Systèmes dynamiques

Jean Della Dora, Thierry Gautier et Nathalie Revol

1993

Table des matières

Chapitre 1

Pourquoi des systèmes dynamiques ?

1.1 Les systèmes dynamiques : un langage pour la modélisation ?

Depuis 1638 et les premiers exemples de F. Debeaune, les scientifiques ont utilisé les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles comme langage de modélisation. Newton, Leibniz, Euler, les Bernoulli ont créé les premières bases de la théorie. Depuis, les scientifiques n'ont pas cessé de perfectionner le langage, les outils, les méthodes. Nous supposerons dans ce cours que le lecteur a une claire idée de ce qu'est une équation différentielle, et qu'il en a rencontrées.
Cependant le titre du cours comprend les mots **systèmes dynamiques**, il faut donc expliquer pourquoi le titre n'est pas **équations différentielles** : parce que les équations différentielles ne sont qu'un aspect local des systèmes dynamiques. La notion de base est celle **d'espace d'état** ou **d'espace des configurations** d'un système physique (ou biologique, économique, chimique, sociologique, ...). Ce qu'est un système, en général, relève du domaine de la philosophie... Wittgenstein définit un système comme étant un monde, cela éclaire naturellement le propos ! En tout cas, ce système physique prend au fil du temps un ensemble de configurations possibles, c'est l'espace des configurations. Comme on souhaite travailler avec ce système il faut pouvoir disposer de mesures associées à chaque point de cet espace de configurations, c'est-à-dire qu'il faut être capable d'associer à un point de l'espace des configurations un nombre, ou une famille de nombres qui caractérise les propriétés pertinentes du système. Ce sont ce que l'on appelle les **coordonnées généralisées** du système.

Par exemple si nous souhaitons étudier l'évolution d'une particule que l'on suppose obéissant servilement à la loi de la mécanique newtonienne (mais après tout, peut-être nous sommes-nous trompés de loi ?) et évoluant dans notre espace habituel, nous devrons nous donner, pour spécifier son état initial, sa position et sa vitesse ; donc un vecteur de $\mathbb{R}^6$. L'espace des configurations est donc $\mathbb{R}^6$. D'autre part on souhaite que deux états soient voisins si les vecteurs associés aux deux états sont voisins.

Ceci conduit à une première définition d'un espace de configurations : c'est un espace topologique séparé dont tous les points possèdent un voisinage homéomorphe à une boule d'un espace vectoriel. Bref une variété topologique au moins.

Il est bien évident que dans ce cours d'introduction nous vivrons dans un $\mathbb{R}^n$ rassurant, mais il est facile d'imaginer des espaces de configurations beaucoup plus complexes.

Si donc nous avons un espace de configurations S, nous pouvons considérer l'évolution temporelle du système à partir d'une position initiale. Nous donnons une configuration initiale X_0 occupée par le système au temps t_0, le système se trouvera à une position X_1, au temps t_1. On conviendra d'écrire cela :

$$X_1 = \varphi_{t_1,t_0}(X_0).$$

Par définition φ_{t_1,t_0} sera un **opérateur d'évolution**.

Très souvent cet opérateur sera indépendant du temps, c'est-à-dire que φ ne dépendra que de $t = t_1 - t_0$, c'est-à-dire de l'intervalle de temps séparant t_1 et t_0. Dans ce cas on pourra le noter φ_t.

On demande naturellement des propriétés supplémentaires à un opérateur d'évolution pour pouvoir travailler, une de ces propriétés est absolument fondamentale : c'est le déterminisme.

Elle se traduit par le fait que :

$$\varphi_{t_2,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_2,t_0}$$

et

$$\varphi_{t,t} = Id$$

Cette propriété se traduisant pour un système indépendant du temps par :

$$\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{(a+b)}$$

et

$$\varphi_0 = Id$$

pour pouvoir écrire cela, il faut que le système existe en tous ces temps, ce que l'on peut traduire par l'existence d'un ensemble T (le temps) vérifiant les propriétés de semi-groupe additif :

$$0 \in T$$

$$si\ a\ et\ b\ \in T\ alors\ a+b\ \in T.$$

Pour un opérateur d'évolution indépendant du temps, on peut noter :

$$\varphi_t(X) = \Phi(t, X).$$

Nous pouvons alors donner une définition d'un système dynamique :

Définition 1 *Un système dynamique est un triplet :*

$$(S, T, \Phi)$$

dans lequel S est l'espace de configuration, T est un semi-groupe additif et Φ est une application

$$\Phi : T \times S \longrightarrow S$$

telle que :

$$\forall x \in S, \forall s, t \in T$$

$$\Phi(0, x) = x$$

et

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(s + t, x)$$

Si nous convenons de noter :

$$\varphi_t(x) = \Phi(t, x)$$

on voit que l'on peut associer à un système dynamique un ensemble :

$$\{\varphi_t\}_{t\in T}$$

où les applications φ_t de S dans S, vérifient :

$$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{(s+t)}$$

c'est-à-dire que ces applications forment un semi-groupe pour la composition.

1.2 Où l'on revient sur terre avec quelques exemples

Tout d'abord nous allons revenir aux équations différentielles par le biais de celui qui, de fait, a créé et développé la théorie des systèmes dynamiques : Henri Poincaré.
En effet, une des nombreuses idées de Poincaré est d'étudier la dépendance de la solution d'une équation différentielle ordinaire non seulement par rapport au temps, ce qui est classique, mais aussi en fonction des conditions initiales. Il établit les premiers théorèmes exprimant la nature de cette dépendance en fonction des conditions initiales ; un instant de réflexion montre donc que l'on doit exprimer cette solution sous la forme :

$$\Phi(t, t_0, x_0)$$

t désignant le temps, x_0 est la condition initiale définie au temps t_0.

Un second exemple de ses travaux est lui aussi d'importance considérable : c'est celui associé aux itérations de fonctions. Développons rapidement l'idée, en considérant deux exemples intéressants. Le premier est celui de l'algorithme de Newton : on considère par exemple un polynôme p et la fonction associée :

$$F(x) = x - \left(\frac{p(x)}{p'(x)}\right)$$

on considère cette fonction de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dans lui-même et à partir d'un point x_0 on forme l'itération :

$$F(x_n) = x_{n+1}$$

C'est l'itération de base de l'algorithme de Newton pour rechercher les racines du polynôme p. On peut bien sûr remarquer que :

$$x_n = F^n(x_0)$$

donc on est amené à considérer les itérés de la fonction F. Cet ensemble, formé de $S = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $T = \mathbb{N}$ et $(F^t)_{t\in T}$, constitue un système dynamique. On laisse le soin au lecteur de généraliser.
Un troisième exemple ne sera ici qu'esquissé vu sa complexité. Pour étudier l'évolution des milieux continus, comme les fluides, on sait depuis Euler que le bon langage est celui des équations aux dérivées partielles. Ce mouvement est le changement d'état du fluide, de ce fait on ne peut lui associer un ensemble fini de nombres pour le décrire, il faudra le décrire par une fonction. L'état d'une barre de métal chauffée est décrit par une fonction définissant en un point de la barre la valeur de la température, lorsque le temps évolue, cette fonction change. Il s'agit donc de

décrire en termes mathématiques cette évolution. La dynamique est alors exprimée par une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u)$$

où F désignera un opérateur non linéaire agissant sur un espace de fonctions. Dans une telle équation $u = u(x,t)$, t désignant le temps et x le point. Dans ce cas, il faut ajouter des conditions supplémentaires pour définir complètement la solution. La dynamique peut être définie comme suit : dans un espace fonctionnel convenable jouant le rôle de l'espace d'état, on se donne une fonction u_0 , soit alors $u(t,x)$ une solution de l'équation aux dérivées partielles précédente telle que :

$$u(x,0) = u_0(x)$$

Alors on peut définir : $\varphi_t(u_0)(x) = u(x,t)$. On peut dire aussi que pour $t > 0$, φ_t envoie la fonction $u(.,0)$ sur $u(.,t)$. En fait il est difficile d'étudier la dynamique des équations aux dérivées partielles et l'on ne connaît que peu de choses. Cependant, il arrive fréquemment qu'un système dynamique dans un espace fonctionnel contienne un sous-système de dimension finie, c'est-à-dire une sous-variété de dimension finie invariante par le flot. Cette sous-variété contient en fait toute la dynamique intéressante de l'équation.

Chapitre 2

Définitions et théorèmes généraux

Dans ce chapitre nous allons rappeler des résultats classiques sur les équations différentielles ordinaires. Les démonstrations seront peu nombreuses et pour la plupart se trouvent en annexe pour ne pas charger inutilement le texte.

2.1 Solution d'une EDO

Soit l'équation différentielle sous forme explicite et non autonome du premier ordre :

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{2.1}$$

avec $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n), \Omega \subset (I \times \mathbb{R}^n)$, I intervalle de $\mathbb{R}$. En général Ω est un ouvert.

Définition 2 *Une* **solution** *de (2.1) est la donnée d'un couple $S_\varphi = \{\varphi, I_\varphi\}$ où $\varphi : I_\varphi \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et I_φ est un intervalle non dégénéré de $\mathbb{R}$ tels que :*

1. *φ différentiable sur I_φ*
2. *$G(\varphi) = \{(t, \varphi(t)), t \in I_\varphi\} \subset \Omega$*
3. *$\forall t \in I_\varphi : \frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$*

Le problème de Cauchy est de trouver une (la!) solution d'une équation différentielle passant par un point $(t_0, x_0) \in \Omega = I \times \mathbb{R}^n$ appelé **condition initiale**

$$\begin{cases} t_0 \in I_\varphi \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On appellera *problème de Cauchy* le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Définition 3 *On appelle* **solution locale** *au problème (2.2) une solution du problème (2.1) telle que l'intervalle I_φ soit un voisinage de t_0 et $\varphi(t_0) = x_0$.*

Définition 4 *On dit que la solution (ψ, I_ψ)* **prolonge** *la solution (φ, I_φ) si on a $I_\psi \supset I_\varphi$ et $\forall t \in I_\varphi, \psi(t) = \varphi(t)$.*

Définition 5 *On dit que* (φ, I_φ) *est* **solution globale** *du problème (2.2) si c'est une solution locale et si* $I_\varphi = I$.

Définition 6 *On dit que* (φ, I_φ) *est* **solution maximale** *du problème (2.2) si c'est une solution locale qui ne se prolonge pas.*

Théorème 1 *Etant donnée une solution locale, il existe au moins une solution maximale qui la prolonge.*

2.2 Transformations des équations différentielles

2.2.1 Elimination du temps et des paramètres

Soit une équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ alors en posant :

$$\begin{cases} X = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ F(X) = \begin{pmatrix} f(X) \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

on se ramène à une équation différentielle autonome $\dot{X} = F(X)$. (Malheureusement ces systèmes n'auront pas de comportement borné, or ce sont ces comportements qui nous intéresseront ; une exception est le cas où f est périodique en t, de période 2π par exemple, et on pourra alors travailler dans $\mathbb{R}^n \times [0; 2\pi[$.)
Dans le cas d'une équation différentielle dépendant d'un paramètre $\dot{x} = f(x, \lambda) = f_\lambda(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, on procède de la même manière en posant :

$$\begin{cases} X & = & \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \\ F(X) & = & \begin{pmatrix} f(X) \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

on se ramène à un système autonome.

2.2.2 Equations différentielles d'ordre n

Si on a une équation d'ordre n

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n-1)})$$

on peut l'énoncer sous la forme d'un système du premier ordre en posant :

$$x_0 = x \begin{cases} \dot{x_0} = x_1 \\ \dot{x_1} = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x_{n-2}} = x_{n-1} \\ \dot{x_{n-1}} = f(t, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Nous avons mis en évidence que si $x \in \mathbb{R}^n$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ alors il existe une application $F : I \times R^{n \times n}$ telle que l'équation d'ordre n soit équivalente au système du premier ordre $\dot{X} = F(t, X)$. Naturellement le gain obtenu en abaissant l'ordre est compensé par l'augmentation de la dimension du système.

2.3 Théorème d'existence et d'unicité

2.3.1 Théorème de Cauchy-Peano

C'est une condition nécessaire d'existence d'une solution au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) & \forall t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

avec

$$f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (t_0, x_0) \in \Omega$$

Théorème 2 Cauchy-Peano
Si f est **continue** *sur U un ouvert de $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$ alors il existe J voisinage de t_0 dans I et une fonction $\varphi \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ telle que $\forall t \in J$, $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, $\varphi(t_0) = x_0$*

Ce critère n'assure absolument pas l'unicité de la solution. Par exemple :

$$\begin{cases} \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \dfrac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

La fonction identiquement nulle et la famille de fonction :

$$\begin{cases} \varphi_c : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (t-c)^3 \end{cases}$$

sont solutions de l'équation différentielle. Ce ne sont pas les seules, en effet on peut raccorder les solutions entres elles. La donnée d'une condition initiale (t_0, x_0) ne suffit pas à assurer l'unicité de la solution (cf figure 2.1)

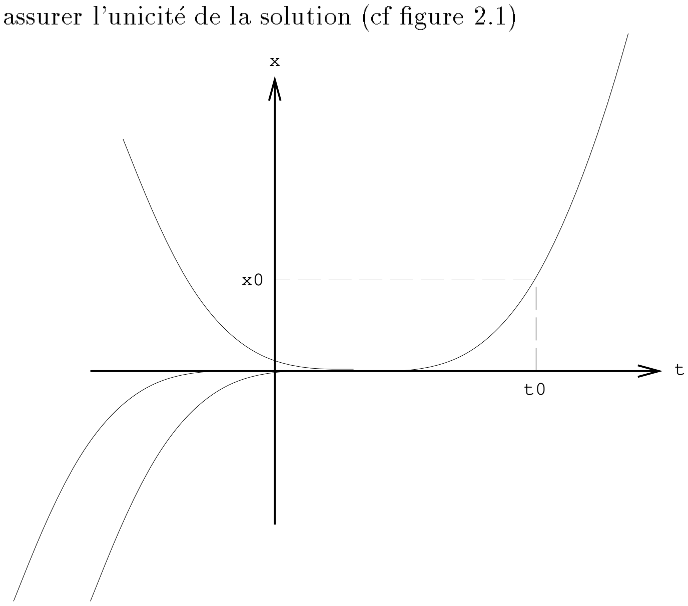

FIG. 2.1 - *Différents raccords des solutions de l'équation $\frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}}$, avec la condition initiale (t_0, x_0)*

2.3.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 7 *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ un espace normé. f est dite* **k**-*lipschitzienne dans Ω relativement à la variable x si :*

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in \Omega, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$$

En pratique, quand f est différentiable on vérifie que la dérivée est bornée : soit la Jacobienne de $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$, $f_i \ : \Omega \mapsto I\!R$:

$$J_x(f) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j \in \{1..n\}}$$

$J_x(f)$ est une fonction des paramètres (t, x) définie sur Ω. Les assertions suivantes sont équivalentes lorsque $\forall t, \Omega_t$ est convexe, avec Ω_t la section de Ω : $\{x/(t,x) \in \Omega\}$:

1. $\|J_x(f)\|_\Omega \leq k$.

2. f est k-lipschitzienne sur Ω relativement à la variable x.

Définition 8 *Soit $f : \Omega \subset I\!R \times I\!R^n \to I\!R^n$ et $(I\!R^n, \|.\|)$ un espace normé, alors f est* **localement lipschitzienne** *dans Ω relativement à la variable x si :*

$$\forall (t_0, x_0) \in \Omega,\ \exists V_{(t_0,x_0)} \text{ voisinage de } (t_0, x_0) \subset \Omega,\ \exists k_{(t_0,x_0)} :$$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k_{(t_0,x_0)} \|x - y\|\ ,\ \forall (t,x), (t,y) \in V_{(t_0,x_0)}$$

c'est-à-dire que pour tout point (t_0, x_0) de Ω il existe un voisinage dans lequel f est lipschitzienne.

Théorème 3 Cauchy-Lipschitz
Si $f : \Omega \subset I\!R \times I\!R^n \to I\!R^n$ est continue ($\in C^0(\Omega, I\!R^n)$), M-lipschitzienne relativement à x dans le cylindre $\mathcal{D} = Ia \times Br$ où :

$$Ia = \{t \in I\!R, |t - t_0| \leq a\}, Br = \{x \in I\!R^n, \|x - x_0\| \leq r\}$$

(que l'on appelle **cylindre de sécurité***), bornée dans le cylindre $\mathcal{D}$,*
alors il existe une unique solution S_φ au problème de Cauchy, avec $I\varphi = \{t \in I\!R, |t - t_0| \leq \alpha\}$ et $\alpha = \min(a, \frac{r}{M})$.

Questions :

- Comment avoir une solution maximale (sur le domaine le plus grand possible) ?

- Que se passe-t'il en dehors de notre cylindre ?

Corollaire 1 *Soit $\Omega \subset I\!R \times I\!R^n$ ouvert, $f : \Omega \to I\!R^n$ continue, $J_x(f)$ continue dans Ω, une condition initiale $(t_0, x_0) \in \Omega$. Alors il existe un cylindre de sécurité centré en ce point et inclus dans Ω, et dans ce cylindre, il y a existence et unicité de la solution au problème de Cauchy.*

Corollaire 2 *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, soit $(t_0, x_0) \in \Omega$, si $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont deux solutions du problème de Cauchy sur des intervalles I_1 et I_2, et si I est un intervalle ouvert contenant t_0 et inclus dans $I_1 \cap I_2$, alors $\forall t \in I,\ u_1(t) = u_2(t)$.*

Démonstration
Puisque u_1 et u_2 sont solutions du problème de Cauchy, on en déduit que $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Si I est un intervalle ouvert inclus dans $I_1 \cap I_2$ contenant t_0, le théorème d'existence et d'unicité locales assure que $u_1 = u_2$ sur un intervalle ouvert de la forme $]t_0 - a; t_0 + a'[$. Soit I^* l'union de tous ces intervalles ouverts inclus dans I, alors I^* est le plus grand intervalle ouvert inclus dans I sur lequel u_1 et u_2 coïncident. Si I^* est inclus strictement dans I, alors une de ses extrémités, t^*, appartient à $I \subset I_1 \cap I_2$ et par continuité de u_1 et de u_2, on a

$$\lim_{t \to t^*} u_1(t) = \lim_{t \to t^*} u_2(t) = u^*$$

Le théorème d'existence et d'unicité indique alors que $u_1(t) = u_2(t)$ sur un intervalle de la forme $]t^* - \alpha; t^* + \alpha[\subset I$. Donc $u_1 = u_2$ sur $I^* \cup]t^* - \alpha; t^* + \alpha[\subset I$, ce qui contredit la maximalité de I^*. Donc $I^* = I$, i.e. $\forall t \in I \subset I_1 \cap I_2$, $u_1(t) = u_2(t)$. □

Corollaire 3 *Soit $\Omega \subset I\!R \times I\!R^n$ ouvert, $f : \Omega \to I\!R^n$ continue, $J_x(f)$ continue dans Ω, une condition initiale $(t_0, x_0) \in \Omega$. Alors il existe un intervalle ouvert maximal $]\alpha; \beta[$ contenant t_0, et dans cet intervalle, il y a existence et unicité de la solution au problème de Cauchy. Cette solution prolonge toutes les solutions locales.*

Démonstration

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a existence et unicité d'une solution sur un intervalle de la forme $]t_0 - a; t_0 + a'[$. Soit $]\alpha; \beta[$ l'union de tous les intervalles I sur lesquels le problème de Cauchy a une solution. (La remarque précédente signifie que $]\alpha; \beta[$ n'est pas vide). Définissons $x(t)$ sur $]\alpha; \beta[$ par : $\forall t \in]\alpha; \beta[$, $\exists I \ni t$ sur lequel il existe une solution u, on pose alors $x(t) = u(t)$. Cette définition est correcte puisque l'on sait que deux solutions définies en t coïncident, par le corollaire précédent. On a défini x de façon unique sur tout $]\alpha; \beta[$, et x est bien une solution maximale. □

Théorème 4 *Si $f \in C^0(\Omega)$, $\Omega \subset I\!R \times I\!R^n$ et si f est localement lipschitzienne par rapport à la variable x dans Ω alors le problème de Cauchy (2.2) admet une unique solution maximale φ_{max} définie sur un intervalle ouvert $I_{max} =]\omega^-(t_0, x_0); \omega^+(t_0, x_0)[$. De plus lorsque $t \to \omega^+(t_0, x_0)$ le couple $(t, \varphi_{max}(t))$ est soit non borné soit tend vers la frontière $\partial\Omega$.*

Démonstration

La démonstration de ce théorème repose sur l'idée que, si le comportement de la solution maximale restait dans un compact inclus dans Ω, on pourrait trouver un cylindre ouvert autour de la limite de cette solution, inclus dans Ω, dans lequel le théorème d'existence et d'unicité s'applique, et on pourrait prolonger cette solution dans Ω, ce qui contredirait sa maximalité.

De façon plus rigoureuse, ce théorème s'énonce ainsi :

Théorème 5 *Soit f continue sur $\Omega \subset I\!R \times I\!R^n$*

Soit φ une unique solution maximale, définie sur $]\omega^-; \omega^+[$, alors le graphe $(t, \varphi(t)) \subset \Omega$ de cette solution est tel que :

$\forall K$ compact $\subset \Omega, \exists$ un voisinage V de $\omega^\pm$ / $\exists t \in V$, $(t, \varphi(t)) \notin K$

et la démonstration se fait par l'absurde. (On le montre uniquement en ω^+). On suppose qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que pour tout voisinage V de ω^+, tous les couples $(t, \varphi(t))$ avec $t \in V$ sont dans K.

Si l'intervalle maximal d'existence est fermé en ω^+, la solution φ est définie sur $[t_0; \omega^+]$, posons $x_1 = \varphi(\omega^+)$. On a $(\omega^+, x_1) \in K$ par hypothèse. Le problème de Cauchy ayant pour condition initiale $x(\omega^+) = x_1$ vérifie les conditions du théorème d'existence et d'unicité d'une solution : $\exists \eta > 0$, $\exists \psi \in \mathcal{C}^\infty([\omega^+; \omega^+ + \eta[)$ / $\forall \sqcup \in [\omega^+; \omega^+ + \eta]$, $\not\forall(\sqcup) = \{(\sqcup, \psi(\sqcup))$ et $\psi(\omega^+) = x_1$. Posons maintenant $\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) \text{ si } t \in [t_0; \omega^+] \\ \psi(t) \text{ si } t \in [\omega^+; \omega^+ + \eta[\end{cases}$

$([t_0; \omega^+ + \eta[, \tilde{\varphi})$ est une solution qui prolonge strictement (I_φ, φ)en ω^+, ce qui contredit la maximalité de cette solution. I n'est donc pas fermé en ω^+.

I est ouvert en ω^+, et on sait que φ est continue sur $[t_0; \omega^+[$, et $([t_0; \omega^+, \varphi([t_0; \omega^+[)) \subset K$, donc φ est bornée sur cet intervalle. On peut définir $\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [t_0; \omega^+[\\ x_0 + \int_{t_0}^{\omega^+} f(t, \varphi(t))dt & \text{sinon} \end{cases}$,

cette définition est correcte puisque $f(t, \varphi(t))$ est continue et bornée sur $[t_0; \omega^+[$.

Comme on aboutit à une contradiction, on en déduit que l'hypothèse du comportement qui reste dans un compact est absurde. □

Définition 9 *Les quantités $\omega^-(t_0, x_0)$ et $\omega^+(t_0, x_0)$ sont appelées* **temps d'évasion**, *l'intervalle I_{max} s'appelle* **intervalle d'existence** *ou* **de vie**.

