

# Méthodes de caractérisation ensembliste

Adrot Olivier

GT MEA du 27/05/2004  
Laboratoire d'Automatique de Grenoble

# Plan de l'exposé

I. Objectifs

II. Positionnement du problème (approche géométrique)

III. Quelques rappels sur l'outil ensembliste

IV. Caractérisation

V. Extensions

# I. Objectifs

# Objectifs

- Objectif : déterminer l'ensemble des valeurs des incertitudes paramétriques d'un modèle permettant d'expliquer un jeu d'observations donné

$$\tilde{y}_k, k \in \{1, \dots, h\} \quad h \text{ horizon d'observation}$$

- Modèle envisagé à l'instant courant  $k$  :

$$y_k = \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + e_k$$

$y_k$  : sortie scalaire du modèle

$\tilde{\mathbf{x}}_k^T$  : vecteur ligne constitué d'observations

$\boldsymbol{\theta}_k$  : vecteur des incertitudes paramétriques

$e_k$  : erreur d'équation additive indépendante

# Objectifs

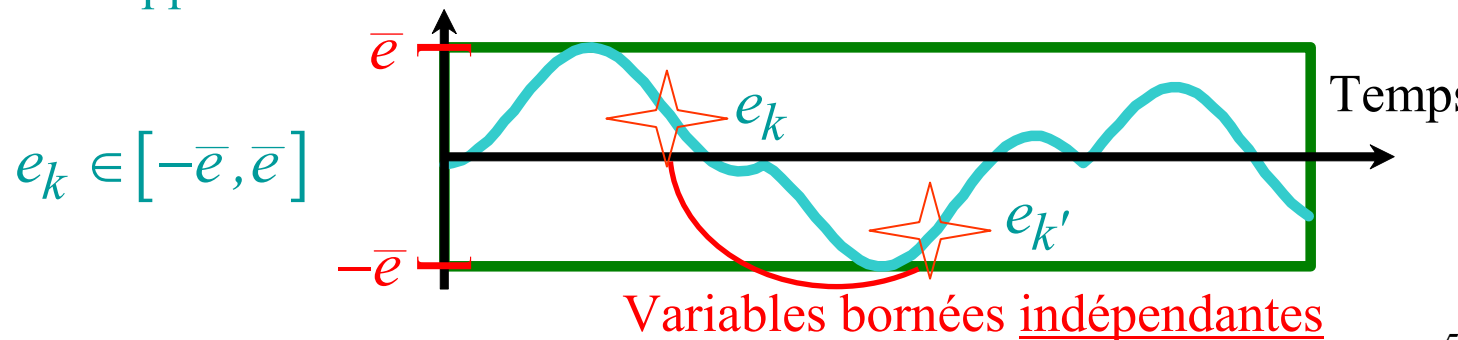
## ➤ Modélisation ensembliste :

- ❑ Erreur d'équation  $e_k$  représentée par une variable bornée symétrique

$$e_k \in [-\bar{e}, \bar{e}], \bar{e} \in \mathbb{R}^+$$

$\bar{e}$  supposé connu (pour l'instant...)

- ❑ Vecteur des incertitudes paramétriques  $\theta_k$  représenté par un vecteur de variables bornées
- ❑  $\theta_k, e_k$  : variables bornées variant dans le temps aléatoirement sur leurs support



# Objectifs

➤ Objectif : trouver les caractéristiques de  $\theta_k$  telles que les observations  $\tilde{y}_k$  soient cohérentes avec le modèle

⇒ trouver un domaine  $\mathcal{S}(\theta)$  tel qu'il existe à chaque instant  $k$  un vecteur  $\theta_k \in \mathcal{S}(\theta)$  vérifiant :

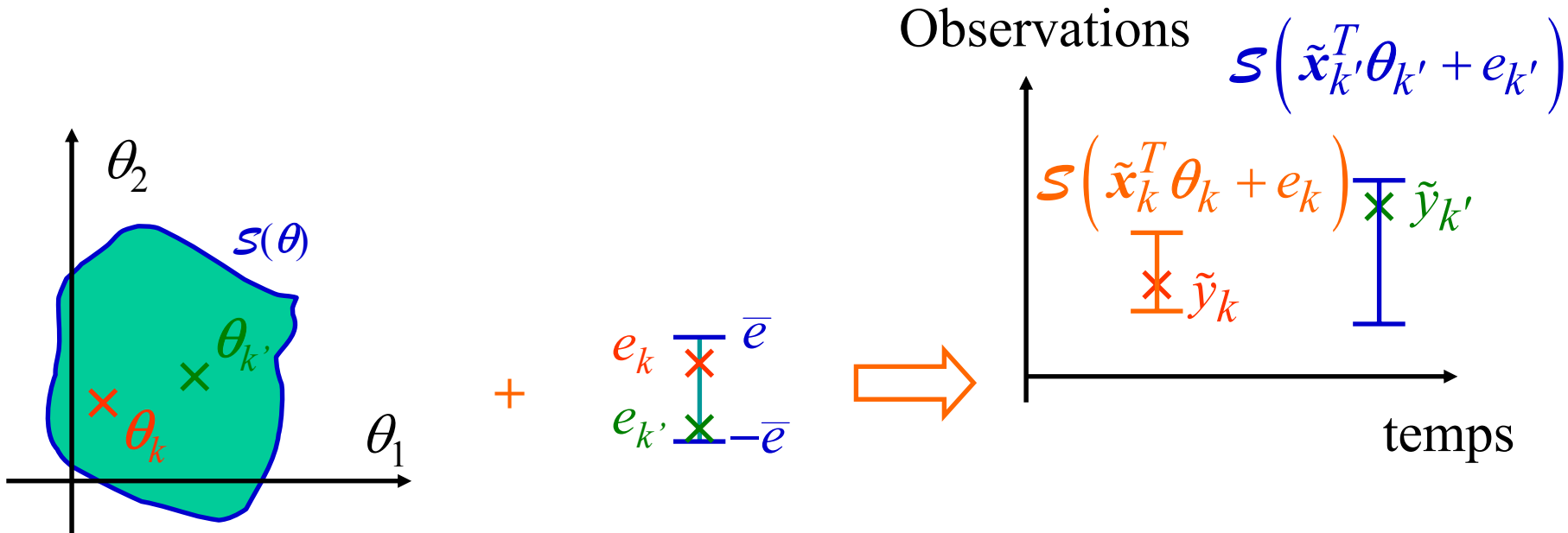
$$\tilde{y}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_k + e_k \quad \text{avec } e_k \in [-\bar{e}, \bar{e}]$$

Notation  $\mathcal{S}(\cdot)$  : valeurs possibles d'une variable

⇒ d'un point de vue ensembliste, trouver  $\mathcal{S}(\theta)$  tel qu'à chaque instant  $k$  :

$$\tilde{y}_k \in \mathcal{S}\left(\tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_k + e_k\right) \quad \text{avec } \begin{array}{l} e_k \in [-\bar{e}, \bar{e}] \\ \theta_k \in \mathcal{S}(\theta) \end{array}$$

# Objectifs



- Remarque : domaines invariants pour les incertitudes paramétriques et l'erreur d'équation, mais ensemble image de la sortie (intervalle) dépendant de l'instant courant

## II. Positionnement du problème (Approche géométrique)



# Positionnement du problème

- Modèle à erreur d'équation bornée

$$-\bar{e} \leq e_k \leq \bar{e} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{y}_k - \bar{e} \leq \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_k \\ \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_k \leq \tilde{y}_k + \bar{e} \end{cases} \quad \forall k \in \{1, \dots, h\}$$

- A l'instant courant  $k$ , dans l'espace des paramètres ( $\boldsymbol{\theta}$ ), ces 2 inégalités définissent 2 demis espaces dont les frontières sont 2 hyperplans parallèles

$$\underline{\mathcal{D}}_k = \left\{ \boldsymbol{\theta}' \in \mathcal{D}_0 / \tilde{y}_k - \bar{e} \leq \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}' \right\}$$

