Introduction à la topologie algébrique
Garantir le type d'homotopie d'un ensemble via le calcul par intervalles

Nicolas Delanoue, Luc Jaulin, Bertrand Cottenceau

Groupe ensembliste - Université d'Angers - LISA

Jeudi 3 Février 2005

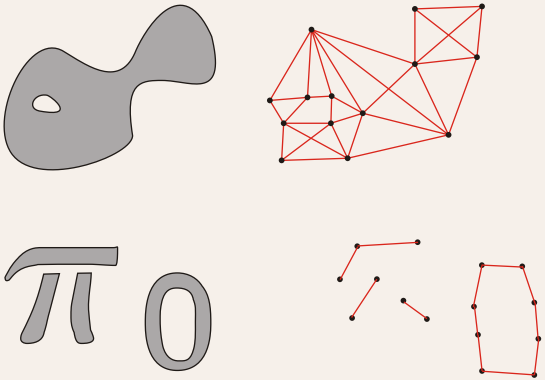


FIG.: Exemples de graphes générés par l'algorithme C.I.A. (Connexity via Interval Analysis.)

Objectif :

Construire une triangulation du même type d'homotopie que :

$$\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n ; f_{i,j}(x) \leq 0\} \text{ où } f_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\mathbb{S} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + xy - 2 & \leq & 0 \\ -x^2 - y^2 - xy + 1 & \leq & 0 \end{array} \right. \right\}$$

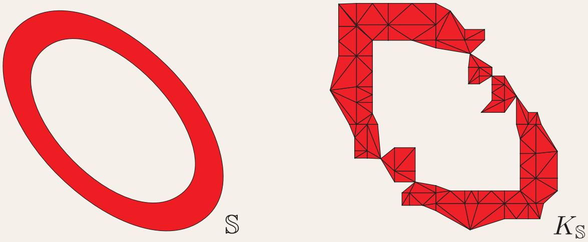


FIG.: Exemple d'un ensemble $\mathbb{S}$ et d'une triangulation générée par l'algorithme `Homotopy via Interval Analysis`.

Plan de l'exposé

1. Introduction à la topologie algébrique
2. Condition suffisante pour "Etoilé"
3. Discrétisation

Définition - Homéomorphisme

Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que $f : X \to Y$ est un homéomorphisme si

1. f est continue.
2. f est bijective.
3. f^{-1} est continue.

Définition - Espaces homéomorphes

Deux espaces topologiques X et Y sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme $f : X \to Y$.

Exemples d'homéomorphismes

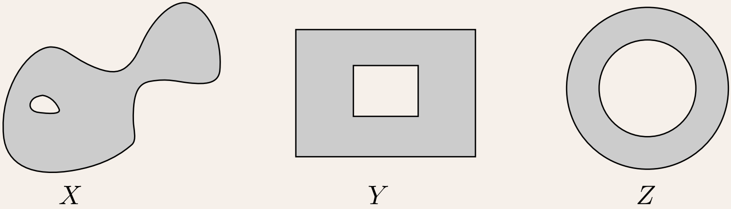


FIG.: Exemple d'ensembles homéomorphes.

Exemples d'homéomorphismes

Exemple d'ensembles homéomorphes.

On notera $X \cong Y \cong Z$.

Exemples d'homéomorphismes

Exemple d'ensembles homéomorphes.

Invariant topologique

Nombre de composantes connexes par arc.

Soit π_0 la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} \pi_0 : & \{ \text{ Espaces "gentils" } \} & \to & \mathbb{N} \\ & X & \mapsto & \text{Nombre de composantes} \\ & & & \text{connexes par arcs de } X \end{array}$$

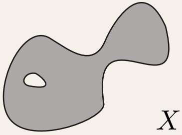
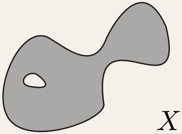
$\pi_0 :$  $\mapsto \quad 1$

FIG.: $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$.

$\pi_0 :$  $X \mapsto 1$

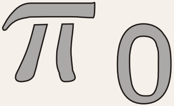
$\pi_0 :$  $Y \mapsto 4$

FIG.: $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$.

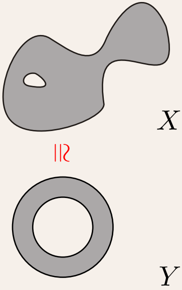


FIG.: $\pi_0(.)$ est un invariant topologique.

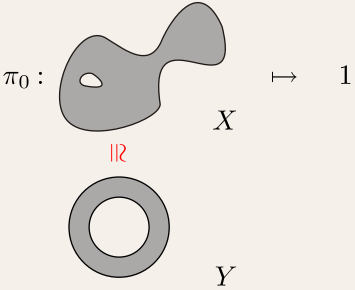


FIG.: $\pi_0(.)$ est un invariant topologique.

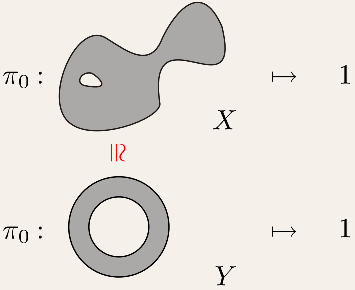


FIG.: $\pi_0(.)$ est un invariant topologique.

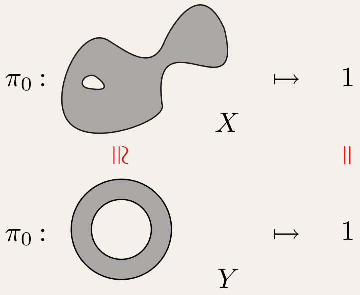


FIG.: $\pi_0(.)$ est un invariant topologique.

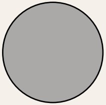
$\pi_0(.)$ est un invariant topologique car

$$\text{Si } X \cong Y \text{ alors } \pi_0(X) = \pi_0(Y)$$

Si X et Y deux espaces topologiques, tels que $\pi_0(X) \neq \pi_0(Y)$ alors $X \ncong Y$.

Il existe des ensembles topologiques tels que

$$X \ncong Y \text{ et } \pi_0(X) = \pi_0(Y)$$

π_0 :  X $\mapsto$ 1

$\ncong$ $\qquad$ $\|$

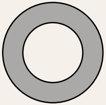
π_0 :  Y $\mapsto$ 1

FIG.: $\pi_0(.)$ n'est pas un invariant assez fort.

Définition - Fonctions homotopes

Deux fonctions continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont *homotopes*, $f \sim g$ s'il existe une fonction continue $F : X \times [0,1] \rightarrow Y$, telle que :

$$F(x,0) = f(x) \text{ et } F(x,1) = g(x),\ \forall x \in X.$$

$$f \sim g$$

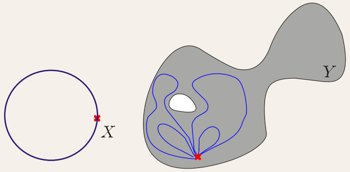


FIG.: Toutes ces fonctions sont homotopes.

$$f \sim f^0$$

Définition du π_1 d'un ensemble

Soit Y un espace topologique connexe par arcs, et $y_0 \in Y$,

$$\pi_1(Y, y_0) = \{f : \mathbb{S}_1 \to Y,\ f \text{ continue }, f(x_0) = y_0\}/\sim$$

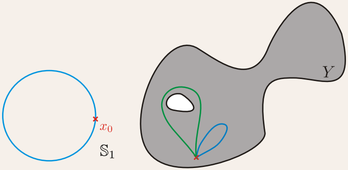


FIG.: f^1 et f^0.

Poincaré, H. 'Analysis situs', J. Ecole polytech. (2)1, 1-121 (1895).