Exemple 1
Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

On a unicité de la solution de ce système.
Si $x(t_0) = 0 \Rightarrow x(t) = 0, \forall t$,
et si $x(t_0) = x_0$ alors

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + t_0 - t}$$

Or, ici, $t_0 = 0, x_0 = 1,$ donc $x(t) = \frac{1}{1-t}$ dont l'intervalle d'existence est $]-\infty; 1[$

Exemple 2
Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2x} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

On a $2x\dot{x} = -1$, donc $(\dot{x^2}) = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\alpha - t} = +\sqrt{1-t}$ (car $x(0) = 1$) qui est définie sur $]-\infty; 1[$ et admet une tangente verticale en 1

Exemple 3
Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\frac{x_2}{x_3^2} \\ \dot{x_2} = -\frac{x_1}{x_3^2} \\ \dot{x_3} = 1 \end{cases} \quad \text{avec } x(\frac{1}{\pi}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$$

f est définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$ par

$$\begin{cases} x_1 = \sin\frac{1}{t} \\ x_2 = -\cos\frac{1}{t} \\ x_3 = t \end{cases}$$

Remarque
La plus grande partie des théorèmes présentés jusqu'à maintenant se démontrent en utilisant des approximations successives de la solution au problème de Cauchy. La méthode s'appelle **algorithme de Picard**, son principe est le suivant : on définit des approximations successives de la solution par

$$\begin{cases} u_0(t) & = & x_0 \\ u_{n+1}(t) & = & x_0 + \int_0^t f(s, u_n(s))ds \end{cases}$$

Si on applique cette méthode au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} & = & x^2 \\ x(0) & = & 1 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{array}{lllll} u_0(t) & = & 1 & & \\ u_1(t) & = & \int_0^t u_0(s)^2 ds & = & 1 + \int_0^t 1 ds & = & 1 + t \\ u_2(t) & = & 1 + \int_0^t (1+s)^2 ds & = & 1 + \int_0^t 1 + 2s + s^2 ds & = & 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3} \\ u_3(t) & = & 1 + \int_0^t (1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3})^2 ds & = & 1 + \int_0^t 1 + 2s + 3s^d + \mathcal{O}(\int^\ni)\lceil\int & = & 1 + t + t^2 + t^3 + \mathcal{O}(\sqcup^\triangle) \end{array}$$

u_n est le développement à l'ordre n de la solution qui est

$$x(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \text{ si } |t| < 1$$

2.4 Dépendance par rapport aux conditions initiales et aux paramètres

On voudrait étudier les dépendances, en fonction des paramètres t_0, x_0 et λ_0, de la solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \\ \lambda = \lambda_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Posons $\Phi(t, t_0, x_0, \lambda_0)$ la solution au problème (2.4). Le problème est déterministe dans le sens où la donnée des conditions initiales et une "bonne régularité" de la fonction f assure l'existence et surtout l'unicité de la solution. L'étude de la dépendance de la solution par rapport aux paramètres est très importante en analyse numérique : une erreur sur t_0, ou x_0, ou λ_0 peut être vue comme conséquence de la limitation de précision d'un ordinateur. La continuité de la solution par rapport aux paramètres nous assure que si l'erreur due à l'arithmétique de la machine tend vers 0 alors la solution numérique tendra vers la solution du problème. Ce n'est généralement pas suffisant, il faut aussi que la *sensibilité* de la solution par rapport à l'un des paramètres ne soit pas trop grande : en effet comment calculer numériquement sur un ordinateur une approximation de la solution d'un problème si l'on sait qu'une petite variation sur les conditions initiales provoque de grandes variations sur la solution (problème fortement sensible aux conditions initiales tels que le système de Lorenz, l'équation de Van der Pol...). Cette sensibilité aux paramètres est une caractéristique des systèmes chaotiques.

2.4.1 Continuité de la solution

Soit U un ouvert tel que $f : (t, x, \lambda) \in \Omega \times U \mapsto f(t, x, \lambda)$ soit continue et lipschitzienne par rapport à x. Notons

$$W = \bigcup_{(t_0, x_0, \lambda_0) \in \Omega \times U}]\omega^-(t_0, x_0, \lambda_0); \omega^+(t_0, x_0, \lambda_0)[\times (t_0, x_0, \lambda_0) \subset I\!R \times \Omega \times U$$

où $\omega^-(t_0, x_0, \lambda_0)$ et $\omega^+(t_0, x_0, \lambda_0)$ sont les temps d'évasion associés à la solution maximale du problème (2.4). On a alors par définition $\Phi(t, t_0, x_0, \lambda_0) = \varphi_{t_0, x_0, \lambda_0}(t)$ avec $\varphi_{t_0, x_0, \lambda_0}(t)$ la solution maximale passant par (t_0, x_0, λ_0).

Alors on peut énoncer la continuité de la solution $\Phi(t, t_0, x_0, \lambda_0)$ par rapport aux "conditions initiales" :

Théorème 6 *Sous les hypothèses précédentes, Φ est continue sur W et possède les propriétés suivantes :*

1. $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t, t_0, x_0, \lambda_0) = f(t, \Phi(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0), \ \forall (t_0, x_0, \lambda_0) \in \Omega \times U$
2. $\Phi(t_0, t_0, x_0, \lambda_0) = x_0, \ \forall (t_0, x_0, \lambda_0) \in \Omega \times U$

3. $\forall (t_1, t_0, x_0, \lambda_0) \in W$, $[(t, t_0, x_0, \lambda_0) \in W \Leftrightarrow (t, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0) \in W]$
et alors $\Phi(t, t_0, x_0, \lambda_0) = \Phi(t, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0)$

Démonstration
Les deux premiers points sont triviaux, ils reposent d'une part sur la définition de Φ et d'autre part sur le fait que deux solutions maximales qui coïncident en un point t_1 sont identiques. Nous ne donnons pas ici la démonstration de la continuité de Φ sur W, elle est longue (et fastidieuse), et repose sur le théorème du point fixe avec paramètre (continuité du point fixe par rapport au paramètre). Elle se trouve en annexe. □

2.4.2 Différentiabilité

On peut s'attendre à ce que la régularité de la fonction f se retrouve sur la solution. En effet nous avons le théorème suivant :

Théorème 7 *Si $f \in C^r(\Omega \times U)$, $r \geq 0$ alors $\Phi : W \to I\!R^n$ est de classe $C^r(W)$.*

Démonstration
Toujours aussi longue que la précédente... et toujours reléguée en annexe, pour le cas $r = 0$ seulement. □

Soit un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Soit (I_φ, φ) une solution de (2.5). Cette solution dépend de t et d'un certain nombre de paramètres "généralisés" qui sont t_0, x_0, λ.

Résoudre le problème de Cauchy (2.5) revient à fixer t_0, x_0, λ puis à intégrer et donc la solution est :

$$\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$$

Il est important dans beaucoup de problèmes appliqués (et théoriques !) d'étudier la sensibilité de la solution par rapport aux variations des conditions initiales. Traitant globalement le problème en terme de paramètres généralisés, cela signifie que l'on désire connaître

$$\varphi(t, t_0 + \Delta t_0, y_0 + \Delta y_0, \lambda_0 + \Delta\lambda_0)$$

et il est naturel "et classique" de linéariser le problème en écrivant :

$$\varphi(t, t_0 + \Delta t_0, y_0 + \Delta y_0, \lambda_0 + \Delta\lambda_0) =$$

$$\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) + \frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t, t_0, y_0, \lambda_0)\Delta t_0 + J_y\varphi(t, t_0, y_0, \lambda_0)\Delta y_0 + J_\lambda\varphi(t, t_0, y_0, \lambda_0)\Delta\lambda_0 + \cdots$$

Lorsque l'on parle de coefficients de sensibilité, il s'agit bien sûr des quantités :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t, t_0, y_0, \lambda_0) \\ J_y\varphi(t, t_0, y_0, \lambda_0) \\ J_\lambda\varphi(t, t_0, y_0, \lambda_0) \end{array}$$

qui sont toutes trois des fonctions du temps et dont les variations en fonction du temps nous intéressent.

Exemple :
Si l'on considère l'équation de Van Der Pol :

$$\ddot{x} - q(1-x^2)\dot{x} + x = 0$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ q = q_0 \end{cases}$$

On peut classiquement ramener l'équation à un système en posant :

$$\begin{cases} x = y_0 \\ \dot{x} = y_1 \end{cases}$$

d'où

$$\dot{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ q(1-x^2)y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

Soit, si l'on introduit

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$\dot{Y} = F(Y)$ avec

$$F(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & q(1-x^2) \end{pmatrix} Y$$

La condition initiale étant :

$$Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x_0} \end{pmatrix}$$

donnée et q_0 fixé.

Dans cet exemple le problème important est de connaître la sensibilité de la solution de l'équation relativement aux variations du paramètre q.

Exemple :
Un deuxième exemple nous servira à vérifier nos théorèmes.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & \lambda_1 x_1^2 \\ \dot{x}_2 & = & x_2 + \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \\ X(0) & = & Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut déterminer les solutions de ce système sous forme fermée (*closed form* en anglais, i.e. on a une forme explicite).
En effet on peut écrire la première équation sous la forme

$$\frac{\dot{x}_1}{x_1^2} = \lambda_1 \Rightarrow \dot{\frac{-1}{x_1}} = \lambda_1 \Rightarrow \frac{-1}{x_1} = \lambda_1(t-\alpha) \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{\lambda_1(t-\alpha)} \text{ et } x_1(0) = y_1 \Rightarrow x_1(t) = \frac{y_1}{1-\lambda_1 y_1 t}$$

On peut alors déterminer x_2 grâce à $\dot{x_2} = x_2 + \frac{1}{x_1} + \lambda_2$ La solution de l'équation homogène $\dot{x_2} = x_2$ est $x_2 = Ke^t$. On fait "varier la constante" K :

$$\dot{x_2} = \dot{K}e^t + Ke^t = x_2 + \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \Rightarrow \dot{K} = \lambda_1(\frac{1}{\lambda_1 y_1} - t)e^{-t} + \lambda_2 e^{-t}$$

Une primitive de $-te^{-t}$ étant $te^{-t} + e^{-t} + \beta$, on en déduit $K(t) = \lambda_1(te^{-t} + e^{-t} + \beta - \frac{e^{-t}}{\lambda_1 y_1}) - \lambda_2 e^{-t}$. De $x_2(t) = K(t)e^t$ et $x_2(0) = y_2$, on tire

$$x_2(t) = \lambda_1(t + 1 - \frac{1}{\lambda_1 y_1}) + (y_2 + \lambda_2 - \lambda_1 + \frac{1}{y_1})e^t - \lambda_2$$

La solution du système s'écrit :

$$\Phi(t,y,\lambda)=\begin{pmatrix} x_1(t,y,\lambda)\\ x_2(t,y,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1(t)=\frac{y_1}{1-\lambda_1 y_1 t}\\ x_2(t)=\lambda_1(t+1-\frac{1}{\lambda_1 y_1})+(y_2+\lambda_2-\lambda_1+\frac{1}{y_1})e^t-\lambda_2\end{pmatrix}$$

On se garde tout ceci sous le coude, pour vérifier nos théorèmes...

Etudier la sensibilité aux paramètres signifie que l'on désire connaître les dérivées de Φ par rapport à t_0, x_0 et λ_0, ce sont des fonctions du temps dont l'évolution nous intéresse. Dans les trois prochains paragraphes nous allons établir les équations différentielles dont sont solutions ces quantités.

Dépendance par rapport à t_0

Soit l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,t_0,x_0,\lambda_0)=f(t,\Phi(t,t_0,x_0,\lambda_0),\lambda_0)$$

que l'on différencie par rapport à la variable t_0. On peut inverser l'ordre de dérivation puisque l'on suppose Φ de classe C^r. L'équation obtenue est alors

$$\frac{\partial}{\partial t}D_{t_0}\Phi(t,t_0,x_0,\lambda_0)=D_x f(t,\Phi(t,t_0,x_0,\lambda_0),\lambda_0)D_{t_0}\Phi(t,t_0,x_0,\lambda_0)$$

et en différenciant par rapport à t_0 la condition initiale $\Phi(t_0,t_0,x_0,\lambda_0)=x_0$ on obtient la condition $D_{t_0}\Phi(t_0,t_0,x_0,\lambda_0)=-f(t_0,x_0,\lambda_0)$. On appelle équation aux variations le problème de Cauchy dont $D_{t_0}\Phi(t,t_0,x_0,\lambda_0)$ est solution :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}D_{t_0}\Phi = D_x f\ \circ \Phi\ .\ D_{t_0}\Phi\\ D_{t_0}\Phi(t_0,t_0,x_0,\lambda_0)=-f(t_0,x_0,\lambda_0)\end{cases}$$

Dépendance par rapport à x_0

En différenciant par rapport à x_0 la même équation que précédemment nous obtenons une autre équation aux variations :

$$\frac{\partial}{\partial t}D_{x_0}\Phi = D_x f\ {}_o\Phi\ .\ D_{x_0}\Phi$$

dont la condition initiale est $D_{x_0}\Phi(t_0,t_0,x_0,\lambda_0)=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$.

Pour revenir à notre exemple, où x_0 s'appelait y, on a :

$$\Phi(t,y,\lambda)=\begin{pmatrix} x_1(t,y,\lambda)\\ x_2(t,y,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{y_1}{1-\lambda_1 y_1 t}\\ \lambda_1(t+1-\frac{1}{\lambda_1 y_1})+(y_2+\lambda_2-\lambda_1+\frac{1}{y_1})e^t-\lambda_2\end{pmatrix}$$

Calculons $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{(1-\lambda_1 y_1 t)+\lambda_1 y_1 t}{(1-\lambda_1 y_1 t)^2} & 0\\ \frac{1}{y_1^2}-\frac{1}{y_1^2}e^t & e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{(1-\lambda_1 y_1 t)^2} & 0\\ \frac{1}{y_1^2}-\frac{1}{y_1^2}e^t & e^t\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\begin{pmatrix} \frac{2\lambda_1 y_1}{(1-\lambda_1 y_1 t)^3} & 0\\ -\frac{1}{y_1^2}e^t & e^t\end{pmatrix}$$

On vérifie que $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}(\Phi)\ {}_o\frac{\partial \Phi}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\ {}_o\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\begin{pmatrix} 2\lambda_1 x_1 & 0\\ -\frac{1}{x_1^2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{(1-\lambda_1 y_1 t)+\lambda_1 y_1 t}{(1-\lambda_1 y_1 t)^2} & 0\\ \frac{1}{y_1^2}-\frac{1}{y_1^2}e^t & e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2\lambda_1 y_1}{(1-\lambda_1 y_1 t)^3} & 0\\ -\frac{e^t}{y_1^2} & e^t\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Vérifions que l'on a également $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(0,0,y,\lambda) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(0,0,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{(1-\lambda_1 y_1 t)+\lambda_1 y_1 t}{(1-\lambda_1 y_1 t)^2} & 0 \\ \frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_1^2}e^t & e^t \end{pmatrix}(0,0,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dépendance par rapport à λ_0

On obtient cette fois-ci la troisième équation aux variations :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}D_{\lambda_0}\Phi = D_x f \circ \Phi \,.\, D_{\lambda_0}\Phi + D_{\lambda_0} f \\ D_{\lambda_0}\Phi(t_0,t_0,x_0,\lambda_0) = 0 \end{cases}$$

De la même façon on vérifie que ça marche pour notre exemple : (on note $\Psi = \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}$)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \frac{y_1^2 t}{(1-\lambda_1 y_1 t)^2} & 0 \\ t+1-e^t & e^t-1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{y_1^2(1+\lambda_1 y_1 t)}{(1-\lambda_1 y_1 t)^3} & 0 \\ 1-e^t & e^t \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Psi + \frac{\partial f}{\partial\lambda} = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_1 y_1}{1-\lambda_1 y_1 t} & 0 \\ -\frac{(1-\lambda_1 y_1 t)^2}{y_1^2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{y_1^2 t}{(1-\lambda_1 y_1 t)^2} & 0 \\ t+1-e^t & e^t-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_1^2}{(1-\lambda_1 y_1 t)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

On a aussi $\Psi(0,y,\lambda) = \frac{\partial y}{\partial\lambda} = 0$.
Exemple :
L'exemple test (comme toujours) est celui de l'équation [1]

$$\begin{cases} \dot{y} = \lambda y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

La solution étant $y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$ nous pourrons facilement vérifier sur elle nos résultats. Naturellement, il est bon de généraliser cet exemple au cas matriciel à coefficients constants.

Remarque
On peut évidemment procéder plus globalement et introduire d'un coup les paramètres généralisés $p = (t_0, y_0, \lambda_0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et de fait la sensibilité va se mesurer par rapport à la matrice $J_p\Phi(t,t_0,y_0,\lambda_0)$. Il est clair que les deux formulations sont équivalentes.

2.5 Dynamique, Orbites et Flots

Dans ce paragraphe, nous allons définir les différentes notions utilisées en théorie des systèmes dynamiques, ainsi que les liens qui les unissent. [2]
De fait, nous allons partir des fonctions solutions d'un système dynamique, les **flots**, pour construire les systèmes dynamiques. Il s'avère en effet que, mathématiquement, la seule construction possible s'effectue dans ce sens, et que les réciproques ne sont

1. appelée *"équation-test de Dahlquist"*, elle permet de dégager un critère de stabilité des méthodes d'intégration numérique.
2. Ce paragraphe est inspiré du premier chapitre du livre "An introduction to dynamical systems", de D.K. Arrowsmith et C.M. Place, Cambridge University Press, 1990.

que locales.

Définition 10 *$\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un* **$\mathcal{C}^\nabla$-difféomorphisme** *si et seulement si :*

- *φ est C^r*
- *φ est bijective*
- *φ^{-1} est C^r*

Propriété 1 *φ difféomorphisme $\Rightarrow \forall a \in U, D\varphi(a) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, où $\mathcal{GL}_\backslash(\mathbb{R})$ est le groupe linéaire de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque
La réciproque locale de ce théorème est le théorème de la fonction inverse.

Nous allons poser nos définitions dans deux contextes différents : le premier est le cas où le temps est discret (étude de suites et d'équations de récurrence), le second est le cas où le temps est continu (étude de fonctions et d'équations différentielles). Il est intéressant de travailler en parallèle sur ces deux contextes, car les définitions, les propriétés et les outils obtenus dans ces deux domaines sont très ressemblants. (C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on les regroupe sous le même vocable de "**systèmes dynamiques**").

2.5.1 Cas discret

Définition 11 *Un* **flot** *est une application :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \boldsymbol{Z} \times U & \to & U \\ & (k, x_0) & \mapsto & \Phi(k, x_0) \end{array}$$

telle que toutes les applications partielles $\Phi(k, \bullet)$ soient des $\mathcal{C}^\nabla$-difféomorphismes et qui vérifie

- $\Phi(0, x_0) = I_d(x_0) = x_0$
- $\forall\, (k, l) \in \boldsymbol{Z}^2,\ \forall\, x_0 \in U,\ \Phi(k, \Phi(l, x_0)) = \Phi(k + l, x_0)$
  Cette propriété est appelée **déterminisme** *du système.*

Remarques :

- Il suffit que les applications partielles soient $\mathcal{C}^\nabla$, le fait qu'elles soient des difféomorphismes découle de la propriété de déterminisme.
- k joue le rôle du temps, un temps discret.

Définition 12 *L'ensemble $\mathcal{O}_\oplus(\S_\prime) = \{\oplus(\|, \S_\prime), \| \in \mathbb{Z}\}$ est* **l'orbite** *de x_0.*

Remarque
Par commodité de représentation, on relie les points d'une orbite, et on considère que l'ordre sur $\boldsymbol{Z}$ induit un ordre sur l'orbite. $\Phi(k, x_0)$ est le k^e point de l'orbite de x_0.

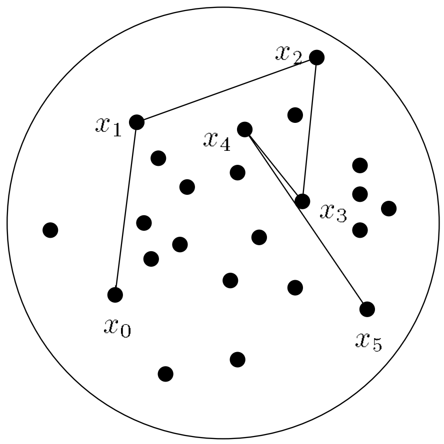

FIG. 2.2 - *Ceci est une orbite. (Les traits d'interpolation ne font pas partie de l'orbite.)*

A partir d'un flot, on peut construire un système dynamique discret,

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$$

en choisissant pour f :

$$\begin{array}{cccc} f: & U & \to & U \\ & x & \mapsto & f(x) = \Phi(1,x) \end{array}$$

La solution de ce système dynamique est $x_k = f^k(x_0) = \Phi(k, x_0)$, avec $f^0 = I_d$, $f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$. On peut le vérifier par récurrence sur k, en utilisant la propriété de déterminisme de Φ.
On note que f est inversible :

$$f^{-1} = \Phi(-1, \bullet) \text{ est l'inverse de } f$$

f est un $\mathcal{C}^\nabla$-difféomorphisme.
On peut alors définir f^k avec k négatif :

$$f^{-(k+1)} = f^{-k} \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f^{-k} = (f^{-1})^{k+1}$$

Définition 13 *Une* **dynamique** *est la donnée d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et d'un C^r-difféomorphisme $f : U \to U$.*

f est la dynamique du système dynamique discret

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) = \Phi(k,x) \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Remarque
Il y a deux aspects dans l'étude d'une dynamique : un aspect “temporel” marqué par la variable $k \in \boldsymbol{Z}$; si on fixe un point $x_0 \in U$, et que l'on fait varier k, on a l'évolution temporelle du point x_0 dans U. L'image importante est l'analogie avec une rivière ou un bassin, où l'on observe la trajectoire d'une particule de fluide

dans ce bassin. Par exemple, on contemple une coquille de noix. C'est la description **lagrangienne** d'une dynamique.

On peut aussi adopter un autre point de vue, qui consiste à se placer en un point fixe du fluide et à le regarder s'écouler en ce point, photo après photo. C'est ce que l'on fait quand, du haut d'un pont, on regarde s'écouler l'eau. Il s'agit d'une description **eulérienne** de la dynamique : elle se résume à la donnée de f au point considéré.

Définition 14 *$x^* \in U$ est* **point fixe** *de f si et seulement si $f(x^*) = x^*$*

Définition 15 *$x^* \in U$ est* **point périodique** *de f si et seulement s'il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que $f^T(x^*) = x^*$ et $f(x^*) \neq x^*$. Le plus petit T qui vérifie cette égalité est appelé la* **période** *de x^*.*

2.5.2 Cas continu

Les notions et propriétés présentées dans le cas discret sont étendues au cas où le temps est continu.

Définition 16 *On appelle* **flot** *sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ une application continûment différentiable $\Phi : \mathbb{R} \times U \to U$ telle que*

- $\Phi(0, x) = x,\ \forall\, x \in U$
- $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x),\ \forall\, (t, s) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, x \in U$

On note $\varphi_t(x) = \Phi(t, x)$ et on considère la famille $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. On a alors $\Phi(-t, \Phi(t, x)) = \Phi(0, x) = x \Rightarrow \varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = x$, donc $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$,
donc φ_t est un difféomorphisme de U.

Définition 17 *(Rappel) Une* **dynamique** *est la donnée d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et d'un C^r-difféomorphisme $f : U \to U$.*

Les φ_t sont les dynamiques du flot Φ. Se donner un flot équivaut donc à se donner une famille $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de difféomorphismes :

$$\boxed{\Phi \Leftrightarrow \{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}} \in \mathrm{Diff}(U)}$$

Remarque
Les notions de descriptions lagrangienne et eulérienne introduites dans le cas discret sont encore valides dans le cas continu.

Définition 18

- *L'ensemble $\mathcal{O}(\S_\prime) = \{\oplus(\sqcup, \S_\prime),\ \sqcup \in \mathcal{IR}\}$ est l'orbite ou la* **trajectoire** *de x_0.*
- *x_0 est un* **point fixe** *ou* **point d'équilibre** *ou* **point singulier** *ou* **point critique** *du flot si $\mathcal{O}(\S_\prime) = \{\S_\prime\}$.*
- *Une* **trajectoire périodique** *du flot Φ est une trajectoire dont l'image est une courbe fermée.*
  C'est une trajectoire qui est non réduite à un point et telle qu'il existe $T > 0$ et $x \in U$ vérifiant $\Phi(T, x) = x$. La valeur minimale de T qui convient est appelée **période** *de x.*

Remarque
Par commodité de représentation, on indiquera le sens de parcours (t croissant) par des flèches portées par les trajectoires.