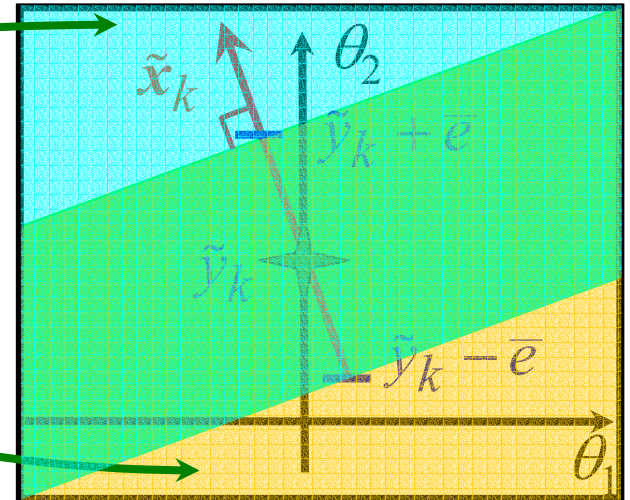
$$\bar{\mathcal{D}}_k = \left\{ \boldsymbol{\theta}'' \in \mathcal{D}_0 / \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}'' \leq \tilde{y}_k + \bar{e} \right\}$$

$\mathcal{D}_0$  : domaine d'étude (orthotope aligné de grande taille)

# Positionnement du problème

- A un même instant  $k$ ,  $\underline{\mathcal{D}}_k \cap \bar{\mathcal{D}}_k \neq \emptyset$

$$\exists \theta_k \in \mathcal{S}(\theta) / \tilde{y}_k - e \leq \tilde{x}_k^T \theta_k \leq \tilde{y}_k + e$$



- Intersection de 2 domaines convexes = domaine convexe

$$\underline{\mathcal{D}}_h = \bigcap_{k=1}^h \underline{\mathcal{D}}_k$$

$$\bar{\mathcal{D}}_h = \bigcap_{k=1}^h \bar{\mathcal{D}}_k$$

Polytopes convexes

# Positionnement du problème

- $\underline{\mathcal{D}}_h$  ensemble des valeurs de  $\theta'$  satisfaisant :

$$\tilde{y}_k - \bar{e} \leq \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta', \quad \forall k$$

chaque  $\theta'$  conduit donc à un majorant  $\bar{y}_k$  de la mesure  $\tilde{y}_k$

$$\tilde{y}_k \leq \bar{y}_k \quad \text{avec} \quad \bar{y}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta' + \bar{e}, \quad \forall k$$

$\mathcal{S}(\theta) \cap \underline{\mathcal{D}}_h \Rightarrow$  majorations des observations

- $\bar{\mathcal{D}}_h$  ensemble des valeurs de  $\theta''$  conduisant à des minorants  $\underline{y}_k$

$$\underline{y}_k \leq \tilde{y}_k \quad \text{avec} \quad \underline{y}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta'' - \bar{e}, \quad \forall k$$

$\mathcal{S}(\theta) \cap \bar{\mathcal{D}}_h \Rightarrow$  minoration des observations

- Respect de toutes les contraintes si  $\mathcal{S}(\theta) \cap \underline{\mathcal{D}}_h \neq \emptyset$   
 $\mathcal{S}(\theta) \cap \bar{\mathcal{D}}_h \neq \emptyset$

# Positionnement du problème

- Supposons connue une valeur nominale et invariante  $\theta_c$  du vecteur des incertitudes paramétriques  $\theta_k$

$$\theta_c = \arg \left( \min_{\theta_c} \left( \sum_{k=1}^h \left\| \tilde{y}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_c \right\|_{\alpha} \right) \right)$$

- Erreur au sens de la norme infinie

$$e_{inf}(\theta_c) = \max_{k \in \{1, \dots, h\}} \left( \left| \tilde{y}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_c \right| \right)$$

= le plus grand écart entre mesures et partie nominale du modèle

- Si la borne  $\bar{e}$  est égale à  $e_{inf}(\theta_c)$ , on a alors :

$$-\bar{e} \leq \tilde{y}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_c \leq \bar{e}$$

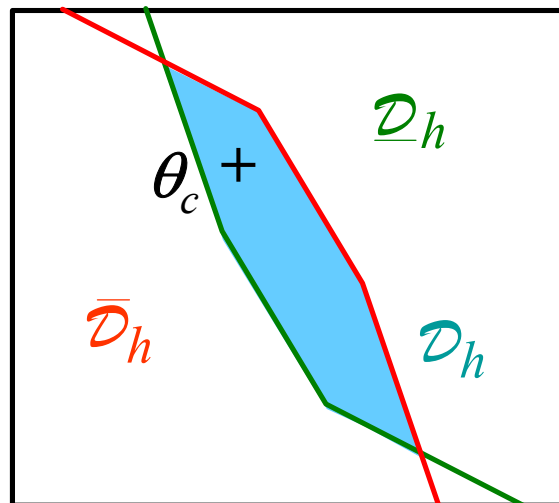
La valeur  $\theta_c$  du vecteur  $\theta_k$  vérifie les contraintes inégalités

# Positionnement du problème

➤ 1<sup>ère</sup> situation :  $\bar{e} \geq e_{inf}(\theta_c)$

⇒ l'intersection des 2 polytopes  $\underline{\mathcal{D}}_h$  et  $\bar{\mathcal{D}}_h$  n'est pas vide, chaque point de  $\mathcal{D}_h$  permet d'expliquer toutes les observations

⇒ l'erreur d'équation explique à elle seule les observations, aucune incertitude paramétrique n'est nécessaire :  $\mathcal{S}(\theta) = \theta_c$



Polytope convexe

# Positionnement du problème

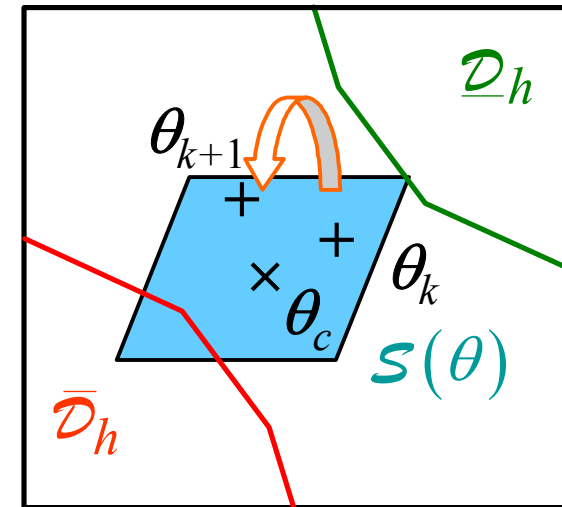
➤ 2<sup>ème</sup> situation :  $\bar{e} < e_{inf}(\theta_c)$

⇒ l'intersection des 2 polytopes  $\underline{\mathcal{D}}_h$  et  $\bar{\mathcal{D}}_h$  est vide, aucune solution invariante ne permet d'expliquer les observations

⇒ quelles incertitudes ajouter sur  $\theta_c$  pour avoir 1 solution ?

Caractérisation : trouver un domaine invariant  $\mathcal{S}(\theta)$  tel qu'il existe à chaque instant un  $\theta_k$  expliquant  $\tilde{y}_k$