Définition du π_1 d'un ensemble

Soit Y un espace topologique connexe par arcs, et $y_0 \in Y$,

$$\pi_1(Y, y_0) = \{f : \mathbb{S}_1 \to Y,\ f \text{ continue }, f(x_0) = y_0\}/\sim$$

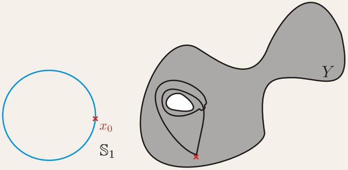


FIG.: f^2

Poincaré, H. 'Analysis situs', J. Ecole polytech. (2)1, 1-121 (1895).

Propriétés

$\pi_1(Y, y_0)$ est un groupe.

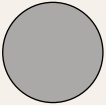
$$f^0 \times f^1 \sim f^1.$$

Propriétés

$\pi_1(Y, y_0)$ est un groupe.

$$f^1 \times f^{-1} \sim f^0$$

$\pi_1 :$



$X \quad \mapsto \quad \{0\}$

FIG.: $\pi_1(.)$ est un invariant topologique.

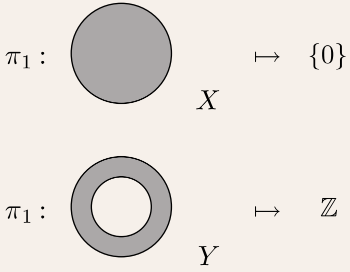


FIG.: $\pi_1(.)$ est un invariant topologique.

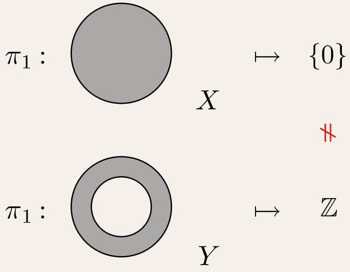


FIG.: $\pi_1(.)$ est un invariant topologique.

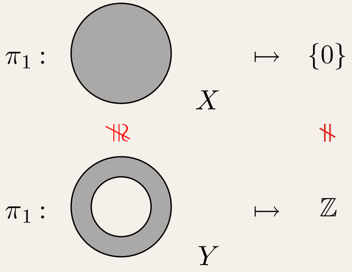


FIG.: $\pi_1(.)$ est un invariant topologique.

Définition

Deux espaces X et Y ont le *même type d'homotopie* s'il existe des applications continues $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ telles que $g \circ f \sim 1_X$ et $f \circ g \sim 1_Y$. On notera $X \simeq Y$.

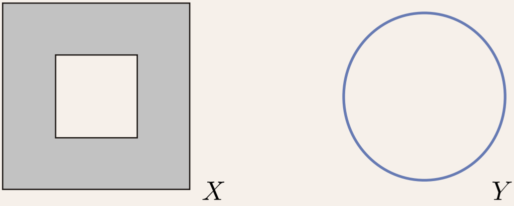


FIG.: $X \simeq Y$

Deux ensembles du même type d'homotopie.

Définition

Un espace X est *contractile* s'il a le même type d'homotopie qu'un point.

$$X \simeq Y.$$

Proposition

Deux ensembles homéomorphes sont du même type d'homotopie.

$$X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$$

Remarque

La plupart des invariants topologiques ne permettent pas de différencier deux ensembles du même type d'homotopie.

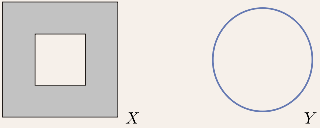


FIG.: $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) = \pi_1(Y)$

Une triangulation

Définition d'une triangulation abstraite

Soit $\mathcal{N}$ un ensemble fini de symboles $\{(a^0), (a^1), \ldots, (a^n)\}$
Une triangulation abstraite $\mathcal{K}$ est une famille des parties de $\mathcal{N}$ qui vérifie : $\sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \forall \sigma_0 \subset \sigma, \sigma_0 \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}\mathcal{K} \quad = \quad & \{(a^0),(a^1),(a^2),(a^3),(a^4),\\ & (a^0,a^1),(a^1,a^2),(a^0,a^2),(a^3,a^4),\\ & (a^0,a^1,a^2)\}\end{aligned}$$

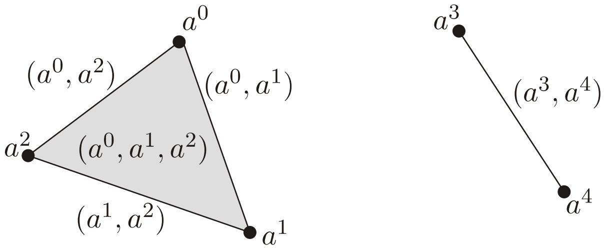


FIG.: Une réalisation de $\mathcal{K}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{K} \quad = \quad & \{(a^0),(a^1),(a^2),(a^3),(a^4),\\ & (a^0,a^1),(a^1,a^2),(a^0,a^2),(a^3,a^4),\\ & (a^0,a^1,a^2)\}\end{aligned}$$

On le notera par : $a^0a^1a^2 + a^3a^4$

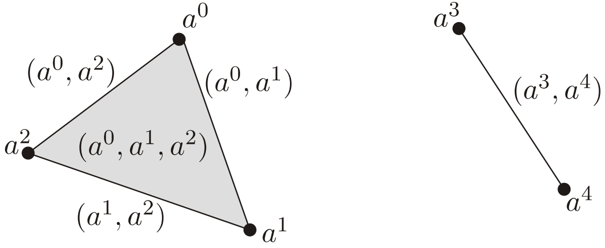
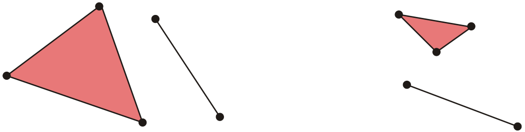


FIG.: Une réalisation de $\mathcal{K}$.

Théorème

Si $|K_1|$ et $|K_2|$ deux réalisations d'une triangulation abstraite $\mathcal{K}$, alors $|K_1|$ et $|K_2|$ sont homéomorphes.



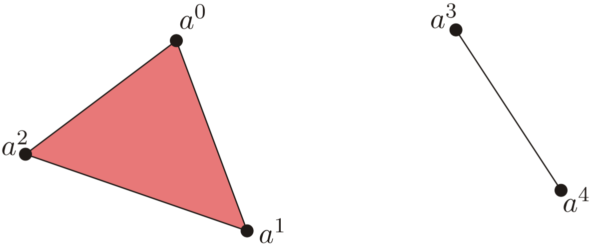
$|K_1|$ $|K_2|$

Définition

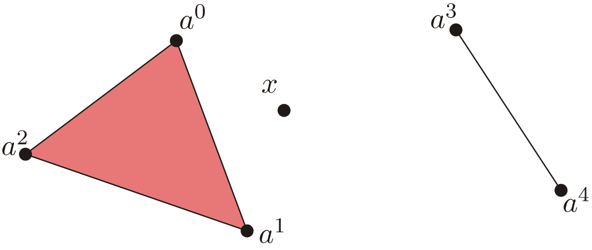
Soit $\mathcal{K}$ un triangulation abstraite, et (x) un symbole. On note $\mathcal{C}(x, \mathcal{K})$ l'ensemble :

$$\mathcal{C}(x, \mathcal{K}) = \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} (x, \sigma).$$

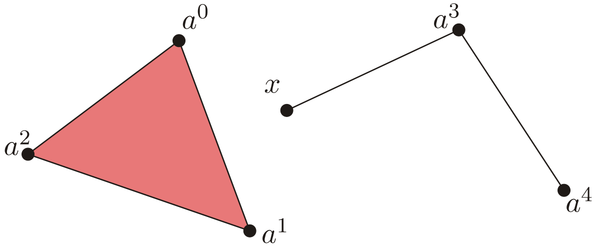
où $(x, \sigma) := (x, a^1, \ldots, a^n)$ avec $\sigma = (a^1, \ldots, a^n) \in \mathcal{K}$.
$\mathcal{C}(x, \mathcal{K})$ est le *cône* de sommet x et de base $\mathcal{K}$.