Exercice 1 *Montrer que si x appartient à une trajectoire périodique, tous les points $y \in \mathcal{O}(\S)$ sont périodiques de même période que x.*

Définition 19 *On appelle* **espace des phases** *l'ouvert U et* **portrait de phase** *du flot l'ensemble des images de toutes les trajectoires.*

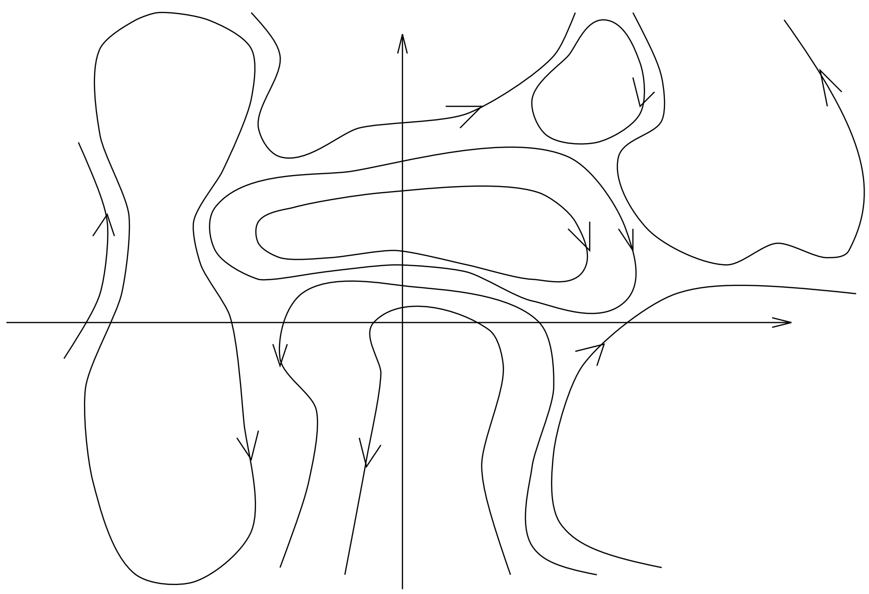

FIG. 2.3 - *Quelques trajectoires*

Remarque
Pour un système autonome, les trajectoires sont disjointes ou confondues dans l'espace des phases : en effet, si deux trajectoires se coupent en un point $\bar{x}$, $\exists\,(t_1, x_1) \in \mathbb{R} \times U$, $\exists\,(t_2, x_2) \in \mathbb{R} \times U$ tels que :

$$\bar{x} = \Phi(t_1, x_1)$$
$$\bar{x} = \Phi(t_2, x_2)$$

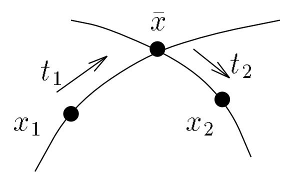

FIG. 2.4 - *Deux trajectoires se coupant en un point $\bar{x}$.*

alors $\Phi(t_1, x_1) = \Phi(t_2, x_2)$ et $x_2 = \Phi(-t_2, \Phi(t_2, x_2)) = \Phi(-t_2, \Phi(t_1, x_1)) = \Phi(t_1 - t_2, x_1)$, i.e. $x_2 \in \mathcal{O}(\S_\infty)$, donc $\mathcal{O}(\S_\in) \subset \mathcal{O}(\S_\infty)$ et de même $\mathcal{O}(\S_\infty) \subset \mathcal{O}(\S_\in)$, ce qui signifie que les trajectoires sont confondues.

De façon informelle, un flot sert à décrire un mouvement dans l'espace des phases. De façon formelle, la donnée d'un flot ne nous renseigne pas sur les changements : est-ce qu'une trajectoire est parcourue vite ou non ? Nous allons maintenant montrer comment on peut déduire à partir d'un flot le système dynamique qui lui est associé.

On a $x = \Phi(0, x)$. Soit $\Delta t \in I\!R$, considérons $\Phi(\Delta t, x)$, on définit la vitesse du flot Φ au point x par

$$v(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(\Delta t, x) - \Phi(0, x)}{\Delta t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x)$$

La vitesse est définie sans ambiguïté car par tout point de l'espace des phases il passe une trajectoire et une seule (cf la remarque précédente).

Au flot Φ on fait correspondre le champ de vecteurs :

$$\Phi \to (x, \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x)) \in T_x(U)$$

où $T_x(U)$ est l'espace tangent à U en x, et cela définit une application

$$\begin{array}{lll} U & \to & T(U) = \bigcup_{x \in U} T_x(U) \\ x & \mapsto & (x, v(x)) \end{array}$$

Remarque
Il serait important ici d'utiliser le langage des variétés pour illustrer le fait que les vecteurs tangents à U ne vivent pas nécessairement dans U. Contentons-nous d'imaginer un flot sur une sphère :

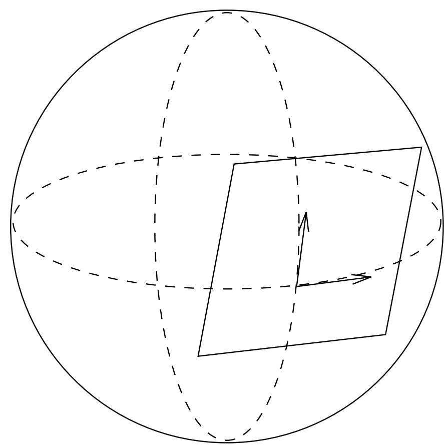

FIG. 2.5 - *Ceci est une sphère*

Soit $x_0 \in U$, on a deux objets attachés à x_0 : $v(x_0)$ et $\mathcal{O}(\S_\prime)$ la trajectoire passant par x_0. L'évolution temporelle sur cette trajectoire est donnée par

$$\begin{array}{cccc} \xi : & \mathbb{R} & \to & U \\ & t & \mapsto & \xi(t) = \Phi(t, x_0) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(t+h, x_0) - \Phi(t, x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(h, \xi(t)) - \Phi(0, \xi(t))}{h} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, \xi(t)) \\ &= v(\xi(t)) \end{aligned}$$

$\xi : \mathbb{R} \to U$ est donc solution du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v(x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

On a donc fait ceci :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \textit{flot } \Phi & & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v(x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \\ \updownarrow & \searrow & \updownarrow \\ \{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathrm{Diff}(U) & & \text{Champ de vecteurs } v \text{ sur } U \end{array}}$$

Et on voudrait se ramener du système dynamique au flot initial, malheureusement cela s'avère très souvent impossible.

Remarque
Si x^* est point d'équilibre du flot, i.e. $\Phi(t,x^*) = x^* \; \forall \, t$, alors $v(x^*) = 0$ et une solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v(x) \\ x(0) & = & x^* \end{array} \right.$$

est $\xi(t) = x^*$.
Ce n'est pas forcément la seule. En fait, la notion de point d'équilibre et celle de point singulier (ou critique) sont différentes, la définition 18 qui est donnée ici est celle de point d'équilibre, un point singulier étant un point pour lequel $v(x)$ s'annule. Toutefois, dans le cadre d'application du théorème d'existence et d'unicité de la solution au problème de Cauchy, elles coïncident, puisque la solution constante est la seule possible.

Remarque
A tout flot on peut faire correspondre un système dynamique autonome, mais l'inverse n'est pas vrai. Par exemple, il existe des systèmes autonomes dont les solutions ne peuvent pas être définies pour tout $t \in I\!R$: $\dot{x} = x^2$ a pour solution

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{C-t} \text{ si } t \in]-\infty; C[\\ 0 \text{ si } t \in I\!R \\ \frac{A'}{C'-t} \text{ si } t \in]C'; +\infty[\end{array} \right.$$

mais, grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, il est toujours possible de définir un flot local, par exemple $\Phi(t,x_0) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$, avec $t \in]-\infty; \frac{1}{x_0}[$ si $x_0 > 0$ pour le système précédent. On remarque que si $s \in]-\infty; \frac{1}{x_0}[$, $t \in]-\infty; \frac{1}{x_0}[$, et si on a aussi $s+t \in]-\infty; \frac{1}{x_0}[$, alors $\Phi(s, \Phi(t,x_0)) = \Phi(s+t, x_0)$. (On utilise la même fonction lorsque $x_0 < 0$, avec $t \in]\frac{1}{x_0}; +\infty[$). Cette notion de flot local signifie que les particules atteignent les confins de U.

L'intervalle de temps pendant lequel on peut suivre l'évolution d'une particule dépend de la position initiale de celle-ci.

Définition 20 *U_0 est un* **ouvert relativement compact** *de U si U_0 est contenu dans une partie compacte de U, ou, de façon équivalente, si $\bar{U_0}$ est compact, ou enfin, puisque l'on est dans $I\!R^n$, si U_0 est un ouvert borné tel que $\bar{U_0} \bigcap Front(U) = \emptyset$.*

Si U_0 ouvert relativement compact $\subset U$ est assez petit, il existe un intervalle de temps $T(U_0)$ tel que le flot $\Phi(t,x)$ soit bien défini pour $x \in U_0$ et $t \in T(U_0)$.

Définition 21 *Un* **flot local** *est une famille indexée par U_0 (ouverts relativement compacts de U) et par $t \in T(U_0)$ (intervalle de définition de la solution maximale) de difféomorphismes entre ouverts relativement compacts de U :*

$$\Phi^t_{U_0} : U_0 \rightarrow U_t = \Phi^t_{U_0}(U_0)$$

telle que l'on ait une loi de pseudo-groupe

- $\Phi^0_{U_0} = I_{d_{U_0}}$
- $\Phi^s_{U_t} \circ \Phi^t_{U_0} = \Phi^{s+t}_{U_0}$ *si* $t \in T(U_0)$, $s \in T(U_t)$, $s+t \in T(U_0)$

.

Le schéma complet de nos constructions mathématiques est :

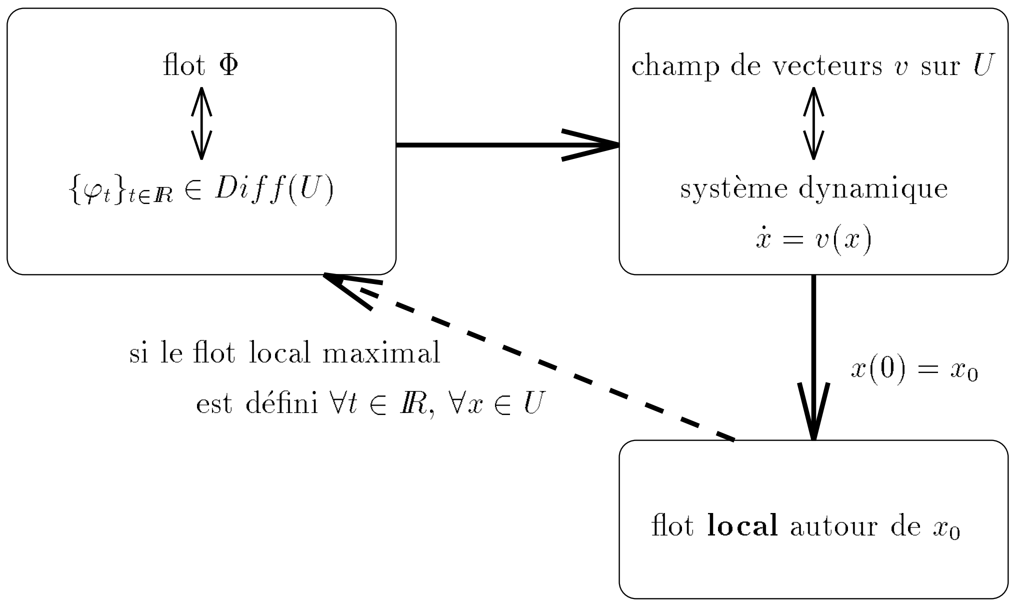

FIG. 2.6 - *bilan*

On ne s'occupe donc que de ce qui se passe localement...

2.6 Comportements stationnaires

2.6.1 Ensembles invariants et ensembles limites

Dans ce paragraphe nous allons définir des objets valables aussi bien pour des systèmes dynamiques discrets que pour des systèmes continus. Pour les différencier, l'application F fera référence à un système discret, et on notera Φ le flot d'un système continu.

Définition 22 – *Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est* **invariant** *par F si $\forall x \in \Lambda$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $F(k,x) \in \Lambda$.*
On peut également l'écrire : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $F(k,\Lambda) \subset \Lambda$.

– *De la même façon pour un système continu, on a :*
un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est **invariant** *par le flot Φ si $\forall x \in \Lambda$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t,x) \in \Lambda$, ou*
$\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t,\Lambda) \subset \Lambda$

– *Un ensemble est* **positivement invariant** *si les orbites de ses points restent en lui-même pour $k \in \mathbb{Z}^+$ ou $t \in \mathbb{R}^+$:*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+,\ F(k,\Lambda) \subset \Lambda$$
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \Phi(t,\Lambda) \subset \Lambda$$

- *Un ensemble est* **négativement invariant** *si les orbites de ses points restent en lui-même pour $k \in \mathbb{Z}^-$ ou $t \in \mathbb{R}^-$:*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^-,\ F(k, \Lambda) \subset \Lambda$$
$$\forall t \in \mathbb{R}^-,\ \Phi(t, \Lambda) \subset \Lambda$$

Par exemple, l'orbite d'un point quelconque est un ensemble invariant. Il en découle que les points fixes et les cycles sont des ensembles invariants ; cependant ces derniers présentent deux particularités :

- ils sont minimaux, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de sous-ensemble strict qui soit lui-même invariant ;
- ils sont périodiques.

D'autres formes de récurrence plus fines que la périodicité existent, et les définitions suivantes vont nous permettre de les cerner.

Définition 23 *Un point x est un* **point non errant** *(non wandering point en anglais) pour l'application F si, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x, $\forall k_0 \in \mathbb{N}$, $\exists k > k_0$ ou $\exists k < -k_0$ tel que $F(k, \mathcal{V}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.*
Un point x est un **point non errant** *pour le flot Φ si, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x et pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exists t > t_0 > 0$ ou $\exists t < -t_0 < 0$ tel que $\Phi(t, \mathcal{V}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.*
*L'ensemble des points non errants pour F (resp. Φ) est appelé l'***ensemble non errant***, il est noté, selon les auteurs, Ω ou Λ.*

Définition 24 *Un point $x^* \in U$ est un point α-limite de l'orbite de F (resp. Φ) passant par x s'il existe une suite $(k_i)_{i \in \mathbb{N}} \to -\infty$ (resp. $(t_i)_{i \in \mathbb{N}} \to -\infty$) telle que*

$$\lim_{i \to +\infty} F(k_i, x) = x^*$$
$$(\textit{resp. } \lim_{i \to +\infty} \Phi(t_i, x) = x^*)$$

Un point $x^* \in U$ est un point ω-limite de l'orbite de F (resp. Φ) passant par x s'il existe une suite $(k_i)_{i \in \mathbb{N}} \to +\infty$ (resp. $(t_i)_{i \in \mathbb{N}} \to +\infty$) telle que

$$\lim_{i \to +\infty} F(k_i, x) = x^*$$
$$(\textit{resp. } \lim_{i \to +\infty} \Phi(t_i, x) = x^*)$$

L'ensemble de tous les points α-limite de x est l'ensemble α-limite de x, noté $L_\alpha(x)$. L'ensemble de tous les points ω-limite de x est l'ensemble ω-limite de x, noté $L_\omega(x)$. Ces ensembles sont invariants[3].

L'ensemble des ensembles α-limite des points d'un ensemble E est noté $L_\alpha(E)$. L'ensemble des ensembles ω-limite des points d'un ensemble E est noté $L_\omega(E)$.

L'ensemble de tous les points (α ou ω) limite d'un ensemble E, $L_\alpha(E) \cup L_\omega(E)$, est appelé ensemble limite de E.

Remarque
Tout ensemble α- ou ω-limite est inclus dans Ω, l'ensemble non wandering.

Théorème 8 (théorème de Poincaré-Bendixson)
Dans $\mathbb{R}^2$, tout ensemble limite compact non vide qui ne contient pas de point fixe est une orbite fermée.

3. α et ω sont les première et dernière lettres de l'alphabet grec. Cette référence est à rapprocher de cette caractérisation de Dieu, inscrite dans l'Ancien Testament : "Je suis l'Alpha et l'Oméga".

Remarque
Ce théorème est l'un des rares théorèmes qui indique une caractéristique **globale** d'un portrait de phase.
Il n'existe pas d'analogue à ce théorème en dimension supérieure, car nous verrons bientôt qu'un comportement chaotique peut apparaître dès la dimension 3.

Définition 25 *Un* **cycle limite** *est une orbite fermée γ qui vérifie*

$$\exists\, x \notin \gamma,\ \gamma \subset L_\alpha(x) \text{ ou } \gamma \subset L_\omega(x)$$

Remarque
Le théorème de Poincaré-Bendixson permet de dire qu'un ensemble compact non vide Λ positivement ou négativement invariant contient soit un point fixe, soit un cycle limite, si l'on travaille dans le plan. Ce résultat est souvent utile pour démontrer l'existence d'un cycle limite.

2.6.2 Stabilité - Attracteurs

Tout d'abord, nous définissons les différentes notions de stabilité.

Définition 26 Stabilité, ensembles stables et instables

- *Un ensemble limite L est dit* **stable** *si pour tout voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de L il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de L tel que $\forall x \in \mathcal{V}$, $\forall \sqcup > \prime$, $\varphi_\sqcup(\S) \in \mathcal{U}$, ou, de façon équivalente, $\varphi_t(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$ $\forall \sqcup > \prime$.*

- *Un ensemble limite L est* **asymptotiquement stable** *s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de L tel que l'ensemble ω-limite de tout point de $\mathcal{V}$ est L.*

- *Un ensemble limite L est* **instable** *s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de L tel que l'ensemble α-limite de tout point de $\mathcal{V}$ est L.*
  Un ensemble instable est un ensemble asymptotiquement stable lorsque l'on inverse le sens du temps.

- *Un ensemble limite L est* **non stable** *ou* **semi-stable** *si tout voisinage de L contient au moins un point n'appartenant pas à L dont l'ensemble α-limite est L et un point n'appartenant pas à L dont l'ensemble ω-limite est L aussi.*

Remarque
Un ensemble asymptotiquement stable est stable. Les autres types de stabilité sont mutuellement exclusifs.

Définition 27 *Un* **attracteur** *est un ensemble ω-limite asymptotiquement stable.*

Définition 28 *Un* **répulseur** *est un ensemble α-limite instable.*

Définition 29 *Le* **bassin d'attraction** *de l'attracteur $\mathcal{A}$ est l'ensemble des points dont l'ensemble ω-limite est inclus dans $\mathcal{A}$.*

2.6.3 Les différents comportements stationnaires

Un comportement stationnaire est un comportement asymptotique, on ne s'intéresse pas à l'étude des transitoires. Nous ne nous intéresserons qu'aux comportements bornés, i.e. aux ensembles limites inclus dans un compact.
Les différents comportements stationnaires sont les suivants :

- **point d'équilibre**
  C'est une solution constante d'un système dynamique autonome.

- **solution périodique**
  C'est une solution non-constante d'un système dynamique qui se répète dans le temps.

- **solution quasi-périodique**
  La solution peut s'exprimer comme somme dénombrable de fonctions périodiques :
  $$x(t) = \sum_i h_i(t)$$
  où h_i est périodique de période T_i et de fréquence $f_i = 1/T_i$. De plus il doit exister un ensemble fini de **fréquences de base** $\{\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_p\}$ vérifiant

  - cet ensemble est linéairement indépendant, i.e. il n'existe pas de combinaison linéaire à coefficients entiers non tous nuls $\{k_1, \ldots, k_p\}$ telle que $k_1\hat{f}_1 + \ldots + k_p\hat{f}_p = 0$
  - il forme une **base intégrale finie** pour les f_i, i.e. pour chaque i il existe des entiers $k_1^i, \ldots, k_p^i$ tels que $f_i = |k_1^i\hat{f}_1 + \ldots + k_p^i\hat{f}_p|$. L'ensemble limite résultat est appelé un p-**tore**.

- **chaos**
  Le chaos peut être défini négativement comme n'étant aucun des comportements bornés précédents. Il se caractérise par une grande sensibilité aux conditions initiales.

Définition 30 *Si X est un espace métrique, $f : X \to X$ est* **sensible aux conditions initiales** *si*
- cas discret : $\exists \delta > 0$ *tel que* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall x_0 \in X$, $\exists x \in X$ *tel que* $d(x_0, x) \leq \varepsilon$ *et* $d(f^N(x_0), f^N(x)) \geq \delta$ *avec N indépendant de x_0.*
- cas continu : $\exists \delta > 0$ *tel que* $\forall \varepsilon > 0, \exists T \in \mathbb{R}^+, \forall x_0 \in X, \exists x \in X$ *tel que* $d(x_0, x) \leq \varepsilon$ *et* $d(\Phi(T, x_0), \Phi(T, x)) \geq \delta$ *avec T indépendant de x_0.*

L'attracteur dans ce cas est parfois appelé attracteur étrange, mais il n'y a pas encore de consensus au sein de la communauté mathématique sur la définition de cet objet. Voici en vrac quelques définitions possibles.

Définition 31 *Un* **attracteur étrange** *est défini par, au choix :*

- *dans la tradition de Landau-Lifschitz, il doit vérifier :*
  - il existe des trajectoires périodiques de toutes les périodes multiples entiers d'une période de base pour le cas continu (ce que les physiciens appellent "période fondamentale, qui est une grandeur caractéristique du problème") , ou de toutes les périodes entières pour le cas discret.
  - l'ensemble des trajectoires périodiques est dense dans l'attracteur.
  - il existe une trajectoire partout dense dans l'attracteur.
  - le système est sensible aux conditions initiales.

- *il contient une orbite homocline*[4] *(il a été montré que, dans les systèmes paramétrés chaotiques où certaines bifurcations font apparaître des orbites homoclines, apparaissent simultanément une infinité de trajectoires périodiques, et plus généralement que se produit un grand apport à la structure de l'attracteur ; ce phénomène est appelé* **explosion homocline***).*

- *il est sensible aux conditions initiales.*

4. Ce terme sera défini au paragraphe 3.4.3.

- *la somme de ses exposants de Lyapunov est négative (le système est dissipatif) et au moins un des exposants de Lyapunov est positif*[5].

En général, il s'agit d'un objet complexe, qui n'est pas une variété, et qui possède une dimension non entière.

2.7 Les équations différentielles ordinaires scalaires non autonomes

Naturellement, il s'agit d'équations qui s'écrivent $\dot{x} = f(t, x)$, où f est une application de $I\!R \times I\!R \to I\!R$.
Il est bien connu que l'on peut toujours ramener une équation non autonome à un système autonome en introduisant une variable auxiliaire $s = t$ et en considérant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(s, x) \\ \frac{ds}{dt} = 1 \end{cases}$$

Cependant, cette remarque masque la réalité de la géométrie de ces équations. Pour comprendre cela re-précisons quelques définitions, qui se rapportent à la solution du problème de Cauchy défini par la donnée de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ et de la condition initiale $x(t_0) = x_0$, problème que nous désignerons par la suite par PC :

Définition 32 – *$I_{(t_0,x_0)}$ désignera l'intervalle maximum d'existence de la solution du problème PC.*

- *$x(t) = \Phi(t, t_0, x_0)$ désignera la solution de PC.*
- *$T(t_0, x_0) = \{(t, \Phi(t, t_0, x_0) : t \in I_{(t_0,x_0)}\}$ est la trajectoire de la solution.*
- *$O(t_0, x_0) = \{\Phi(t, t_0, x_0) : t \in I_{(t_0,x_0)}\}$ est l'orbite de la solution.*

Considérons tout d'abord l'exemple suivant :

Exemple 1 *Soit l'équation différentielle $\dot{x} = sin(t)$, traçons deux trajectoires issues de conditions initiales en zéro. Les orbites sont la projection de ces trajectoires sur l'axe des ordonnées, il apparaît alors que $I_{(0,0)} \cap I_{(0,-1)} \neq \emptyset$ et d'autre part ces orbites ne sont pas confondues.*

On peut résumer cette remarque importante en disant que contrairement au cas autonome, une orbite n'est pas uniquement définie par la donnée du point x_0 dans l'espace des phases.

La première tâche à accomplir est de rechercher les points d'équilibre, pour une équation non autonome. Puis se poser la question de savoir s'il existe des solutions remarquables autres que les points d'équilibre.
En fait après les points d'équilibre, ce sont les solutions périodiques qui sont capitales. Nous allons voir que lorsque f est périodique en t, alors le comportement qualitatif des solutions de l'équation est semblable au cas autonome si nous remplaçons point d'équilibre par solution périodique.

Exemple 2 *On étudiera les deux équations suivantes :*

$$\dot{x} = -x + cos(t)$$

et

$$\dot{x} = -x + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}$$

avant de commencer la théorie....

5. Les exposants de Lyapunov seront définis au paragraphe 5.3.

Considérons donc une équation non autonome : $\dot{x} = f(t, x)$, **dans laquelle nous supposerons que** $f(t+1, x) = f(t, x), \forall t \in \mathbb{R}$. On supposera de plus que f est définie quel que soit $t \in \mathbb{R}$, de manière à ne pas obscurcir le raisonnement.
Plusieurs remarques élémentaires vont nous servir de guide :

- Soit $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ la solution de PC, formons $y(t) = x(t + c)$, c entier. Il est clair que : $\frac{dy}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t+c) = f(t+c, x) = f(t, x)$, donc y vérifie l'équation différentielle, c'est une solution du problème de Cauchy associée à la condition initiale $y(0) = x(c)$.

