont modélisées par des matrices de connexion (T_{ij}) , où T_{ij} a la valeur $1/R_{ij}$ quand la sortie de l'unité j est liée à l'entrée de l'unité i par une résistance R_{ij} .
- Pour des unités identiques, i.e. $C_i = C$, $f_i = f$, $R_i = R$, et si on suppose qu'il y a un retard dans le transfert $f_i = f$, on a

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f[x_j(t - \tau)], \quad 1 \leq i \leq n.$$

↪ stabilité dépendant du retard

exemple 3 (retour de sortie retardée): (Abdallah, Chiasson)

- stabilisation de systèmes oscillatoires (structures mécaniques flexibles, robotique)

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = u(t).$$

exemple 3 (retour de sortie retardée): (Abdallah, Chiasson)

- stabilisation de systèmes oscillatoires (structures mécaniques flexibles, robotique)

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = u(t).$$

- système stabilisable par une loi de commande de type $u(t) = -k\dot{y}(t)$, et en boucle fermée

$$\ddot{y}(t) + k\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0,$$

qui est stable pour $k > 0$.

exemple 3 (retour de sortie retardée): (Abdallah, Chiasson)

- stabilisation de systèmes oscillatoires (structures mécaniques flexibles, robotique)

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = u(t).$$

- système stabilisable par une loi de commande de type $u(t) = -k\dot{y}(t)$, et en boucle fermée

$$\ddot{y}(t) + k\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0,$$

qui est stable pour $k > 0$.

- si on a l'information de $y(t)$ sur l'intervalle $[t - \tau, t]$ ($\tau > 0$), on utilise $u(t) = ky(t - \tau)$, pour obtenir en boucle fermée

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) - ky(t - \tau) = 0,$$

exemple 3 (retour de sortie retardée): (Abdallah, Chiasson)

- stabilisation de systèmes oscillatoires (structures mécaniques flexibles, robotique)

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = u(t).$$

- système stabilisable par une loi de commande de type $u(t) = -k\dot{y}(t)$, et en boucle fermée

$$\ddot{y}(t) + k\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0,$$

qui est stable pour $k > 0$.

- si on a l'information de $y(t)$ sur l'intervalle $[t - \tau, t]$ ($\tau > 0$), on utilise $u(t) = ky(t - \tau)$, pour obtenir en boucle fermée

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) - ky(t - \tau) = 0,$$

- ↪ stabilité asymptotique, mais possible effet déstabilisant du retard.
- ↪ dans le plan (τ, k) , les régions de stabilité pour le système en boucle fermée respectent une séquence stable-instable.

exemple 4 (modèle économique): (Kolmanovskii, Rasvan)

- relations entre la mémoire du consommateur et les fluctuations des prix

exemple 4 (modèle économique): (Kolmanovskii, Rasvan)

- relations entre la mémoire du consommateur et les fluctuations des prix
- sur une économie de marché libre, elles peuvent être décrites par une équation différentielle fonctionnelle

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{R}\dot{x}(t) + \dot{x}(t - \tau) + \frac{Q}{R}x(t) + x(t - \tau) = 0.$$

exemple 4 (modèle économique): (Kolmanovskii, Rasvan)

- relations entre la mémoire du consommateur et les fluctuations des prix
- sur une économie de marché libre, elles peuvent être décrites par une équation différentielle fonctionnelle

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{R}\dot{x}(t) + \dot{x}(t - \tau) + \frac{Q}{R}x(t) + x(t - \tau) = 0.$$

↪ le retard (et ses variations) peuvent induire la stabilité ou l'instabilité.

- **Introduction**
- **Notions de stabilité**
- **Problématiques sur la stabilité / stabilisation**
- **Analyse par intervalles et formulation ensembliste**
- **Exemples**
- **Conclusion**

- **Introduction**
- **Notions de stabilité**
- **Problématiques sur la stabilité / stabilisation**
- **Analyse par intervalles et formulation ensembliste**
- **Exemples**
- **Conclusion**

systeme linéaire à retards

systeme linéaire à retards

stabilité / stabilisation

systeme linéaire à retards

stabilité / stabilisation

- étude d'une équation caractéristique
- étude d'un quasipolynôme

systeme linéaire à retards

stabilité / stabilisation

- étude d'une équation caractéristique
- étude d'un quasipolynôme
- tests semi-analytiques
- tests fréquentiels

système linéaire à retards

stabilité / stabilisation

- étude d'une équation caractéristique
- étude d'un quasipolynôme
- tests semi-analytiques
- tests fréquentiels

classe des systèmes étudiés

système linéaire à retards

stabilité / stabilisation

- étude d'une équation caractéristique
- étude d'un quasipolynôme
- tests semi-analytiques
- tests fréquentiels

classe des systèmes étudiés

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p (A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i)), \quad 0 = h_0 < h_1 < \dots < h_p.$$

système linéaire à retards

stabilité / stabilisation

- étude d'une équation caractéristique
- étude d'un quasipolynôme
- tests semi-analytiques
- tests fréquentiels

classe des systèmes étudiés

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p (A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i)), \quad 0 = h_0 < h_1 < \dots < h_p.$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p (E_i \dot{x}(t - h_i) + A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i)), \quad 0 = h_0 < h_1 < \dots < h_p.$$

- Introduction
- **Notions de stabilité**
- **Problématiques sur la stabilité / stabilisation**
- **Analyse par intervalles et formulation ensembliste**
- Exemples
- Conclusion

RFDE (Retarded Functional Differential Equation): (Kolmanovskii, Bellman & Cooke)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), & \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} ,$$

avec $x_t(\cdot)$, pour t donné, est la restriction de $x(\cdot)$ sur l'intervalle $[t - \tau, t]$, i.e.

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

On note la solution (unique) $x_t(t_0, \phi)$.

RFDE (Retarded Functional Differential Equation): (Kolmanovskii, Bellman & Cooke)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), & \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{cases},$$

avec $x_t(\cdot)$, pour t donné, est la restriction de $x(\cdot)$ sur l'intervalle $[t - \tau, t]$, i.e.

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

On note la solution (unique) $x_t(t_0, \phi)$.

exemple 5:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p A_i x(t - h_i), \quad 0 = h_0 < h_1 < \dots < h_p,$$

avec la condition initiale ϕ sur l'intervalle $[-h_p, 0]$.

RFDE (Retarded Functional Differential Equation): (Kolmanovskii, Bellman & Cooke)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), & \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{cases},$$

avec $x_t(\cdot)$, pour t donné, est la restriction de $x(\cdot)$ sur l'intervalle $[t - \tau, t]$, i.e.

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

On note la solution (unique) $x_t(t_0, \phi)$.

exemple 5:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p A_i x(t - h_i), \quad 0 = h_0 < h_1 < \dots < h_p,$$

avec la condition initiale ϕ sur l'intervalle $[-h_p, 0]$.

$\hookrightarrow \dot{x}(t) = ax(t - 1)$, avec $\phi(\theta) = 1$, pour $\theta \in [-1, 0]$.

RFDE (Retarded Functional Differential Equation): (Kolmanovskii, Bellman & Cooke)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), & \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{cases},$$

avec $x_t(\cdot)$, pour t donné, est la restriction de $x(\cdot)$ sur l'intervalle $[t - \tau, t]$, i.e.

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

On note la solution (unique) $x_t(t_0, \phi)$.

exemple 5:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p A_i x(t - h_i), \quad 0 = h_0 < h_1 < \dots < h_p,$$

avec la condition initiale ϕ sur l'intervalle $[-h_p, 0]$.

$\hookrightarrow \dot{x}(t) = ax(t - 1)$, avec $\phi(\theta) = 1$, pour $\theta \in [-1, 0]$.

$$x(t) = at + 1 \text{ sur l'intervalle } [0, 1]$$

RFDE (Retarded Functional Differential Equation): (Kolmanovskii, Bellman & Cooke)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), & \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{cases},$$

avec $x_t(\cdot)$, pour t donné, est la restriction de $x(\cdot)$ sur l'intervalle $[t - \tau, t]$, i.e.

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

On note la solution (unique) $x_t(t_0, \phi)$.

exemple 5:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p A_i x(t - h_i), \quad 0 = h_0 < h_1 < \dots < h_p,$$

avec la condition initiale ϕ sur l'intervalle $[-h_p, 0]$.

$\hookrightarrow \dot{x}(t) = ax(t - 1)$, avec $\phi(\theta) = 1$, pour $\theta \in [-1, 0]$.

$$x(t) = at + 1 \text{ sur l'intervalle } [0, 1]$$

$$x(t) = \frac{a^2}{2}t^2 + at + a + 1 \text{ sur l'intervalle } [1, 2], \dots$$

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **stable** si , $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que

$$\|\phi\| < \delta \implies \|x\| < \varepsilon.$$

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **stable** si , $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que

$$\|\phi\| < \delta \implies \|x\| < \varepsilon.$$

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **uniformément stable** si δ ne depend pas de t_0 .

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **stable** si , $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que

$$\|\phi\| < \delta \implies \|x\| < \varepsilon.$$

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **uniformément stable** si δ ne depend pas de t_0 .

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **asymptotiquement stable** si

- elle est stable
- il existe $b(t_0)$ tel que $\|\phi\| < b$ implique $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **stable** si , $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que

$$\|\phi\| < \delta \implies \|x\| < \varepsilon.$$

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **uniformément stable** si δ ne depend pas de t_0 .

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **asymptotiquement stable** si

- elle est stable
- il existe $b(t_0)$ tel que $\|\phi\| < b$ implique $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **stable asymptotiquement au sens large** si

- elle est stable
- toute solution $x(t)$ satisfait $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **stable** si , $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que

$$\|\phi\| < \delta \implies \|x\| < \varepsilon.$$

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **uniformément stable** si δ ne depend pas de t_0 .

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **asymptotiquement stable** si

- elle est stable
- il existe $b(t_0)$ tel que $\|\phi\| < b$ implique $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est **stable asymptotiquement au sens large** si

- elle est stable
- toute solution $x(t)$ satisfait $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

La solution $x_t(t_0, \phi)$ est dite **exponentiellement stable** si

$$\exists B > 0, \alpha > 0, \forall \phi, t_0 > 0, \text{ avec } \|\phi\| < \infty,$$

$$\|x(t)\| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)} \|\phi\|$$

Considérons

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p A_i x(t - h_i)$$

Considérons

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p A_i x(t - h_i)$$

L'équation caractéristique associée est

$$\chi(s) = \det \left(sI - \sum_{i=1}^p A_i e^{-s\tau_i} \right)$$

Considérons

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p A_i x(t - h_i)$$

L'équation caractéristique associée est

$$\chi(s) = \det \left(sI - \sum_{i=1}^p A_i e^{-s\tau_i} \right)$$

La fonction caractéristique $\chi(s)$ est dite stable si

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \geq 0, \chi(s) = 0\} = \emptyset$$

Considérons

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p A_i x(t - h_i)$$

L'équation caractéristique associée est

$$\chi(s) = \det \left(sI - \sum_{i=1}^p A_i e^{-s\tau_i} \right)$$

La fonction caractéristique $\chi(s)$ est dite stable si

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \geq 0, \chi(s) = 0\} = \emptyset$$

Dans le cas linéaire, il y a équivalence entre ces différentes notions de stabilité.

Considérons

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p A_i x(t - h_i)$$

L'équation caractéristique associée est

$$\chi(s) = \det \left(sI - \sum_{i=1}^p A_i e^{-s\tau_i} \right)$$

La fonction caractéristique $\chi(s)$ est dite stable si

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \geq 0, \chi(s) = 0\} = \emptyset$$

Dans le cas linéaire, il y a équivalence entre ces différentes notions de stabilité.

- nombre fini de zéros de $\chi(s)$ sur chaque droite verticale du plan complexe.
- nombre fini de zéros dans toute région fermée bornée du plan complexe.
- existence de $\lambda_\chi < \infty$ tel que

$$\lambda_\chi = \sup_{s \in \mathbb{C}} \{|\operatorname{Re}(s)| : \chi(s) = 0\}.$$

NFDE (Neutral Functional Differential Equation): (Niculescu, Partington, Bellman)

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{D}x_t] = f(t, x_t), \quad t \geq t_0,$$

avec la condition initiale $x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta)$, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$, et \mathcal{D} un opérateur.