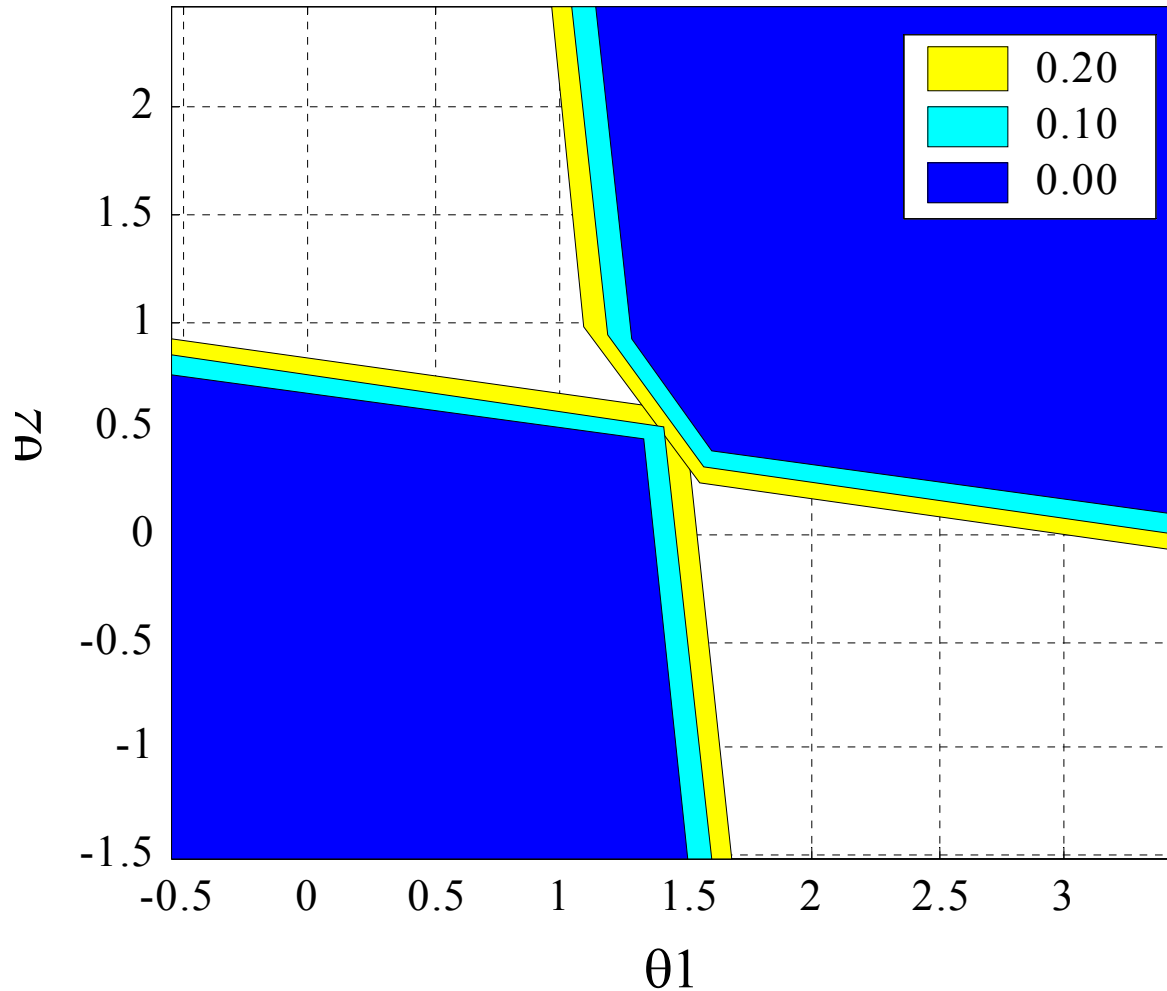
⇒  $\mathcal{S}(\theta)$  doit contenir au moins un point de  $\underline{\mathcal{D}}_h$  et de  $\bar{\mathcal{D}}_h$



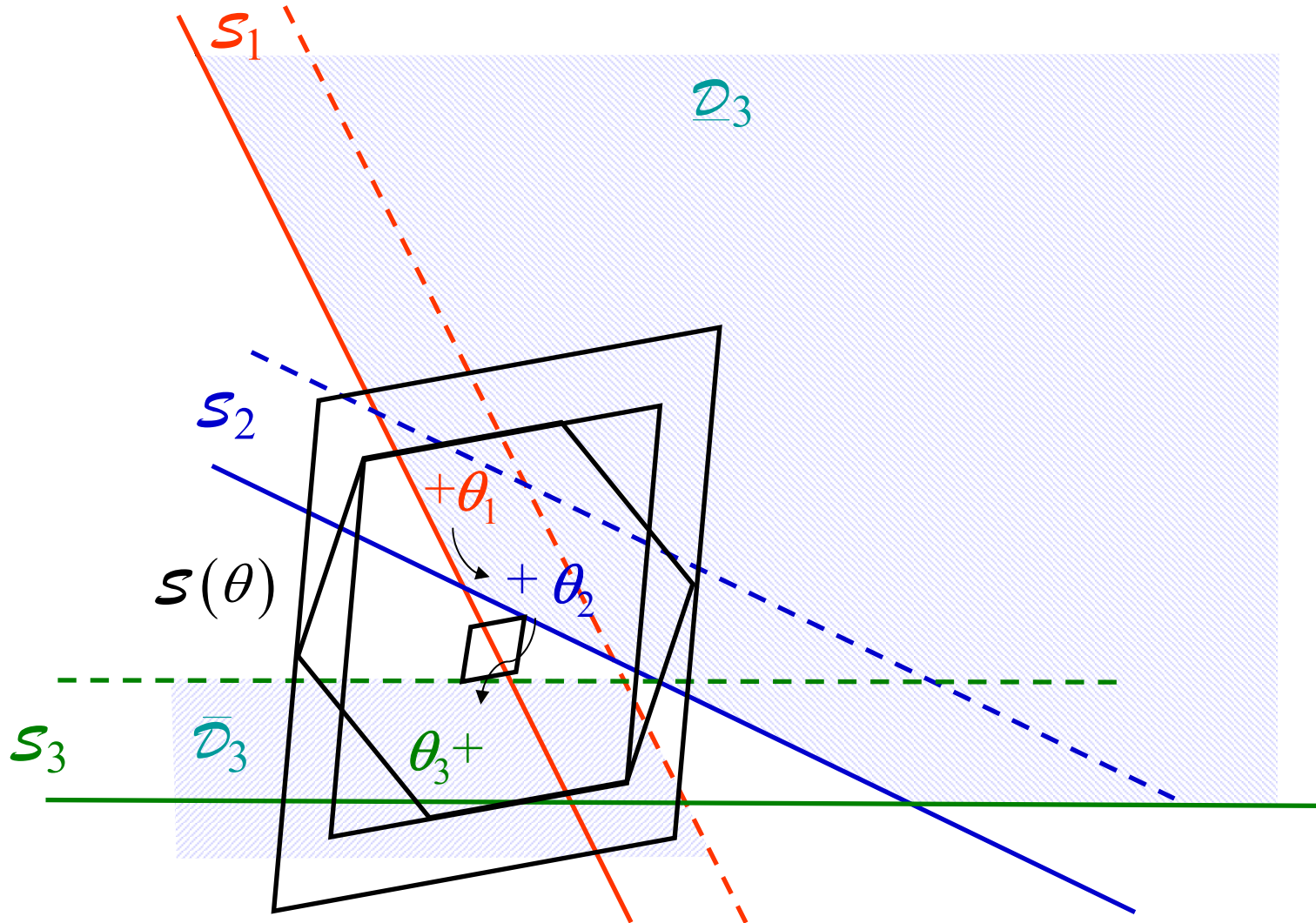
$\theta_k$  fluctue dans le temps autour de  $\theta_c$   
afin de satisfaire les contraintes inégalité<sup>14</sup>

# Positionnement du problème

Tracé des cartes isos



# Exemple $\underline{\mathcal{D}}_h \cap \overline{\mathcal{D}}_h = \emptyset$





# Positionnement du problème

- Description du domaine  $\mathcal{S}(\theta)$  : Zonotope  
= polytope convexe dont les facettes sont 2 à 2 parallèles :
  - ❑ centré sur  $\theta_c$
  - ❑ de forme imposée par une matrice  $T$  choisie
  - ❑ de taille imposée par  $\lambda$

$$\theta_k = \theta_c + \lambda T v_k \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad \|v_k\|_\infty \leq 1$$

$v_k$  : vecteur de variables bornées normalisées et indépendantes

- En résumé : pour  $\theta_c$ ,  $T$  et  $\bar{e}$  imposés, trouver  $\lambda$  tel que :

$$\tilde{y}_k \in \mathcal{S}\left(\tilde{x}_k^T \theta_k + e_k\right)$$

### III. Quelques rappels sur l'outil ensembliste

# Quelques rappels sur l'outil ensembliste

- Intérêt des variables bornées normalisées :  $\theta \in [-1,1]$   
= simplification des calculs