- En utilisant le théorème d'unicité du PC, on voit que :
$$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t+1, t_0+1, x_0).$$

- De même :
$$\varphi(t+1, t_0, x_0) = \varphi(t, t_0, \varphi(t_0+1, t_0, x_0)).$$

Ces dernières conditions d'invariance par translation, vont nous permettre d'éclaircir quelque peu l'étude des solutions périodiques. Nous allons poser, pour simplifier $t_0 = 0$. Si la solution qui nous intéresse reste bornée lorsque t tend vers l'infini, alors nous allons étudier son comportement en la découpant en tranches de longueur 1. c'est-à-dire en introduisant la suite de fonctions définies sur le compact $[0, 1]$,

$$\varphi_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

avec

$$\varphi_0(t) = \varphi(t, 0, x_0)$$
$$\varphi_1(t) = \varphi(t+1, 0, x_0)$$

etc... Supposons que $\varphi_1(0) \geq \varphi_0(0)$, alors la suite de fonctions est monotone croissante sur l'intervalle. Elle converge donc monotonement vers une fonction limite Φ. On voit facilement que Φ est solution de l'équation différentielle sur l'intervalle et que $\Phi(1) = \Phi(0)$. On peut alors résumer :

Théorème 9 *Si une solution $\Phi(t, 0, x_0)$ d'une équation différentielle 1-périodique est bornée lorsque $t \to \infty$, alors il existe une solution 1-périodique de l'équation différentielle considérée, telle que : $\Phi(t+k, 0, x_0) \to \Phi(t)$ lorsque $k \to \infty$, monotonement et uniformément sur $[0, 1]$.*

Exercice 2 *Enoncer un résultat similaire lorsque $\Phi(t, 0, x_0)$ est bornée lorsque $t \to -\infty$.*

Nous avons donné la démonstration de ce théorème car elle utilise une idée importante : ce qui est essentiel dans la convergence des Φ_k, ce n'est pas ce qui se passe à l'intérieur du segment, mais en fait ce qui se passe au point 0. On a étudié la suite des points $\Phi_k(0)$. C'est une section du plan des trajectoires par l'axe des x.

Définition 33 *L'application de Poincaré d'une équation différentielle 1-périodique est définie par :*
$$\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x_0 \mapsto \Phi(1, 0, x_0)$$

L'importance de cette application provient du fait que x_0 est la condition initiale d'une solution 1-périodique si et seulement si c'est un point fixe de l'application Π[6].

6. Nous reparlerons des applications de Poincaré au paragraphe 5.2.

Nous sommes alors conduit à étudier ces applications scalaires de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Avant cela donnons deux définitions :

Définition 34 *Une solution périodique $\varphi(t, t_0, x_0)$ est dite stable si,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \textit{ ne dépendant pas de } t_0 \textit{ tel que,}$$

$$\forall y_0 \textit{ pour lequel } |y_0 - x_0| < \delta,$$

on ait

$$|\varphi(t, t_0, y_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \epsilon \ \ \forall t \geq t_0$$

Définition 35 *Une solution périodique $\varphi(t, t_0, x_0)$ est dite asymptotiquement stable si, elle est stable et si de plus elle vérifie la propriété suivante :*

$$\exists r > 0, \textit{indépendant de } t_0 \textit{ tel que}$$

$$|\varphi(t, t_0, y_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| \to 0 \ \ ,$$

lorsque $t \to +\infty$, $\forall y_0$ vérifiant $|y_0 - x_0| < r$

Afin d'étudier la stabilité des orbites périodiques des équations 1-périodiques, nous allons utiliser les propriétés de stabilité des équations scalaires, par l'intermédiaire de l'application de Poincaré.

2.8 Quelques définitions et résultats sur les applications scalaires

Etant donnée une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et une valeur initiale x_0, on considère la suite des itérés de x_0 par f. Soit x_0, $f(x_0)$, $f(f(x_0))$, etc ....
Les définitions associées aux orbites sont les mêmes que pour les équations differentielles ordinaires, ainsi que les définitions de stabilité et stabilité asymptotique. Il n'est pas très étonnant que l'on ait le théorème suivant :

Théorème 10 *Soit f une application de classe C^1, un point fixe $x^\star$ de f est asymptotiquement stable si $\left|\dot{f}(x^\star)\right| < 1$, il est instable si $\left|\dot{f}(x^\star)\right| > 1$.*

Naturellement on a la

Définition 36 *Un point fixe $x^\star$ est hyperbolique si $\left|\dot{f}(x^\star)\right| < 1$*

On déduit de ces définitions les résultats suivants sur la stabilité des solutions périodiques. L'application de Poincaré est différentiable et est monotone non décroissante, dans le cas d'une solution 1-périodique du problème de Cauchy, donc $\Pi(x_0) \geq 0$ en un point fixe x_0. Donc φ sera asymptotiquement stable si $\Pi(x_0) < 1$ et instable si $\Pi(x_0) > 1$. Naturellement le problème est de savoir calculer Π, et ce n'est pas trivial..... Cependant on peut utiliser dans notre cas le résultat suivant :

Lemme 1 *Si $\varphi(t, 0, x_0)$ est une solution 1-périodique de $\dot{x} = f(t, x)$ vérifiant la condition $\varphi(0, 0, x_0) = x_0$, alors $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, 0, x_0)$ est la solution du problème de conditions initiales :*

$$\dot{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, 0, x_0))u, \ \ u(0) = 1$$

On a donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t,0,x_0) = \exp[\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\varphi(s,0,x_0))ds].$$

Cette équation linéaire s'appelle **l'équation variationnelle linéaire**. On a alors l'expression de la dérivée de la fonction de Poincaré :

Lemme 2 *Sous les définitions du lemme précédent on a :*

$$\dot{\Pi}(x_0) = \exp[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(s,\varphi(s,0,x_0))ds].$$

On en déduit immédiatement:

Théorème 11 *En notant :*

$$P = \exp[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(s,\varphi(s,0,x_0))ds]$$

on a : $\varphi(t,0,x_0)$ *est asymptotiquement stable si* $P < 1$ *et instable si* $P > 1$.

2.9 Méthode de variation de la constante

Cette méthode sert souvent en TD d'EDO à résoudre les équations différentielles étudiées (i.e. à trouver une forme explicite, également appelée forme fermée pour la solution). Il s'agit de résoudre dans $I\!R$

$$\begin{cases} \dot{x} & = & a(t)x + b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

On commence par résoudre le système homogène $\dot{x} = a(t)x$, la solution est $x(t) = Ke^{A(t)}$ avec A une primitive de a.
On pose ensuite $K = K(t)$, i.e. la constante n'en est pas une, et on fait "varier la constante" K pour résoudre le système initial :

$$\begin{array}{cl} & \dot{x} = \dot{K}(t)e^{A(t)} + K(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)K(t)e^{A(t)} + b(t) \\ \Rightarrow \dot{K}(t)e^{A(t)} = b(t) & \\ \Rightarrow & \dot{K}(t) = b(t)e^{-A(t)} \\ \Rightarrow & K(t) = K(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds \\ \Rightarrow & x(t) = [K(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds]e^{A(t)} \text{ et} x(t_0) = x_0 \\ \Rightarrow & x(t) = [x_0e^{-A(t_0)} + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds]e^{A(t)} \end{array}$$

Exemple
Résolvons

$$\begin{cases} \dot{x} & = & ax + b \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases} \quad \text{avec } a, b \in I\!R$$

La solution du système homogène $\dot{x} = ax$ est $x = Ke^{at}$, on fait varier la constante

$$\begin{array}{cl} & \dot{x} = \dot{K}e^{at} + Kae^{at} = aKe^{at} + b \\ \Rightarrow & \dot{K}e^{at} = b \\ \Rightarrow & \dot{K} = be^{-at} \\ \Rightarrow & K(t) = K(t_0) + \int_{t_0}^t be^{-as}ds \\ \Rightarrow & K(t) = K(t_0) - \frac{b}{a}e^{-at} + \frac{b}{a}e^{-at_0} \\ \Rightarrow & x(t) = [K(t_0) - \frac{b}{a}e^{-at} + \frac{b}{a}e^{-at_0}]e^{at} \text{ et } x(t_0) = x_0 \\ \Rightarrow & K(t_0)e^{at_0} = x_0 \\ \Rightarrow & K(t_0) = x_0e^{-at_0} \\ \Rightarrow & x(t) = [x_0 + \frac{b}{a}]e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a} \end{array}$$

Avertissement
Bien qu'en TD les systèmes étudiés admettent très souvent une solution sous forme fermée, il n'en va pas de même dans la nature...

Chapitre 3

Etude locale des systèmes dynamiques

3.1 Rappels sur les systèmes linéaires

[1] On s'intéresse aux systèmes linéaires parce qu'ils servent d'approximation des systèmes non linéaires au voisinage de leurs points d'équilibre, et que souvent ils se comportent de la même façon au voisinage de ces points.
Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec $X(0) = (c_1, c_2) = c_0$
Ce système admet pour solution :

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} \\ x_2(t) = c_2 e^{2t} \end{cases}$$

On remarque que $x_1^2 x_2 = k$ constant.

– Les courbes peuvent être tracées dans le plan (x_1, x_2). C'est l'espace des phases.

1. Ce paragraphe est inspiré du premier chapitre du livre "Differential Equations and Dynamical Systems", de Lawrence Perko, Texts in Applied Mathematics, vol. 7, Springer Verlag, 1991.

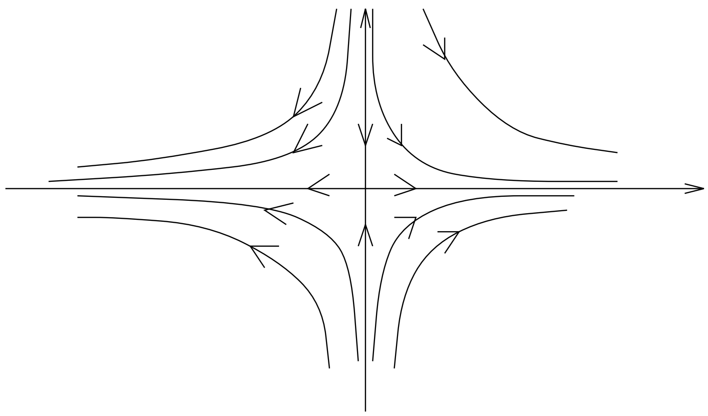

FIG. 3.1 - *Espace des phases*

- On met des flèches sur les courbes pour indiquer le sens de t croissant.
- Dans le cas particulier où soit c_1, soit c_2 est nul, on remarque que les axes portent des trajectoires. On voit donc différentes variétés autour de l'origine. Certaines sont stables (i.e. les trajectoires qu'elles contiennent se dirigent vers l'origine), d'autres sont instables (elles s'en éloignent).
- On vérifie que les trajectoires ne se coupent pas. Effectivement, pour toute condition initiale différente de 0, le point O n'est jamais atteint en un temps fini.

La dynamique correspondant à ce type de problèmes est une fonction

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (t, c_0) & \mapsto & \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \end{array}$$ définit alors un champ de vecteurs.

Exemple
Le système

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 \\ \dot{x_2} = x_2 \\ \dot{x_3} = -x_3 \end{cases}$$

admet pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t \\ x_2 = c_2 e^t \\ x_3 = c_3 e^{-t} \end{cases}$$

On remarque que les deux premières composantes de la solution ont tendance à s'éloigner de l'origine alors que la troisième tend à s'y ramener.

Le sous-espace engendré par (e_1, e_2) est donc un sous-espace instable et le sous-espace engendré par e_3, un sous-espace stable.

3.1.1 Découplage par diagonalisation

Soit le problème

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{array}\right.$$

avec A matrice diagonalisable à coefficients constants. On écrit classiquement

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On pose alors $Y = P^{-1}X$ et on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{Y} & = & DY \\ Y(0) & = & P^{-1}X_0 \end{array}\right.$$

qui admet pour solution

$$Y = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}X_0$$

On en déduit

$$X = PY = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}X_0$$

De façon générale, la solution du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{array}\right.$$

est $X(t) = e^{At}X_0$. Mais il nous faut au préalable définir la notion d'exponentielle de matrices et d'opérateurs. Nous établirons ensuite ce résultat, puis nous indiquerons comment calculer en pratique une exponentielle de matrices.

3.1.2 Exponentielle d'opérateurs linéaires et de matrices

Pour pouvoir définir une exponentielle d'opérateurs, il est nécessaire de définir la convergence de suites dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\backslash)$ des opérateurs linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Pour cela nous utiliserons la norme

$$\|T\| = \max_{|x| \leq 1} |T(x)|$$

où $|x|$ est la norme euclidienne de x. La norme d'une matrice A est la norme de l'opérateur que cette matrice représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 2 $\forall (S,T) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\backslash)^\in$,

- $\|T\| \geq 0$ *et* $\|T\| = 0$ *si et seulement si* $T = 0_{\mathbb{R}^n}$.
- $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\|kT\| = |k|\, \|T\|$.
- $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

$\forall (S,T) \in \mathcal{L}(I\!R^{\backslash})^{\epsilon}$, $\forall \S \in I\!R^{\backslash}$,

- $|T(x)| \leq \|T\| |x|$.
- $\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$.
- $\forall k \in I\!N$, $\|T^k\| \leq \|T\|^k$.

Définition 37 *Une suite d'opérateurs linéaires* $(T_k)_{k \in I\!N}$ *de* $\mathcal{L}(I\!R^{\backslash})$ *converge vers un opérateur linéaire* T *quand* $k \to +\infty$, *i.e.* $\lim_{k \to +\infty} T_k = T$ *ssi* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \in I\!N / \forall k \geq K, \|T - T_k\| < \varepsilon$.

Théorème 12 *Soit* $T \in \mathcal{L}(I\!R^{\backslash})$, $\sqcup_{\prime} \in I\!R^{+*}$, *la série*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

est absolument et uniformément convergente pour tout $t/|t| < t_0$.

Définition 38 *L'exponentielle d'un opérateur* $T \in \mathcal{L}(I\!R^{\backslash})$ *est définie par la série*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^k}{k!}$$

c'est un opérateur linéaire : $e^T \in \mathcal{L}(I\!R^{\backslash})$.
L'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{\backslash}(I\!R)$ *est définie par la série*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

elle possède les mêmes propriétés que l'exponentielle d'un opérateur linéaire.

Proposition 1 *Si* P *et* T *sont des transformations linéaires de* $I\!R^n$, *et soit* $S = PTP^{-1}$, *alors* $e^S = Pe^T P^{-1}$.

Corollaire 4 *Si*

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Proposition 2 *Si* S *et* T *commutent, i.e.* $ST = TS$, *alors* $e^{S+T} = e^S e^T$.

Corollaire 5 *Si* $T \in \mathcal{L}(I\!R^{\backslash})$, *l'inverse de* $e^T \in \mathcal{L}(I\!R^{\backslash})$ *est* $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.

Proposition 3 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

alors

$$\forall t \in I\!R,\ e^{At} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

On montre par récurrence sur $k \in I\!N$ *que si* $\lambda = a + ib$,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} Re(\lambda^k) & -Im(\lambda^k) \\ Im(\lambda^k) & Re(\lambda^k) \end{pmatrix}$$

et on en déduit la formule pour e^{At}.

3.1.3 Solution de l'équation $\dot{X} = AX, X(0) = X_0$

En utilisant la convergence uniforme de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

(ce qui autorise à échanger les limites), on montre que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$$

A partir de cette égalité, on peut vérifier que $X(t) = e^{At} X_0$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

C'est la seule solution : soit $Y(t)$ une solution quelconque, posons $Z(t) = e^{-At} Y(t)$, en dérivant Z on obtient

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= -Ae^{-At} Y(t) + e^{-At} \dot{Y}(t) \\ &= -Ae^{-At} Y(t) + e^{-At} AY(t) \ \ \forall t \in I\!R \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque A et e^{-At} commutent, $\forall t \in I\!R$. Donc Z est une fonction constante, $\forall t \in I\!R$, $Z(t) = Z(0) = Y(0) = X_0$, et donc $Y = X$.

Théorème 13 *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

admet pour unique solution $X(t) = e^{At} X_0$.

Nous avons déjà exposé le calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable à valeurs propres réelles, nous allons maintenant montrer comment on calcule l'exponentielle d'une matrice quelconque.

3.1.4 Cas général

Nous allons montrer comment on peut calculer l'exponentielle e^{At} lorsque A admet des valeurs propres multiples, réelles et complexes, et n'est pas diagonalisable. On utilise le théorème clé de décomposition $S + N$ avec S semi-simple, c'est-à-dire diagonalisable dans $\mathbb{C}$, N nilpotente, et S et N commutent, ce qui permet de simplifier l'exponentielle.
Pour plus de détails et les preuves des théorèmes qui suivent, consulter le chapitre 6 et l'appendice III du livre "Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra", M.W. Hirsch and S. Smale, Academic Press, New York, 1983.

Définition 39 *Soit λ une valeur propre de la matrice A de taille $n \times n$, de multiplicité $m \leq n$. Pour $k \in \{1, \dots, m\}$, toute solution non nulle v de $(A - \lambda I_d)^k v = 0$ est appelé* **vecteur propre généralisé** *de A.*

Cette définition est valable aussi bien pour des valeurs propres et des vecteurs réel(le)s que complexes.

Définition 40 *Une matrice $n \times n$ N est* **nilpotente** *d'ordre k si $N^{k-1} \neq 0$ et $N^k = 0$.*

Théorème 14 *Soit A une matrice réelle $n \times n$ ayant les valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et les valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_j = a_j + ib_j$ et $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$, $j \in \{k+1, \ldots, s\}$, avec $k + 2(s-k) = 2s - k = n$. Il existe une base de vecteurs généralisés de $\mathbb{R}^n$*
$(w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, v_s, u_s)$, où $w_1, \ldots, w_k$ sont les vecteur propres réels associés aux valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, et $w_j = u_j + iv_j$, $\overline{w_j} = u_j - iv_j$, $j \in \{k+1, \ldots, s\}$ de $\mathbb{C}^{2n}$ associés aux valeurs propres complexes $\lambda_{k+1}, \overline{\lambda_{k+1}}, \ldots, \lambda_s, \overline{\lambda_s}$. Soit une telle base, la matrice $P = (w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, v_s, u_s)$ est inversible et la matrice A peut s'écrire $A = S + N$ avec S semi-simple définie par

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \begin{bmatrix} a_{k+1} & -b_{k+1} \\ b_{k+1} & a_{k+1} \end{bmatrix} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{bmatrix} a_s & -b_s \\ b_s & a_s \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

la matrice $N = A - S$ est nilpotente d'ordre $m \leq n$, et S et N commutent, i.e. $SN = NS$.

Théorème 15 *Sous les hypothèses du théorème précédent, la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{X} & = AX \\ X(0) & = X_0 \end{cases}$$

est

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & e^{\lambda_k t} & & & \\ & & & e^{a_{k+1}t} \begin{bmatrix} \cos(b_{k+1}t) & -\sin(b_{k+1}t) \\ \sin(b_{k+1}t) & \cos(b_{k+1}t) \end{bmatrix} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & e^{a_s t} \begin{bmatrix} \cos(b_s t) & -\sin(b_s t) \\ \sin(b_s t) & \cos(b_s t) \end{bmatrix} \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$\times \left[I_d + Nt + \frac{N^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{N^m t^m}{m!} \right] X_0$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\det(XI - A) = (X-3)(X-1) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$, 2 est valeur propre double, donc

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = A - S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$e^{tA} = e^{tS}(I + tN) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$$

3.1.5 Forme de Jordan

On note que dans le paragraphe précédent, n'importe quelle forme $S+N$ convient pour calculer l'exponentielle de la matrice A. Cependant, la forme de Jordan de la matrice A permet d'une part, au plan théorique, de démontrer aisément certains théorèmes, d'autre part d'avoir une forme particulièrement simple pour N et pour le calcul de e^{Nt}. C'est pour ces raisons que nous allons brièvement présenter la forme de Jordan et le calcul de l'exponentielle d'une matrice à partir de sa forme de Jordan.
Une dernière raison est qu'un algorithme de calcul formel, c'est-à-dire exact, d'une forme $S+N$ quelconque existe, mais la matrice S obtenue n'est pas forcément sous forme diagonale (N. Burgoyne and R. Cushman : *The Decomposition of a Linear Mapping*, in Linear Algebra and its Applications, 8, 1974, pp 515-519, et E.T. Browne, *On the Reduction of a Matrix to a Canonical Form*, in American Mathematical Monthly, August 1940, pp 437-450).

Théorème 16 *Soit A une matrice réelle $n \times n$ ayant les valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et les valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_j = a_j + ib_j, \bar{\lambda}_j = a_j - ib_j, j \in \{k+1, \ldots, s = \frac{n-k}{2}\}$. Il existe une base $(w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, v_s, u_s)$ de $\mathbb{R}^n$, où $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1} = u_{k+1} + iv_{k+1}, \bar{w}_{k+1} = u_{k+1} - iv_{k+1}, \ldots, w_s = u_s + iv_s, \bar{w}_s = u_s - iv_s)$ est une base de vecteurs propres généralisés de A dans $\mathbb{C}^n$. La matrice $P = (w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, v_s, u_s)$ est inversible et*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{pmatrix}$$

où les blocs B_j, $j \in \{1, \ldots, r\}$ sont de la forme

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où λ est l'une des valeurs propres réelles de A, ou de la forme

$$B_j = \begin{pmatrix} D & I_{d_2} & 0_2 & & \ldots & 0_2 \\ 0_2 & D & I_{d_2} & 0_2 & \ldots & 0_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0_2 & \ldots & & 0_2 & D & I_{d_2} \\ 0_2 & \ldots & & & 0_2 & D \end{pmatrix}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \; I_{d_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et où les 0_2 représentent des matrices nulles 2×2, si $\lambda = a + ib$ est l'une des valeurs propres complexes de A.

Théorème 17 *Soit A une matrice donnée sous sa forme de Jordan*

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix}$$

On remarque que cette forme de Jordan est une forme $S+N$ particulière. L'exponentielle de A est alors facile à calculer, car l'exponentielle de la partie nilpotente est simple à calculer : si

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice nilpotente $m \times m$ d'ordre m,

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et si

$$N = \begin{pmatrix} 0 & I_{d_2} & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & I_{d_2} \\ 0 & \dots & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice nilpotente $2m \times 2m$ d'ordre m,

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} I_{d_2} & tI_{d_2} & \frac{t^2}{2!}I_{d_2} & & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}I_{d_2} \\ 0 & I_{d_2} & tI_{d_2} & \frac{t^2}{2!}I_{d_2} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}I_{d_2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & I_{d_2} & tI_{d_2} \\ 0 & \dots & & & 0 & I_{d_2} \end{pmatrix}$$

On a alors

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{B_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{B_r t} \end{pmatrix}$$

avec si

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$e^{B_j t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et si

$$B_j = \begin{pmatrix} D & I_{d_2} & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & D & I_{d_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & D & I_{d_2} \\ 0 & \dots & & & 0 & D \end{pmatrix}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ I_{d_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et où les 0 *représentent des matrices nulles* 2×2*,*

$$e^{B_j t} = e^{at} \begin{pmatrix} R & tR & \frac{t^2}{2!}R & & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}R \\ 0 & R & tR & \frac{t^2}{2!}R & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}R \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & R & tR \\ 0 & \dots & & & 0 & R \end{pmatrix}$$

avec R *la matrice de rotation*

$$R = \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

Remarque
Chaque coordonnée de la solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{X} & = & AX \\ X(0) & = & X_0 \end{array} \right.$$

est de la forme $t^k e^{at}\cos(bt)$ ou $t^k e^{at}\sin(bt)$, avec $\lambda = a + ib$, b éventuellement nul, est une valeur propre de la matrice A et $0 \leq k \leq n-1$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Calculons la forme de Jordan de A et la matrice de passage P.
On commence par déterminer les valeurs propres de A. $det(XI-A) = (X-1)^2[(X-2)^1+1]$ $\Rightarrow A$ a pour valeurs propres 1 qui est une valeur propre double, et deux valeurs propres complexes conjuguées $2+i$ et $2-i$.
On sait qu'il existe deux formes de Jordan possibles pour A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

il nous reste à déterminer laquelle.
Cherchons des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 : $Aw_1 = w_1$

$$\left\{\begin{array}{llllllll} 2x_1 & + & x_2 & & & & = & x_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - \quad 2x_4 & = & x_2 \\ x_1 & & & + & x_3\text{-}x_4 & = & x_3 & \\ x_1 & + & x_2 & & & + \quad x_4 & = & x_4 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{llllll} x_1 & + & x_2 & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - \quad 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & - \quad x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \quad x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$\ker(A-I)$ est de dimension 1, il est engendré par

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cherchons w_2 tel que $Aw_2 = w_2 + w_1$

$$\left\{\begin{array}{llllllll} 2x_1 & + & x_2 & & & & = & x_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - \quad 2x_4 & = & x_2 \\ x_1 & & & + & x_3\text{-}x_4 & = & x_3+1 & \\ x_1 & + & x_2 & & & + \quad x_4 & = & x_4 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{llllll} x_1 & + & x_2 & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - \quad 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & - \quad x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \quad x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ convient.}$$

Le fait que $\ker(A-I)$ soit de dimension 1 nous indique que la forme de Jordan de A est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cherchons enfin un vecteur propre complexe associé à la valeur propre $2+i$.

$$
\begin{array}{ll}
Aw_3 & = (2+1)w_3 \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = (2+i)x_1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = (2+i)x_2 \\ x_1 + x_3\text{-}x_4 = (2+i)x_3 \\ x_1 + x_2 + x_4 = (2+i)x_4 \end{array}\right. \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} x_2 = ix_1 \\ x_1 - 2x_4 = ix_2 \\ x_1 - x_4 = (1+i)x_3 \\ x_1 + x_2 = (1+i)x_4 \end{array}\right. \\
\Rightarrow & (1+i)x_1 = (1+i)x_4 \Rightarrow x_1 = x_4 \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} x_2 = ix_1 \\ -x_1 = ix_2 \\ 0 = (1+i)x_3 \\ x_1 = (1+i)x_4 \end{array}\right. \\
\Rightarrow & \text{par exemple } w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = Im(w_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_3 = Re(w_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

La matrice de passage P est :

$$
P = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & v_3 & u_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

et

$$
P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

On laisse le soin au lecteur méfiant de vérifier que $P^{-1}AP = J$. On calcule $exp(tA) = Pexp(tJ)P^{-1}$:

$$
exp(ta) = Pexp(tJ)P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t \\ 0 & 0 & e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^t + e^{2t}\sin t & e^{2t}\sin t & 0 & -e^t + e^{2t}(\cos t - \sin t) \\ -e^t + e^{2t}\cos t & e^{2t}\cos t & 0 & e^t - e^{2t}(\cos t + \sin t) \\ te^t & 0 & e^t & -te^t \\ e^{2t}\sin t & e^{2t}\sin t & 0 & e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}
$$

3.2 Calcul de l'exponentielle de matrice

Dans ce paragraphe nous nous intéressons au calcul de l'exponentielle d'une matrice A (i.e e^A) à coefficients constants. On peut aisément glisser au calcul de e^{tA} en pré-multipliant par t. Dans le cas des algorithmes à partir d'une décomposition $S+N$ d'une matrice, on utilise la méthode suivante : soit $A = S+N$ une décomposition $S+N$ de A, on a

$$
e^{tA} = e^{tS} + e^{tN}
$$

l'expression de e^{tS} est explicite : dans le cas d'une valeur propre réelle associée à un bloc de Jordan de dimension 1×1 on a une exponentielle scalaire $e^{t\lambda}$, dans le cas d'une valeur propre complexe, nous avons un bloc de dimension 2×2 comme pour la proposition 3, dont l'exponentielle est une matrice avec des sinus et des cosinus. L'expression de e^{tN} est simplement $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(tN)^k}{k!}$.