NFDE (Neutral Functional Differential Equation): (Niculescu, Partington, Bellman)

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{D}x_t] = f(t, x_t), \quad t \geq t_0,$$

avec la condition initiale $x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta)$, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$, et \mathcal{D} un opérateur.

exemple 6:

$$\mathcal{D}(x_t) = x(t) - Dx(t - \tau), \quad D \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

NFDE (Neutral Functional Differential Equation): (Niculescu, Partington, Bellman)

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{D}x_t] = f(t, x_t), \quad t \geq t_0,$$

avec la condition initiale $x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta)$, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$, et \mathcal{D} un opérateur.

exemple 6:

$$\mathcal{D}(x_t) = x(t) - Dx(t - \tau), \quad D \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Equation caractéristique associée:

- infinité de racines à partie réelle positive possible.
- présence de chaînes et directions asymptotiques.

NFDE (Neutral Functional Differential Equation): (Niculescu, Partington, Bellman)

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{D}x_t] = f(t, x_t), \quad t \geq t_0,$$

avec la condition initiale $x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta)$, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$, et \mathcal{D} un opérateur.

exemple 6:

$$\mathcal{D}(x_t) = x(t) - Dx(t - \tau), \quad D \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Equation caractéristique associée:

- infinité de racines à partie réelle positive possible.
- présence de chaînes et directions asymptotiques.

↔ non équivalence des différentes notions de stabilité

Soit $h(s) = \det(h(s))$, avec $h(s) = \left(sI - \sum_{i=0}^p A_i e^{-sh_i} \right)$.

Soit $h(s) = \det(h(s))$, avec $h(s) = \left(sI - \sum_{i=0}^p A_i e^{-sh_i} \right)$.

Condition nécessaire et suffisante pour que toute solution tende vers zéro:

- toutes les racines de l'équation caractéristique sont à partie réelle strictement négative.

Soit $h(s) = \det(h(s))$, avec $h(s) = \left(sI - \sum_{i=0}^p A_i e^{-sh_i} \right)$.

Condition nécessaire et suffisante pour que toute solution tende vers zéro:

- toutes les racines de l'équation caractéristique sont à partie réelle strictement négative.

Condition nécessaire et suffisante pour que les solutions soient bornées quand $t \rightarrow \infty$:

- toutes les racines de l'équation caractéristique sont à partie réelle négative ou nulle.
- si s_r est une racine imaginaire pure de l'équation caractéristique, le résidu de $e^{st} h^{-1}(s)$ en s_r est borné quand $t \rightarrow \infty$.

Soit un système à retards, de type retardé ou neutre, avec retards commensurables, d'équation caractéristique $H(s)$.

Soit un système à retards, de type retardé ou neutre, avec retards commensurables, d'équation caractéristique $H(s)$.

On le réécrit sous la forme (cas retardé) (Pontryagin)

$$\dot{x}(t + ph) = \sum_{i=0}^p A_i x(t + (p - i)h),$$

et on pose $z = sh$. La fonction caractéristique devient alors

$$\bar{H}(z) = \det \left(\frac{z}{h} e^{pz} I - \sum_{i=0}^p A_i e^{(p-i)z} \right).$$

Soit un système à retards, de type retardé ou neutre, avec retards commensurables, d'équation caractéristique $H(s)$.

On le réécrit sous la forme (cas retardé) (Pontryagin)

$$\dot{x}(t + ph) = \sum_{i=0}^p A_i x(t + (p - i)h),$$

et on pose $z = sh$. La fonction caractéristique devient alors

$$\bar{H}(z) = \det \left(\frac{z}{h} e^{pz} I - \sum_{i=0}^p A_i e^{(p-i)z} \right).$$

Soit $\bar{H}(z) = h(z, v)$, où $h(z, v)$ est un polynôme 2D de terme principal $a_{sr} z^s v^r$.

On désigne par $X_*^{(s)}(v)$ le coefficient de z^s dans le polynôme $h(z, v)$:

$$h(z, v) = \sum_{i=0}^s X_*^{(i)}(v) z^i$$

- si la fonction $X_*^{(s)}(e^z)$ a une racine à droite de l'axe imaginaire, alors la fonction $\overline{H}(z)$ a un nombre infini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- si tous les zéros de $X_*^{(s)}(e^z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors $\overline{H}(z)$ a un nombre fini de zéros à droite de l'axe imaginaire.

- si la fonction $X_*^{(s)}(e^z)$ a une racine à droite de l'axe imaginaire, alors la fonction $\overline{H}(z)$ a un nombre infini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- si tous les zéros de $X_*^{(s)}(e^z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors $\overline{H}(z)$ a un nombre fini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- **cas retardé:** $h(z, v)$ a pour terme principal $z^n v^{pn} / h^n$.

- si la fonction $X_*^{(s)}(e^z)$ a une racine à droite de l'axe imaginaire, alors la fonction $\overline{H}(z)$ a un nombre infini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- si tous les zéros de $X_*^{(s)}(e^z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors $\overline{H}(z)$ a un nombre fini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- **cas retardé:** $h(z, v)$ a pour terme principal $z^n v^{pn} / h^n$.
 - $X_*^{(n)}(v) = v^{np} / h^n$.

- si la fonction $X_*^{(s)}(e^z)$ a une racine à droite de l'axe imaginaire, alors la fonction $\overline{H}(z)$ a un nombre infini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- si tous les zéros de $X_*^{(s)}(e^z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors $\overline{H}(z)$ a un nombre fini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- **cas retardé:** $h(z, v)$ a pour terme principal $z^n v^{pn} / h^n$.
 - $X_*^{(n)}(v) = v^{np} / h^n$.
 - $X_*^{(n)}(e^z)$ a pour racine $z = -\infty + jy, y \in \mathbb{R}$.

- si la fonction $X_*^{(s)}(e^z)$ a une racine à droite de l'axe imaginaire, alors la fonction $\overline{H}(z)$ a un nombre infini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- si tous les zéros de $X_*^{(s)}(e^z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors $\overline{H}(z)$ a un nombre fini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- **cas retardé:** $h(z, v)$ a pour terme principal $z^n v^{pn} / h^n$.
 - $X_*^{(n)}(v) = v^{np} / h^n$.
 - $X_*^{(n)}(e^z)$ a pour racine $z = -\infty + jy, y \in \mathbb{R}$.
 - la fonction $\overline{H}(z)$ a un nombre fini de zéros à droite de l'axe imaginaire.

- si la fonction $X_*^{(s)}(e^z)$ a une racine à droite de l'axe imaginaire, alors la fonction $\overline{H}(z)$ a un nombre infini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- si tous les zéros de $X_*^{(s)}(e^z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors $\overline{H}(z)$ a un nombre fini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- **cas retardé:** $h(z, v)$ a pour terme principal $z^n v^{pn} / h^n$.
 - $X_*^{(n)}(v) = v^{np} / h^n$.
 - $X_*^{(n)}(e^z)$ a pour racine $z = -\infty + jy, y \in \mathbb{R}$.
 - la fonction $\overline{H}(z)$ a un nombre fini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- **cas neutre:** présence d'un terme principal polynomial en e^z .

- si la fonction $X_*^{(s)}(e^z)$ a une racine à droite de l'axe imaginaire, alors la fonction $\overline{H}(z)$ a un nombre infini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- si tous les zéros de $X_*^{(s)}(e^z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors $\overline{H}(z)$ a un nombre fini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- **cas retardé:** $h(z, v)$ a pour terme principal $z^n v^{pn} / h^n$.
 - $X_*^{(n)}(v) = v^{np} / h^n$.
 - $X_*^{(n)}(e^z)$ a pour racine $z = -\infty + jy, y \in \mathbb{R}$.
 - la fonction $\overline{H}(z)$ a un nombre fini de zéros à droite de l'axe imaginaire.
- **cas neutre:** présence d'un terme principal polynomial en e^z .
- analyse sur la frontière de stabilité, l'axe imaginaire $z = jy, y \in \mathbb{R}$,

$$\overline{H}(jy) = F(y) + jG(y),$$

où $F(y) = f(y, \cos y, \sin y)$, $G(y) = g(y, \cos y, \sin y)$, avec $f(y, u, v)$ et $g(y, u, v)$ des polynômes.

Soit $\overline{H}(z) = h(z, e^z)$, où $h(z, v)$ est un polynôme à terme principal non nul.

Soit $\overline{H}(z) = h(z, e^z)$, où $h(z, v)$ est un polynôme à terme principal non nul.

Si tous les zéros de la fonction $\overline{H}(z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors les zéros des fonctions $F(y)$ et $G(y)$ sont réels, alternés, et

$$F(y)G'(y) - F'(y)G(y) > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Soit $\overline{H}(z) = h(z, e^z)$, où $h(z, v)$ est un polynôme à terme principal non nul.

Si tous les zéros de la fonction $\overline{H}(z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors les zéros des fonctions $F(y)$ et $G(y)$ sont réels, alternés, et

$$F(y)G'(y) - F'(y)G(y) > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Afin que tous les zéros de $\overline{H}(z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, il est suffisant que l'une des conditions suivantes soit satisfaite:

Soit $\overline{H}(z) = h(z, e^z)$, où $h(z, v)$ est un polynôme à terme principal non nul.

Si tous les zéros de la fonction $\overline{H}(z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors les zéros des fonctions $F(y)$ et $G(y)$ sont réels, alternés, et

$$F(y)G'(y) - F'(y)G(y) > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Afin que tous les zéros de $\overline{H}(z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, il est suffisant que l'une des conditions suivantes soit satisfaite:

- (i) tous les zéros des fonctions $F(y)$ et $G(y)$ sont réels, alternés, et l'inégalité (1) est satisfaite pour au moins une valeur de y .

Soit $\overline{H}(z) = h(z, e^z)$, où $h(z, v)$ est un polynôme à terme principal non nul.

Si tous les zéros de la fonction $\overline{H}(z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors les zéros des fonctions $F(y)$ et $G(y)$ sont réels, alternés, et

$$F(y)G'(y) - F'(y)G(y) > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Afin que tous les zéros de $\overline{H}(z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, il est suffisant que l'une des conditions suivantes soit satisfaite:

- (i) tous les zéros des fonctions $F(y)$ et $G(y)$ sont réels, alternés, et l'inégalité (1) est satisfaite pour au moins une valeur de y .
- (ii) tous les zéros de la fonction $F'(y)$ sont réels, et pour toute racine $y = y_0$, l'inégalité (1) est satisfaite, c'est à dire $G(y_0)F'(y_0) < 0$.

Soit $\overline{H}(z) = h(z, e^z)$, où $h(z, v)$ est un polynôme à terme principal non nul.

Si tous les zéros de la fonction $\overline{H}(z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, alors les zéros des fonctions $F(y)$ et $G(y)$ sont réels, alternés, et

$$F(y)G'(y) - F'(y)G(y) > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Afin que tous les zéros de $\overline{H}(z)$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, il est suffisant que l'une des conditions suivantes soit satisfaite:

- (i) tous les zéros des fonctions $F(y)$ et $G(y)$ sont réels, alternés, et l'inégalité (1) est satisfaite pour au moins une valeur de y .
- (ii) tous les zéros de la fonction $F(y)$ sont réels, et pour toute racine $y = y_0$, l'inégalité (1) est satisfaite, c'est à dire $G(y_0)F'(y_0) < 0$.
- (iii) tous les zéros de la fonction $G(y)$ sont réels, et pour toute racine $y = y_0$, l'inégalité (1) est vérifiée, i.e. $G'(y_0)F(y_0) > 0$.

Soit $f(z, u, v)$ un polynôme de la forme

$$f(z, u, v) = \sum_{m,n} z^m \varphi_m^{(n)}(u, v).$$

Soit $f(z, u, v)$ un polynôme de la forme

$$f(z, u, v) = \sum_{m,n} z^m \varphi_m^{(n)}(u, v).$$

- Si le polynôme n'a pas de terme principal, alors la fonction $F(z) = f(z, \cos z, \sin z)$ a un nombre illimité de racines qui ne sont pas réelles.