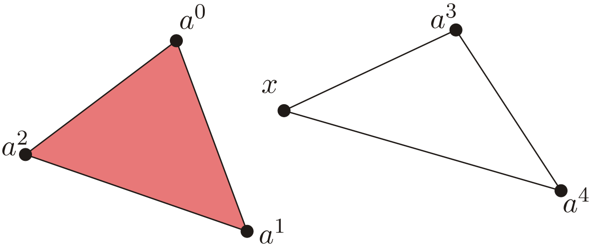
$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) \quad = \quad & \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ & (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}\end{aligned}$$



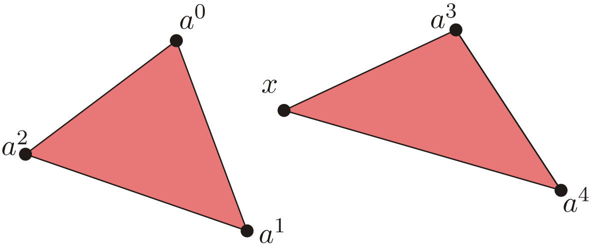
$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) &= \{(x)\}\cup\mathcal{K}\cup\big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ &\quad (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}\end{aligned}$$



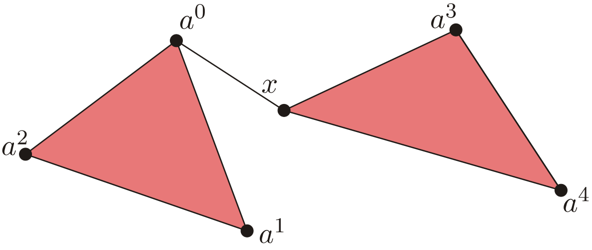
$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) \quad = \quad & \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ & (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}\end{aligned}$$



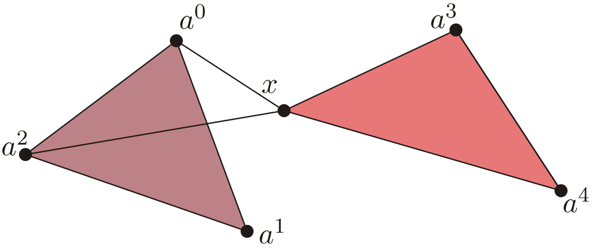
$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) \quad = \quad & \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ & (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}\end{aligned}$$



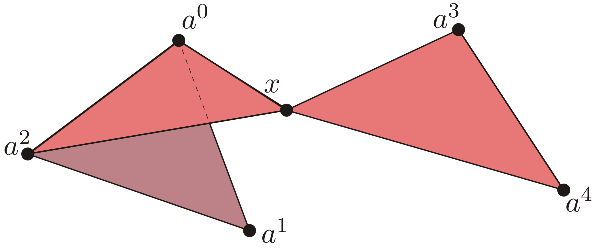
$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) \quad = \quad & \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ & (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}\end{aligned}$$



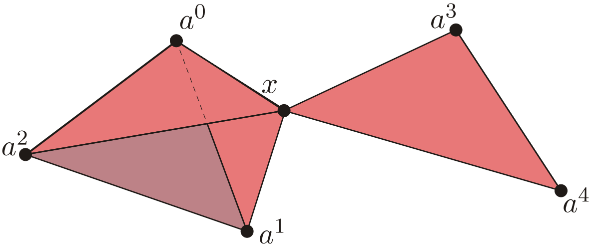
$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) \quad = \quad & \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ & (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}\end{aligned}$$



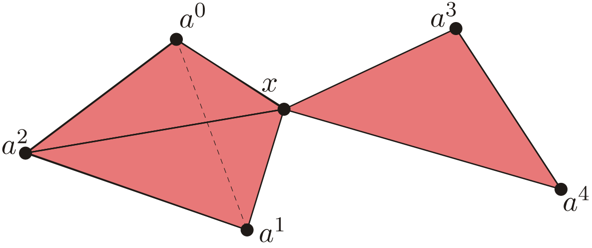
$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) \quad = \quad & \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4), \\
& (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}
\end{aligned}
$$



$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) &= \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ &\quad (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}\end{aligned}$$



$$\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) = \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),$$
$$(x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}$$

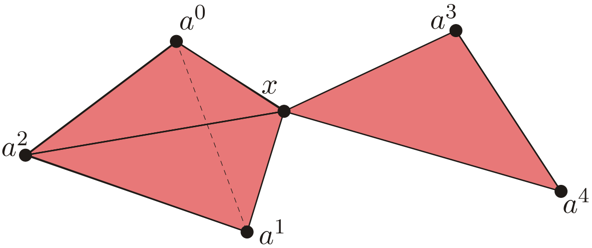


$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) &= \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ &\quad (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) &= x(a^0a^1a^2 + a^3a^4)\\ &= xa^0a^1a^2 + xa^3a^4\end{aligned}$$

Propriété d'un cône

Un cône est contractile.



Objectif :

Construire une triangulation du même type d'homotopie que :

$$\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n ; f_{i,j}(x) \leq 0\} \ \text{où} f_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\mathbb{S} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + xy - 2 & \leq & 0 \\ -x^2 - y^2 - xy + 1 & \leq & 0 \end{array} \right. \right\}$$

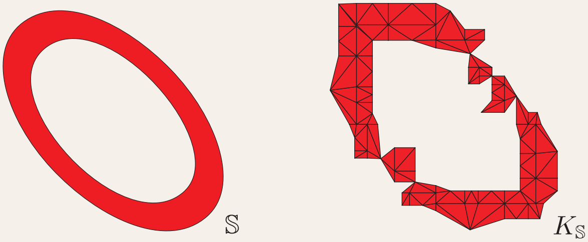


FIG.: Exemple d'un ensemble $\mathbb{S}$ et d'une triangulation générée par l'algorithme `Homotopy via Interval Analysis`.

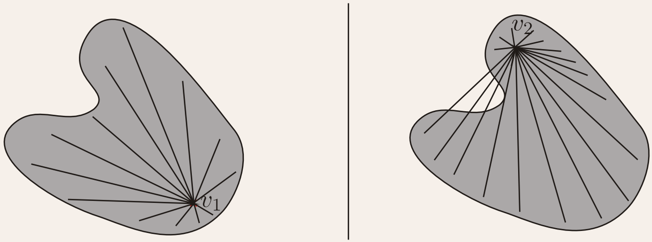
1. Créer un recouvrement $\{\mathbb{S}_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{S}$ tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$

2. Créer un triangulation du même type d'homotopie que $\mathbb{S}$.

Définition

Le point v est une *étoile* pour le sous-espace X de $\mathbb{R}^n$ si $\forall x \in X$, le segment $[x, v]$ est inclus dans X.