Si l'on veut uniquement calculer la trajectoire, on utilise en pratique des méthodes d'intégration numérique (Euler, Runge-Kutta, méthodes multi-pas...), soit on utilise la méthode des "approximants de Padé en plusieurs points" (qui pour de très bonnes approximations numériques peut être plus rapide que les autres méthodes d'intégrations).

L'intérêt du calcul de e^{tA} (et $e^{tA}X_0$) est de fournir une idée de la vitesse de convergence ou de divergence de la solution.

Nous allons proposer ici une méthode formelle utilisant la forme de Jordan et, pour l'intégration numérique d'un système différentiel, la méthode numérique des approximants de Padé.

3.2.1 A partir de la décomposition $S+N$ de Jordan : algorithme formel

Soit A une matrice et une décomposition $A = S+N$, avec S une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente. Puisque ces matrices commutent l'exponentielle se calcule par :

$$e^{tA} = e^{tS}e^{tN}$$

avec

$$e^{tN} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i N^i}{i!}$$

Le calcul de S est moins immédiat, soit P une matrice de passage telle que $S = PDP^{-1}$ avec $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ une matrice diagonale. Alors

$$e^{tS} = Pe^{tD}P^{-1} = Pdiag(e^{d_1 t}, \cdots, e^{d_n t})P^{-1}$$

Le problème du calcul d'une décomposition $S+N$ générale ne sera pas abordé ici, nous utiliserons seulement la décomposition de Jordan [2]. On a vu qu'il existait deux matrices J et P telle que $A = PJP^{-1}$, avec J possédant une structure très simple :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_k \end{pmatrix}$$

avec J_i une matrice bloc de Jordan de dimension k_i associé à la valeur propre λ_i :

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Notons que les algorithmes de calcul formel de la forme de Jordan utilisent d'abord une forme intermédiaire de Frobenius [3], puis à partir de chaque bloc compagnon de la forme de Frobenius on passe à plusieurs blocs de Jordan grâce à des matrices dont on connaît explicitement l'expression. Posons $J_i = \lambda_i I + N_{\lambda_i}$. L'exponentielle est alors $e^{tJ} = diag(e^{tJ_1}, \cdots, e^{tJ_k})$ avec

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{t^j N_{\lambda_i}^j}{j!}$$

2. c'est-à-dire que l'on va utiliser la décomposition $S+N$ de la forme de Jordan.
3. voir à ce propos le sujet de l'épreuve de Mathématique Appliqués du concours des ENSI 1993.

Les algorithmes séquentiels de calcul formel pour calculer une forme de Jordan symbolique (i.e. les valeurs propres irrationnelles sont représentées par un symbole et un polynôme dont elles sont racines) ont une complexité en $O(n^9)$.

3.2.2 Les méthodes des approximants de Padé

Les résultats qui suivent sont tirés de la thèse de Jean-Rodolphe Roche, "Application des approximants de Padé au calcul de l'exponentielle d'une matrice", thèse de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble et de l'INPG. Un approximant de Padé de l'exponentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{ij}(z) &= \frac{P_{ij}(z)}{Q_{ij}(z)} \\ &= Q_{ij}(A)^{-1}P_{ij}(A) \\ &= P_{ij}(A)Q_{ij}(A)^{-1} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P_{ij}(z) = 1 + \frac{i}{j+i}z + \frac{i(i-1)}{(j+i)(j+i-1)}\frac{z^2}{2!} + \cdots \\ + \frac{i(i-1)\cdots 1}{(j+i)\cdots(j+1)}\frac{z^i}{i!} \end{aligned}$$

et $Q_{ij}(z) = P_{ji}(-z)$.

La fraction polynomiale $R_{kk}(A)$ est bien définie si et seulement si $R_{kk}(z)$ est bien définie sur le spectre de A, d'après le théorème suivant il suffit de prendre k suffisamment grand :

Théorème 18 Saff et Varga (cf. E.B. Saff et R. Varga, "On the zeros and poles of Padé approximants to e^z, Numerische Mathematik, 30, pp. 241-266, 1978)
Tous les pôles de $R_{kk}(z)$ sont dans la région du plan complexe définie par $2kr < |z| < 2k + \frac{4}{3}$ avec r l'unique solution positive de l'équation $re^{1+r} = 1$, une approximation de r est $0,2784645428$.

Afin de ne pas calculer des approximants de Padé de très haut degré (cf Roche), on utilise la propriété de l'exponentielle $e^A = \left(e^{\frac{A}{\alpha}}\right)^\alpha$. On cherche donc α tel que $B = \frac{A}{\alpha}$ soit calculable au moyen d'approximants de Padé de faible degré. Une variante de l'algorithme de Ward utilisée par *Matlab* est de choisir $\alpha = 2^l$ tel que $||B|| \leq \frac{1}{2}$. L'algorithme utilisé est alors :

calcul de la norme :
on calcule la norme infinie de A

contraction :
on calcule l et $B = \frac{1}{2^l}A$, tels que $||B|| \leq \frac{1}{2}$

calculs des numérateur et dénominateur :
on calcule $P_{kk}(B)$ et $Q_{kk}(B)$ par un produit itéré de matrices

inversion :
on calcule $R_{kk}(B) = Q_{kk}(B)^{-1}P_{kk}(B)$ par une méthode de Gauss

expansion :
on calcule la puissance 2^l de la matrice $R_{kk}(B)$

Notons que des approximants de faible degré (par exemple $k = 3, 4, 5, 6$) fournissent d'excellents résultats pour des matrices pleines dont le conditionnement de la matrice de passage vers la forme de Jordan est relativement faible ($< 10^5$).

La complexité du calcul d'un approximant de Padé R_{kk} est de $O((k + l + \frac{1}{3})n^3)$ opérations machine sur des réels.

Cette méthode permet donc de calculer e^A, pour passer au calcul de e^{tA} il faut prémultiplier la matrice par t (en temps $O(n^2)$). Pour avoir la solution du système dynamique qui lui est associée il faut effectuer le produit matrice-vecteur $R_{kk}(A)X_0$ (en temps $O(n^2)$).

Cette méthode donne directement une approximation de la matrice exponentielle, à la différence des méthodes d'intégration qui ne calculent qu'une approximation d'une orbite passant par une condition initiale.

3.3 Stabilité

Tout d'abord, nous définissons les différentes notions de stabilité.

Définition 41 – *Un ensemble limite L est dit* **stable** *si pour tout voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de L il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de L tel que $\forall x \in \mathcal{V}$, $\forall \sqcup > \imath$, $\varphi_{\sqcup}(\S) \in \mathcal{U}$, ou, de façon équivalente, $\varphi_t(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$ $\forall \sqcup > \imath$.*

– *Un ensemble limite L est* **asymptotiquement stable** *s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de L tel que l'ensemble ω-limite de tout point de $\mathcal{V}$ est L.*

– *Un ensemble limite L est* **instable** *s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de L tel que l'ensemble α-limite de tout point de $\mathcal{V}$ est L.*
Un ensemble instable est un ensemble asymptotiquement stable lorsque l'on inverse le sens du temps.

– *Un ensemble limite L est* **non stable** *ou* **semi-stable** *si tout voisinage de L contient au moins un point n'appartenant pas à L dont l'ensemble α-limite est L et un point n'appartenant pas à L dont l'ensemble ω-limite est L aussi.*

Remarque
Un ensemble asymptotiquement stable est stable.
Les autres types de stabilité sont mutuellement exclusifs.

Dans ce paragraphe, nous allons définir les espaces stable, instable et central, resp. E^s, E^i, E^c d'un système linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

et nous allons également établir quelques propriétés importantes de ces sous-espaces.

Définition 42 *Dans le cas général d'un système différentiel autonome, on dit qu'un* **état d'équilibre (ou point stationnaire, ou point singulier) x^* est asymptotiquement stable** *si*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, \forall x_0,\ si\ \|x_0 - x^*\| < \varepsilon\ alors\ \lim_{t \to +\infty} x(t) = x^*$$

Dans le cas d'un système linéaire, si x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable, alors ε peut être quelconque.
Dans le cas linéaire, seul le point d'équilibre peut être asymptotiquement stable. (On suppose que ce point est 0.) La propriété de stabilité est alors une propriété du système et non pas du point d'équilibre considéré.

Lorsque l'on étudie la stabilité asymptotique d'un système linéaire autonome à coefficients constants, on s'aperçoit que la solution s'exprime comme combinaison linéaire de fonctions de la forme $t \mapsto t^k e^{\lambda_i t}$, où λ_i est valeur propre réelle ou complexe de A. Pour que 0 soit un équilibre asymptotiquement stable, il est nécessaire et suffisant que toutes ces fonctions aient pour limite 0 quand $t \to +\infty$. Donc une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit un équilibre asymptotiquement stable est que les parties réelles des valeurs propres de A soient strictement négatives : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\Re(\lambda_i) < 0$.
Dans le cas où le point d'équilibre n'est pas asymptotiquement stable, on utilise une base construite à partir des vecteurs propres généralisés comme dans les théorèmes précédents $(w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, v_n, u_n)$ pour découper l'espace de travail $I\!R^n$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} E^s & = & \mathcal{V}ect\{w_j, u_j, v_j / \Re(\lambda_j) < 0\} \\ E^i & = & \mathcal{V}ect\{w_j, u_j, v_j / \Re(\lambda_j) > 0\} \\ E^c & = & \mathcal{V}ect\{w_j, u_j, v_j / \Re(\lambda_j) = 0\} \end{array}$$

Définition 43 *Soient $\lambda_j, j \in \{1, \ldots, n\}$ les valeurs propres de A, $w_j = u_j + iv_j, j \in \{1, \ldots, n\}$ les vecteurs propres généralisés associés aux λ_j,*

$$E^s = \mathcal{V}ect\{w_j, u_j, v_j / \Re(\lambda_j) < 0\}$$

est le sous-espace stable associé au système linéaire $\dot{x} = Ax$.

$$E^i = \mathcal{V}ect\{w_j, u_j, v_j / \Re(\lambda_j) > 0\}$$

est le sous-espace instable associé au système linéaire $\dot{x} = Ax$.

$$E^c = \mathcal{V}ect\{w_j, u_j, v_j / \Re(\lambda_j) = 0\}$$

est le sous-espace central associé au système linéaire $\dot{x} = Ax$.
($\mathcal{V}ect\{\ldots\}$ représente l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres généralisés satisfaisant les conditions requises.)

A l'intérieur de chacun de ces sous-espaces, le comportement des solutions du système est simple :

- pour le système réduit au sous-espace stable, le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.
- pour le système réduit au sous-espace instable, le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable si l'on renverse le sens du temps, ou si l'on étudie le système $\dot{x} = -Ax$, i.e. $\forall x_0 \in E^i$, la solution du système $\dot{x} = Ax$ telle que $x(0) = x_0$ tend vers 0 quand $t \to -\infty$. On dit que le point d'équilibre est instable.
- dans le cas du sous-espace central, plusieurs cas de figure peuvent se produire : soit toutes les valeurs propres sont nulles, et les solutions sont des constantes, soit certaines valeurs propres sont imaginaires pures, et les solutions ont des composantes de la forme $t^k \cos(\Im(\lambda_j)t)$ ou $t^k \sin(\Im(\lambda_j)t)$ suivant les vecteurs propres généralisés correspondant à ces valeurs propres.

Exercice 3 *Etudier tous les cas possibles pour*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X} & = & AX \\ A & \in & \mathcal{M}_2(I\!R) \end{array} \right.$$

et tracer le diagramme de bifurcation.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A peuvent être étudiées à l'aide de son polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

Etudions tout d'abord le cas où $det(A) \neq 0$, i.e. 0 est le seul point d'équilibre du système.

Etudions le signe du discriminant associé

$$\Delta = tr(A)^2 - 4det(A)$$

On obtient une partition du plan $tr(A), det(A)$.

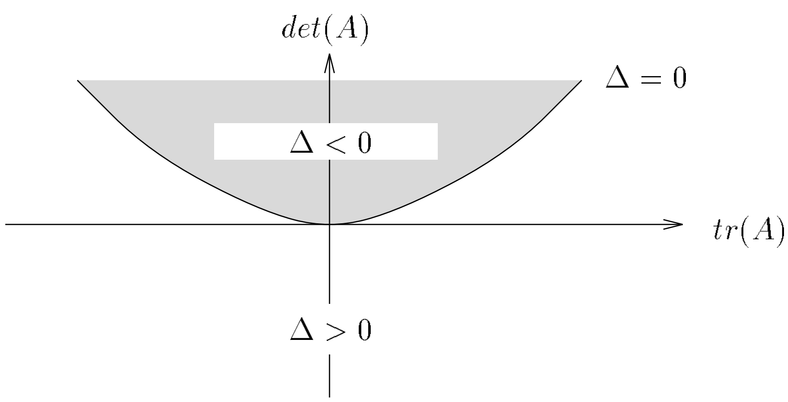

FIG. *3.2* - Premiere partition du plan $tr(A), det(A)$ selon le signe de Δ

- *si $\Delta > 0$ et $tr(A) > 0$, les valeurs propres de A sont*

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & \frac{tr(A)-\sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 & = & \frac{tr(A)+\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

  $\lambda_2 > 0$, et le signe de λ_1 dépend du signe de $det(A)$.

  - *si $det(A) > 0$, alors $\lambda_1 > 0$, et l'origine est un point d'équilibre instable.*

    Un point d'équilibre répulsif pour toutes les trajectoires est appelé **source** *(en anglais* **source***), les trajectoires ressemblent à celles de l'eau s'écoulant d'une source.*

  - *si $det(A) < 0$, alors $\lambda_1 < 0$, et les trajectoires se rapprochent de l'origine suivant w_1 et s'en éloignent suivant w_2.*

    Un tel point d'équilibre est appelé **col** *ou point col, en effet les trajectoires ressemblent à celles de skieurs qui descendraient "tout schuss" une pente,*

(en suivant la ligne de plus grande pente,) au passage d'un col[4]*. On peut également reprendre l'image de l'eau dévalant une montagne et passant par un col, pour rester cohérent.*
En anglais, point col se dit **saddle node***.*

- *si* $\Delta > 0$ *et* $tr(A) < 0$*, les valeurs propres de* A *sont*

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & \frac{tr(A)-\sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 & = & \frac{tr(A)+\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

$\lambda_1 < 0$*, et le signe de* λ_2 *dépend du signe de* $det(A)$*.*

  - *si* $det(A) > 0$*, alors* $\lambda_2 < 0$*, et l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

    Un point d'équilibre attractif pour toutes les trajectoires est appelé **puits** *(en anglais* **sink***), les trajectoires ressemblent à celles de l'eau s'écoulant vers un puits.*
  - *si* $det(A) < 0$*, alors* $\lambda_2 > 0$*, et les trajectoires se rapprochent de l'origine suivant* w_1 *et s'en éloignent suivant* w_2 *(cf 3.1).*
- *si* $\Delta > 0$ *et* $tr(A) = 0$*, alors* $\Delta = -4det(A) > 0 \Rightarrow det(A) < 0$*, et le polynôme caractéristique s'écrit* $\lambda^2 + det(A) = (\lambda - \sqrt{|det(A)|})(\lambda + \sqrt{|det(A)|})$*, donc les valeurs propres sont réelles de signe opposé. Le point d'équilibre est encore un col.*
- *si* $\Delta < 0$ *et* $tr(A) > 0$*, les valeurs propres de* A *sont*

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & \frac{tr(A)-i\sqrt{|\Delta|}}{2} \\ \lambda_2 & = & \frac{tr(A)+i\sqrt{|\Delta|}}{2} \end{cases}$$

leur partie réelle est > 0*, donc l'origine est un point d'équilibre instable.*

Un point d'équilibre pour lequel toutes les valeurs propres sont complexes conjuguées de partie réelle strictement positive est appelé **foyer répulsif***, en anglais* **repulsive focus** *ou* **unstable focus***.*
- *si* $\Delta < 0$ *et* $tr(A) < 0$*, les valeurs propres de* A *sont*

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & \frac{tr(A)-i\sqrt{|\Delta|}}{2} \\ \lambda_2 & = & \frac{tr(A)+i\sqrt{|\Delta|}}{2} \end{cases}$$

leur partie réelle est < 0*, donc l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

Un point d'équilibre pour lequel toutes les valeurs propres sont complexes conjuguées de partie réelle strictement négative est appelé **foyer attractif***, en anglais* **attractive focus** *ou* **stable focus***.*
- *si* $\Delta < 0$ *et* $tr(A) = 0$*, alors* $\Delta = -4det(A) < 0 \Rightarrow det(A) > 0$*, et le polynôme caractéristique devient* $\lambda^2 + det(A) = (\lambda - i\sqrt{det(A)})(\lambda + i\sqrt{det(A)})$*, donc les valeurs propres sont imaginaires pures. Les solutions s'écrivent sous la forme*

$$\begin{cases} X_1 & = & \alpha_1 \cos(\sqrt{det(A)}t) + \beta_1 \sin(\sqrt{det(A)}t) \\ X_2 & = & \alpha_2 \cos(\sqrt{det(A)}t) + \beta_2 \sin(\sqrt{det(A)}t) \end{cases}$$

4. N'oublions pas que nous sommes à Grenoble, au pied des pistes, d'où le choix des illustrations

Le seul point d'équilibre est l'origine. Plaçons-nous en une condition initiale différente de l'origine, on a ($\alpha_1 \neq 0$ ou $\beta_1 \neq 0$) et ($\alpha_2 \neq 0$ ou $\beta_2 \neq 0$), on peut alors écrire cette solution

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 & = & \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}\cos(\sqrt{det(A)}t)+\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}\sin(\sqrt{det(A)}t)\right) \\ X_2 & = & \sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}\cos(\sqrt{det(A)}t)+\frac{\beta_2}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}\sin(\sqrt{det(A)}t)\right) \end{array}\right.$$

soit, en notant θ_1 l'angle modulo 2π tel que $\cos(\theta_1) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}$, $\sin(\theta_1) = \frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}$ et θ_2 l'angle modulo 2π tel que $\sin(\theta_2) = -\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}, \cos(\theta_2) = \frac{\beta_2}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}$, on a

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 & = & \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\cos(\sqrt{det(A)}t-\theta_1) \\ X_2 & = & \sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}\cos(\sqrt{det(A)}t-\theta_2) \end{array}\right.$$

et on reconnaît l'équation d'une ellipse.

Un point d'équilibre pour lequel les valeurs propres sont imaginaires pures est appelé un **centre** *(en anglais* **centre***, en américain* **center***). On remarque que les trajectoires ne s'approchent ni ne s'éloignent, à long terme, du point d'équilibre ; on dit que le point d'équilibre est* **stable***, mais il n'est pas asymptotiquement stable.*

- *si $\Delta = 0$ et $tr(A) > 0$, alors le polynôme caractéristique admet une racine double λ, qui est positive et qui vaut $\frac{tr(A)}{2}$. Si A est diagonalisable, on a un point d'équilibre qui est une* **étoile instable***, c'est une source particulière.*

  Si A n'est pas diagonalisable, il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les solutions s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 & = & X_1^0\exp(\lambda t) \\ X_2 & = & X_2^0\exp(\lambda t)+X_1^0 t\exp(\lambda t) \end{array}\right.$$

  Ici encore, il s'agit d'une source particulière, appelée **nœud dégénéré instable***.*

- *si $\Delta = 0$ et $tr(A) < 0$, alors on a les mêmes trajectoires, mais en inversant les sens de parcours des trajectoires. On obtient soit une* **étoile stable***, soit un* **n œud dégénéré stable** *qui sont des cas particuliers de puits.*

Etudions maintenant le cas où $det(A)$ est nul, i.e. il existe plusieurs points d'équilibre, qui forment une droite passant par 0.
$\Delta = tr(A)^2 \geq 0$, sinon on aurait des valeurs propres dont le produit est nul et la somme imaginaire pure, ce qui correspondrait à $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i\sqrt{|tr(A)|}$, or une matrice réelle 2×2 ne peut avoir que des valeurs propres complexes conjuguées. Les valeurs propres de A sont 0 et $tr(A)$.

- *si $tr(A) > 0$, les trajectoires sont des demi-droites parallèles, de vecteur directeur le vecteur propre associé à la valeur propre non nulle, qui s'éloignent de la droite des points d'équilibre.*
  Tous les points d'équilibre sont instables.

- *si $tr(A) < 0$, les trajectoires sont des demi-droites parallèles, de vecteur directeur le vecteur propre associé à la valeur propre non nulle, qui se rapprochent de la droite des points d'équilibre.*
  Tous les points d'équilibre sont stables, mais aucun n'est asymptotiquement stable.

– *si $tr(A) = 0$, soit A est la matrice nulle et tout point est un point d'équilibre, tous sont stables et aucun n'est asymptotiquement stable, soit A est semblable à une matrice nilpotente d'ordre 1 :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et les trajectoires ont pour équation $X_1 = X_1^0, X_2 = X_2^0 + tX_1^0$, ce sont soit des droites parallèles à l'axe $0x_2$, soit des points de l'axe $0x_2$ qui sont les points d'équilibre de ce système. Ces points ne sont pas stables.