Soit $f(z, u, v)$ un polynôme de la forme

$$f(z, u, v) = \sum_{m,n} z^m \varphi_m^{(n)}(u, v).$$

- Si le polynôme n'a pas de terme principal, alors la fonction $F(z) = f(z, \cos z, \sin z)$ a un nombre illimité de racines qui ne sont pas réelles.
- Si $f(z, u, v)$ est un polynôme de terme principal $z^r \varphi_r^{(s)}(u, v)$, alors

$$f(z, u, v) = z^r \varphi_r^{(s)}(u, v) + \sum_{m \leq r} \sum_{n \leq s} z^m \varphi_m^{(n)}(u, v),$$

où $\varphi_*^{(s)}$ est un polynôme en u et v de degré s

$$\varphi_*^{(s)}(u, v) = \sum_{n \leq s} \varphi_r^{(n)}(u, v).$$

Théorème (Pontryagin)

Soit $f(z, u, v)$ un polynôme de terme principal $z^r \varphi_r^{(s)}(u, v)$. Si ε est tel que $\varphi_*^{(s)}(\varepsilon + jy)$ ne prend pas la valeur 0 pour $y \in \mathbb{R}$, alors dans l'intervalle $-2k\pi + \varepsilon \leq x \leq 2k\pi + \varepsilon$, $z = x + jy$, la fonction $F(z) = f(z, \cos z, \sin z)$ aura, pour k suffisamment grand, exactement $(4sk + r)$ zéros.

Ainsi, pour que la fonction $F(z)$ n'ait que des racines réelles, il est nécessaire et suffisant que dans l'intervalle $-2k\pi + \varepsilon \leq x \leq 2k\pi + \varepsilon$, elle ait exactement $(4sk + r)$ racines réelles, pour k suffisamment grand.

Théorème (Pontryagin)

Soit $f(z, u, v)$ un polynôme de terme principal $z^r \varphi_r^{(s)}(u, v)$. Si ε est tel que $\varphi_*^{(s)}(\varepsilon + jy)$ ne prend pas la valeur 0 pour $y \in \mathbb{R}$, alors dans l'intervalle $-2k\pi + \varepsilon \leq x \leq 2k\pi + \varepsilon$, $z = x + jy$, la fonction $F(z) = f(z, \cos z, \sin z)$ aura, pour k suffisamment grand, exactement $(4sk + r)$ zéros.

Ainsi, pour que la fonction $F(z)$ n'ait que des racines réelles, il est nécessaire et suffisant que dans l'intervalle $-2k\pi + \varepsilon \leq x \leq 2k\pi + \varepsilon$, elle ait exactement $(4sk + r)$ racines réelles, pour k suffisamment grand.

↔ test analytique - fréquentiel

↔ cas des retards commensurables

Autres critères:

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz
 - cas mono-retardé

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz
 - cas mono-retardé
 - grand nombre de calculs de déterminants

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz
 - cas mono-retardé
 - grand nombre de calculs de déterminants
- **méthodes de localisation des racines:**

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz
 - cas mono-retardé
 - grand nombre de calculs de déterminants
- **méthodes de localisation des racines:**
 - valeurs des paramètres pour obtenir des racines sur l'axe imaginaire

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz
 - cas mono-retardé
 - grand nombre de calculs de déterminants
- **méthodes de localisation des racines:**
 - valeurs des paramètres pour obtenir des racines sur l'axe imaginaire
 - cas limites de transition du nombre de racines à partie réelle positive ou nulle

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz
 - cas mono-retardé
 - grand nombre de calculs de déterminants
- **méthodes de localisation des racines:**
 - valeurs des paramètres pour obtenir des racines sur l'axe imaginaire
 - cas limites de transition du nombre de racines à partie réelle positive ou nulle
 - cas mono-retardé

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz
 - cas mono-retardé
 - grand nombre de calculs de déterminants
- **méthodes de localisation des racines:**
 - valeurs des paramètres pour obtenir des racines sur l'axe imaginaire
 - cas limites de transition du nombre de racines à partie réelle positive ou nulle
 - cas mono-retardé
- **méthode de \mathcal{D} -subdivision:**

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz
 - cas mono-retardé
 - grand nombre de calculs de déterminants
- **méthodes de localisation des racines:**
 - valeurs des paramètres pour obtenir des racines sur l'axe imaginaire
 - cas limites de transition du nombre de racines à partie réelle positive ou nulle
 - cas mono-retardé
- **méthode de \mathcal{D} -subdivision:**
 - retard considéré comme paramètre

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz
 - cas mono-retardé
 - grand nombre de calculs de déterminants
- **méthodes de localisation des racines:**
 - valeurs des paramètres pour obtenir des racines sur l'axe imaginaire
 - cas limites de transition du nombre de racines à partie réelle positive ou nulle
 - cas mono-retardé
- **méthode de \mathcal{D} -subdivision:**
 - retard considéré comme paramètre
 - régions stables, indépendamment du retard ou dépendant du retard

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz
 - cas mono-retardé
 - grand nombre de calculs de déterminants
- **méthodes de localisation des racines:**
 - valeurs des paramètres pour obtenir des racines sur l'axe imaginaire
 - cas limites de transition du nombre de racines à partie réelle positive ou nulle
 - cas mono-retardé
- **méthode de \mathcal{D} -subdivision:**
 - retard considéré comme paramètre
 - régions stables, indépendamment du retard ou dépendant du retard
 - décomposition du plan complexe en un certain nombre de régions, qui ont toutes le même nombre de racines à partie réelle positive

Autres critères:

- **critère de Chebotarev:** généralisation du critère de Routh-Hurwitz
 - cas mono-retardé
 - grand nombre de calculs de déterminants
- **méthodes de localisation des racines:**
 - valeurs des paramètres pour obtenir des racines sur l'axe imaginaire
 - cas limites de transition du nombre de racines à partie réelle positive ou nulle
 - cas mono-retardé
- **méthode de \mathcal{D} -subdivision:**
 - retard considéré comme paramètre
 - régions stables, indépendamment du retard ou dépendant du retard
 - décomposition du plan complexe en un certain nombre de régions, qui ont toutes le même nombre de racines à partie réelle positive
 - démarche complexe dans le cas de plusieurs retards

- **méthode de τ -subdivision:**

- **méthode de τ -subdivision:**

$$e^{\tau s} = D_0(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- étude de $D_0(j\omega)$ par rapport au disque unité

- **méthode de τ -subdivision:**

$$e^{\tau s} = D_0(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- étude de $D_0(j\omega)$ par rapport au disque unité
- si il n'y a pas d'intersection avec le disque unité, la stabilité pour le cas sans retard équivalent est conservée pour toute valeur positive du retard

- **méthode de τ -subdivision:**

$$e^{\tau s} = D_0(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- étude de $D_0(j\omega)$ par rapport au disque unité
- si il n'y a pas d'intersection avec le disque unité, la stabilité pour le cas sans retard équivalent est conservée pour toute valeur positive du retard
- stabilité indépendante du retard

- **méthode de τ -subdivision:**

$$e^{\tau s} = D_0(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- étude de $D_0(j\omega)$ par rapport au disque unité
- si il n'y a pas d'intersection avec le disque unité, la stabilité pour le cas sans retard équivalent est conservée pour toute valeur positive du retard
- stabilité indépendante du retard
- condition seulement suffisante, mais pas nécessaire

- **méthode de τ -subdivision:**

$$e^{\tau s} = D_0(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- étude de $D_0(j\omega)$ par rapport au disque unité
- si il n'y a pas d'intersection avec le disque unité, la stabilité pour le cas sans retard équivalent est conservée pour toute valeur positive du retard
- stabilité indépendante du retard
- condition seulement suffisante, mais pas nécessaire
- cas mono-retardé

- **méthode de τ -subdivision:**

$$e^{\tau s} = D_0(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- étude de $D_0(j\omega)$ par rapport au disque unité
- si il n'y a pas d'intersection avec le disque unité, la stabilité pour le cas sans retard équivalent est conservée pour toute valeur positive du retard
- stabilité indépendante du retard
- condition seulement suffisante, mais pas nécessaire
- cas mono-retardé

- **critère de Tsytkin:**

- **méthode de τ -subdivision:**

$$e^{\tau s} = D_0(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- étude de $D_0(j\omega)$ par rapport au disque unité
- si il n'y a pas d'intersection avec le disque unité, la stabilité pour le cas sans retard équivalent est conservée pour toute valeur positive du retard
- stabilité indépendante du retard
- condition seulement suffisante, mais pas nécessaire
- cas mono-retardé

- **critère de Tsytkin:**

- système à retard sur l'entrée $H_0(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}e^{-s\tau}$

- **méthode de τ -subdivision:**

$$e^{\tau s} = D_0(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- étude de $D_0(j\omega)$ par rapport au disque unité
- si il n'y a pas d'intersection avec le disque unité, la stabilité pour le cas sans retard équivalent est conservée pour toute valeur positive du retard
- stabilité indépendante du retard
- condition seulement suffisante, mais pas nécessaire
- cas mono-retardé

- **critère de Tsytkin:**

- système à retard sur l'entrée $H_0(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}e^{-s\tau}$
- si $Q(s)$ est un polynôme stable, alors le système en boucle fermée

$$H_b(s) = \frac{P(s)e^{-s\tau}}{Q(s) + P(s)e^{-s\tau}}$$

est asymptotiquement stable si et seulement si $|Q(j\omega)| > |P(j\omega)|, \forall \omega \in \mathbb{R}$

- Introduction
- Notions de stabilité
- **Problématiques sur la stabilité / stabilisation**
- Analyse par intervalles et formulation ensembliste
- Exemples
- Conclusion

caractérisation de la stabilité:

caractérisation de la stabilité:

- critères semi-analytiques

caractérisation de la stabilité:

- critères semi-analytiques
- application à des classes restreintes de systèmes

caractérisation de la stabilité:

- critères semi-analytiques
- application à des classes restreintes de systèmes
- extensions complexes aux cas plus généraux

caractérisation de la stabilité:

- critères semi-analytiques
- application à des classes restreintes de systèmes
- extensions complexes aux cas plus généraux
- défaut de la suffisance de certaines conditions

caractérisation de la stabilité:

- critères semi-analytiques
- application à des classes restreintes de systèmes
- extensions complexes aux cas plus généraux
- défaut de la suffisance de certaines conditions

Stabilisation:

caractérisation de la stabilité:

- critères semi-analytiques
- application à des classes restreintes de systèmes
- extensions complexes aux cas plus généraux
- défaut de la suffisance de certaines conditions

Stabilisation:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i),$$

avec $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_p$.

La stabilité du système est équivalente à la stabilité de

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p A_i x(t - h_i).$$

Soit un système décrit par une fraction matricielle propre $T(s) = D^{-1}(s)N(s)$, où $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times p}$ et $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$. Ce système est stabilisable par retour dynamique de sortie si et seulement si $N(s)$ et $D(s)$ n'ont pas de zéro commun instable. (Kucera, Vidyasagar, Callier, Desoer)

Soit un système décrit par une fraction matricielle propre $T(s) = D^{-1}(s)N(s)$, où $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times p}$ et $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$. Ce système est stabilisable par retour dynamique de sortie si et seulement si $N(s)$ et $D(s)$ n'ont pas de zéro commun instable. (Kucera, Vidyasagar, Callier, Desoer)

Pour un système à retards décrit de la même manière, avec des matrices $N(s)$ et $D(s)$ polynomiales en s à coefficients sur l'anneau commutatif $\mathbb{R}[e^{-sh_1}, \dots, e^{-sh_p}]$, une telle condition nécessaire et suffisante existe dans le cas de matrices propres.

Soit un système décrit par une fraction matricielle propre $T(s) = D^{-1}(s)N(s)$, où $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times p}$ et $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$. Ce système est stabilisable par retour dynamique de sortie si et seulement si $N(s)$ et $D(s)$ n'ont pas de zéro commun instable. (Kucera, Vidyasagar, Callier, Desoer)

Pour un système à retards décrit de la même manière, avec des matrices $N(s)$ et $D(s)$ polynomiales en s à coefficients sur l'anneau commutatif $\mathbb{R}[e^{-sh_1}, \dots, e^{-sh_p}]$, une telle condition nécessaire et suffisante existe dans le cas de matrices propres.

Soit le transfert $T(s)$ et le retour dynamique de sortie du type

$$T(s) = D^{-1}(s)N(s), \quad u = -N_c(s)D_c^{-1}(s)y + v,$$

Soit un système décrit par une fraction matricielle propre $T(s) = D^{-1}(s)N(s)$, où $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times p}$ et $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$. Ce système est stabilisable par retour dynamique de sortie si et seulement si $N(s)$ et $D(s)$ n'ont pas de zéro commun instable. (Kucera, Vidyasagar, Callier, Desoer)

Pour un système à retards décrit de la même manière, avec des matrices $N(s)$ et $D(s)$ polynomiales en s à coefficients sur l'anneau commutatif $\mathbb{R}[e^{-sh_1}, \dots, e^{-sh_p}]$, une telle condition nécessaire et suffisante existe dans le cas de matrices propres.