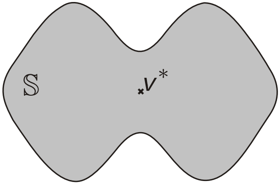
Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

▸ Idée de preuve - interpretation géometrique



$v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble
$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-3; 3]^2, \text{ tel que } f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$

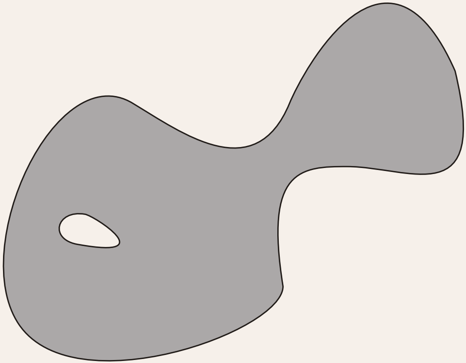
$$\Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{x}) = 0 \\ Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{n'admet aucune solution}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ \partial_x f(x, y).(x - 0.6) + \partial_y f(x, y).(y + 0.5) \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{n'admet aucune solution}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ (2x + y)(x - 0.6) + (2y + x)(y + 0.5) \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{n'admet aucune solution}$$

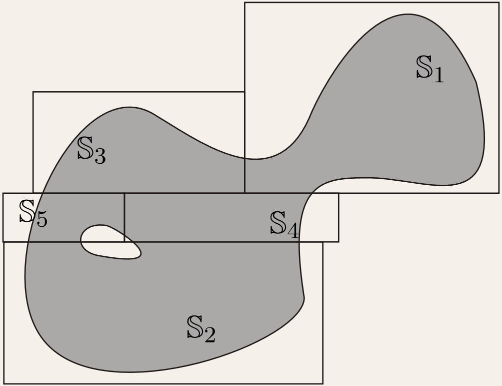
Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i\in I}$, $(\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i)$ tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$



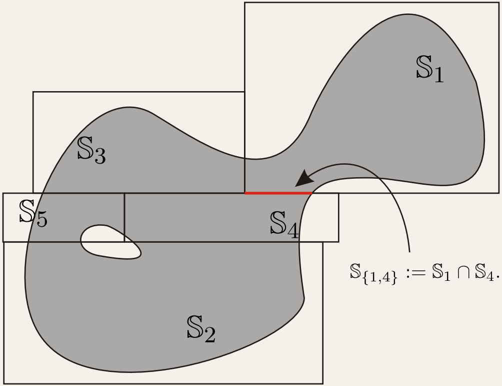
Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i \in I}$, $(\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i)$ tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$



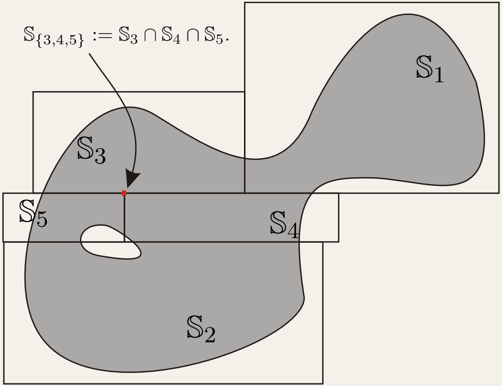
Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i\in I}$, ($\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i$) tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$

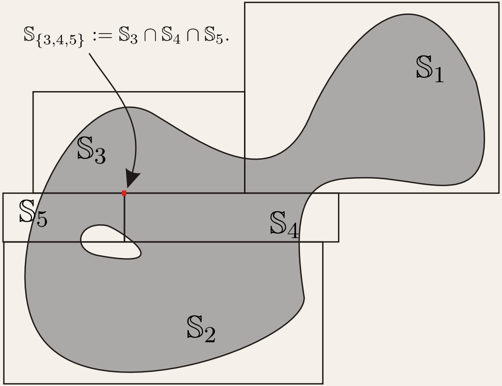


Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i \in I}$, $(\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i)$ tel que

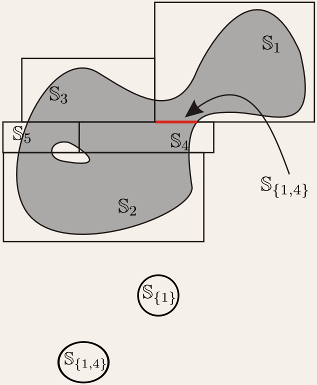
$$\forall J \subset I, \bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$



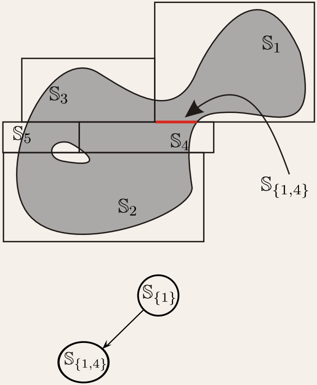
Soit $\mathcal{F} = \{\mathbb{S}_J, J \subset I, \text{ tel que } \mathbb{S}_J \text{ est contractile }\}$.



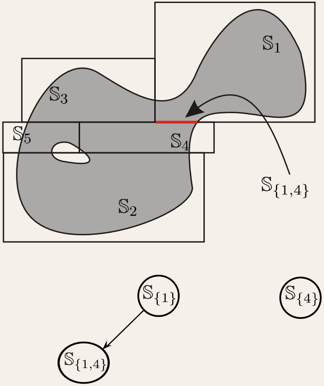
Ordonner $\mathcal{F}$ avec l'inclusion :



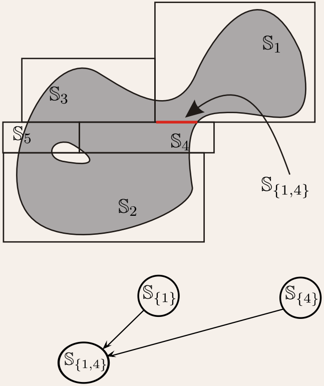
Ordonner $\mathcal{F}$ avec l'inclusion :



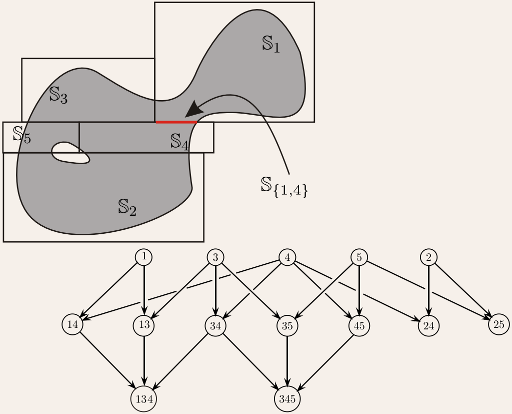
Ordonner $\mathcal{F}$ avec l'inclusion :

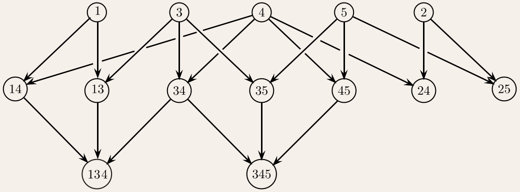


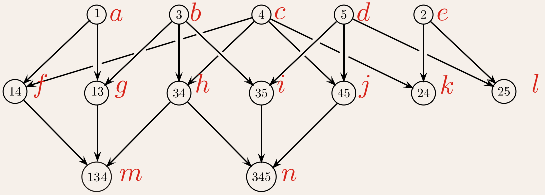
Ordonner $\mathcal{F}$ avec l'inclusion :

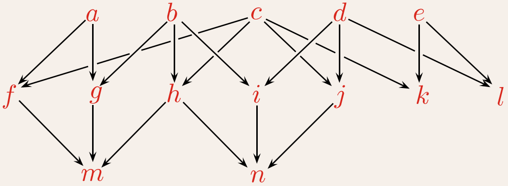


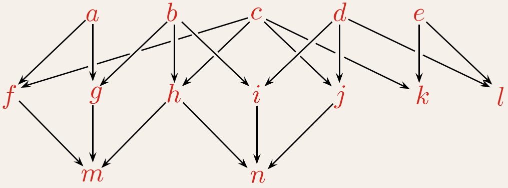
Ordonner $\mathcal{F}$ avec l'inclusion :