On en déduit le diagramme de bifurcation suivant :

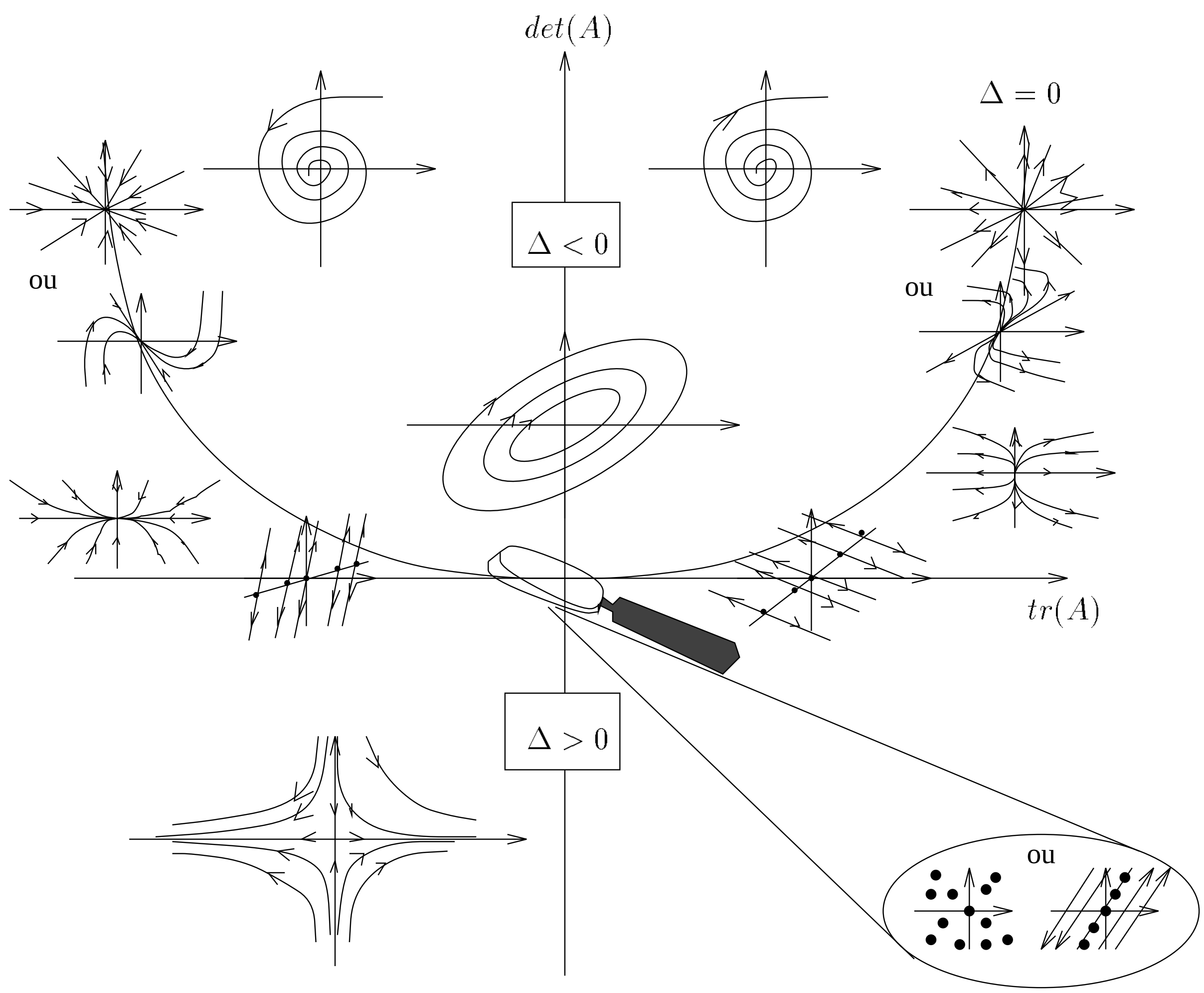

FIG. *3.3* - Diagramme de bifurcation pour un système linéaire 2×2

que l'on peut simplifier, pour le mémoriser plus facilement

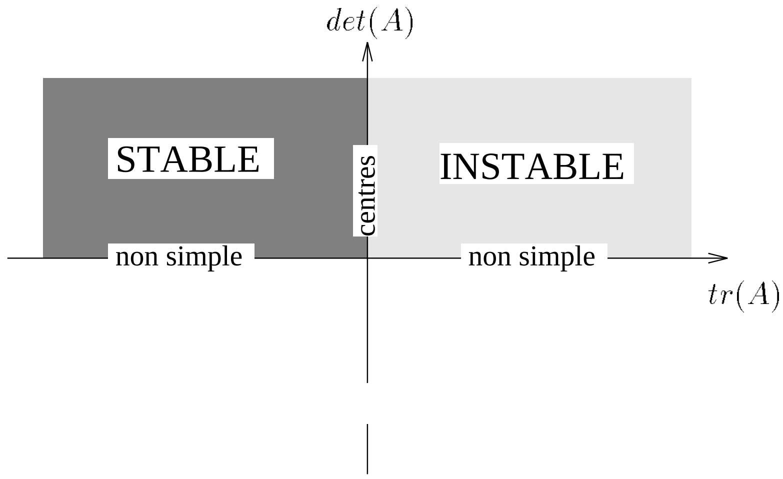

FIG. *3.4* - Diagramme de bifurcation simplifié

De façon générale, toutes les solutions partant de E^s restent dans E^s et tendent vers le point d'équilibre quand $t \to +\infty$, toutes les trajectoires partant de E^i restent dans E^i et tendent vers le point d'équilibre quand $t \to -\infty$. On remarque que l'on ne peut rien dire *a priori* des trajectoires issues de E^c. On verra plus loin que les systèmes linéarisés dont les valeurs propres ont une partie réelle non nulle ressemblent aux systèmes originels, alors que l'on ne sait rien dire dans le cas de valeurs propres de partie réelle nulle. C'est pour cela que l'on distingue les premiers systèmes.

Définition 44 *Si A est une matrice de $\mathcal{M}_\backslash(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres ont une partie réelle non nulle, alors le système $\dot{X} = AX$ est appelé* **système linéaire hyperbolique** *et le flot $e^{At} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dit* **flot hyperbolique**.

Définition 45 *Un sous-espace $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit* **invariant par le flot** $e^{At} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *si $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{At}E \subset E$.*

Nous l'avons indiqué plus haut, nous allons maintenant démontrer que les sous-espaces E^s, E^i, E^c sont invariants par le flot e^{At}, i.e. que toute solution issue de l'un de ces sous-espaces y reste pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 4 *Soit E un espace propre généralisé de A correspondant à une valeur propre λ de A, $AE \subset E$.*

En effet, soit $(w_1, \ldots, w_k)$ une base de E formée de vecteurs propres généralisés de A, soit $w \in E$, w peut s'écrire

$$w = \sum_{j=1}^{k} c_j w_j$$

et on a par linéarité

$$Aw = \sum_{j=1}^{k} c_j A w_j$$

or chaque w_j vérifie $\exists\, \mu_j$ minimal $/(A-\lambda I_d)^{\mu_j} w_j = 0$, soit $(A-\lambda I_d)w_j = W_j \in \ker(A-\lambda I_d)^{\mu_j - 1} \subset E$, on en déduit par récurrence descendante sur μ_j que $Aw_j = \lambda w_j + W_j \in E$, et par suite

$$Aw = \sum_{j=1}^{k} c_j A w_j \in E$$

donc $\forall w \in E$, $Aw \in E$, ce qui signifie $AE \subset E$.

Théorème 19 *Soit* $A \in \mathcal{M}_\backslash(I\!R)$,

$$I\!R^n = E^s \oplus E^i \oplus E^c$$

De plus, E^s, E^i, E^c *sont invariants par le flot* e^{At}.

Définition 46 *Si toutes les valeurs propres de* A *ont une partie réelle strictement positive, alors le seul point d'équilibre est l'origine, et on l'appelle* **source**.
Si toutes les valeurs propres de A *ont une partie réelle strictement négative, alors le seul point d'équilibre est l'origine, et on l'appelle* **puits**.

3.4 Linéarisation et stabilité

3.4.1 Introduction

Pour un système plan autonome, les notions de point d'équilibre, stabilité, instabilité et stabilité asymptotique (AS) sont les mêmes que pour le cas des équations scalaires. La seule différence est que dans le cas d'une équation scalaire la stabilité asymptotique entraînait la stabilité, ce qui n'est pas le cas pour les systèmes. Le résultat suivant, très utile, est classique :

Lemme 3 *Si la partie réelle du spectre de* A *appartient aux réels strictement négatifs, alors* 0*, point d'équilibre du système* $\dot{x} = Ax$ *est AS. De plus il existe deux constantes positives* a *et* b*, telles que:*

$$\|e^{At}x_0\| < ae^{-bt}\|x_0\|$$

pour tout t_0 *et pour tout* x_0 *appartenant à* $I\!R$*. Si l'une des valeurs propres de* A *possède une partie réelle positive, alors* 0 *est instable.*

Il est naturel de penser que la stabilité, qui est une propriété locale, pourra se détecter sur le linéarisé. Si nous considérons donc le système : $\dot{x} = f(x)$ où $f = (f_1, f_2)$ est une application de $I\!R^2$ dans lui-même ; nous aurons la définition :

Définition 47 *Si* $x^\star$ *est un point d'équilibre du système* $\dot{x} = f(x)$*, l'équation différentielle linéaire :*

$$\dot{x} = Df(x^\star)x$$

est appelée **l'équation variationnelle linéaire** *associée à* f *et au point d'équilibre* $x^\star$.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 20 *Si* f *est de classe* C^1 *et si la partie réelle du spectre de* $Df(x^\star)$ *est incluse dans* $I\!R^{-\star}$*, alors* $x^\star$ *est AS.*

Exercice 4 *Faites-vous un petit pendule....*

Nous avons un résultat sur l'instabilité :

Théorème 21 *Si f est de classe C^1 et si au moins une valeur propre de $Df(x^\star)$ a sa partie réelle positive, alors le point d'équilibre est instable.*

Comme nous travaillons avec des systèmes d'ordre 2, il est clair que nous ne pouvons décider de la stabilité dans le cas où une valeur propre a une partie réelle nulle, l'autre valeur propre ayant bien sur sa partie réelle négative ou nulle. Il n'y a pas de résultat qui ne fasse appel à l'influence des termes non linéaires et dans ce cas nous allons devoir utiliser des techniques plus sophistiquées. Avant d'entrer dans des études plus complètes sur les cas indiqués ci-dessus, nous allons décrire une technique, très importante dans les applications.

3.4.2 Fonctions de Lyapunov

La méthode dite de la fonction de Lyapunov, donne non seulement un moyen d'étudier des équilibres, mais aussi un moyen d'avoir une estimation du **bassin d'attraction** d'un point d'équilibre $x^\star$, c'est-à-dire l'ensemble des points x_0 du plan tels que :

$$\Phi(t, x_0) \to x^\star, lorsque\ t \to +\infty.$$

Définition 48 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, contenant l'origine.Une fonction de classe C^1 :*

$$V : U \to \mathbb{R}$$

est dite définie positive sur U si :

- $V(0) = 0$;
- $V(x) > 0, x \in U, x \neq 0.$

Si la fonction V est telle que $-V$ est définie positive, alors on dira que V est définie négative.

Exercice 5 *A quelles conditions sur a, b, c la fonction $ax^2 + 2bxy + cy^2$, est-elle définie positive ?*

L'idée géométrique est d'étudier comment les solutions de $\dot{x} = f(x)$, coupent les lignes de niveau d'une fonction V convenable.

$X(t)$ étant une solution et V une fonction définie positive, définie au voisinage de 0 point d'équilibre, on remarque que la dérivée de V selon X $D_X V(X(t))$ vérifie :

$$D_X V(X(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}(X(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(X(t))\dot{y}(t)$$

on remarque que cette expression n'est rien d'autre que :

$$D_X V(X) = (f(X), \nabla V(X)) = ||f(X)||.||V(X)||cos(\theta).$$

D'où l'interprétation.

On démontre alors le résultat suivant :

Théorème 22 *Si 0 est point d'équilibre du système et si V est une fonction C^1 définie positive sur un voisinage U de 0, alors :*

- *Si $D_X V(x) \leq 0$ pour $x \in U \setminus \{0\}$, alors 0 est stable.*
- *Si $D_X V(x) < 0$ pour $x \in U \setminus \{0\}$, alors 0 est AS.*
- *Si $D_X V(x) > 0$ pour $x \in U \setminus \{0\}$, alors 0 est instable.*

3.4.3 Et maintenant en selle

Commençons par considérer quelques portraits de phase de notre ami le pendule. Il se passe beaucoup de choses curieuses dans ce pendule, qui a pour équation :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 sinx - 2ay \end{cases}$$

Le jacobien est :

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 cosx & -2a \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre $x = (0,0)$, le linéarisé est :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix} X$$

Il est facile de voir que si ω et a sont positifs alors l'origine est AS. D'autre part si n est un entier pair, le linéarisé au point $(n\pi, 0)$ est le même que le système précédent, donc pas de problème. Par contre si n est impair, nous ne sommes plus dans le même cas et nous avons un point selle. Le point fixe est instable.

Cependant en regardant la figure associée à un tel point selle nous voyons qu'il y a en fait 4 orbites spéciales : **rentrantes et sortantes** de l'origine. Ces orbites particulières jouent un rôle fondamental dans l'étude du portrait de phase en un point d'équilibre.

Définition 49 *Soit U un voisinage d'un point d'équilibre $x^\star$. La variété stable locale $W^s(x^\star, U)$, et la variété instable locale $W^i(x^\star, U)$ de $x^\star$ sont définies par :*

$$W^s(x^\star, U) = \{x_0 \in U : \Phi(t, x_0) \in U \ pour\ t \geq 0,\ \ et\ \Phi(t, x_0) \to x^\star \ lorsque\ t \to +\infty\}$$

$$W^i(x^\star, U) = \{x_0 \in U : \Phi(t, x_0) \in U \ pour\ t \geq 0,\ \ et\ \Phi(t, x_0) \to x^\star \ lorsque\ t \to -\infty\}$$

Exemple 3 *Etudier le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2 \end{cases}$$

Comment analyse-t'on un système non linéaire au voisinage d'un point selle ? On utilise en fait un changement de variable (non linéaire) qui transforme le système initial en un système qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \lambda_1 x + g_1(x,y) \\ \dot{y} &= \lambda_2 y + g_2(x,y) \end{cases}$$

avec $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$, $g(0,0) = 0$ et la jacobienne de g nulle en 0. Puis on possède un résultat, connu sous le nom de théorème de Hadamard-Perron :

Théorème 23 *Pour le système simplifié, il existe un $a > 0$, tel que dans le voisinage :*

$$U = \{(x,y)\ :\ |x| < a, |y| < a\}$$

les variétés précédentes s'écrivent :

$$W^s(0,U) = \{(x,y)\ :\ y = h_s(x), |x| < a\}$$

$$W^i(0,U) = \{(x,y)\ :\ x = h_i(y), |y| < a\}$$

les fonctions h_i et h_s sont aussi différentiables que g et elles vérifient : $h_s(0) = h_i(0) = 0$ et les dérivées nulles en zéro.

Exercice 6 *Donner une méthode de calcul des fonctions précédentes en supposant que g est analytique.*

On peut ensuite prolonger les variétés locales en définissant :

Définition 50 *Les variétés stable et instable locales sont définies en un point d'équilibre $x^\star$ par :*

$$W^s(x^\star) = \{x_0 \in \mathbb{R}^2,\ \Phi(t, x_0) \to x^\star \text{ lorsque } t \to +\infty\}$$

$$W^i(x^\star) = \{x_0 \in \mathbb{R}^2,\ \Phi(t, x_0) \to x^\star \text{ lorsque } t \to -\infty\}$$

Mais attention **la variété n'est plus forcément un graphe** d'où des tas de problèmes..... Il se passe un phénomène particulièrement intéressant : il se peut qu'une orbite quittant un point α-limite atteigne de nouveau ce point, point qui est alors ω-limite. Cette orbite porte alors le nom d'orbite **homocline**. Si par contre l'orbite quitte un point d'équilibre α-limite et atteint un point d'équilibre différent qui est ω-limite, elle porte le nom d'orbite **hétérocline**. Nous reviendrons là-dessus.....

3.4.4 Le théorème de Grobman-Hartman

Nous commençons, dans le cas des systèmes non linéaires hyperboliques, à avoir une bonne idée du portrait de phase. En fait, ces systèmes sont sympathiques, encore faut-il se fatiguer pour le prouver.

Définition 51 *Deux systèmes plans $\dot{x} = f(x)$ et $\dot{x} = g(x)$ définis sur deux ouverts U et V respectivement, sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : U \to V$ tel que h transforme les orbites de f en celles de g et préserve le sens du temps.*

Donnons maintenant la

Définition 52 *Un point d'équilibre est dit* **hyperbolique** *si les valeurs propres du jacobien ont des parties réelles non nulles.*

Alors il ne reste plus qu'à démontrer le théorème de linéarisation de Grobman-Hartman (et c'est pas de la tarte...)

Théorème 24 *Si $x^\star$ est un point d'équilibre hyperbolique, alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système $\dot{x} = f(x)$ est topologiquement équivalent à son linéarisé $\dot{x} = D_x f(x^\star).x$.*

3.4.5 Méditation

Définition 53 *Un système plan est dit posséder une connexion de selle entre deux points selle x_1 et x_2 si l'intersection de $W^i(x_1)$ et $W^s(x_2)$ est non vide.*

On étudiera avec profit et pour différentes valeurs de λ les portraits de phase de :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \lambda + 2xy \\ \dot{y} &= 1 + x^2 - y^2 \end{cases}$$

3.5 Equilibres non hyperboliques

3.5.1 Cas d'une valeur propre nulle

Nous allons supposer dans tout le chapitre que le système s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f_1(x,y) \\ \dot{y} &= -y + f_2(x,y) \end{cases}$$

avec les conditions supplémentaires :

$$f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$$

et

$$Df(0,0) = 0, f = (f_1, f_2).$$

Le linéarisé, au voisinage de l'origine s'écrira donc :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$$

Pour analyser la dynamique, on va utiliser une idée qui remonte à Lyapunov, et qui se généralise dans bien des contextes : c'est la méthode de Lyapunov-Schmidt.

Introduisons la fonction :

$$L(x,y) = -y + f_2(x,y) = 0$$

Puisque $L(0,0) = 0$ et $\frac{\partial L}{\partial y}(0,0) = -1$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites et donc déterminer localement une fonction β telle que :

$$-\beta(x) + f_2(x, \beta(x)) = 0$$

et $\beta(0) = 0$ ainsi que $\beta'(0) = 0$. On démontre alors le

Théorème 25 *Si $f = (f_1, f_2)$ est une fonction de classe C^{k+1} telle que :*

$$f_1(x, \beta(x)) = ax^k + O(|x^{k+1}|)$$

lorsque $x \to 0$, dans cette formule $a \neq 0$ est un réel et k est un entier positif, alors $(0,0)$ est un point d'équilibre AS si $a < 0$ et k impair. Sinon il est instable.

On peut donner un autre résultat plus difficile :

Théorème 26 *$(0,0)$ est stable [resp. AS, resp. instable] si et seulement si l'équilibre $x = 0$ de l'équation scalaire :*

$$\dot{x} = f_1(x, \beta(x))$$

est stable [resp. AS, resp. instable].

3.5.2 Variété centrale

Nous avons vu le rôle joué par les variétés stable et instable dans l'étude des équilibres hyperboliques. En fait, une autre variété va jouer un rôle considérable dans le cas présent : c'est la variété centrale.

Définition 54 *Une courbe C^k, $W^c(0,U)$ dans un voisinage de l'origine est une* **variété locale centrale** *pour l'équation initiale $\dot{x} = f(x)$, avec $f(0) = 0$, si ;*

- *$W^c(0,U)$ est invariante par le flot (c'est-à-dire si $x(t)$ est une solution dont la condition initiale est dans $W^c(0,U)$ alors $x(t) \in W^c(0,U)$, aussi longtemps que $x(t) \in U$).*

– *$W^c(0,U)$ est le graphe d'une fonction C^k, $y = h(x)$ et est tangente à l'origine à l'axe des x :*

$$W^c(0,U) = \{(x,y) \in U \ : y = h(x)\};$$

de plus h vérifie : $h(0) = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(0) = 0$

MAIS ATTENTION :

Exemple 4 *Etudier le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax^3 \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

Il n'y a pas unicité de la variété centrale, en général. Cependant on a le :

Théorème 27 *Sous les hypothèses de la définition précédente, il existe une variété centrale et il existe deux constantes a et b positives telles que pour toute solution x, dont la condition initiale est dans U, on ait :*

$$||y(t) - h(x(t))|| < ae^{-bt}||y(0) - h(x(0))||$$

tant que $x(t) \in U$.

On en déduit le

Théorème 28 *Un point d'équilibre dans U est stable [resp. AS, resp. instable] si et seulement si le point d'équilibre correspondant de l'équation :*

$$\dot{x} = f_1(x, h(x))$$

sur la variété centrale définie par h est stable [resp. AS, resp. instable].

Nous n'insisterons pas plus sur ces (difficiles) problèmes, cependant il existe d'autres méthodes d'étude de ces situations basées sur la théorie de la bifurcation.

3.6 Valeurs propres imaginaires

3.6.1 Stabilité

Nous allons considérer un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + f_1(x,y) \\ \dot{y} &= -x + f_2(x,y) \end{cases}$$

avec les hypothèses suivantes sur $f = (f_1, f_2)$: $f(0,0) = 0, ||Df(0,0)|| < 1$. En passant en coordonnées polaires, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{r} &= R(r,\theta) \\ \dot{\theta} &= 1 + \Theta(r,\theta) \end{cases}$$

On montre facilement que $R(0,0) = 0$ et que $|\Theta(0,\theta)| < 1$, et que R et Θ sont 2π-périodiques. D'après les hypothèses, on peut choisir r assez petit pour que :

$$1 + \Theta(r,\theta) > 0$$

pour tout θ. Donc au voisinage de l'origine on a $\dot{\theta} > 0$, donc les solutions au voisinage de l'origine spiralent monotonement autour de zéro. On peut alors écrire le système en polaire sous la forme :

$$\frac{dr}{d\theta} = A(r,\theta)$$

avec :

$$A(r,\theta) = \frac{R(r,\theta)}{1+\Theta(r,\theta)}$$

fonction 2π-périodique et telle que$R(0,\theta) = 0$.

Exemple 5 *Etudier l'équation :*

$$\ddot{y} + y^2\dot{y} + y = 0$$

On peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 29 *Si f est analytique, alors pour le point d'équilibre en zéro, on a une des 3 possibilités :*

- *l'origine est stable ;*
- *l'origine est AS ;*
- *l'origine est un centre.*

La méthode décrite précédemment est aussi utile pour étudier les orbites périodiques de l'équation initiale autour de l'origine.

Lemme 4 *Il existe un voisinage borné U de l'origine dans le plan tel que toute orbite périodique Γ du système initial encercle l'origine. De plus si $x_0 = (r_0, 0) \in \Gamma$, avec $r_0 > 0$ alors la solution $r(\theta, r_0)$ de l'équation réduite vérifiant la condition initiale $r(0, r_0) = r_0$ est 2π-périodique en θ. Réciproquement, si $r(\theta, r_0)$ est 2π-périodique en tant que solution de l'équation réduite alors l'orbite $\Gamma(x_0)$ avec $x_0 = (r_0, 0)$ du système initial est périodique.*

On a alors un résultat qui est relié à un théorème que nous verrons plus loin.

Théorème 30 *Il existe un voisinage borné U de l'origine du plan tel que si $x_0 \in U$ et si la solution $\Phi(t, x_0)$ reste dans U pour $t > 0$ [resp. $t < 0$], alors l'ensemble $\omega(x_0)$ [resp $\alpha(x_0)$] est soit une orbite périodique, soit un point d'équilibre.*

Il faut maintenant relier la stabilité d'une solution périodique du système plan, à celle de la solution 2π-périodique de l'équation scalaire associée. Pour cela il faut bien sûr introduire quelques définitions : on considère une orbite périodique Γ du système initial et l'on définit la distance de Γ à un point x comme étant :

$$d(x,\Gamma) = min\{\|x-g\|, g \in \Gamma\}.$$

Alors :

Définition 55

- *Une orbite périodique Γ est* **orbitalement stable** *si, pout tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $d(x_0, \Gamma) < \delta$ entraine que $d(\Phi(t, x_0), \Gamma) < \epsilon$, pour tout $t > 0$.*
- *Une orbite périodique Γ est* **orbitalement AS** *si elle est orbitalement stable et s'il existe $b > 0$ tel que $d(x_0, \Gamma) < b$ entraine que $d(\Phi(t, x_0), \Gamma) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.*
- *Une orbite Γ est* **orbitalement AS avec une phase asymptotique** *si elle est orbitalement stable et si $\forall x_0$ tel que $d(x_0, \Gamma) < b$ et $y_0 \in \Gamma$ il existe un réel c tel que :*

$$\|\Phi(t, x_0) - \Phi(t+c, y_0)\| \to +\infty \ lorsque\ t \to +\infty$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 31 *Soit* Γ *une orbite périodique du système et* $h(\theta)$ *la solution* 2π*-périodique de l'équation scalaire associée. Alors :*

- Γ *est o-s [resp. o-a-s]si* h *est stable [resp AS].*
- Γ *est o-a-s avec p-a si elle est o-a-s et si pour toute solution* $r(\theta, r_0)$ *de l'équation scalaire avec* r_0 *voisin de* $h(0)$*, il existe un réel* c *tel que la solution du problème de condition initiale :*

$$\dot{\theta} = 1 + \Theta(r(\theta, r_0), \theta),\ \theta(0) = 0$$

possède la propriété :

$$\theta(t) - t \to c \text{ lorsque } t \to +\infty.$$

3.6.2 Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf

Il est important de regarder du phénomène de bifurcation résumé dans le théorème suivant:

Théorème 32 *Soit*

$$\dot{x} = A(\lambda)x + F(\lambda, x)$$

un champ plan C^k *avec* $k > 3$*, tel que* $F(\lambda, 0) = 0$ *et* $D_x F(\lambda, 0) = 0$ *pour* λ *petit. Si* $A(\lambda)$ *possède comme valeurs propres* $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ *telles que* $\alpha(0) = 0$ *et* $\beta(0) \neq 0$*, et si de plus* $\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) \neq 0$*, alors dans tout voisinage* U *de l'origine et pour tout* $\lambda_0 > 0$ *il existe un* $\lambda^\star$ *tel que* $|\lambda^\star| < \lambda_0$ *tel que l'équation différentielle :*

$$\dot{x} = A(\lambda^\star)x + F(\lambda^\star, x)$$

possède une solution périodique non triviale.