Soit le transfert $T(s)$ et le retour dynamique de sortie du type

$$T(s) = D^{-1}(s)N(s), \quad u = -N_c(s)D_c^{-1}(s)y + v,$$

En boucle fermée:

$$y = D_c(s) (D(s)D_c(s) + N(s)N_c(s))^{-1} N(s)v$$

Soit un système décrit par une fraction matricielle propre $T(s) = D^{-1}(s)N(s)$, où $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times p}$ et $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$. Ce système est stabilisable par retour dynamique de sortie si et seulement si $N(s)$ et $D(s)$ n'ont pas de zéro commun instable. (Kucera, Vidyasagar, Callier, Desoer)

Pour un système à retards décrit de la même manière, avec des matrices $N(s)$ et $D(s)$ polynomiales en s à coefficients sur l'anneau commutatif $\mathbb{R}[e^{-sh_1}, \dots, e^{-sh_p}]$, une telle condition nécessaire et suffisante existe dans le cas de matrices propres.

Soit le transfert $T(s)$ et le retour dynamique de sortie du type

$$T(s) = D^{-1}(s)N(s), \quad u = -N_c(s)D_c^{-1}(s)y + v,$$

En boucle fermée:

$$y = D_c(s) (D(s)D_c(s) + N(s)N_c(s))^{-1} N(s)v$$

$T(s)$ est stabilisable si et seulement si il existe $\Phi(s)$, $N_c(s)$, $D_c(s)$ telles que

$$N(s)N_c(s) + D(s)D_c(s) = \Phi(s),$$

avec $\det(\Phi(s))$ stable, et $N_c(s)D_c^{-1}(s)$ propre.

- Introduction
- Notions de stabilité
- Problématiques sur la stabilité / stabilisation
- **Analyse par intervalles et formulation ensembliste**
- Exemples
- Conclusion

systemes à retards

systemes à retards

stabilité/stabilisation robuste

$$q(s) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} s^i e^{-\tau_k s}$$

$$a_{ik} \in [\underline{a}_{ik}, \bar{a}_{ik}] \subset \mathbb{R}$$

$$\tau_k \in [\underline{\tau}_k, \bar{\tau}_k] \subset \mathbb{R}_+$$

systemes à retards

stabilité/stabilisation robuste

$$q(s) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} s^i e^{-\tau_k s}$$

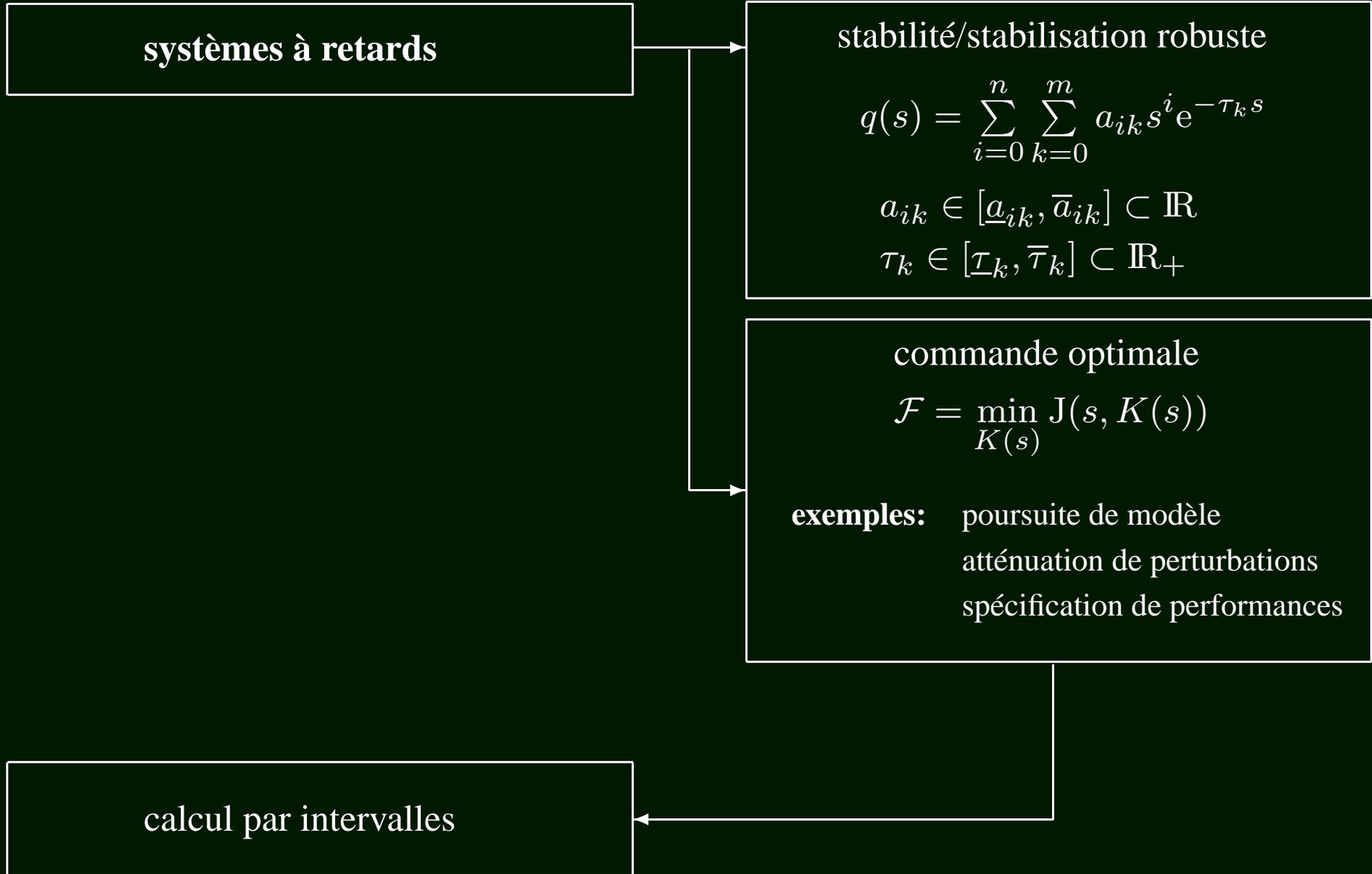
$$a_{ik} \in [\underline{a}_{ik}, \bar{a}_{ik}] \subset \mathbb{R}$$

$$\tau_k \in [\underline{\tau}_k, \bar{\tau}_k] \subset \mathbb{R}_+$$

commande optimale

$$\mathcal{F} = \min_{K(s)} J(s, K(s))$$

exemples: poursuite de modèle
atténuation de perturbations
spécification de performances



**analyse par
intervalles**

analyse par
intervalles

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [\mathbf{x}] \times [\mathbf{y}] \mid f(x + jy) = 0\}$$

équation caractéristique:

$$f(s) = 0, s \in \mathbb{C}$$

analyse par intervalles

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [\mathbf{x}] \times [\mathbf{y}] \mid f(x + jy) = 0\}$$

équation caractéristique:

$$f(s) = 0, s \in \mathbb{C}$$

SIVIA

analyse par intervalles

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [\mathbf{x}] \times [\mathbf{y}] \mid f(x + jy) = 0\}$$

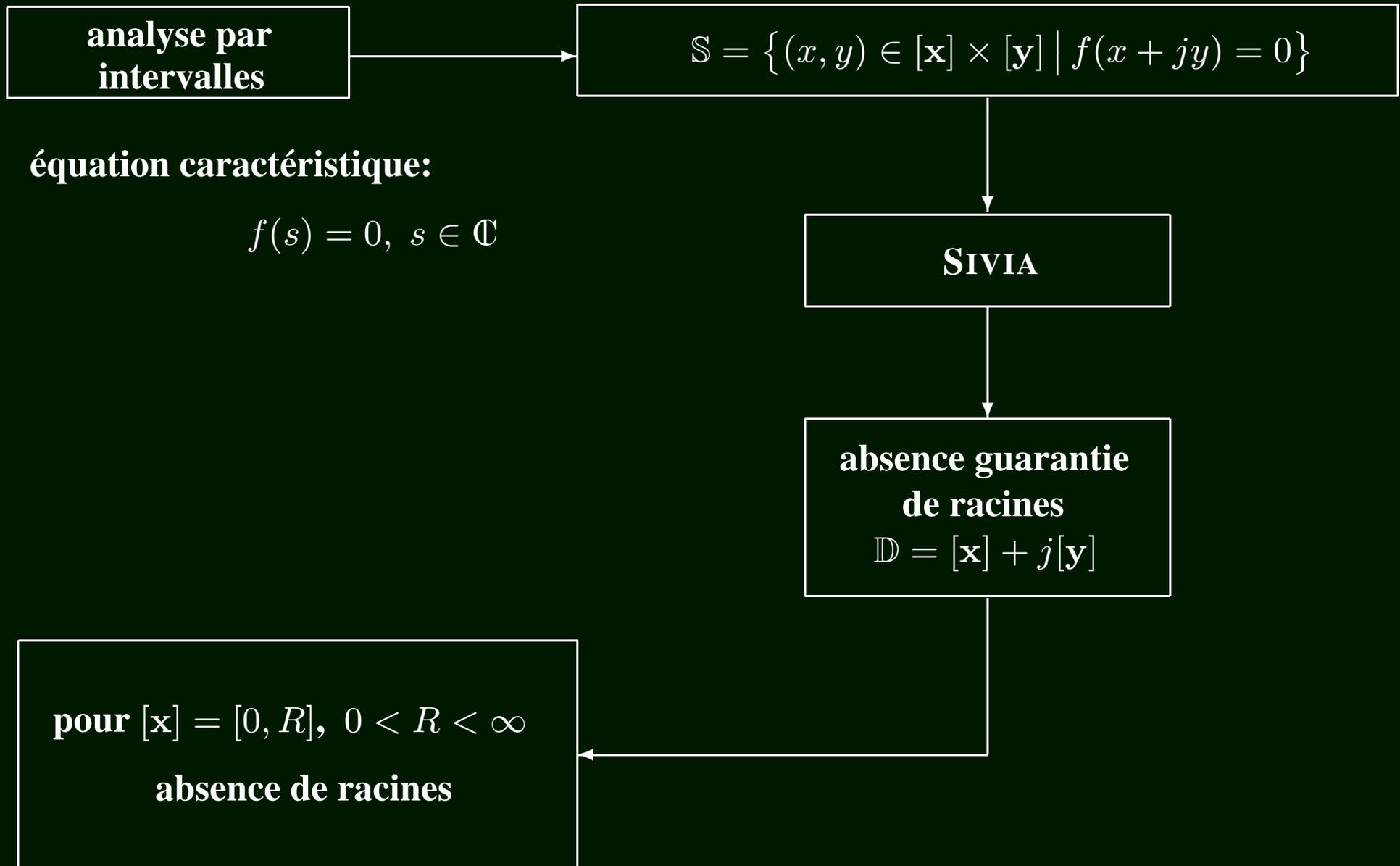
équation caractéristique:

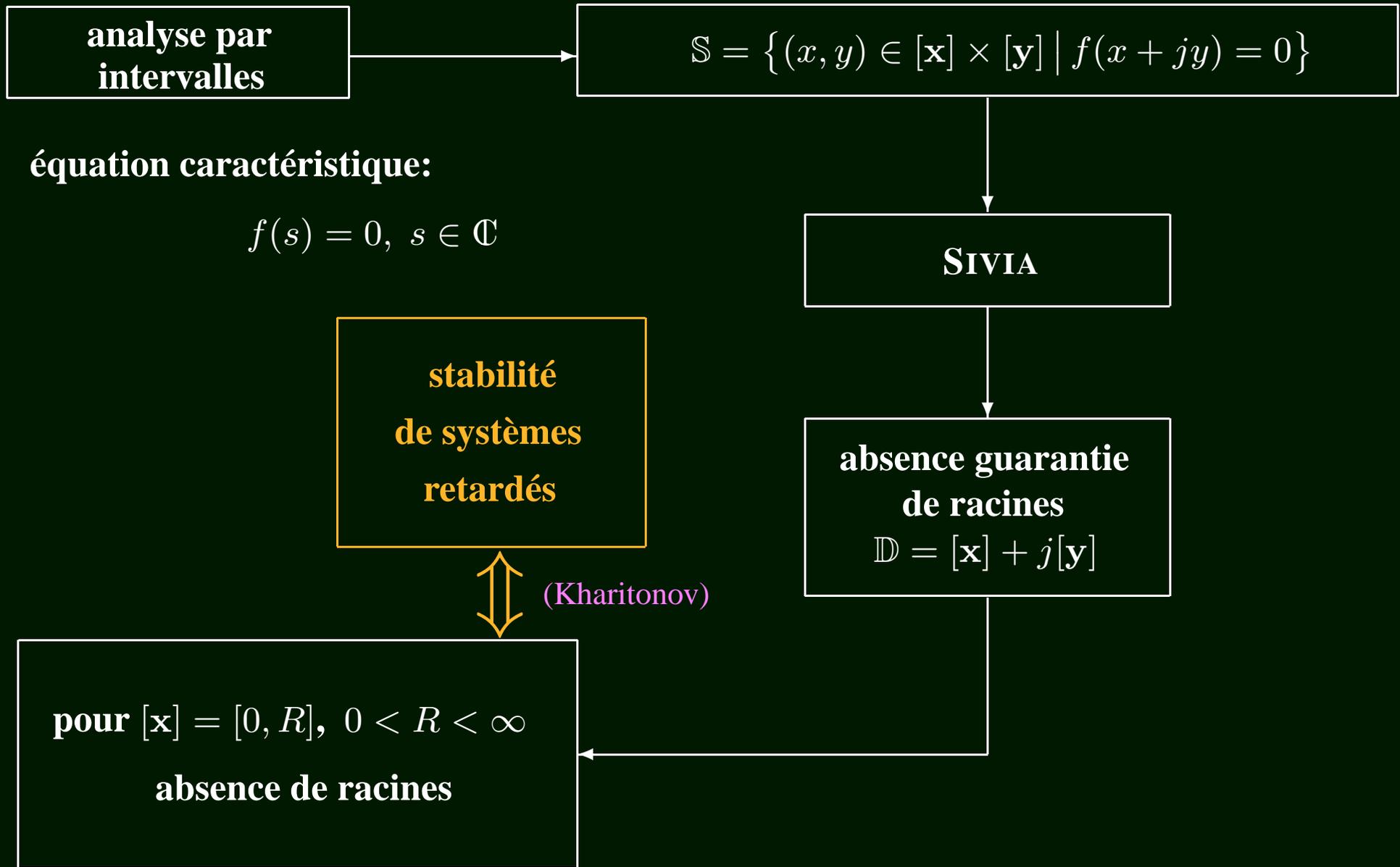
$$f(s) = 0, s \in \mathbb{C}$$

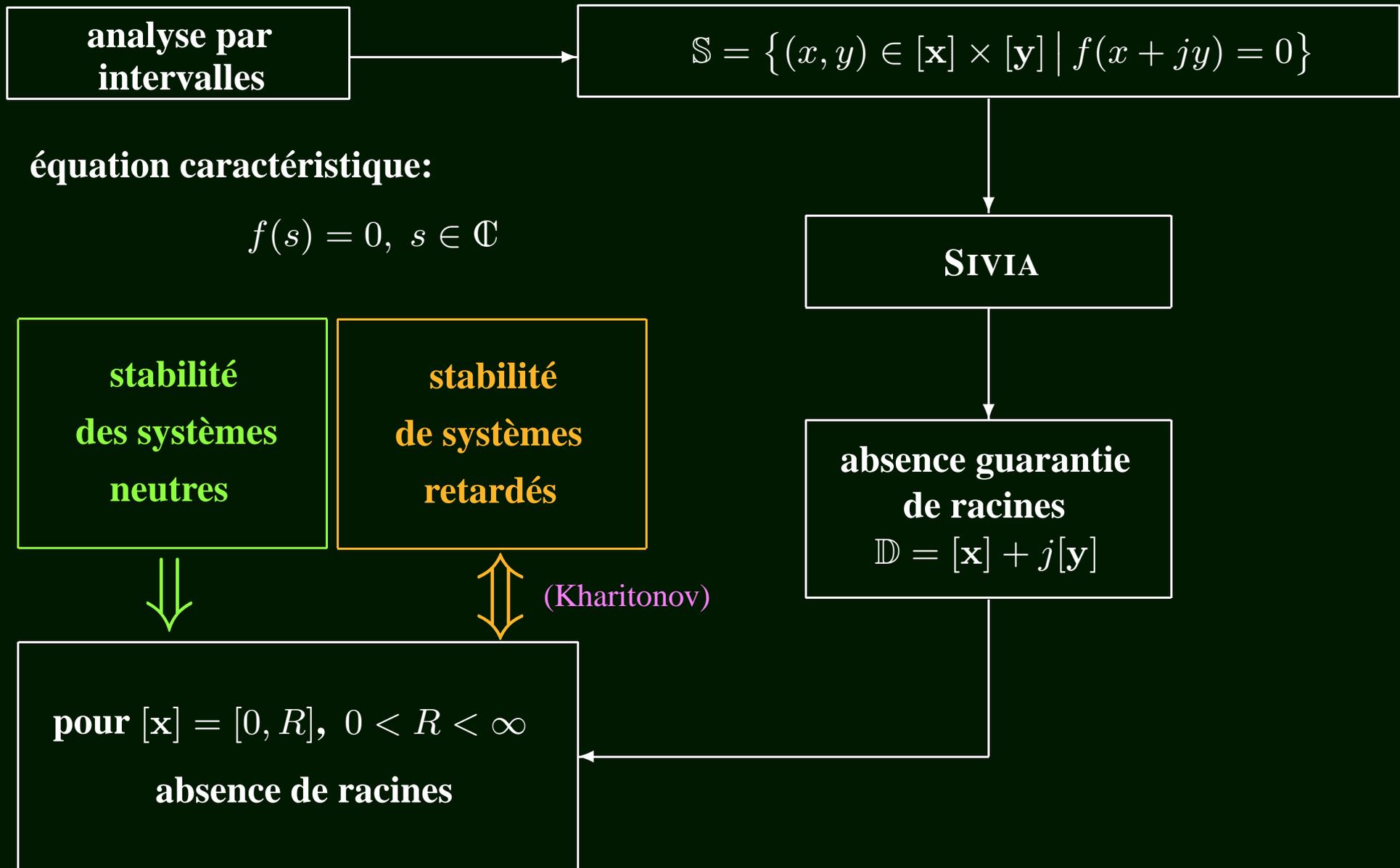
SIVIA

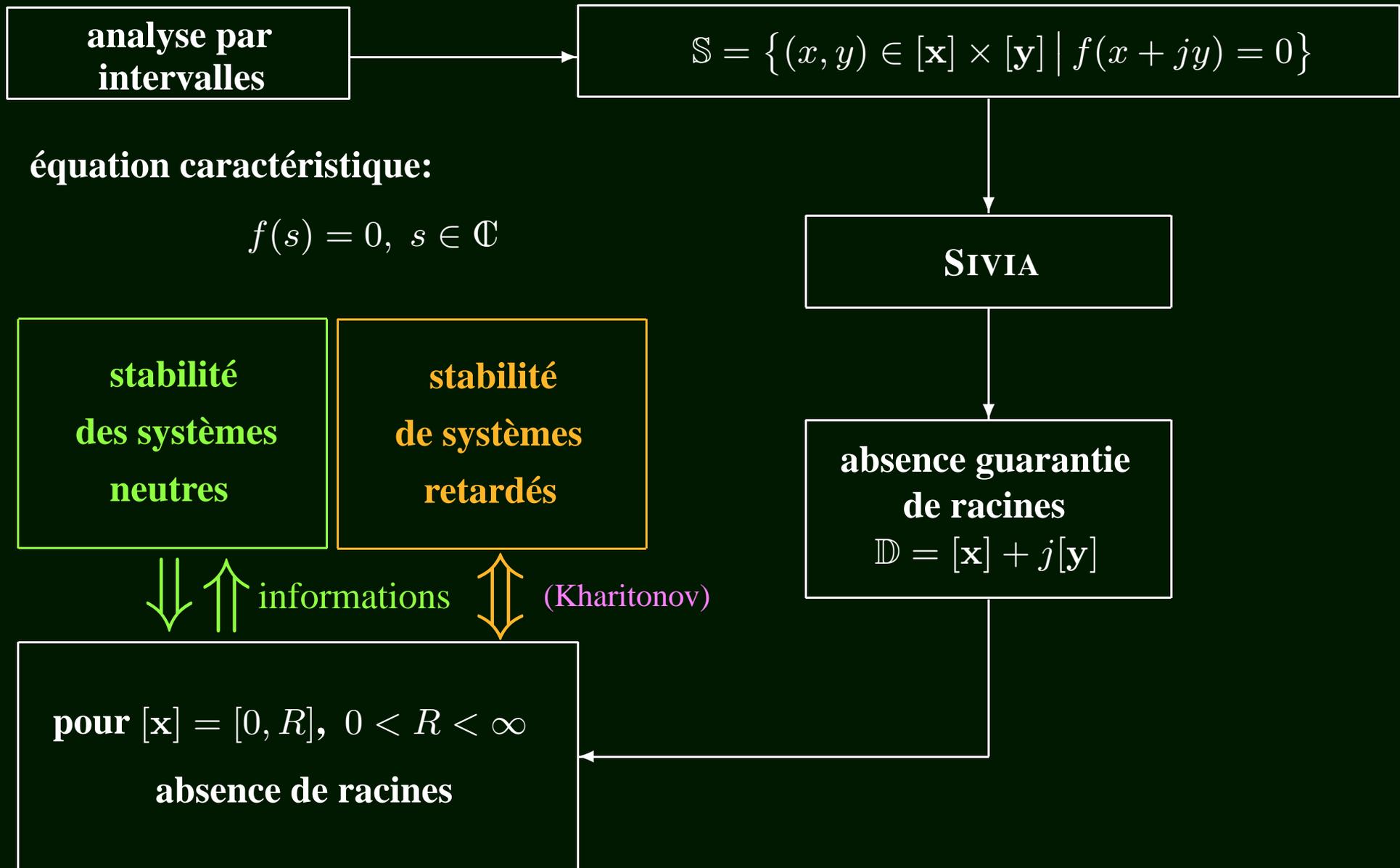
**absence garantie
de racines**

$$\mathbb{D} = [\mathbf{x}] + j[\mathbf{y}]$$









- **Introduction**
- **Notions de stabilité**
- **Problématiques sur la stabilité / stabilisation**
- **Analyse par intervalles et formulation ensembliste**
- **Exemples**
- **Conclusion**

Soit le transfert $H(s)$ d'un système à retard.
Pour un tracé fréquentiel $|H(j\omega)|$, on résout

$$\mathbb{S} = \{(\omega, g) \in \Omega \times [\mathbf{g}] \mid |H(j\omega)| - g = 0\}$$

Ω : intervalle fréquentiel

$[\mathbf{g}]$: intervalle de g

Soit le transfert $H(s)$ d'un système à retard.
Pour un tracé fréquentiel $|H(j\omega)|$, on résout

$$\mathbb{S} = \{(\omega, g) \in \Omega \times [\mathbf{g}] \mid |H(j\omega)| - g = 0\}$$

Ω : intervalle fréquentiel

$[\mathbf{g}]$: intervalle de g

↪ diagrammes de Bode ou de Nichols:

$$\mathbb{S} = \{(\omega, g, a) \in \Omega \times [\mathbf{g}] \times [\mathbf{a}] \mid |H(j\omega)| - g = 0 \text{ and } \angle H(j\omega) - a = 0\}$$

↪ diagramme de Nyquist:

$$\mathbb{S} = \{(\omega, h_{\mathbf{R}}, h_{\mathbf{I}}) \in \Omega \times [\mathbf{h}_{\mathbf{R}}] \times [\mathbf{h}_{\mathbf{I}}] \mid H_{\mathbf{R}}(\omega) - h_{\mathbf{R}} = 0 \text{ et } H_{\mathbf{I}}(\omega) - h_{\mathbf{I}} = 0\}$$

avec $H_{\mathbf{R}}(\omega) = \text{Re}(H(j\omega))$ et $H_{\mathbf{I}}(\omega) = \text{Im}(H(j\omega))$, $\forall \omega \in \Omega$

exemple 7:

On considère la fonction de transfert

$$H(s) = e^{-s\tau} - 1, \text{ avec } \tau = 0.1.$$

exemple 7:

On considère la fonction de transfert

$$H(s) = e^{-s\tau} - 1, \text{ avec } \tau = 0.1.$$

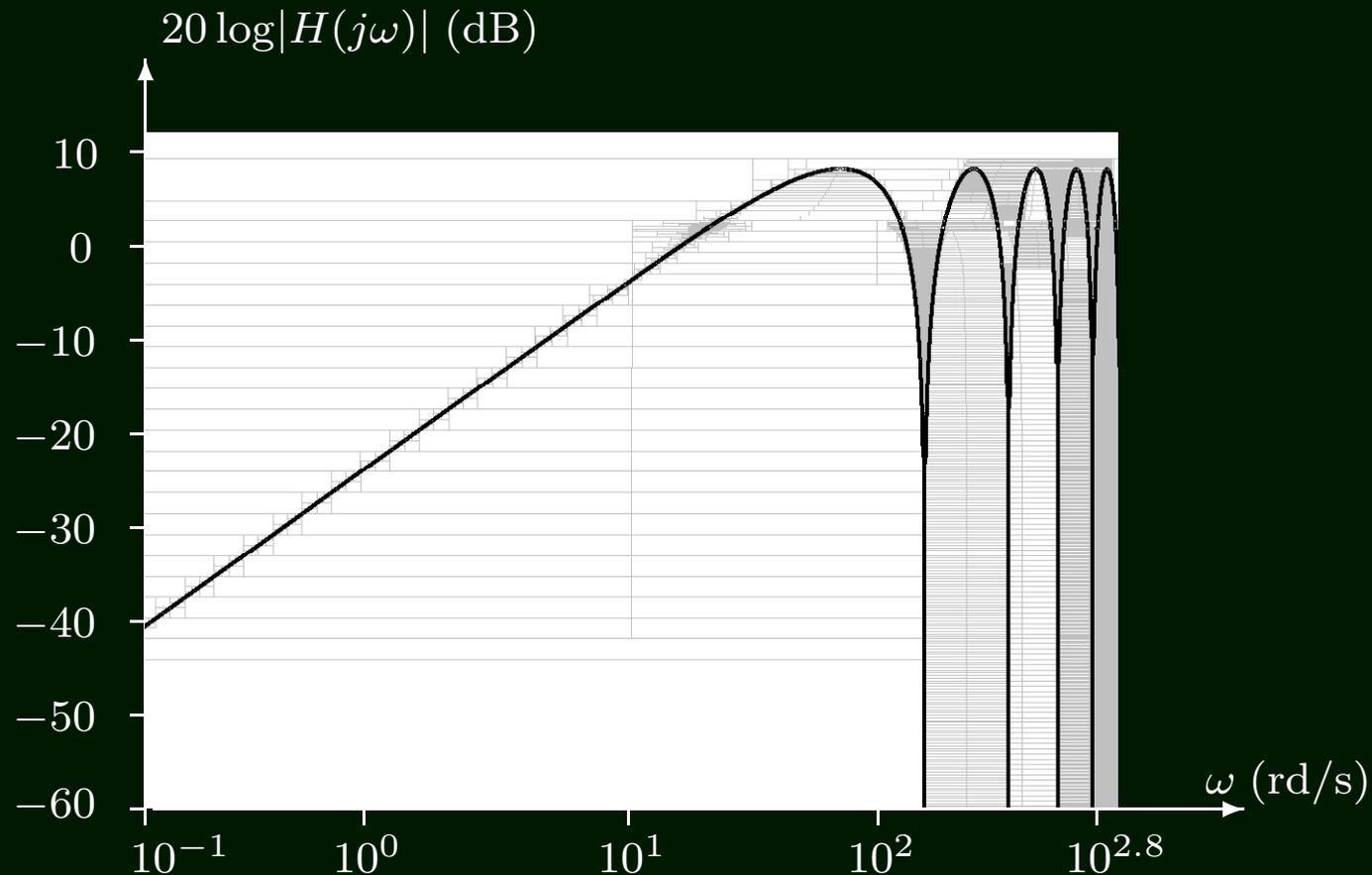


Diagramme de Bode du gain de $H(s)$.

**analyse de la
stabilité robuste**

analyse de la
stabilité robuste

équation caractéristique:

$$f(s, q, \tau) = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

$$f(s, q, \tau) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m q_{ik} s^i e^{-\tau_k s} = 0,$$

$$\text{avec } \begin{cases} q_{ik} \in [\underline{q}_{ik}, \bar{q}_{ik}] = [\mathbf{q}_{ik}] \\ \tau_k \in [\underline{\mathbf{d}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k] = [\mathbf{d}_k] \end{cases}, \quad \forall i, k.$$

analyse de la
stabilité robuste

équation caractéristique:

$$f(s, q, \tau) = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

$$f(s, q, \tau) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m q_{ik} s^i e^{-\tau_k s} = 0,$$

$$\text{avec } \begin{cases} q_{ik} \in [\underline{q}_{ik}, \bar{q}_{ik}] = [\mathbf{q}_{ik}] \\ \tau_k \in [\underline{\mathbf{d}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k] = [\mathbf{d}_k] \end{cases}, \quad \forall i, k.$$

$$\begin{cases} [\mathbf{q}] = \{[\mathbf{q}_{ik}]\}_{i,k} \\ [\mathbf{d}] = \{[\mathbf{d}_k]\}_k \end{cases}$$

analyse de la
stabilité robuste

équation caractéristique:

$$f(s, q, \tau) = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

$$f(s, q, \tau) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m q_{ik} s^i e^{-\tau_k s} = 0,$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} q_{ik} \in [\underline{q}_{ik}, \bar{q}_{ik}] = [\mathbf{q}_{ik}] \\ \tau_k \in [\underline{\mathbf{d}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k] = [\mathbf{d}_k] \end{array} \right., \quad \forall i, k.$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{q}] = \{[\mathbf{q}_{ik}]\}_{i,k} \\ [\mathbf{d}] = \{[\mathbf{d}_k]\}_k \end{array} \right.$$

stabilité robuste de la famille de quasipolynômes

$$\mathcal{F} = \{f(s, q, \tau) \mid q \in [\mathbf{q}], \tau \in [\mathbf{d}]\}$$

$$\forall q \in [\mathbf{q}], \tau \in [\mathbf{d}] : f(s, q, \tau) \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_+$$

analyse de la
stabilité robuste

$$f(s, q, \tau) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m q_{ik} s^i e^{-\tau_k s} = 0,$$

équation caractéristique:

$$f(s, q, \tau) = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

avec

$$\begin{cases} q_{ik} \in [\underline{q}_{ik}, \bar{q}_{ik}] = [\mathbf{q}_{ik}] \\ \tau_k \in [\underline{\mathbf{d}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k] = [\mathbf{d}_k] \end{cases}, \quad \forall i, k.$$

$$\mathbb{S} = \{(x, y, q, \tau) \in [\mathbf{x}] \times [\mathbf{y}] \times [\mathbf{q}] \times [\mathbf{d}] \mid f(x + jy, q, \tau) = 0\}$$

$$\begin{cases} [\mathbf{q}] = \{[\mathbf{q}_{ik}]\}_{i,k} \\ [\mathbf{d}] = \{[\mathbf{d}_k]\}_k \end{cases}$$

stabilité robuste de la famille de quasipolynômes

$$\mathcal{F} = \{f(s, q, \tau) \mid q \in [\mathbf{q}], \tau \in [\mathbf{d}]\}$$

$$\forall q \in [\mathbf{q}], \tau \in [\mathbf{d}] : f(s, q, \tau) \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_+$$

**analyse de la
stabilisation robuste**

analyse de la
stabilisation robuste

compensateur à structure prédéfinie $k(s)$ avec k
paramètres à déterminer dans $[k]$

équation caractéristique:

$$f(s, q, \tau, k) = 0, s \in \mathbb{C}$$

analyse de la
stabilisation robuste

compensateur à structure prédéfinie $k(s)$ avec k
paramètres à déterminer dans $[\mathbf{k}]$

équation caractéristique:

$$f(s, q, \tau, \mathbf{k}) = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

$$f(s, q, \tau, \mathbf{k}) = \sum_{i=0}^n \sum_{l=0}^m q_{il}(\mathbf{k}) s^i e^{-\tau_l(\mathbf{k})s} = 0,$$

avec

$$\begin{cases} q_{il}(0) \in [\underline{\mathbf{q}}_{il}(0), \overline{\mathbf{q}}_{il}(0)] = [\mathbf{q}_{il}(0)] \\ \tau_l(0) \in [\underline{\mathbf{d}}_l(0), \overline{\mathbf{d}}_l(0)] = [\mathbf{d}_l(0)] \\ \mathbf{k} \in [\mathbf{k}] \end{cases}, \quad \forall i, l.$$

analyse de la
stabilisation robuste

compensateur à structure prédéfinie $k(s)$ avec k
paramètres à déterminer dans $[\mathbf{k}]$

équation caractéristique:

$$f(s, q, \tau, \mathbf{k}) = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

$$f(s, q, \tau, \mathbf{k}) = \sum_{i=0}^n \sum_{l=0}^m q_{il}(\mathbf{k}) s^i e^{-\tau_l(\mathbf{k})s} = 0,$$

$$\text{avec } \begin{cases} q_{il}(0) \in [\underline{\mathbf{q}}_{il}(0), \overline{\mathbf{q}}_{il}(0)] = [\mathbf{q}_{il}(0)] \\ \tau_l(0) \in [\underline{\mathbf{d}}_l(0), \overline{\mathbf{d}}_l(0)] = [\mathbf{d}_l(0)] \\ \mathbf{k} \in [\mathbf{k}] \end{cases}, \quad \forall i, l.$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}(0)] &= \{[\mathbf{q}_{il}(0)]\}_{i,l} \\ [\mathbf{d}(0)] &= \{[\mathbf{d}_l(0)]\}_l \end{aligned}$$

analyse de la
stabilisation robuste

compensateur à structure prédéfinie $k(s)$ avec k
paramètres à déterminer dans $[\mathbf{k}]$

équation caractéristique:

$$f(s, q, \tau, \mathbf{k}) = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

$$f(s, q, \tau, \mathbf{k}) = \sum_{i=0}^n \sum_{l=0}^m q_{il}(\mathbf{k}) s^i e^{-\tau_l(\mathbf{k})s} = 0,$$

avec

$$\begin{cases} q_{il}(0) \in [\underline{\mathbf{q}}_{il}(0), \overline{\mathbf{q}}_{il}(0)] = [\mathbf{q}_{il}(0)] \\ \tau_l(0) \in [\underline{\mathbf{d}}_l(0), \overline{\mathbf{d}}_l(0)] = [\mathbf{d}_l(0)] \\ \mathbf{k} \in [\mathbf{k}] \end{cases}, \quad \forall i, l.$$

$$\mathbb{S} = \{ (x, y, q, \tau, \mathbf{k}) \in [\mathbf{x}] \times [\mathbf{y}] \times [\mathbf{q}] \times [\mathbf{d}] \times [\mathbf{k}] \text{ t.q. } f(x + jy, q, \tau, \mathbf{k}) = 0 \}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}(0)] &= \{[\mathbf{q}_{il}(0)]\}_{i,l} \\ [\mathbf{d}(0)] &= \{[\mathbf{d}_l(0)]\}_l \end{aligned}$$