1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345

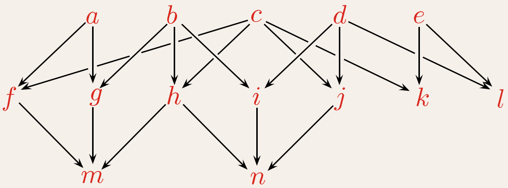

1
a
3
b
4
c
5
d
2
e
14
f
13
g
34
h
35
i
45
j
24
k
25
l
134
m
345
n


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n



$$a(fm+gm)+b(gm+h(m+n)+in)+$$

$$+c(fm+h(m+n)+jn+k)+d(in+jn+l)+e(k+l)$$



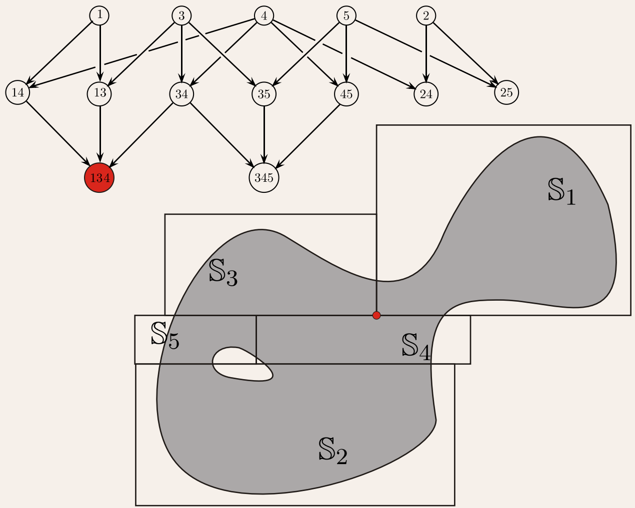
$$a(fm+gm)+b(gm+h(m+n)+in)+$$

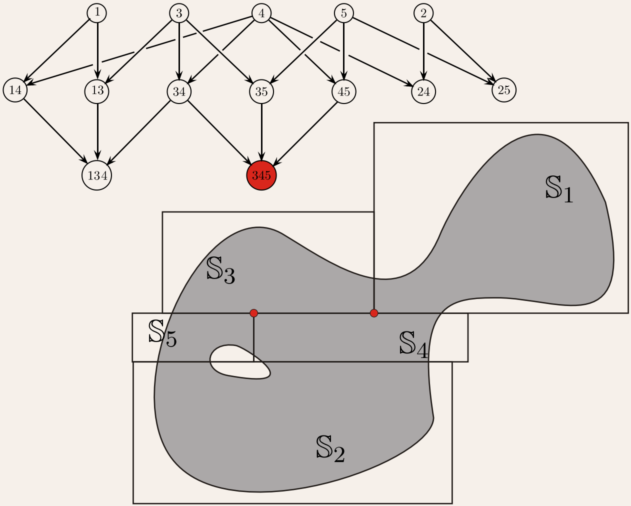
$$+c(fm+h(m+n)+jn+k)+d(in+jn+l)+e(k+l)$$

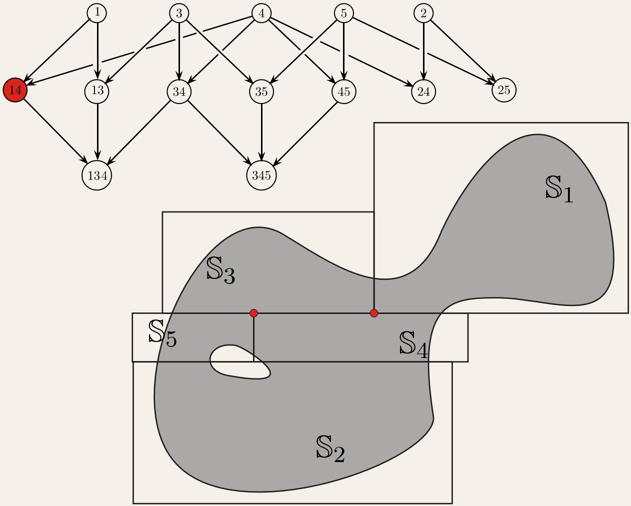
$$=$$

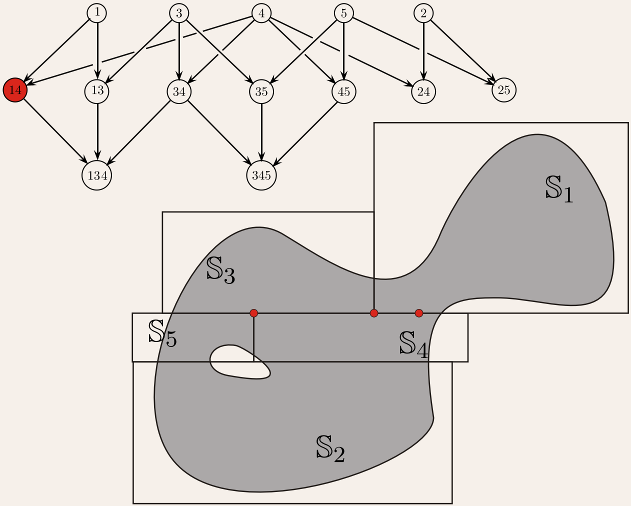
$$afm+agm+bgm+bhm+bhn+bin+$$

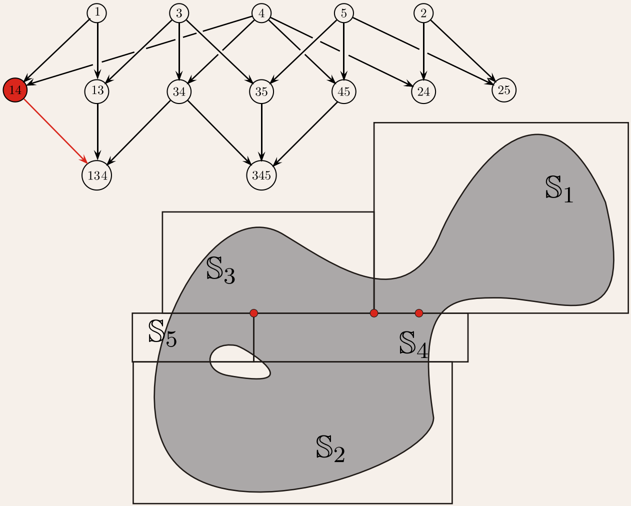
$$+cfm+chm+chn+cjn+ck+din+djn+dl+ek+el$$