Exemple 6 *Etudier l'oscillateur de Van der Pol :*

$$\ddot{y} - (2\lambda - y^2)\dot{y} + y^2 = 0$$

Chapitre 4

Bifurcation pour les EDO scalaires

4.1 Introduction

La théorie des bifurcations est un sujet qui remonte à L. Euler (1744) et qui a connu ces dernières années un essor considérable. En donner une définition précise est difficile et nous nous contenterons dans cette introduction d'utiliser la définition "philosophique", donnée par V. Arnold :
The word bifurcation, meaning some sort of branching process, is widely used to describe any situation in which the qualitative, topological picture of the object we are studying alters with a change of the parameters on which the object depends.
L'objet qui nous intéresse ici est le portrait de phase associé à une équation différentielle scalaire qui dépend de paramètres, ou d'itérations scalaires qui dépendent de paramètres.

4.2 Quelques exemples de base

Exemple 7 *Commençons par la famille d'équations différentielles :*

$$\dot{x} = -x + \lambda$$

On peut considérer que cette famille d'équations est une déformation de l'équation $\dot{x} = -x$, équation dont nous connaissons parfaitement le portrait de phase. L'origine est un point fixe asymptotiquement stable.
Le point d'équilibre de $\dot{x} = -x + \lambda$, pour une valeur fixée de λ est $x_\lambda = \lambda$, qui est un point d'équilibre hyperbolique, asymptotiquement stable. La perturbation considérée n'altère pas la nature de l'équilibre, ni la structure du portrait de phase qui est toujours formé de 3 orbites orientées de la même façon.
Il n'y a pas de bifurcation.

Exemple 8 *Soit la famille d'équations différentielles :*

$$\dot{x} = x^2 + \lambda$$

L'équation non perturbée $\dot{x} = x^2$, possède en zéro un point d'équilibre instable. Pour un λ fixé, l'équation de la famille possède deux points d'équilibre :

$$x_1 = \sqrt{-\lambda},\ x_2 = -\sqrt{-\lambda}$$

On représente ces valeurs sur un diagramme :

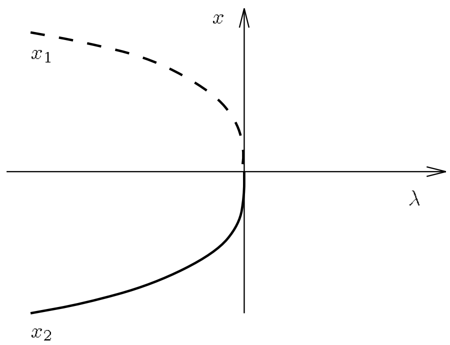

FIG. *4.1* - diagramme de bifurcation nœud-col

Sur ce dessin on remarque qu'en $\lambda = 0$, les deux points d'équilibre se confondent lorsque l'on traverse des $\lambda < 0$ vers les $\lambda > 0$. On a un phénomène de **bifurcation** *et le portrait de phase change.*
Les points d'équilibre x_1 et x_2 sont de nature différente :
x_1 est instable et x_2 est stable.
La valeur $\lambda = 0$ est une valeur de **bifurcation***, et sur le diagramme précédent on a indiqué en gras la branche associée aux équilibres stables et en tiret celle associée aux équilibres instables. Cette figure porte le nom de* **diagramme de bifurcation** *et ce type de bifurcation porte le nom de* **bifurcation nœud-col***.*

Laissons le soin au lecteur d'étudier la famille $\dot{x} = x^2 + \lambda x$, qui donne naissance à une bifurcation connue sous le nom de **bifurcation transcritique**: lorsque le paramètre λ traverse l'origine, un échange de stabilité a lieu.

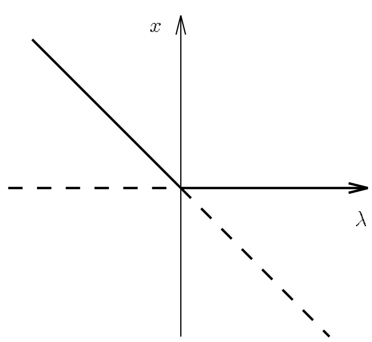

FIG. 4.2 - *diagramme de bifurcation transcritique*

L'exemple suivant est plus intéressant :

Exemple 9 *Soit la famille $\dot{x} = -x^3 + x + \lambda$, l'équation non perturbée présente trois points d'équilibre : $0, 1, -1$. Le point 0 est instable, 1 est stable et -1 est stable. Le diagramme de bifurcation a l'allure suivante :*

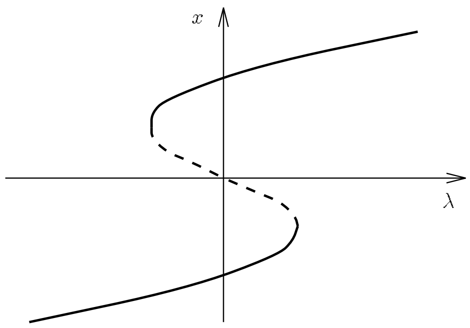

FIG. *4.3* - diagramme de bifurcation : hystérésis

Les deux points $\lambda = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$ *sont deux valeurs de bifurcation et un phénomène apparaît que l'on appelle* **hystérésis**.

Exemple 10 *Les deux exemples suivants sont absolument importants et le lecteur est prié de se fatiguer un peu...*

La famille $\dot{x} = \lambda x - x^3$ *donne lieu à la bifurcation de* **la fourche**

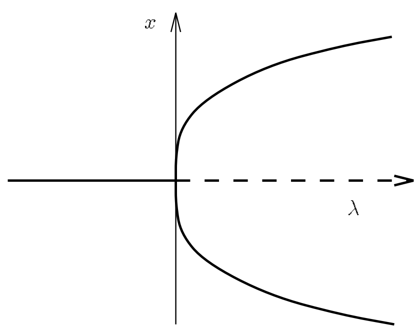

FIG. *4.4* - diagramme de bifurcation de la fourche

et la famille à deux paramètres $\dot{x} = -x^3 + dx + c$ *connue sous le nom de* **la fronce** *résume quelques exemples précédents.*

4.3 Perturbations locales au voisinage d'un équilibre

Afin d'étudier, de manière générale, les phénomènes de bifurcation nous devons utiliser le :

Théorème 33 *Si* $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une application* $\mathcal{C}^\infty$ *:*

$$(\lambda, x) \to F(\lambda, x)$$

qui vérifie :

$$F(0,0) = 0, \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \neq 0.$$

Alors il existe deux constantes $\delta > 0$ et $\eta > 0$, et une fonction $\mathcal{C}^\infty$:

$$\psi : \{\lambda : \| \lambda \| < \delta\} \to \mathbb{R}$$

telle que :
$\psi(0) = 0$ et $F(\lambda, \psi(\lambda)) = 0$ si $\| \lambda \| < \delta$. De plus , si $\exists(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ tel que $\| \lambda_0 \| < \delta$ et $x_0 < \eta$ satisfaisant $F(\lambda_0, x_0) = 0$, alors : $x_0 = \psi(\lambda_0)$.

En effet, si l'on considère la famille $\dot{x} = F(\lambda, x)$, et si en $\lambda = 0$ l'équation possède un point d'équilibre hyperbolique $x^\star$, alors on est dans les conditions du théorème des fonctions implicites précédent. Localement, on va pouvoir résoudre la branche solution de $F(\lambda, x) = 0$, et en déduire l'équation de cette branche sous la forme $x = \psi(\lambda)$. Si l'on remarque ensuite que la condition d'application du théorème des fonctions implicites : $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \neq 0$ est une condition ouverte qui permet d'écrire dans un voisinage de $(0,0)$: $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, \psi(\lambda)) \neq 0$, on en déduit que la structure locale du flot ne va pas changer et donc nous n'allons pas avoir de phénomènes de bifurcation.

Cependant le problème devient plus intéressant si le point d'équilibre cesse d'être hyperbolique. En effet, la famille $\dot{x} = F(\lambda, x)$ étant supposée $\mathcal{C}^\in$, on a dans le cas le plus simple : $F(0,x) = f(x)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \neq 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(0,0) = f''(0) \neq 0$. Ces conditions jointes au fait que nous pouvons poser $f(0) = 0$ permettent d'écrire :

$$F(\lambda, x) = a(\lambda) + b(\lambda)x + c(\lambda)\frac{x^2}{2} + G(\lambda, x).$$

avec bien sûr : $a(0) = 0, b(0) = 0, c(0) = f''(0) \neq 0$ et des conditions classiques sur le reste G. Par exemple, on a étudié la famille $\dot{x} = x^2 + \lambda$, résultant de la perturbation de $\dot{x} = x^2$. Le lecteur attentif aura remarqué que l'on passait en $\lambda = 0$ de deux équilibres lorsque $\lambda f''(0) < 0$ à pas d'équilibre du tout lorsque $\lambda f''(0) > 0$. Ce comportement local est typique. Pour démontrer cela il faut démontrer qu'au voisinage de $x = 0$, pour de petites valeurs de λ, la fonction $F(\lambda, x)$ possède un graphe qui ressemble à celui de $\lambda + x^2$, donc il faut montrer que cette fonction possède un unique extremum proche de $x = 0$ pour λ petit. Si λ est petit, cet extremum va être solution de $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, x) = 0$ en x. Une application vigoureuse du théorème des fonctions implicites permettra d'exprimer alors $x = \psi(\lambda)$, ce qui démontre ce que l'on cherche. Le reste est facile.

Exercice 7 *On étudiera ce qui se passe pour le cas où il faut attendre $f'''(0) \neq 0$.*

4.4 Bifurcations pour les fonctions scalaires

Nous n'allons pas passer beaucoup de temps sur cette partie qui se déduit du chapitre précédent immédiatement. On considère une application f qui possède un zéro en 0, on suppose de plus que $f'(0) > 0$, donc f est monotone dans un petit voisinage de 0. On introduit une famille $F(\lambda, x)$ telle que $F(0,x) = f(x)$, si F est $\mathcal{C}^\infty$, alors $F(\lambda, x)$ est monotone en x pour de petites valeurs de λ. On remarque alors que l'analyse des points fixes de $F(\lambda, x)$ est équivalente à l'étude des zéros de $F(\lambda, x) - x$ et l'on est ramené au chapitre précédent.

4.5 Bifurcation de doublement de période

Nous allons considérer dans cette section une bifurcation d'un point non hyperbolique qui se produit lorsque $f'(x^\star) = -1$, et que l'équation est perturbée. Nous avons donc les relations :

$$f(x^\star) = x^\star,\ f'(x^\star) = -1$$

sous ces hypothèses et avec des conditions suffisantes de dérivabilité, nous pouvons écrire :

$$f(x) = f(x^\star + h) = x^\star - h + ah^2 + ...$$

avec $x = x^\star + h$.
Si h est assez petit, nous avons le schéma suivant :

les itérés successifs d'un point voisin du point fixe sautent alternativement à droite et à gauche de ce point fixe. Pour connaître le comportement des points situés du même côté du point fixe, il nous suffit de considérer le comportement de l'itération f^2. Par application de Taylor, on voit que :

$$f^2(x) = x^\star + h + ch^3 + ...$$

On doit alors considérer le graphe de f^2 au voisinage de $x^\star$ pour diverses valeurs de c. Le premier cas de figure est le cas $c < 0$ et $x^\star$ stable, le deuxième est $c > 0$ et de ce fait $x^\star$ est instable. Considérons alors la famille :

$$f_\lambda(x) = x^\star - (1+\lambda)h + ah^2 + bh^3 + ...$$

En $\lambda = 0$ nous avons bien sûr un point fixe non hyperbolique et $x^\star$ est stable si $\lambda < 0$ et instable dans le cas contraire. Mais ce n'est pas la stabilité du point qui change en $\lambda = 0$, en effet on a :

$$f_\lambda^2(x) = x^\star + (1+2\lambda)h + ...$$

Deux cas sont à considérer :

- $c < 0$, l'équation précédente montre que lorsque λ décroît vers 0, la pente de f^2 en $x^\star$ devient plus grande que 1 et f^2 possède alors 2 points fixes stables lorsque $\lambda > 0$.
- $c > 0$ lorsque λ décroît vers 0, la pente de f^2 en $x^\star$ devient moins que 1 ef f^2 admet deux points fixes instables

Naturellement il faut revenir à la fonction f, les deux points fixes de f^2, ne sont pas des points fixes de f, mais des orbites d'ordre 2. C'est cette bifurcation qui porte le nom de bifurcation de **saut**.

4.6 L'équation logistique

On appelle ainsi la famille d'équations :

$$f(\lambda, x) = \lambda x(1-x)$$

et il est convenu que le paramètre λ appartiendra à l'intervalle $]0, 4[$.
Bien sûr nous considérons toujours les itérations :

$$x_{n+1} = f(\lambda, x_n)$$

L'origine est toujours un point fixe et comme $f'(0) = \lambda$, ce point sera stable si $0 < \lambda < 1$ lorsque $\lambda > 1$ ce point devient instable. f possède d'autre part un point fixe non trivial en $x_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$. La stabilité de ce point fixe dépend de :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1 - \frac{1}{\lambda}) = 2 - \lambda.$$

Si $1 < \lambda < 3$ le point est stable, mais en $\lambda = 3$, f admet une bifurcation de saut, x_3 devient instable et un cycle stable est créé, c'est un point de bifurcation. Lorsque λ dépasse 3 le 2-cycle s'éloigne de x_λ et devient moins stable jusqu'à la valeur $\lambda = 1+\sqrt{6}$, à cette valeur les deux points fixes de f^2 passent par une bifurcation de saut, les points fixes stables de f^2 deviennent instables et chacun donne naissance à une nouvelle paire de points fixes stables de f^4, c'est-à-dire un cycle stable de période 4 de f. On peut ainsi continuer en une cascade de bifurcations de **doublement de période**. Quel que soit k, il apparaît un 2^k-cycle en une valeur λ_k, il reste stable dans une fenêtre en λ, et devient instable en λ_{k+1}, donnant naissance à un cycle stable de période 2^{k+1}. Si l'on écrit $\Delta\lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k$, alors lorsque k est grand, on a :

$$\frac{\Delta\lambda_{k+1}}{\Delta\lambda_k} \approx 4.6692....$$

c'est le nombre de **Feigenbaum**.

Si l'on continue à faire croître λ et que l'on dépasse la valeur 3,570, la dynamique devient extrêmement complexe, pour certaines valeurs de λ, les itérés ont un comportement qui devient tellement compliqué qu'on a donné à cete dynamique le nom de comportement **chaotique**.

En considérant le diagramme de bifurcation, on voit une large bande pour $\lambda = 3.839$ où il n'existe qu'une unique orbite de période 3, mais ceci n'est que la partie visible du calcul ; en effet un théorème de **Sharkovskii** dit que :

Théorème 34 *Si l'on ordonne les entiers de la manière suivante :*

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \ldots . \triangleright 2.3 \triangleright 2.5 \triangleright \ldots \triangleright 2^2.3 \triangleright 2^2.5 \triangleright \ldots\ldots \triangleright 2^3.3 \triangleright \ldots . \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

si f est une application continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, admettant une période m, si $m \triangleright n$, alors f possède une période n.

Donc si f a une période 3, elle possède toute les périodes...... Nous terminerons ce chapitre sur cette encourageante révélation.

Chapitre 5

Outils d'étude des systèmes dynamiques

5.1 Solutions périodiques, quasi-périodiques et analyse spectrale

5.1.1 Intérêt de la transformée de Fourier

Les différents comportements stationnaires bornés sont aisément repérables - au moins en théorie - par leur transformée de Fourier. Une transformée de Fourier indique si la solution est périodique, proche d'être périodique ou pas du tout périodique, c'est une fonction (que l'on utilise rarement, et que l'on confond avec sa représentation graphique) dont les maxima, si ce sont des pics, donnent les fréquences prédominantes dans la décomposition de la solution en somme de fonctions périodiques.
Voici, pour chaque type de comportement stationnaire, l'allure de sa transformée de Fourier.

- **point d'équilibre :** la transformée de Fourier de chaque composante non nulle de la solution consiste en un seul pic à la fréquence 0.

- **solution périodique :** pour chaque composante de la solution, la transformée de Fourier comporte un pic à la fréquence nulle et un pic à chaque multiple entier de la fréquence fondamentale $f = 1/T$. Il se peut cependant que certains de ces pics aient une amplitude nulle, et il est même possible que le fondamental soit absent. Il faut donc non seulement repérer la fréquence du premier pic, mais aussi la comparer avec l'écart entre deux pics successifs.

- **solution quasi-périodique :** la transformée de Fourier de chaque composante est formée d'un pic à la fréquence nulle et de pics aux fréquences multiples entières des f_i, même si certains de ces pics sont d'amplitude nulle. En théorie il est donc possible de différencier une solution périodique d'une solution quasi-périodique à l'aide des transformées de Fourier, puisque les pics ne sont pas distants les uns des autres de multiples entiers d'une fréquence particulière.

- **chaos :** en général, les solutions chaotiques ont une transformée de Fourier continue, à bande large, semblable à celle d'un bruit blanc. On peut également y trouver des pics correspondant à une fréquence dominante.

5.1.2 Espace de Hilbert et base orthogonale

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de période a, on s'intéresse à sa représentation sous forme de série de Fourier, c'est-à-dire à savoir si on peut l'écrire :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{2i\pi nt/a}$$

Le bon cadre des représentations sous forme de série de Fourier est celui des espaces de Hilbert [1] et de la notion de généralisation de base. On notera par la suite $L^1_P(0,a)$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, intégrables au sens de Lebesgue et de période a.

Définition 56 *Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $<,>$. On appelle* **base hilbertienne (ou orthogonale)** *un ensemble dénombrable $\mathcal{B} = \{\phi_\backslash, \backslash \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de H tels que :*

- $< \phi_n, \phi_m >= 0, \ \forall n \neq m$
- $\forall f \in H, \ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\phi_n$ *avec* $c_n(f) = \frac{<f,\phi_n>}{<\phi_n,\phi_n>}$ *qui est le coefficient de Fourier de f relativement à ϕ_n.*

Une caractérisation des bases est donnée par le théorème suivant.

Théorème 35 *Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de H. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{B}$ est un système total, c'est-à-dire $\mathcal{B}^\perp = \{\imath\}$.*
2. *$\forall f \in H$, $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \ \|\phi_n\|^2$ (égalité de Parseval).*
3. *$\mathcal{B}$ est une base orthogonale.*

L'espace qui nous intéresse en pratique est $H = L^2_P(0,a)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue, de période a et la famille $\{\phi_n(x) = e^{2i\pi n\frac{x}{a}}, \ n \in \mathbb{Z}\}$. En démontrant l'égalité de Parseval avec cette famille de fonctions de $L^2_P(0,a)$ on montre que c'est bien une base hilbertienne, et donc que la décomposition sous forme de série de Fourier existe et est unique, c'est-à-dire que $\forall f \in L^2_P(0,a)$ on a $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{2i\pi n\frac{t}{a}}$ au sens de la convergence dans $L^2_P(0,a)$ (l'égalité est vraie presque partout).

Si l'on regarde la convergence ponctuelle de la série de Fourier on montre alors que :

Théorème 36 Dirichlet
Soit $f \in L^1_P(0,a)$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, notons $f(t_0^-)$ et $f(t_0^+)$ les limites à gauche et à droite de f en t_0. Si ces limites existent ainsi que les limites à droite et à gauche en t_0 de la dérivée, alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{2i\pi n\frac{t}{a}} = \frac{1}{2}(f(t_0^-) + f(t_0^+))$$

Notons que la série de Fourier tronquée $\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{2i\pi n\frac{t}{a}}$ est la projection orthogonale (ou meilleure approximation) de f sur l'espace de Hilbert de dimension finie $H_N = \mathcal{V}\rceil\rfloor\sqcup\{\phi_\backslash(\S) = \rceil^{\in\rangle\pi\backslash\frac{\S}{\dashv}}, \backslash = -\mathcal{N}, \cdots, \mathcal{N}\}$. Le choix d'un autre produit scalaire et d'une autre base orthogonale permettent de définir d'autres séries de Fourier (ex : polynômes de Legendre, polynômes de Tchebychev, ...).

1. nous ne parlerons pas de transformée de Fourier des distributions

5.1.3 Transformée de Fourier discrète

En pratique on connaît la période a de la fonction f (ou on arrive au moins à s'en faire une idée) ainsi qu'un nombre fini de ses valeurs, supposées régulièrement espacées, qui peuvent provenir de mesures physiques :

$$f(k\frac{a}{N}) = y_k\ ,\ \ k = 0, \cdots, N-1$$

A partir des ces informations on veut essayer de déduire une approximation des coefficients de Fourier $c_n(f)$ pour N valeurs de n, avec $c_n(f) = \frac{1}{a}\int_0^a e^{-2i\pi n\frac{x}{a}} f(x)dx$. Prenons N pair et choisissons $-\frac{N}{2}, \cdots, \frac{N}{2}-1$ comme intervalle des valeurs de n.

Que l'on calcule une approximation des coefficients $c_n(f)$ par une formule des trapèzes $c_n^T = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi n\frac{k}{N}} y_k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-nk}$ avec $\omega_N = e^{2i\frac{\pi}{N}}$, ou que l'on cherche les coefficients de Fourier c_n^I du polynôme d'interpolation $p(t)$ de f aux points $k\frac{a}{N}$, $k = 0, \cdots, N-1$ en résolvant le système :

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} c_n^I \omega_N^{nk} = y_k,\ \forall k = 0, \cdots, N-1$$

On montre (exercice !) que $c_n^I = c_n^T$, c'est-à-dire l'équivalence entre

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{nk} & k = 0, \cdots, N-1 \\ Y_n = \displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-nk} & n = 0, \cdots, N-1 \end{array} \right. \tag{5.1}$$

avec y_k la valeur de la fonction f aux points $k\frac{a}{N}$. Les coefficients de Fourier approchés étant

$$c_n^N = \left\{ \begin{array}{ll} Y_n & 0 \leq n < \frac{N}{2} \\ Y_{n+N} & -\frac{N}{2} \leq n < 0 \end{array} \right.$$

Définition 57 *On appelle* **transformée de Fourier discrète** *l'application linéaire bijective de $\mathbb{C}^N$ dans lui-même définie par $y_k \to Y_n$.*

On montre la relation suivante donnant les coefficients approchés en fonction des coefficients exacts :

$$c_n^N = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{n+iN}$$

soit que l'approximation est d'autant meilleure que les coefficients exacts c_n tendent plus vite vers 0 lorsque $n \to \infty$, c'est-à-dire que la fonction f est plus régulière.