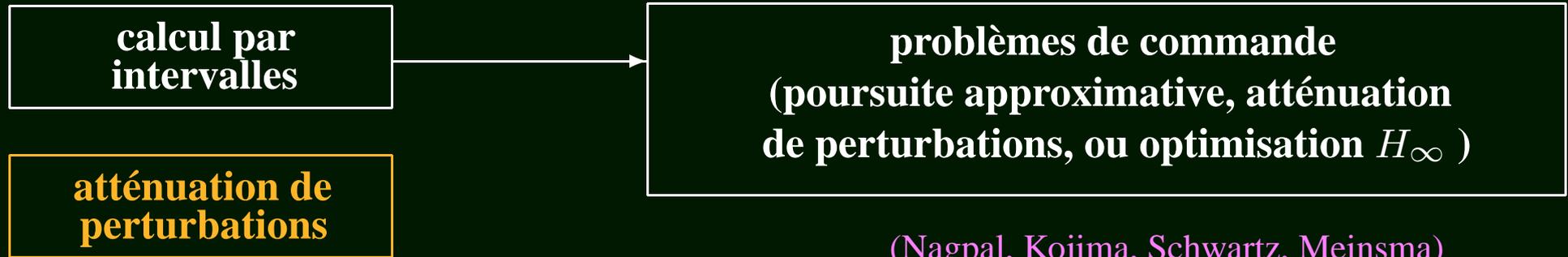
**calcul par
intervalles**

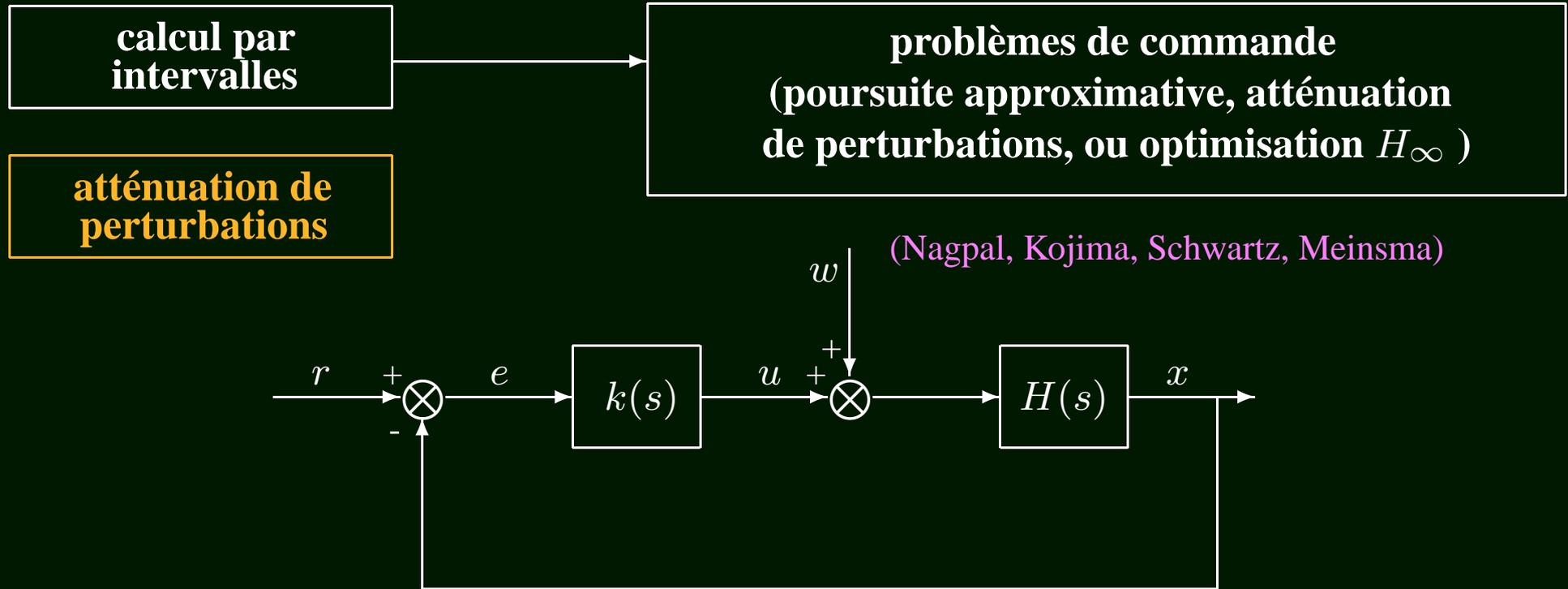
calcul par intervalles

```
graph LR; A[calcul par intervalles] --> B[problèmes de commande  
(poursuite approximative, atténuation de perturbations, ou optimisation H∞)];
```

problèmes de commande
(poursuite approximative, atténuation de perturbations, ou optimisation H_∞)

(Nagpal, Kojima, Schwartz, Meinsma)



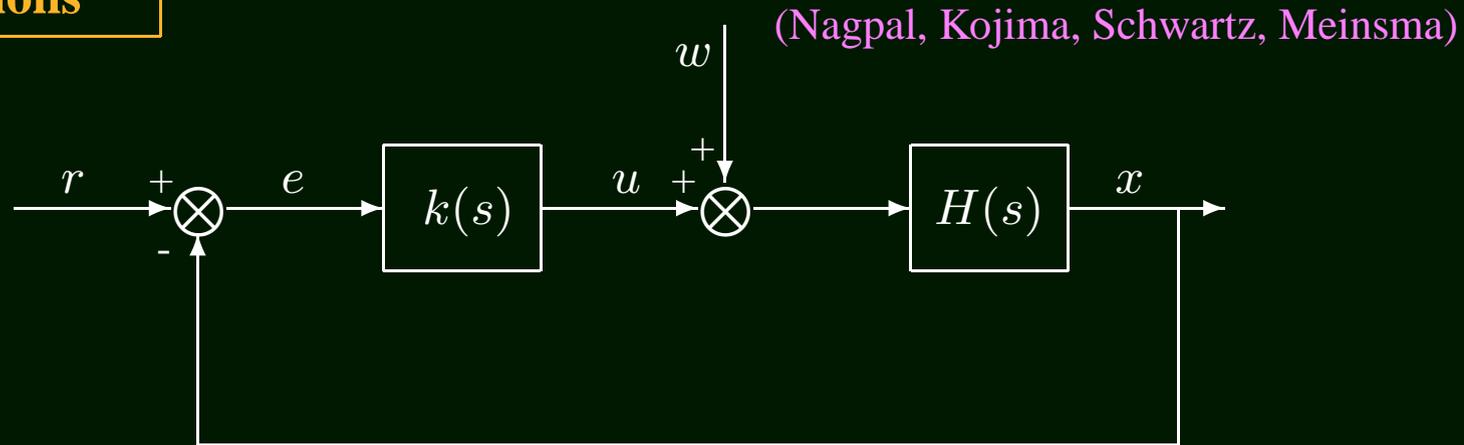


Boucle de commande d'un système à retard de transfert $H(s)$, avec un compensateur $k(s)$.

calcul par intervalles

atténuation de perturbations

problèmes de commande
(poursuite approximative, atténuation de perturbations, ou optimisation H_∞)



Boucle de commande d'un système à retard de transfert $H(s)$, avec un compensateur $k(s)$.

$$\begin{aligned}
 S(s, k) &= \frac{\hat{e}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{1}{1+H(s)k(s)} \\
 T(s, k) &= \frac{\hat{x}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{H(s)k(s)}{1+H(s)k(s)} \\
 T_{wx}(s, k) &= \frac{\hat{x}(s)}{\hat{w}(s)} = \frac{H(s)}{1+H(s)k(s)}
 \end{aligned}$$

Problème

Soit $T_{wx}(s, k)$ donné. Trouvons l'ensemble des paramètres k de $k(s)$:

$$\forall \omega \in \Omega, |T_{wx}(j\omega, k)| \leq \frac{1}{|W(j\omega)|}, \text{ et } T_{wx}(s, k) \text{ soit stable,}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalle fréquentiel et $W(s)$ une fonction poids.

Problème

Soit $T_{wx}(s, \mathbf{k})$ donné. Trouvons l'ensemble des paramètres \mathbf{k} de $k(s)$:

$$\forall \omega \in \Omega, |T_{wx}(j\omega, \mathbf{k})| \leq \frac{1}{|W(j\omega)|}, \text{ et } T_{wx}(s, \mathbf{k}) \text{ soit stable,}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalle fréquentiel et $W(s)$ une fonction poids.

$$\hookrightarrow \mathbb{S} = \{ \mathbf{k} \in [\mathbf{k}] \mid \forall \omega \in \Omega, |T_{wx}(j\omega, \mathbf{k})W(j\omega)| \leq 1, \text{ avec stabilité} \}$$

Problème

Soit $T_{wx}(s, k)$ donné. Trouvons l'ensemble des paramètres k de $k(s)$:

$$\forall \omega \in \Omega, |T_{wx}(j\omega, k)| \leq \frac{1}{|W(j\omega)|}, \text{ et } T_{wx}(s, k) \text{ soit stable,}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalle fréquentiel et $W(s)$ une fonction poids.

$$\hookrightarrow \mathbb{S} = \{ \mathbf{k} \in [\mathbf{k}] \mid \forall \omega \in \Omega, |T_{wx}(j\omega, k)W(j\omega)| \leq 1, \text{ avec stabilité} \}$$

Atténuation optimale de perturbations:

trouver $k_o \in [\mathbf{k}]$, si il existe, tel que

$$\sup_{\omega \in \Omega} |T_{wx}(j\omega, k_o)| = \min_{k \in [\mathbf{k}]} \sup_{\omega \in \Omega} |T_{wx}(j\omega, k)|, \text{ et } T_{wx}(s, k_o) \text{ stable.}$$

Problème

Soit $T_{wx}(s, \mathbf{k})$ donné. Trouvons l'ensemble des paramètres \mathbf{k} de $k(s)$:

$$\forall \omega \in \Omega, |T_{wx}(j\omega, \mathbf{k})| \leq \frac{1}{|W(j\omega)|}, \text{ et } T_{wx}(s, \mathbf{k}) \text{ soit stable,}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalle fréquentiel et $W(s)$ une fonction poids.

$$\hookrightarrow \mathbb{S} = \{ \mathbf{k} \in [\mathbf{k}] \mid \forall \omega \in \Omega, |T_{wx}(j\omega, \mathbf{k})W(j\omega)| \leq 1, \text{ avec stabilité} \}$$

Atténuation optimale de perturbations:

trouver $\mathbf{k}_o \in [\mathbf{k}]$, si il existe, tel que

$$\sup_{\omega \in \Omega} |T_{wx}(j\omega, \mathbf{k}_o)| = \min_{\mathbf{k} \in [\mathbf{k}]} \sup_{\omega \in \Omega} |T_{wx}(j\omega, \mathbf{k})|, \text{ et } T_{wx}(s, \mathbf{k}_o) \text{ stable.}$$

$$\hookrightarrow \mathbb{S} = \{ (\mathbf{k}, \gamma) \in [\mathbf{k}] \times \Upsilon \mid \forall \omega \in \Omega, |T_{wx}(j\omega, \mathbf{k})| \leq \gamma \}$$

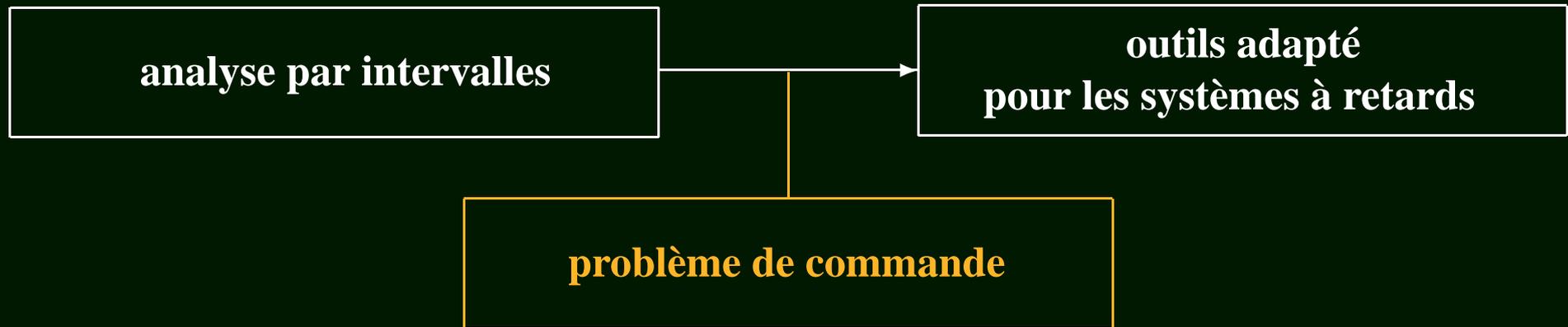
- **Introduction**
- **Notions de stabilité**
- **Problématiques sur la stabilité / stabilisation**
- **Analyse par intervalles et formulation ensembliste**
- **Exemples**
- **Conclusion**