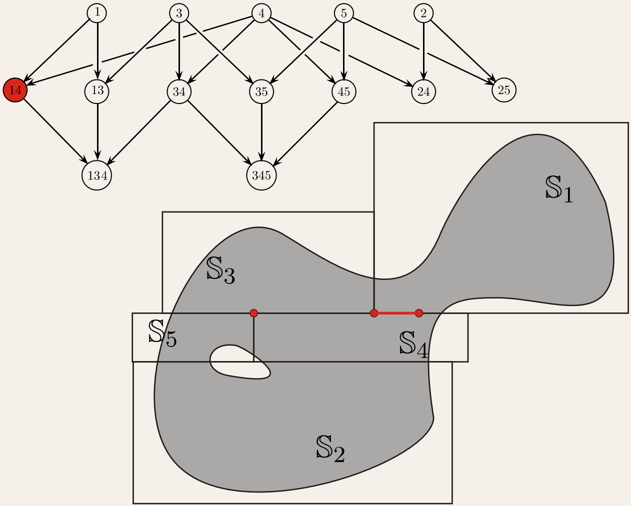

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

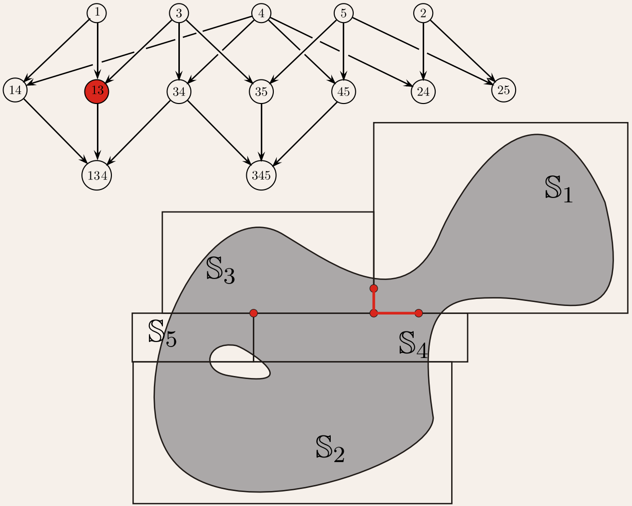

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

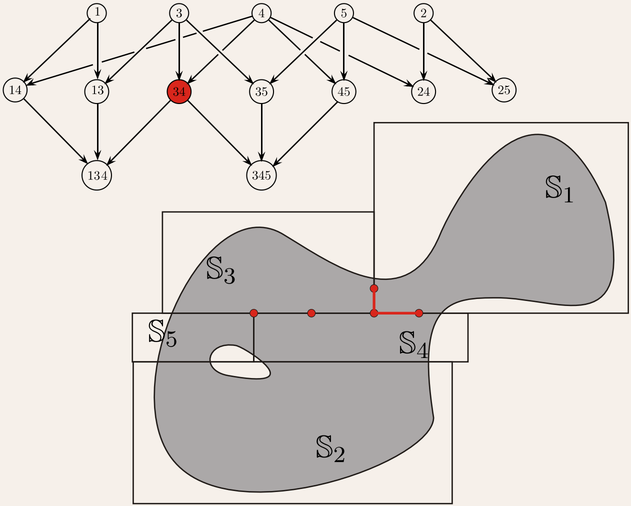

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

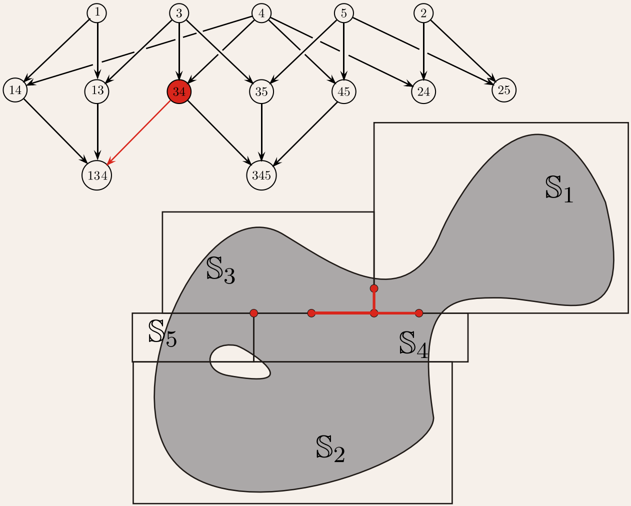

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

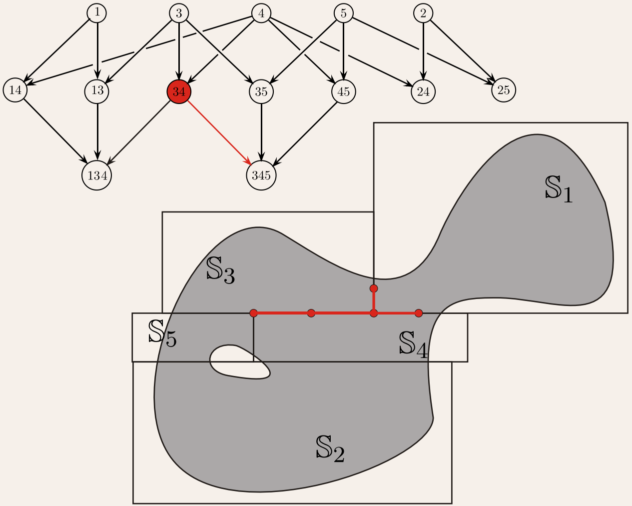

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

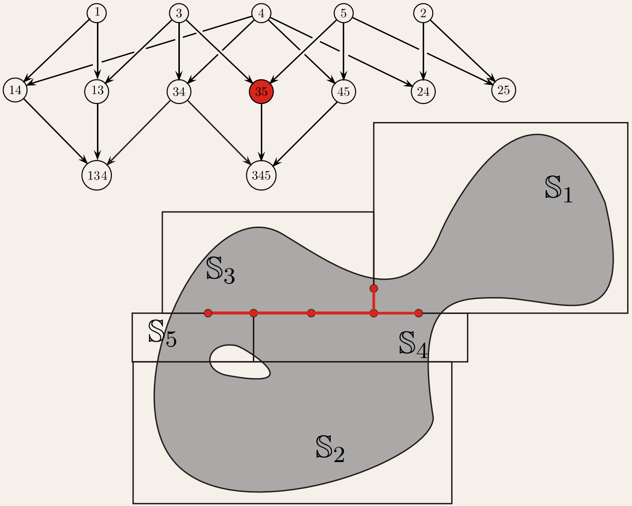

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

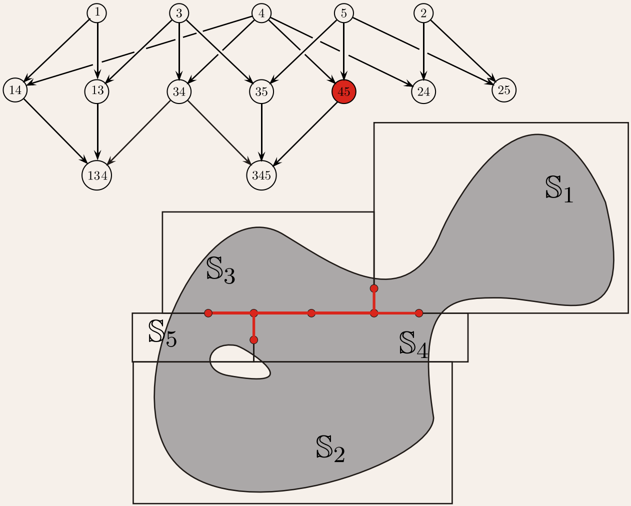

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

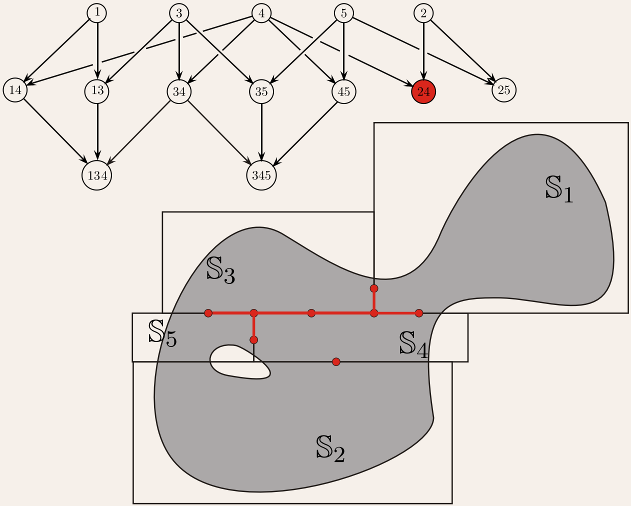

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

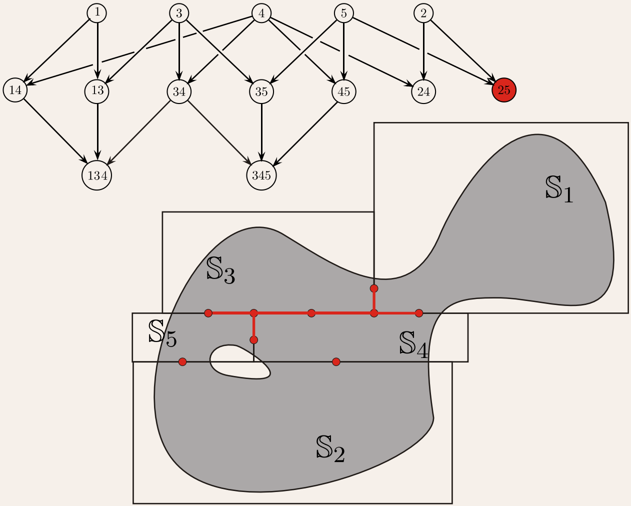

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

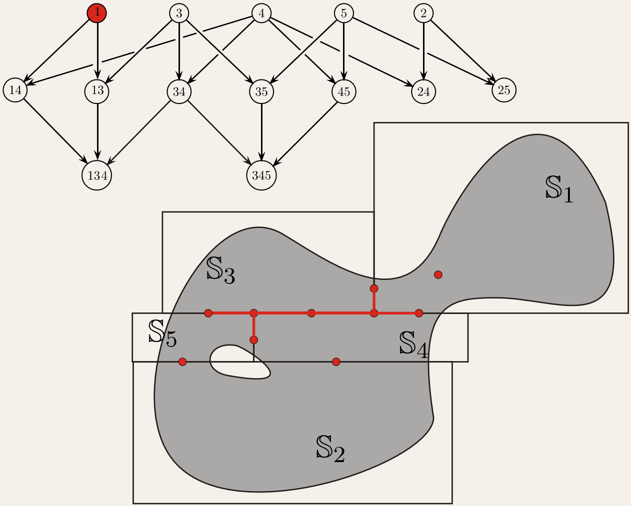

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

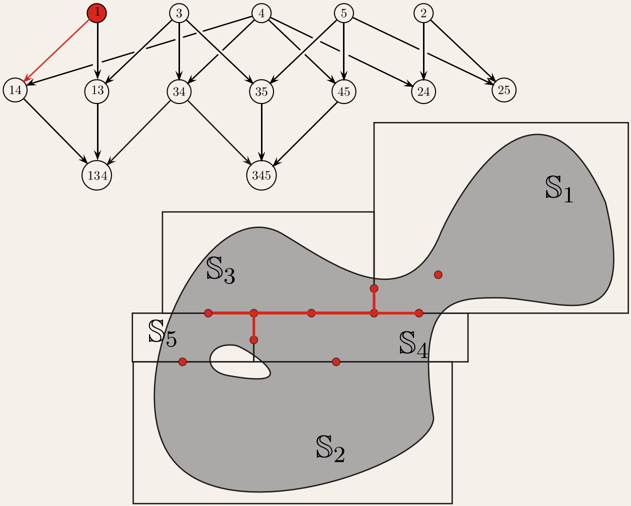

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

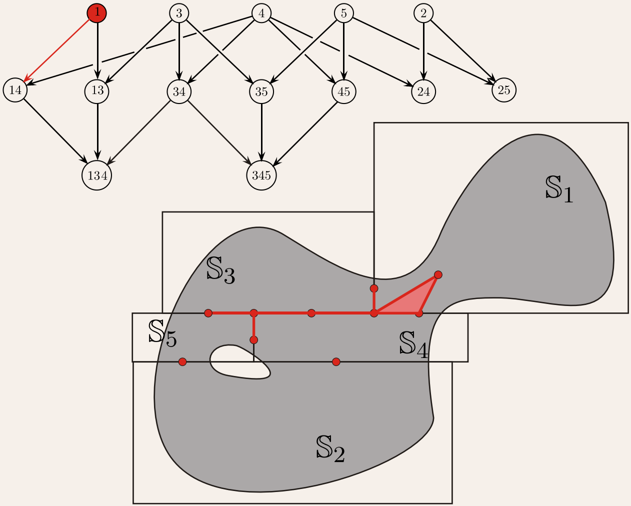

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

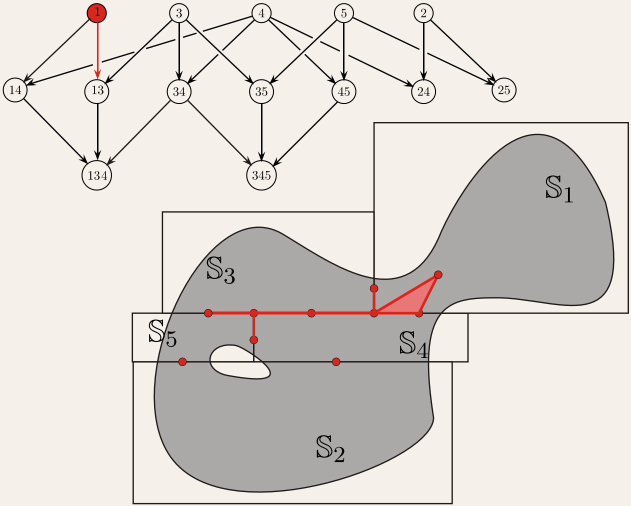

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

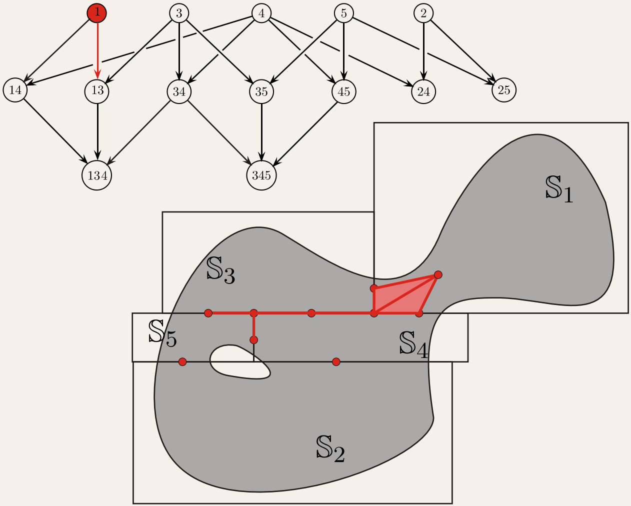

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

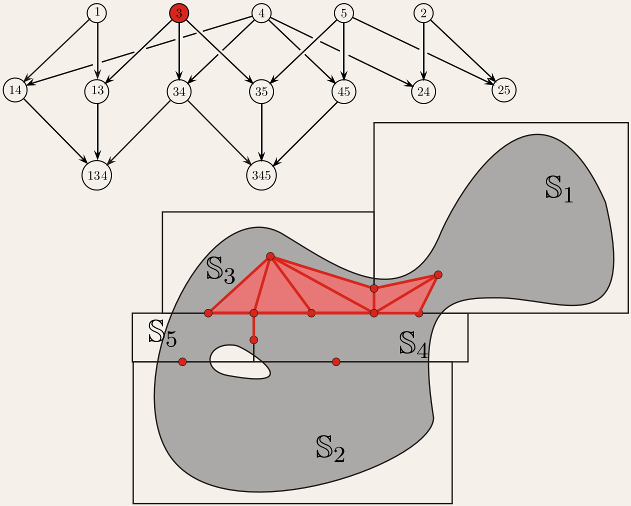

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

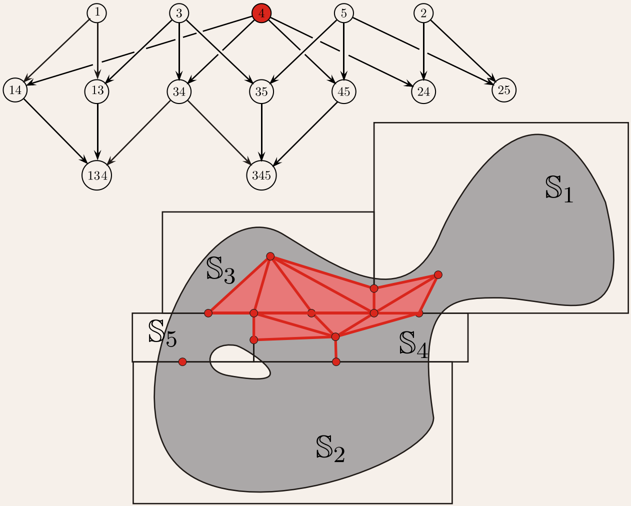

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

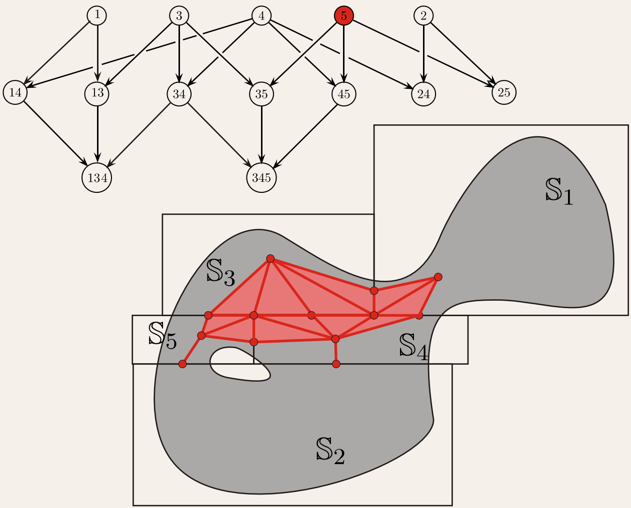

