

Schéma de Horner compensé k fois

N. Louvet

Laboratoire DALI-LP2A,
Université de Perpignan Via Domitia,
F-66860 Perpignan, France
[nicolas.louvet]@univ-perp.fr

La faible erreur inverse introduite par le schéma de Horner lors de l'évaluation polynomiale justifie son intérêt pratique en arithmétique flottante. Cependant, le résultat calculé peut être arbitrairement moins précis que la précision de travail \mathbf{u} lorsque l'évaluation de $p(x)$ est mal conditionnée. C'est le cas notamment au voisinage d'une racine multiple, où tous les chiffres, voir même l'ordre de grandeur du résultat calculé peuvent être erronés. De nombreuses techniques logicielles visent à améliorer la précision des résultats calculés en arithmétique flottante. Lorsque l'arithmétique disponible est conforme à la norme IEEE-754, les bibliothèques « double-double » et « quad-double » sont des solutions efficaces pour simuler une précision de travail respectivement doublée ou quadruplée [1].

Dans [2], nous avons déjà décrit un schéma de Horner compensé : le résultat calculé à l'aide de ce schéma est aussi précis que s'il avait été calculé en précision de travail doublée, avec un arrondi final vers la précision courante. Nous présentons ici une amélioration de ce schéma d'évaluation compensé. Avec ce nouvel algorithme, l'approximation calculée r de $p(x)$ est aussi précise que si l'on avait utilisé k fois la précision courante. En d'autres termes, le résultat calculé satisfait

$$\frac{|r - p(x)|}{|p(x)|} \leq \mathbf{u} + (\alpha(n) \mathbf{u})^k \text{cond}(p, x), \quad (1)$$

où $\alpha(n)$ reste un facteur raisonnable et $\text{cond}(p, x)$ est le nombre de conditionnement pour l'évaluation polynomiale. Notre algorithme est basé sur l'application récursive de la *transformation exacte* (« Error Free Transformation » [3]) présenté dans [2].

Nos résultats expérimentaux montrent que la pénalité en terme de temps de calcul due à cette amélioration de la précision reste très raisonnable pour de petites valeurs de k . En particulier notre algorithme s'exécute sensiblement deux fois plus rapidement que le schéma de Horner utilisant la bibliothèque « quad-double ». Ceci justifie l'intérêt pratique de la méthode lorsqu'il est nécessaire d'augmenter la précision des calculs.

Références

- [1] Y. Hida, X. S. Li, and D. H. Bailey, Algorithms for quad-double precision floating point arithmetic. In *Proc. 15th IEEE Symposium on Computer Arithmetic*, 155-162. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 2001.
- [2] S. Graillat, Ph. Langlois, N. Louvet, Compensated Horner Scheme. *Submitted for publication*, July 2005. Available at <http://webdali.univ-perp.fr/RR/rr2005-04.pdf>.
- [3] T. Ogita, S. M. Rump, and S. Oishi, Accurate sum and dot product. *SIAM J. Sci. Comp.*, 26(6) :1955-1988, 2005.