$\theta_1 \pm \theta_2 \in [-2,2]$	$a \pm \theta_1 \in [a-1, a+1]$
$\theta_1 \times \theta_2 \in [-1,1]$	$a\theta_1 \in [- a ,  a ]$

$$t_0 + \mathbf{t}^T \boldsymbol{\theta} \in [t_0 - \|\mathbf{t}\|_1, t_0 + \|\mathbf{t}\|_1]$$

pas de perte de généralité

$$\theta = \frac{\bar{\theta} + \underline{\theta}}{2} + \frac{\bar{\theta} - \underline{\theta}}{2} \nu$$

$$\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \quad \nu \in [-1,1]$$

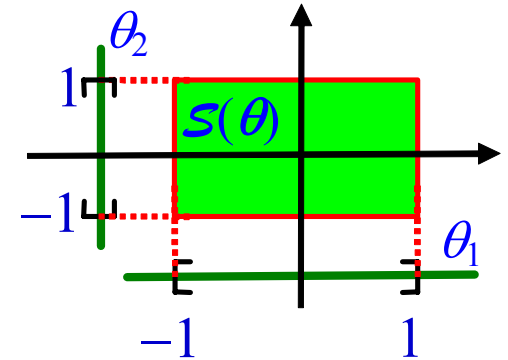
# Quelques rappels sur l'outil ensembliste

- $\mathcal{S}(f)$  : ensemble image du champ de vecteurs  $f(\theta)$ ,  $\|\theta\|_\infty \leq 1$

Variable bornée  $\theta \Rightarrow$  intervalle

$$\mathcal{S}(\theta) = [-1, 1]$$

Vecteurs de variables indépendantes  
 $\Rightarrow$  orthotope aligné (pavé)



Variable **commune** : variable bornée apparaissant dans plusieurs composantes du champ de vecteurs  $f(\theta)$

$\Rightarrow$  dépendance (couplages) entre composantes modifiant la forme de  $\mathcal{S}(f)$  par rapport à un simple pavé

# Quelques rappels sur l'outil ensembliste

Fonctions linéaires en  $\theta$

⇒ zonotope convexe

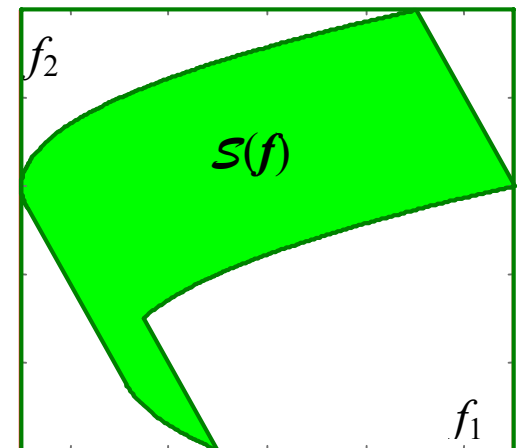
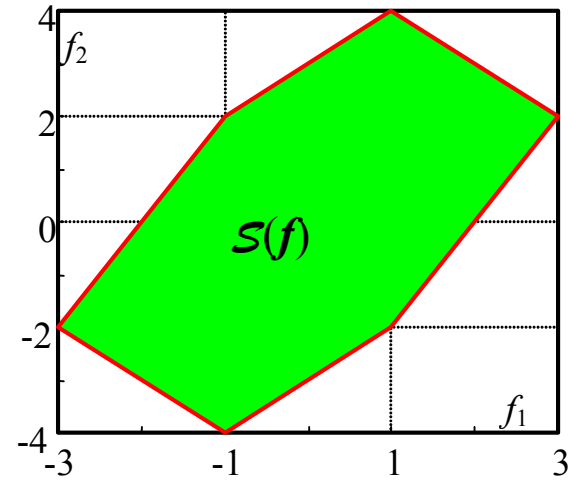
$$f_1 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$f_2 = \theta_1 - \theta_2 + 2\theta_3$$

Sinon, domaines complexes

$$f_1 = \frac{5}{2} + 3\theta_1 + \frac{9}{2}\theta_1^2 + \theta_2$$

$$f_2 = \frac{-3}{2} + \frac{3}{2}\theta_1 - \theta_2$$



# Quelques rappels sur l'outil ensembliste

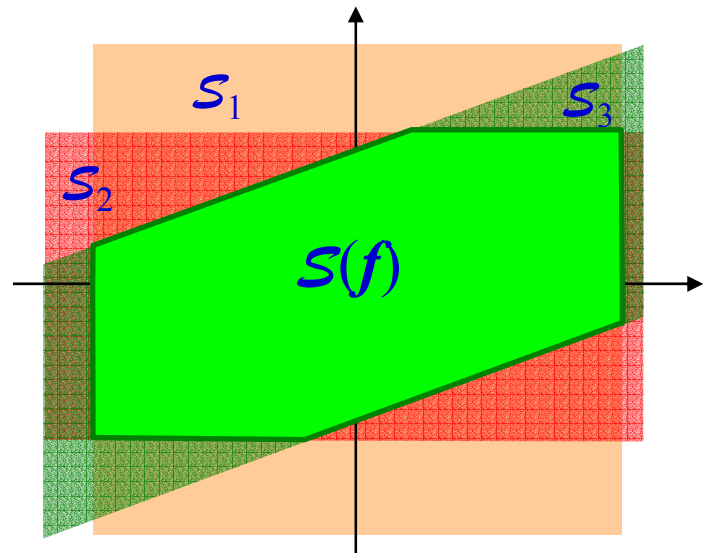
- Décomposition en bandes de contraintes d'un zonotope

$$f = M\theta + n$$

terme incertain      terme certain :  
centre de  $\mathcal{S}(f)$

$\mathcal{S}(f)$  : zonotope représenté comme l'intersection  
d'une série de bandes de contrainte  $\mathcal{S}_i$

$$\mathcal{S}(f) = \bigcap_i \mathcal{S}_i$$



# Quelques rappels sur l'outil ensembliste

- Principe : une bande de contrainte est obtenue en recherchant une combinaison linéaire des composantes  $f_i$  permettant d'éliminer des variables communes

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|\theta\|_\infty \leq 1$$

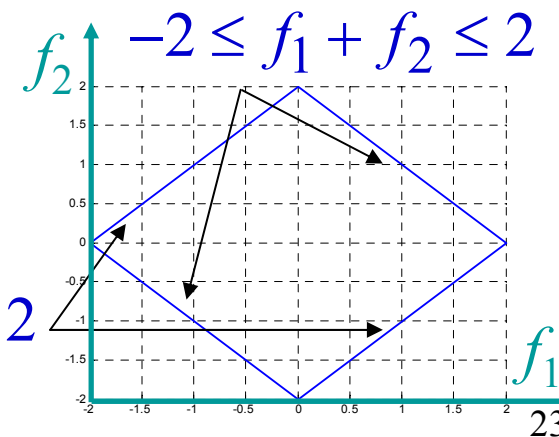
Aucune prise en compte des couplages :  $f_i \in [-2, 2]$

Contraintes liées aux couplages :

$$f_1 + f_2 = 2\theta_2$$

$$f_1 - f_2 = 2\theta_1$$

$$-2 \leq f_1 - f_2 \leq 2$$



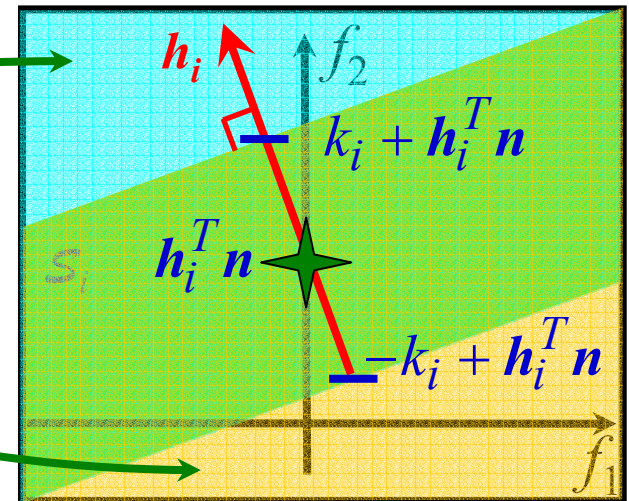
# Quelques rappels sur l'outil ensembliste

- Décomposition en bandes de contrainte

$$f = M\theta + n$$

Bande de contrainte  $\mathcal{S}_i$

$$\mathcal{S}_i = \left\{ f \mid -k_i + h_i^T n \leq h_i^T f \leq k_i + h_i^T n \right\}$$