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

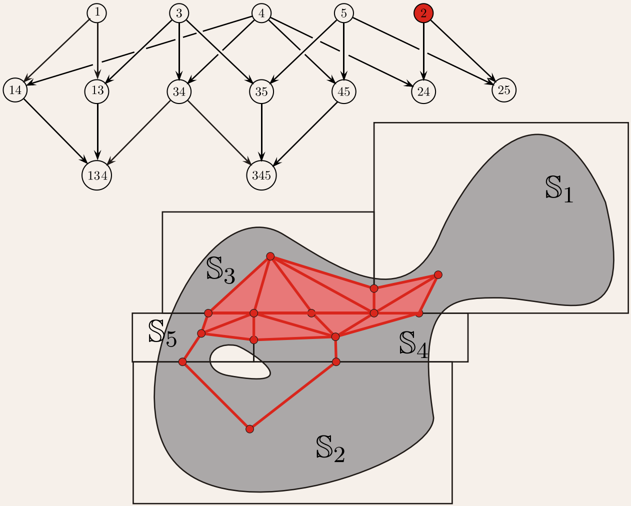

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$


1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$


1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$


1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$


1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

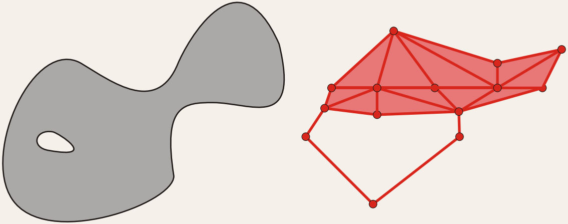

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

Equivalence d'homotopie

Proposition

Soit $\mathbb{S}$ une partie de $\mathbb{R}^n$, si $\{p_i\}_{i\in I}$ est un pavage tel que $\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j$ est contractile ou vide, et $\mathcal{K}$ la triangulation construite précédemment, alors

$\mathbb{S}$ et $\mathcal{K}$ sont du même type d'homotopie.



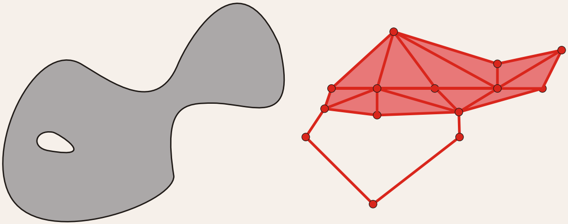
▸ Idée de preuve

Un exemple avec le solver `Homotopy Via Interval Analysis`

$$\mathbb{S} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + xy - 2 & \leq & 0 \\ -x^2 - y^2 - xy + 1 & \leq & 0 \end{array} \right. \right\}$$

`http://www.istia.univ-angers.fr/~delanoue/`

Conclusion



Travaux futurs

- Agrandir la classe des ensembles que le solveur peut traiter.
- Utiliser ces outils pour la détermination de cycles limites et de points fixes de flots d'équations différentielles.

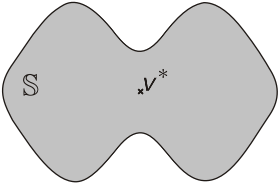
Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D, \quad (1)$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) est inconsistent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$



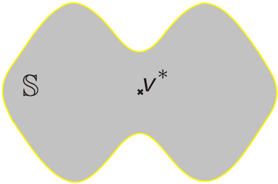
Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \;/\; f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0,\; Df(x).(x - v^*) \leq 0,\; x \in D, \quad (1)$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) est inconsistent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$



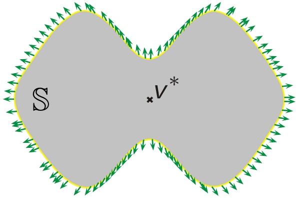
Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D, \quad (1)$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) est inconsistent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$



$x - v^*$

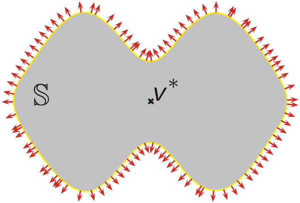
Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D, \quad (1)$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) est inconsistent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$



$Df(x)$

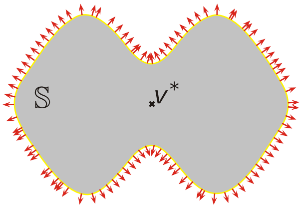
Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

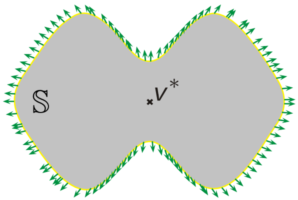
$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D, \quad (1)$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) est inconsistent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$



$Df(x)$



$x - v^*$

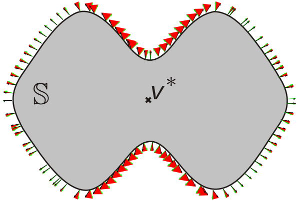
Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D, \quad (1)$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) est inconsistent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$

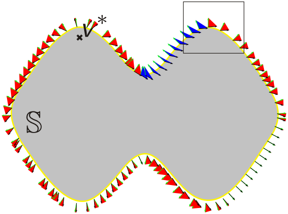


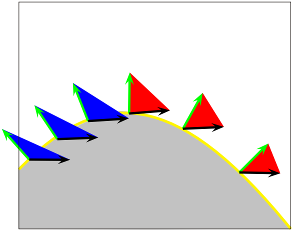
Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D, \quad (1)$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.





Return