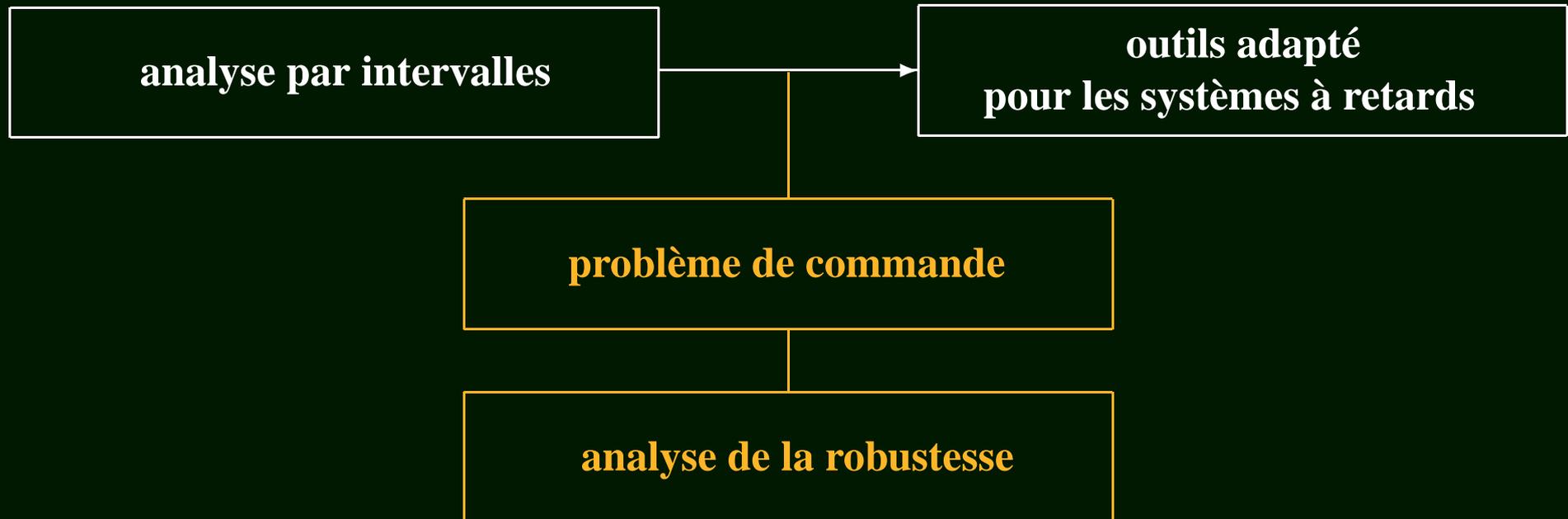
analyse par intervalles

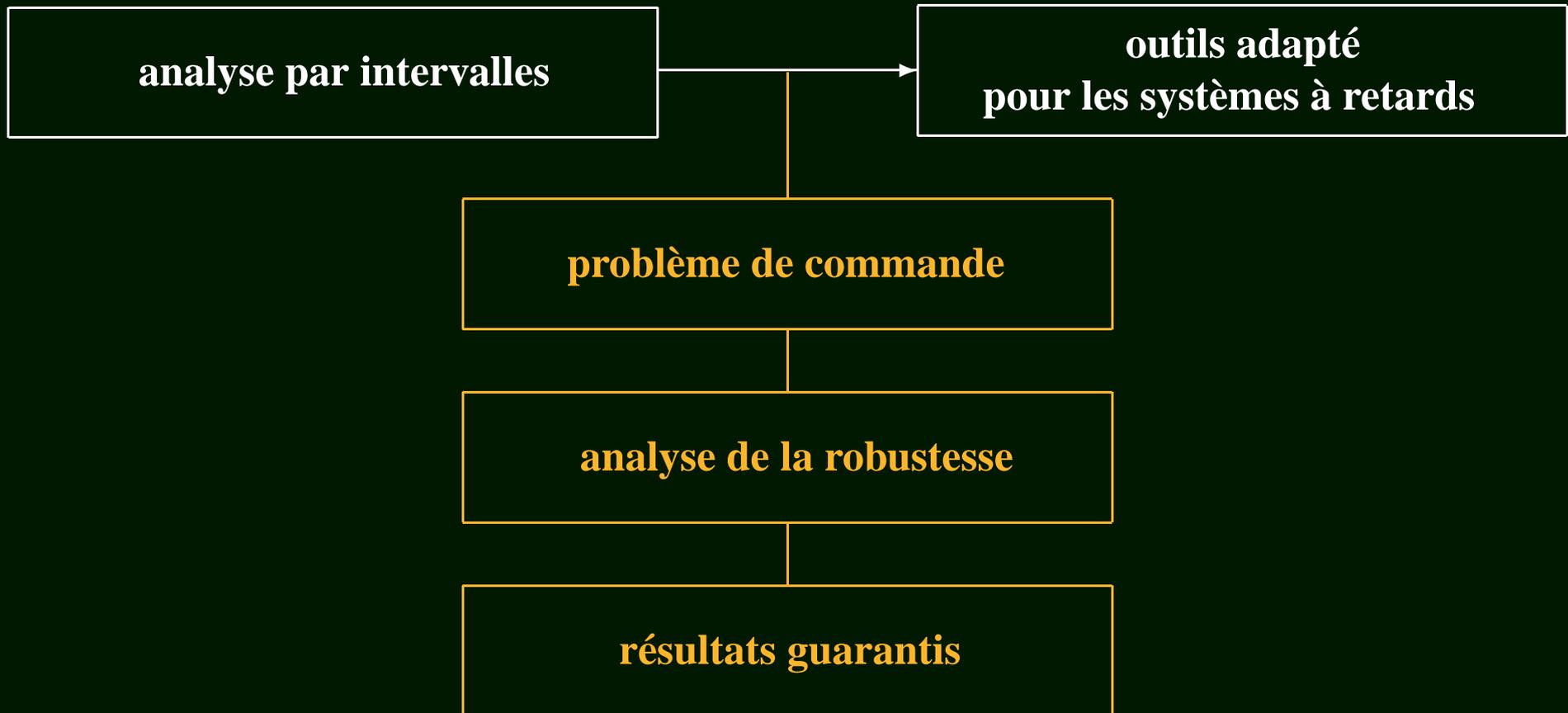
analyse par intervalles

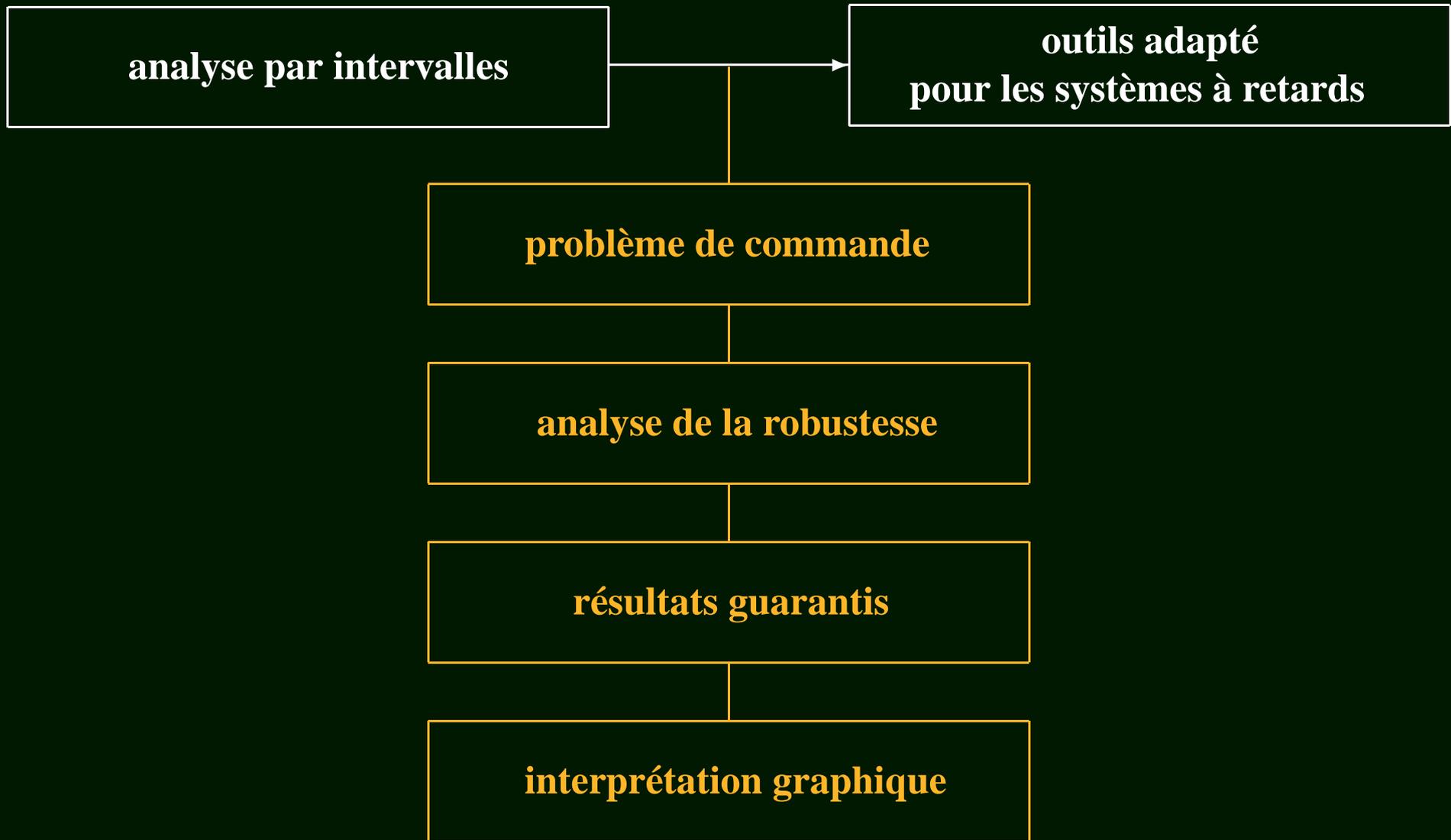


**outils adapté
pour les systèmes à retards**







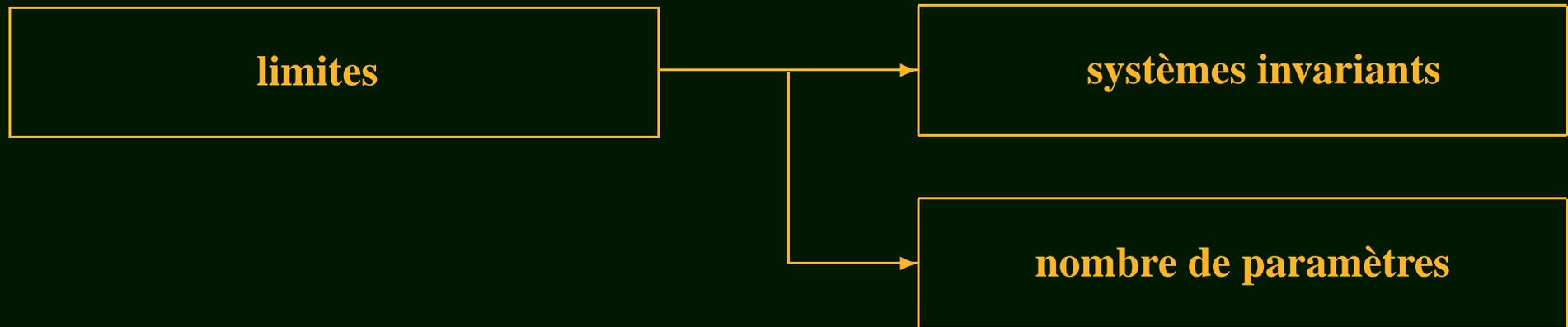


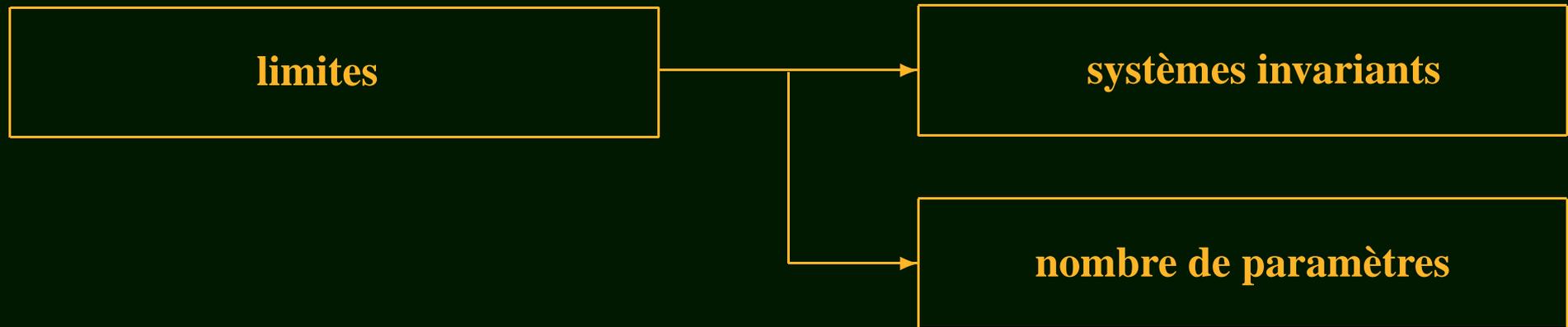
limites

limites



systèmes invariants





Questions ?