- Détermination des éléments caractéristiques de  $\mathcal{S}_i$

$e_j$  : vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^{\dim(\theta)}$

$$M_i = M \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_{\dim(f)-1} \end{bmatrix}$$

si  $\text{rang}(M_i) = \dim(f) - 1$  alors :  $h_i^T M_i = 0$  et  $k_i = \left\| h_i^T M \right\|_1$



## IV. Caractérisation

# Caractérisation

➤ **Forme prédéterminée**

$$\tilde{y}_k \in \mathcal{S} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + e_k \right) \quad \boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_c + \lambda \mathbf{T} \boldsymbol{v}_k$$

poids scalaire

avec  $e_k \in [-\bar{e}, \bar{e}]$  et  $\|\boldsymbol{v}_k\|_\infty \leq 1$

➤ **Doubles contraintes inégalités à respecter :**

$$-\lambda \left\| \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1 - \bar{e} \leq \tilde{y}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_c \leq \lambda \left\| \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1 + \bar{e}$$

➤ **Contraintes à respecter par  $\lambda$  :**

$$\lambda \geq \max \left( \frac{\tilde{y}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_c - \bar{e}}{\left\| \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1}, \frac{-\tilde{y}_k + \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_c - \bar{e}}{\left\| \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1} \right)$$

# Caractérisation

➤ Critère de précision

$$\tilde{y}_k \in \left[ \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_c - \lambda \left\| \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1 - \bar{e}, \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_c + \lambda \left\| \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1 + \bar{e} \right] \mathcal{S} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + e_k \right)$$

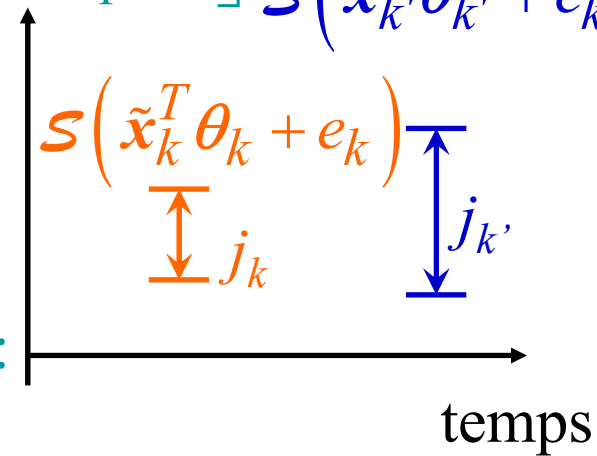
Largeur de cet intervalle :

$$j_k = 2\bar{e} + 2\lambda \left\| \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1$$

Critère (somme des  $j_k$  sur l'horizon  $h$ ) :

$$J = 2h\bar{e} + 2\lambda \sum_{k=1}^h \left\| \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1$$

Conclusion : plus  $\lambda$  est faible, plus  $J$  est faible



# Caractérisation

➤ Sur l'horizon  $h$  :

$$\lambda = \sup_{k \in \{1, \dots, h\}} \left( \max \left( 0, \frac{\tilde{y}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_c - \bar{e}}{\|\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T}\|_1}, \frac{-\tilde{y}_k + \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_c - \bar{e}}{\|\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T}\|_1} \right) \right)$$

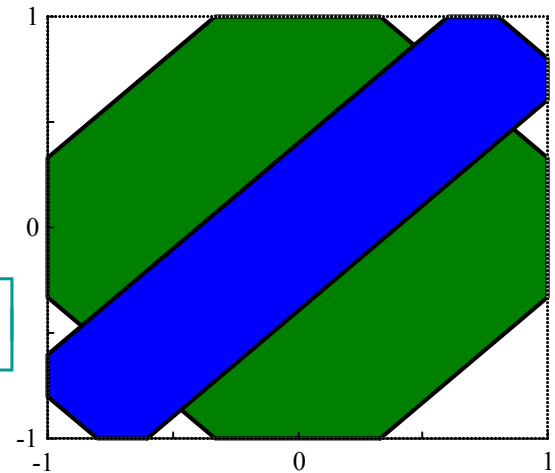
➤ Forme indéterminée

$$\tilde{y}_k \in \mathcal{S} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + e_k \right)$$

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_c + \mathbf{T}(\boldsymbol{\lambda}) \boldsymbol{\nu}_k \quad \mathbf{T}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{t}_1 & \dots & \lambda_q \mathbf{t}_q \end{bmatrix}$$

vecteur de pondération

avec  $e_k \in [-\bar{e}, \bar{e}]$  et  $\|\boldsymbol{\nu}_k\|_\infty \leq 1$



Les colonnes  $\mathbf{t}_i$  sont pondérées individuellement

# Caractérisation

- Doubles contraintes inégalités à respecter :

$$-\tilde{\chi}_k^T \lambda - \bar{e} \leq \tilde{y}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_c \leq \tilde{\chi}_k^T \lambda + \bar{e}$$

$$\text{avec } \tilde{\chi}_k^T = \left[ \left| \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{t}_1 \right| \quad \cdots \quad \left| \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{t}_q \right| \right]$$

- Contraintes à respecter par  $\lambda$  :

$$\tilde{\chi}_k^T \lambda \geq \max \left( \tilde{y}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_c - \bar{e}, -\tilde{y}_k + \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_c - \bar{e} \right)$$

- Critère de précision

$$\tilde{y}_k \in \left[ \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_c - \tilde{\chi}_k^T \lambda - \bar{e}, \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_c + \tilde{\chi}_k^T \lambda + \bar{e} \right]$$

# Caractérisation

Largeur de cet intervalle :

$$j_k = 2\bar{e} + 2\tilde{\chi}_k^T \lambda$$

Critère (somme des  $j_k$  sur l'horizon  $h$ ) :

$$J = 2h\bar{e} + 2 \sum_{k=1}^h \tilde{\chi}_k^T \lambda$$

$$= 2h\bar{e} + 2\tilde{\chi}\lambda \quad \text{avec} \quad \tilde{\chi} = \sum_{k=1}^h \tilde{\chi}_k^T$$

Conclusion : plus  $\tilde{\chi}\lambda$  est faible, plus  $J$  est faible

# Caractérisation

- Sur l'horizon  $h$  : il faut rechercher le vecteur  $\lambda$  vérifiant :

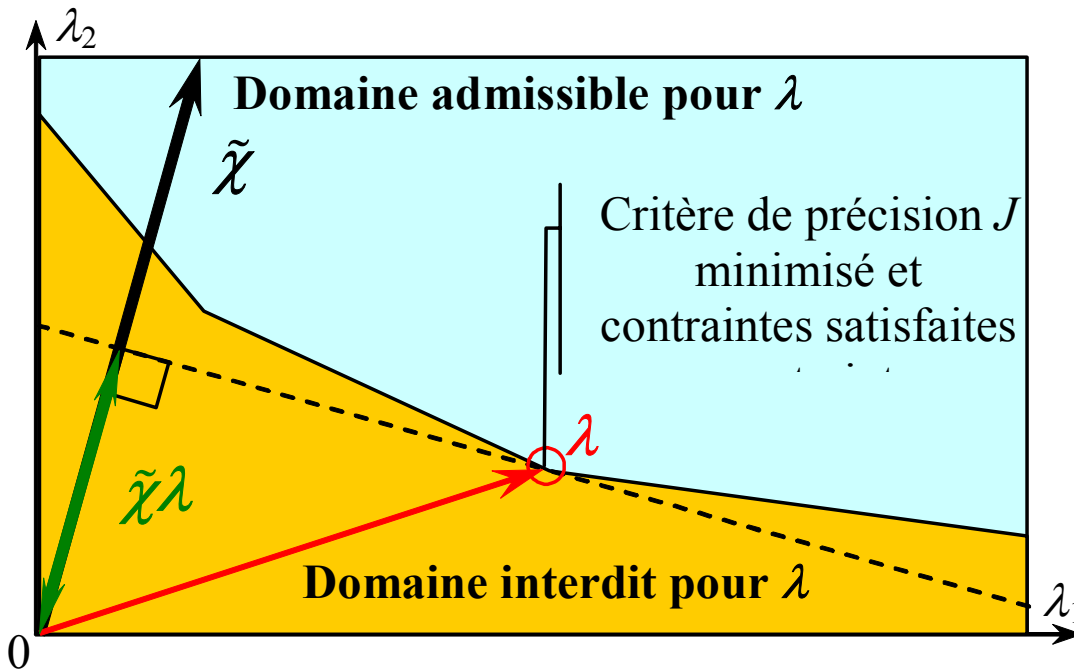
$$\tilde{\chi}_k^T \lambda \geq \max\left(\tilde{y}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_c - \bar{e}, -\tilde{y}_k + \tilde{\mathbf{x}}_k^T \theta_c - \bar{e}\right) \quad \forall k \in \{1, \dots, h\}$$

et qui minimise  $\tilde{\chi}\lambda$

Polytope convexe dans  
l'espace des paramètres  $\lambda$



La solution est l'un des  
sommets du polytope



# V. Extensions



# Extensions

- Optimisation du centre  $\theta_c$  et de la borne de l'erreur additive  $\bar{e}$

$$J = 2h\bar{e} + 2\lambda \sum_{k=1}^h \left\| \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1$$

forme prédéterminée

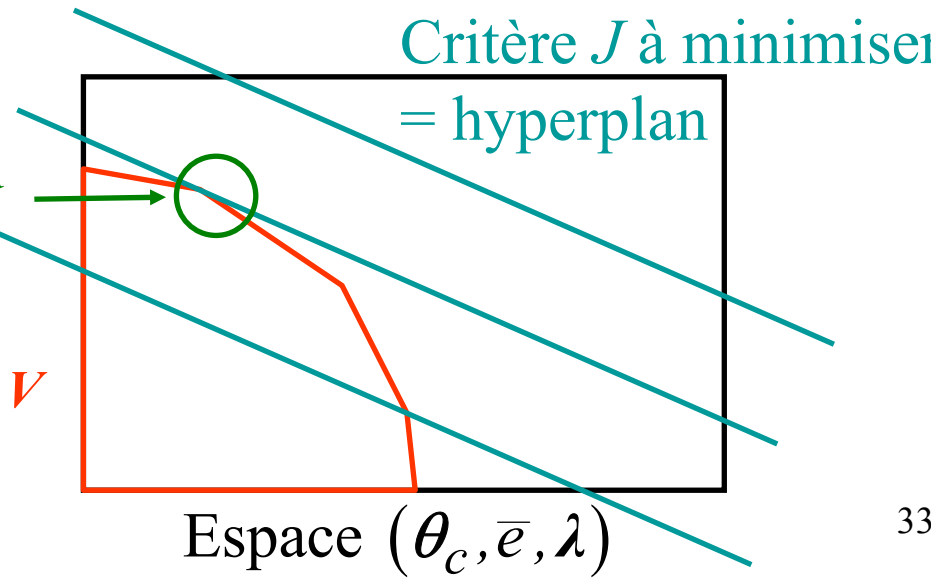
$$J = 2h\bar{e} + 2\tilde{\chi}\lambda$$

forme indéterminée

= problème d'optimisation linéaire sous contraintes inégalités

Solution = un des sommets  $V$  du polytope minimisant le critère  $J$

Polytope convexe de sommets  $V$  lié aux contraintes inégalités



# Extensions

Remarque : le critère dépend implicitement du centre  $\theta_c$  (cf approche géométrique) via les contraintes inégalité

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{x}}_k^T & -\|\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T}\|_1 & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \theta_c \\ \lambda \\ \bar{e} \end{bmatrix} \leq \tilde{y}_k \\ \tilde{y}_k \leq \left[ \begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{x}}_k^T & \|\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{T}\|_1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \theta_c \\ \lambda \\ \bar{e} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{x}}_k^T & -\tilde{\chi}_k^T & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \theta_c \\ \lambda \\ \bar{e} \end{bmatrix} \leq \tilde{y}_k \\ \tilde{y}_k \leq \left[ \begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{x}}_k^T & \tilde{\chi}_k^T & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \theta_c \\ \lambda \\ \bar{e} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

➤ Optimisation du centre  $e_c$  de l'erreur additive

$$e_k \in e_c + \bar{e} [-1, 1], \quad e_c \in \mathbb{R}, \bar{e} \in \mathbb{R}^+$$

même principe

# Extensions

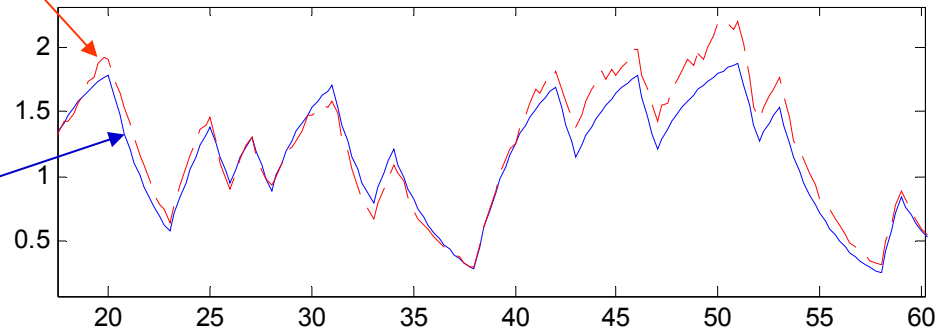
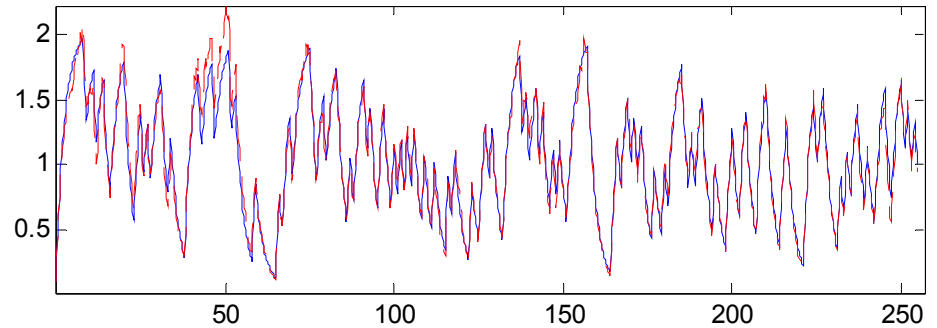
## ➤ Exemple académique

Modèle incertain à caractériser  $\Rightarrow$  jeu de données

$$y_{k+1} = [y_k \quad u_k] \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} + c_k$$

Modèle nominal  
(incertitudes nulles)

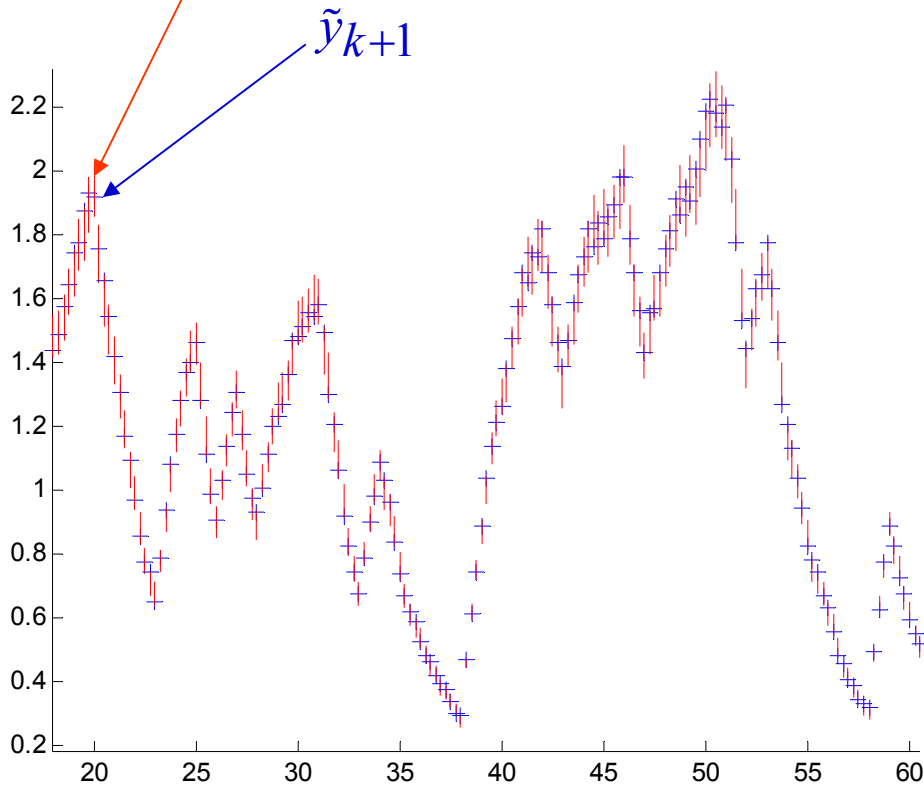
$$y_{k+1} = [y_k \quad u_k] \begin{bmatrix} a_{nom} \\ b_{nom} \end{bmatrix} + c_{nom}$$



# Extensions

Modèle caractérisé

$$\mathcal{S}(y_{k+1}) = \mathcal{S} \left( [y_k \quad u_k] \left( \begin{bmatrix} \theta_{c,1} \\ \theta_{c,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\theta k,1} \\ v_{\theta k,2} \end{bmatrix} \right) + e_c + \bar{e} v_{ek} \right)$$



	Valeurs théoriques	Valeurs caractérisées
$\theta_c$	$\begin{bmatrix} 0.904 \\ 0.095 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.905 \\ 0.094 \end{bmatrix}$
$\lambda$	$\begin{bmatrix} 0.045 \\ 0.005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.044 \\ 0.005 \end{bmatrix}$
$e_c$	0.01	0.01
$\bar{e}$	0	$10^{-8}$

# Extensions

- Modèle à plusieurs équations :

$$\mathbf{y}_k = \tilde{\mathbf{X}}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{e}_k$$

matrice

vecteurs

même principe, mais cette fois,  $\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{X}}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{e}_k)$  n'est plus un intervalle, mais un **zonotope**

- Tenir compte des couplages entre les sorties dus aux variables bornées :

$$\mathbf{y}_k = \tilde{\mathbf{X}}_k^T \boldsymbol{\theta}_c + \tilde{\mathbf{X}}_k^T \boldsymbol{\lambda} T \mathbf{v}_k + \mathbf{e}_k$$

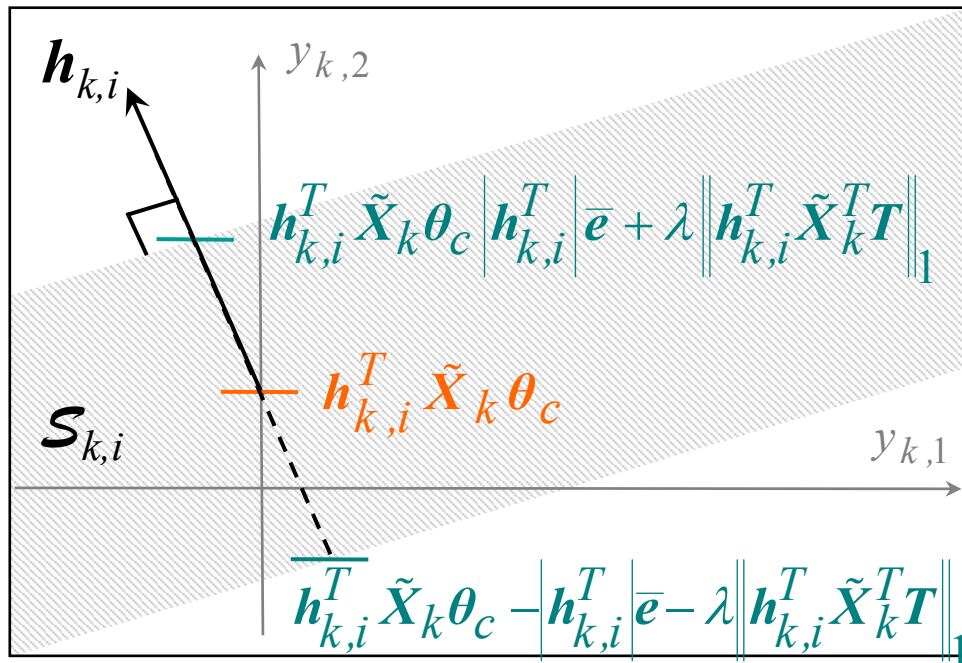
$$\mathbf{y}_k = \underbrace{\tilde{\mathbf{X}}_k^T \boldsymbol{\theta}_c}_n + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_k^T T & I \end{bmatrix}}_{M_k} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{v}_{\theta,k} \\ \text{diag}(\bar{\mathbf{e}}) \mathbf{v}_{e,k} \end{bmatrix} \quad \|\mathbf{v}_{(\cdot),k}\|_{\infty} \leq 1$$

vecteur de bornes

# Extensions

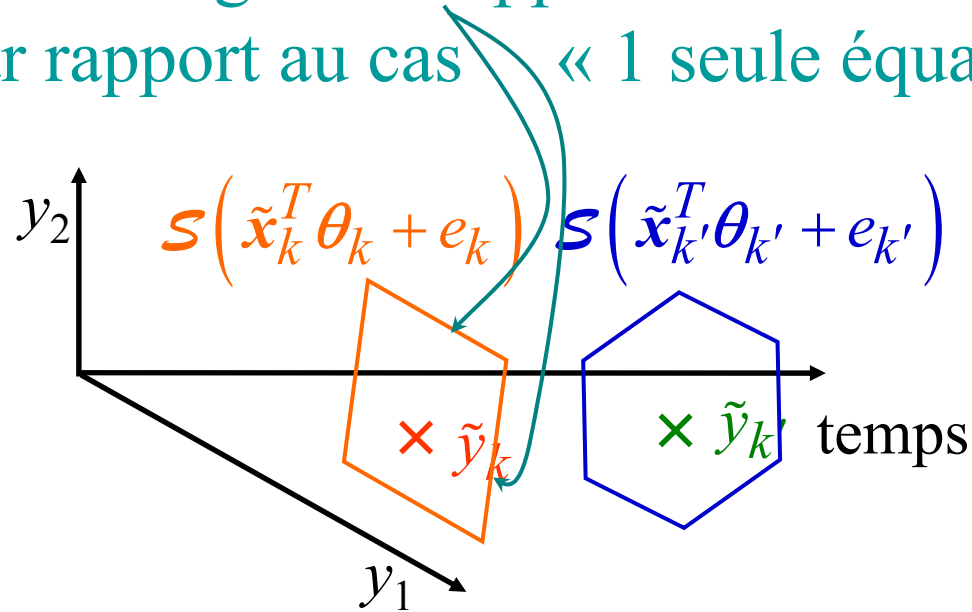
➤ Décomposition en bandes de contrainte  $\mathcal{S}_{k,i}$

$$-\left| \mathbf{h}_{k,i}^T \bar{\mathbf{e}} - \lambda \left\| \mathbf{h}_{k,i}^T \tilde{\mathbf{X}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1 \right| \leq \mathbf{h}_{k,i}^T (\mathbf{y}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k \boldsymbol{\theta}_c) \leq \left| \mathbf{h}_{k,i}^T \bar{\mathbf{e}} + \lambda \left\| \mathbf{h}_{k,i}^T \tilde{\mathbf{X}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1 \right|$$



# Extensions

⇒ contraintes inégalités supplémentaires à prendre en compte par rapport au cas « 1 seule équation »



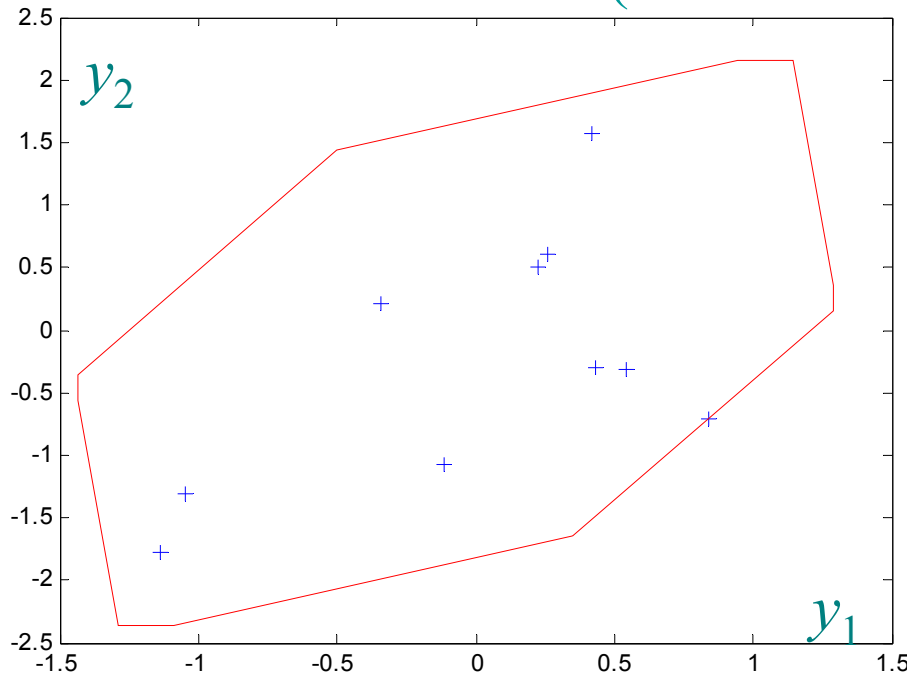
➤ Critère de précision : somme des largeurs des bandes  $\mathcal{S}_{k,i}$

$$J = \sum_{k=1}^h \sum_{i=1}^{n_k} 2 \left| \mathbf{h}_{k,i}^T \bar{\mathbf{e}} \right| + 2\lambda \left\| \mathbf{h}_{k,i}^T \tilde{\mathbf{X}}_k^T \mathbf{T} \right\|_1 \quad n_k \text{ bandes } \mathcal{S}_{k,i} \text{ à chaque instant } k$$

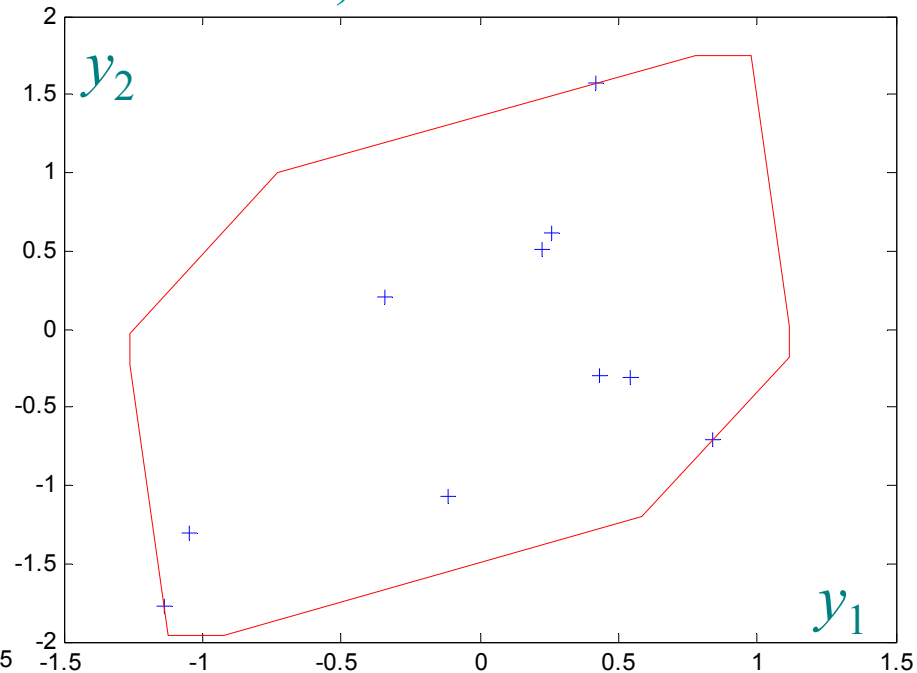
➤ Même principe pour une forme indéterminée

# Extensions

Exemple avec un régresseur constant  
(2 relations entrée-sortie)



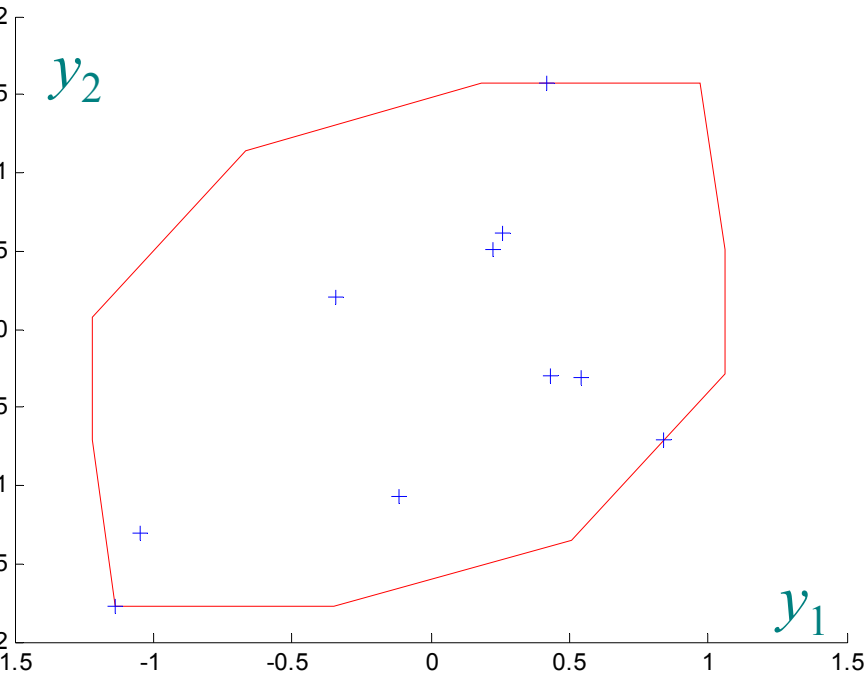
Forme prédéterminée  
Optimisation de  $\lambda$



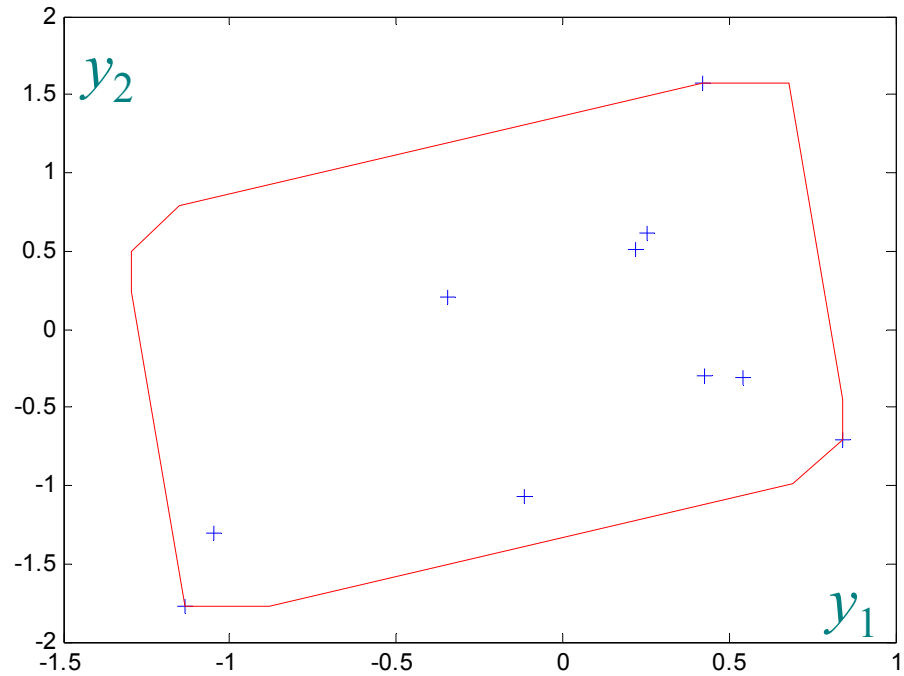
Forme indéterminée  
Optimisation de  $\lambda$



# Extensions



Forme prédéterminée  
Optimisation du triplet  $(\lambda, \theta_c, \bar{e})$



Forme indéterminée  
Optimisation du triplet  $(\lambda, \theta_c, \bar{e})$