5.1.4 Algorithme de Cooley et Tuckey

Supposons que $N = 2^p$. Dans les formules (5.1) remarquons que l'on peut écrire $Y_n = \frac{1}{2}(P_n + \omega_N^{-n} I_n)$ avec P_k et I_k les sommes des indices pairs et impairs :

$$\left\{ \ P_n = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{N/2-1} y_{2i}\omega_N^{-2i} I_n = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{N/2-1} y_{1+2i}\omega_N^{-2i} \right.$$

On remarque que $P_{n+\frac{N}{2}} = P_n$, $I_{n+\frac{N}{2}} = I_n$ et $\omega_N^{-(n+\frac{N}{2})} = -\omega_N^{-n}$. De plus les sommes P_n et I_n sont des transformées de Fourier discrètes de taille $\frac{N}{2}$. L'algorithme de Cooley et Tuckey est alors :

Algorithme de Cooley et Tuckey : Transformée de Fourier rapide
entrée : (y_k), $N = 2^p$ points de C
sortie : Y_n la transformée de Fourier discrète de (y_k)

1. calcul de $(P_n)_{n\in\{0,\cdots,2^{p-1}\}}$ et $(I_n)_{n\in\{0,\cdots,2^{p-1}\}}$ par deux transformées de Fourier de taille 2^{p-1}.
2. calcul de $Y_n = \frac{1}{2}(P_n + \omega_N^{-n} I_n)$ pour $n = 0, \cdots, 2^{p-1}$ et calcul de $Y_{n+2^{p-1}} = \frac{1}{2}(P_n - \omega_N^{-n} I_n)$ pour $n = 0, \cdots, 2^{p-1}$

Soit M_p et A_p les nombres de multiplications et d'additions nécessaires à l'évaluation d'une transformée de Fourier de taille 2^p. Les coûts de calcul des deux étapes sont alors :

1. $M_{p,1} = 2M_{p-1}$ et $A_{p,1} = 2A_{p-1}$
2. $M_{p,2} = 2^{p-1} - 1$ et $A_{p,2} = 2^p$

Pour les transformées de Fourier discrètes de taille 2 les coûts sont $M_1 = 0$ et $A_1 = 2$. On peut résoudre explicitement les formules de récurrence

$$\begin{cases} M_1 = 0 \\ M_p = 2M_{p-1} + 2^{p-1} - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_p = 2A_{p-1} + 2^p \end{cases}$$

on trouve alors que la complexité de l'algorithme en nombre de multiplications est $M_p = (p-2)2^{p-1} + 1 = \frac{N}{2}(\log_2 N - 2) + 1$ et d'additions est $A_p = p2^p = N \log_2 N$.

5.2 Application de Poincaré

Une technique classique pour analyser les systèmes dynamiques est due à Poincaré. Elle consiste à remplacer l'étude du flot d'un système continu d'ordre n par l'étude d'un système discret d'ordre $n-1$, dont les ensembles limites correspondent aux ensembles limites du système continu. Son intérêt consiste en la réduction de l'ordre du système et en le lien qui est fait entre système continu et système discret [2].

5.2.1 Définition

Le principe est le suivant : si Γ est une orbite périodique de période T du système dynamique continu

$$\dot{X} = f(X) \tag{5.2}$$

passant par un point x_0, et si Σ est un hyperplan coupant transversalement Γ en x_0, alors une trajectoire passant par un point $x \in \Sigma$ proche de x_0 au temps $t = 0$ recoupera Σ au point $P(x)$ proche de x_0 (par continuité du flot).
L'application $P : x \mapsto P(x)$ est l'application de Poincaré.
Remarque
Le cadre général de définition d'une application de Poincaré est celui de deux points x_0 et y_0, pas nécessairement confondus, mais appartenant à la même trajectoire, et de deux variétés de co-dimension 1 transversales à la trajectoire en x_0 et y_0 respectivement, l'application de Poincaré envoyant alors les points proches de x_0 et appartenant à la première variété sur des points proches de y_0 et appartenant à la

2. La fin de ce chapitre doit beaucoup au livre de Thomas Parker et Leon Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer Verlag, 1989

seconde variété. [Pour plus de détails, voir le livre de Michel Demazure : *Catastrophes et bifurcations*, Ellipses, 1989.]

Théorème 37 *Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$. Si $\varphi_t(x_0)$ est une solution périodique du système $\dot{X} = f(X)$, de période T, et si le cycle $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \,/ x = \varphi_t(x_0), 0 \leq t \leq T\}$ est inclus dans E, soit Σ l'hyperplan orthogonal à Γ en x_0 :*

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n :< (x - x_0), f(x_0) >= 0\}$$

alors $\exists \delta > 0$ et $\exists!\, \tau : x \mapsto \tau(x)$ fonction définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $B_\delta(x_0)$, la boule ouverte de rayon δ de centre x_0, telle que $\tau(x_0) = T$ et $\forall x \in B_\delta(x_0)$, $\varphi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$.

La preuve utilise le théorème des fonctions implicites.

Définition 58 *Soit Γ, Σ et τ définis comme dans le théorème précédent, la fonction*

$$\begin{array}{llll} P : & B_\delta(x_0) \bigcap \Sigma & \to & \Sigma \\ & x & \mapsto & P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x) \end{array}$$

est l'application de Poincaré en x_0.

Remarque
On déduit du théorème 37 que $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ avec $U = B_\delta(x_0) \bigcap \Sigma$. De plus, en remplaçant t par $-t$, on montre que P admet une réciproque $P^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$. P est donc un difféomorphisme de U.
Il est également facile de montrer, en utilisant la même démarche que pour le théorème 37, que si f est analytique sur E alors P est analytique sur U.

L'intérêt de l'application de Poincaré provient de la remarque suivante : il y a correspondance bijective entre les types de comportements stationnaires du système initial et les comportements stationnaires de l'application de Poincaré (en particulier les points fixes de l'application de Poincaré correspondent aux orbites périodiques du système 5.2), et on travaille avec une dimension de moins.

5.2.2 Stabilité

Tout comme on a étudié la stabilité d'un point d'équilibre grâce aux valeurs propres du linéarisé, on peut étudier la stabilité d'un cycle limite Γ à l'aide de ses multiplicateurs caractéristiques, également appelés multiplicateurs de Floquet. On obtient ces multiplicateurs en étudiant le linéarisé de l'application de Poincaré P au voisinage d'un point $x_0 \in \Gamma$. Ce point est un point fixe de P, sa stabilité est la même que la stabilité de Γ. Il s'agit donc d'établir l'analogue dans le cas discret de l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre.

On peut se ramener à l'étude de la stabilité à l'origine en effectuant une translation telle que x_0 soit la nouvelle origine, et au voisinage de 0,

$$P(x) - P(0) = DP(0)(x - 0) + \ldots$$

$$P(x) = P(x) - P(0) = DP(0)x + \ldots$$

avec $DP(0) \in \mathcal{M}_{\backslash - \infty}(\mathbb{R})$.

Définition 59 *Les valeurs propres $\{m_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$ de $DP(0)$ sont appelées les* **multiplicateurs caractéristiques** *ou* **multiplicateurs de Floquet** *de la solution périodique.*

Soit i tel que $m_i \in I\!R$ et $|m_i| < 1$, alors $DP(0)$ contracte l'écart entre x et x_0 dans la direction du vecteur propre associé à m_i.
Soit i tel que $m_i \in C \backslash I\!R$ et $m_{i+1} = \bar{m}_i$, on peut facilement se convaincre que $DP(0)$ est contractante dans le plan engendré par $Re(\eta_i), Im(\eta_i)$ où η_i est le vecteur propre complexe associé à m_i.
On peut montrer que les multiplicateurs caractéristiques d'une solution périodique Γ sont indépendants de x_0 et de la surface de section Σ (mais les vecteurs propres ne le sont pas). La stabilité de x_0 est donc la même que celle de Γ :

- si $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $|m_i| < 1$ alors Γ est stable.
- si $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $|m_i| > 1$ alors Γ est instable.
- si $\exists i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $|m_i| < 1$ et $\exists j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $|m_j| > 1$ alors Γ est non stable.

Si $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $|m_i| \neq 1$, i.e. aucun multiplicateur ne se trouve sur le cercle unité complexe, Γ est hyperbolique, et sa stabilité peut être déduite de l'étude des multiplicateurs caractéristiques ; si $\exists i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $|m_i| = 1$, Γ est non hyperbolique et on ne peut rien dire de sa stabilité en général, sauf si $\exists j, k \,/\, |m_j| < 1$ et $|m_k| > 1$, Γ est non stable.

On peut énoncer un théorème de la variété stable pour les orbites périodiques, indiquant qu'il existe une variété différentiable de dimension $k+1$ (où k est le nombre de multiplicateurs de module strictement inférieur à 1) formée de trajectoires tendant vers Γ quand le temps tend vers $+\infty$, et une variété instable différentiable de dimension $n-k$ (où $n-k-1$ est le nombre de multiplicateurs de module strictement supérieur à 1) formée de trajectoires tendant vers Γ quand $t \to -\infty$.

Définition 60 *Parfois, on étudie plutôt $D\Phi(T,0)$ (T étant la période de la solution Γ passant par 0). Cette matrice a une valeur propre égale à 1, qui correspond à un écart situé sur Γ, cet écart reste constant après une période, ; ses autres valeurs propres sont les multiplicateurs caractéristiques m_i ; si on linéarise le système dynamique sur Γ, on obtient les solutions sous la forme approchée $\Phi(t,.) = Q(t)e^{Bt}$ avec Q matrice inversible, différentiable et périodique de période T, et B matrice constante, de valeurs propres $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Ces λ_i sont appelés* **exposants caractéristiques***, et l'un d'eux est nul. Il correspond à la valeur propre $= 1$ de $D\Phi(T,0)$, et pour $\lambda_i \neq 0$, on a la relation $m_i = e^{\lambda_i T}$.*

5.2.3 En pratique ...

L'application de Poincaré telle qu'elle est définie ici n'est pas celle qui est la plus utilisée en pratique, parce qu'elle requiert une connaissance préalable - au moins approchée - de la position du cycle limite et de sa période, ce qui est rarement le cas. On utilise plus fréquemment les applications suivantes, qui, à un point x de la surface de section Σ, font correspondre le prochain point d'intersection de la trajectoire issue de x avec Σ. Notons également qu'en pratique, Σ est toujours un plan, défini par un point $x_\Sigma \in \Sigma$ et un vecteur normal à Σ : $h \in I\!R^n$. Σ sépare $I\!R^n$ en deux régions, $\Sigma^+ = \{x \in I\!R^n \,/ < h, (x - x_\Sigma) > > 0\}$ et $\Sigma^- = \{x \in I\!R^n \,/ < h, (x - x_\Sigma) > < 0\}$.

Si Σ est bien choisi, la trajectoire que l'on étudie va couper Σ, en passant successivement de Σ^- à Σ^+, puis à Σ^-, etc.

On peut alors définir trois applications de Poincaré :

- $P_+ : \Sigma \to \Sigma$. $P_+(x)$ est le premier point où la trajectoire issue de x coupe Σ dans une direction positive, i.e. elle "arrive" dans Σ^+ : $t > 0$ et $< h, f(\varphi_t(x)) > \geq 0$. C'est une application *one-sided.*

– P_- : $\Sigma \to \Sigma$. $P_-(x)$ est le premier point où la trajectoire issue de x coupe Σ dans une direction négative, i.e. elle "arrive" dans Σ^- : $t > 0$ et $< h, f(\varphi_t(x)) > \leq 0$. C'est une application *one-sided*.

– $P_\pm$: $\Sigma \to \Sigma$. $P_\pm(x)$ est le premier point où la trajectoire issue de x coupe Σ, quelle que soit la direction de traversée. C'est le premier point où la trajectoire issue de x retourne en Σ, on l'appelle pour cela **application de premier retour**, ou *two-sided*.

On ne peut pas affirmer l'existence de ces trois applications, ni même d'une seule. On a également perdu les propriétés de continuité et de différentiabilité de ces applications. En revanche, on a gagné une plus grande facilité de calcul numérique.

5.2.4 Algorithme de calcul

Il y a deux problèmes pour calculer une application de Poincaré, le premier est de déterminer l'hyperplan de section Σ, le second est de déterminer, lors de l'intégration d'une trajectoire, les points d'intersection de cette trajectoire avec Σ.

1. **Choisir l'hyperplan de section Σ**
   Les solutions adoptées consistent en général à laisser à l'utilisateur le choix de Σ, par la donnée d'un point $x_\Sigma \in \Sigma$, et d'un vecteur normal h, ou au moins d'un point $x_\Sigma \in \Sigma$, et h sera choisi comme $f(x_\Sigma)$, car une intersection orthogonale de Σ et de la trajectoire donne la meilleure précision dans les calculs.

2. **Déterminer l'intersection d'une trajectoire avec Σ : calcul de $P_\pm$**
   Si $H(x) =< h, (x - x_\Sigma) >$, Σ est représenté par $H(x) = 0$.

   L'idée la plus simple est d'intégrer la trajectoire, et à chaque pas, de calculer $H(x)$. Si $x_1 = \varphi_{t_1}(x_i)$ et $x_2 = \varphi_{t_2}(x_i)$ sont deux points consécutifs qui se trouvent de chaque côté de Σ, i.e. $H(x_1)$ et $H(x_2)$ sont de signes opposés, l'intersection $\hat{x}$ de la trajectoire avec Σ est entre les deux, $\hat{x} = \varphi_{\hat{t}}(x_i)$ avec $t_1 < \hat{t} < t_2$.

   Voici l'algorithme qui calcule $\hat{x}$ et $\hat{t}$, il utilise les routines *integrer_un_pas* qui prend en entrée x_1, t_1, t et intègre à partir de $x_1 = \varphi_{t_1}(x_i)$ jusqu'à t, et renvoie $x = \varphi_t(x_i)$, (cette routine est une routine d'intégration quelconque), et une routine que nous détaillerons ensuite, qui calcule $\hat{x}, \hat{t}$ à partir de x_1, t_1, x_2, t_2 calculés auparavant par cet algorithme : *calcul_precis_intersection*.

Algorithme 1 trouve_intersection (x_i, t_i, t_f)

$x_2 \leftarrow x_i$
$t_2 \leftarrow t_i$
$h_2 \leftarrow H(x_i)$
tantque $(t_2 < t_f)$ *faire*
    $x_1 \leftarrow x_2$
    $t_1 \leftarrow t_2$
    $h_1 \leftarrow h_2$
    $t_2 \leftarrow t_1 + pas\_de\_temps$
    si $(t_2 > t_f)$ *alors*
        $t_2 \leftarrow t_f$
    $x_2 \leftarrow$ *integrer_un_pas*$(x_1, t_1, t_1 + pas\_de\_temps)$

```
            /* x_2 ← φ_{t_2}(x_i) */
        h_2 ← H(x_2)
        si (h_1 h_2 < 0) alors
            [x̂, t̂] ← calcul_precis_intersection(x_1, t_1, x_2, t_2)
            renvoyer [x̂, t̂]
    renvoyer [x_2, t_2]
```

Remarque

- Il est utile de se fixer une limite de temps t_f si on n'est pas certain par avance que cette intersection existe.
- La variable *pas_de_temps* est supposée être une variable globale au programme d'intégration et de calcul de $P_\pm$.
- Si on veut calculer P_+ ou P_- plutôt que $P_\pm$, il faut tester $h_1 < 0$ et $h_2 > 0$ pour P_+ à la place de $h_1 h_2 < 0$, $h_1 > 0$ et $h_2 < 0$ pour P_-.
- Si on a une trajectoire qui traverse Σ et la re-traverse rapidement, on peut ne pas détecter cette intersection ; la seule solution est de réduire la tolérance de l'algorithme d'intégration, mais on ne peut pas éliminer totalement ce risque.

Comment détermine-t-on $\hat{x}$ et $\hat{t}$ à partir de x_1, t_1, x_2 et t_2 ?

- Si on préfère l'efficacité à la précision, une simple interpolation linéaire suffit :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{x} & = & \frac{h_2}{h_2 - h_1} x_1 + \frac{h_1}{h_1 - h_2} x_2 \\ \hat{t} & = & \frac{h_2}{h_2 - h_1} t_1 + \frac{h_1}{h_1 - h_2} t_2 \end{array} \right.$$
- On peut déterminer $\hat{x}$ par une dichotomie sur le temps : on calcule $\hat{x} = \varphi_{(t_1+t_2)/2}(x_i)$, et s'il est du même côté de Σ que x_1, on remplace x_1 par $\hat{x}$ et t_1 par $(t_1+t_2)/2$, sinon on remplace x_2 par $\hat{x}$ et t_2 par $(t_1+t_2)/2$.
- On peut également utiliser l'algorithme de Newton pour rechercher le zéro de $H \circ \varphi_t$. Cette méthode est bien adaptée dans ce cas : l'algorithme de Newton converge rapidement si le point de départ de l'itération est une bonne approximation de la solution, ce qui est le cas ici. L'itération est :
$$\hat{t}^{i+1} = \hat{t}^i - \frac{H(\hat{x}^i)}{< h, f(\hat{x}^i) >}$$
avec $\hat{x}^i = \varphi_{\hat{t}^i}(x_i)$.

5.3 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov sont une généralisation des valeurs propres dans le cas d'un point d'équilibre et des multiplicateurs caractéristiques dans le cas d'une orbite périodique. Ils permettent de déterminer la stabilité de tous les types de comportements, y compris les comportements quasi-périodiques et chaotiques.

5.3.1 Définition

Définition 61 – **Cas continu**
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, notons* $m_1(t), \ldots, m_n(t)$ *les valeurs propres de* $D_{x_0}\Phi$ *(la Jacobienne de* Φ *par rapport aux conditions initiales), les* **exposants de Lyapunov** *de* x_0 *sont*

$$\lambda_i = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|, \ i = 1, \ldots, n$$

quand cette limite existe. Une définition plus robuste consiste à prendre une limite supérieure, pour que les exposants de Lyapunov existent toujours, mais l'interprétation que nous allons en donner cesse d'être valable.

– **Cas discret**
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, et soit* $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *l'orbite correspondante d'un système discret* P*, notons* $m_1(k), \ldots, m_n(k)$ *les valeurs propres de* $DP^k(x_0)$*. Les* **nombres de Lyapunov** *de* x_0 *sont*

$$m_i = \lim_{k \to +\infty} |m_i(k)|^{1/k}, \ i = 1, \ldots, n$$

quand cette limite existe.

Il est à noter que les exposants de Lyapunov ne dépendent pas vraiment de la condition initiale x_0 choisie. Pour presque tout point dans un même bassin d'attraction, les exposants de Lyapunov sont les mêmes, ils ne dépendent donc que du comportement stationnaire et non pas du transitoire. C'est pour cela que l'on peut parler des **exposants de Lyapunov d'un attracteur**.

5.3.2 Interprétation

En généralisant l'interprétation des valeurs propres et des multiplicateurs de Floquet, on interprète les λ_i comme le taux moyen de contraction (si $\lambda_i < 0$) ou d'expansion (si $\lambda_i > 0$) dans un sous-espace particulier, près d'un ensemble limite particulier.
Par "sous-espace particulier", qu'entend-on ? Si l'on ordonne les λ_i de telle sorte que $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$, alors à $D_{x_0}\Phi$ correspondent n sous-espaces vectoriels emboîtés $W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_n$ avec $dim W_1 = n$, $dim W_2 = n-1$, ..., $dim W_n = 1$ tels que presque toutes les perturbations dans W_i évoluent en moyenne comme $e^{\lambda_i t}$.

Définition 62 *Un ensemble limite non chaotique est* **hyperbolique** *si sa dimension est égale au nombre de ses exposants de Lyapunov nuls.*

Théorème 38 Stabilité des attracteurs hyperboliques non chaotiques.
Les exposants de Lyapunov permettent de classifier les comportements stationnaires hyperboliques. Pour un attracteur, la contraction doit compenser l'expansion, ce que l'on traduit par $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0$*. Voici la classification :*

- *pour un point d'équilibre asymptotiquement stable,* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i = 0$.
- *pour un cycle limite asymptotiquement stable,* $\lambda_1 = 0$ *et* $\forall i \in \{2, \ldots, n\}$, $\lambda_i < 0$.
- *pour un 2-tore asymptotiquement stable,* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *et* $\forall i \in \{3, \ldots, n\}$, $\lambda_i < 0$.
- *pour un K-tore asymptotiquement stable,* $\lambda_1 = \ldots = \lambda_K = 0$ *et* $\forall i \in \{K+1, \ldots, n\}$, $\lambda_i < 0$.

Remarque

- Aucun exposant de Lyapunov d'un attracteur non chaotique n'est > 0.

- De façon générique, le nombre d'exposants de Lyapunov nuls d'un attracteur non chaotique correspond à la dimension topologique de cet attracteur : 0 pour un point d'équilibre, 1 pour un cycle limite, 2 pour un 2-tore, K pour un K-tore.

Théorème 39 CAS DES ATTRACTEURS CHAOTIQUES.
Une caractéristique du chaos est la sensibilité aux conditions initiales, celle-ci se produit quand il existe une direction selon laquelle le flot est expansif. Or un exposant de Lyapunov positif indique une expansion, ce qui caractérise donc un comportement chaotique est l'existence d'un exposant de Lyapunov strictement positif.
En récapitulant, on sait donc qu'un exposant de Lyapunov est toujours nul (ce fait a été indiqué pour les cycles limites, il est vrai pour tous les attracteurs différents d'un point d'équilibre), au moins un exposant de Lyapunov doit être strictement positif puisqu'il s'agit d'un attracteur chaotique, et comme on ne considère que des systèmes dissipatifs, la somme des exposants de Lyapunov est strictement négative (ce qui signifie que globalement le système est contractant, et qui autorise l'existence d'un attracteur borné) ; on en déduit que l'on doit avoir au moins trois exposants de Lyapunov, i.e. un système de dimension au moins 3. On ne peut donc pas avoir de chaos dans un système de dimension 1 ou 2. En dimension 3, on a trois exposants de Lyapunov, $\lambda^+ > 0,\ 0, \lambda^- < 0$ *et comme la contraction compense l'expansion, on a de plus* $\lambda^- < -\lambda^+$ *; on peut bien avoir chaos dès la dimension 3, si ces conditions sont vérifiées.*

5.3.3 Algorithme

Déterminer λ_1

Presque toute perturbation se trouve dans W_1, et donc elle évolue en moyenne en $e^{\lambda_1 t}$. On choisit donc au hasard une condition initiale x_0 et une perturbation initiale δx_0, on pose $\delta x^{(0)} = \delta x_0$, $u^{(0)} = \delta x_0 / ||\delta x_0||$ et $x^{(0)} = x_0$, on intègre pendant un temps T et on obtient $\delta x^{(1)} = \Phi(T, x^{(0)})\delta x(0)$, on le normalise pour obtenir $u^{(1)}$ que l'on intègre à son tour pendant un temps T, ... On applique K fois cette procédure d'intégration-normalisation, et si K est assez grand, on peut prendre pour valeur approchée de λ_1 :

$$\begin{array}{rcl}\lambda_1 & \approx & \frac{1}{KT}||\delta x(KT; \delta x_0, x_0)|| \\ & \approx & \frac{1}{KT}\sum_{k=1}^{K} \ln ||\delta x^{(k)}||\end{array}$$

Déterminer λ_2

Si l'on suit l'évolution d'un parallélogramme que l'on se donne par deux côtés δx_1 et δx_2 (ou de tout autre élément surfacique), comme ce parallélogramme a presque sûrement une intersection de dimension 1 avec W_2, on sait que l'évolution moyenne de son aire est $e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$, comme on connaît λ_1, on peut en déduire λ_2. Cependant, l'évolution prépondérante en $e^{\lambda_1 t}$ risque d'aligner $\delta x_1^{(k)}$ et $\delta x_2^{(k)}$. Tout comme on a procédé à une normalisation pour éviter les problèmes numériques dans le calcul de λ_1, on procède à une orthogonalisation-normalisation de $\delta x_1^{(k)}$ et $\delta x_2^{(k)}$ en $u_1^{(k)}$ et $u_2^{(k)}$ à chaque étape, par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, avant d'intégrer le parallélogramme.

La formule finale pour λ_2 est donnée par

$$\begin{array}{lcl}
\lambda_1 + \lambda_2 & \approx & \frac{1}{KT} \ln \prod_{k=1}^{K} \|u_1^{(k)}\| \, \|u_2^{(k)}\| \\
& \approx & \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^{K} \ln \|u_1^{(k)}\| \, + \, \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^{K} \ln \|u_2^{(k)}\| \\
& \approx & \lambda_1 \, + \, \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^{K} \ln \|u_2^{(k)}\| \\
\text{d'où} & & \\
\lambda_1 & \approx & \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^{K} \ln \|u_1^{(k)}\| \\
\lambda_2 & \approx & \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^{K} \ln \|u_2^{(k)}\|
\end{array}$$

Déterminer simultanément tous les λ_i

On généralise l'idée exposée pour λ_1 et λ_2, on intègre un certain temps T, on orthogonalise et on norme, puis on recommence, ceci K fois, et pour K assez grand on obtient

$$\begin{array}{lcl}
\lambda_1 & \approx & \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^{K} \ln \|u_1^{(k)}\| \\
& \vdots & \\
\lambda_n & \approx & \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^{K} \ln \|u_n^{(k)}\|
\end{array}$$

Remarque

- Il faut choisir la condition initiale x_0 dans le bassin d'attraction de l'attracteur. Plus x_0 est proche de l'attracteur et plus l'algorithme converge vite.
- La matrice identité peut être prise comme matrice de perturbation initiale, elle donne les mêmes résultats de vitesse et de stabilité qu'une matrice prise au hasard (à l'aide d'un générateur aléatoire) et n'a pas à être orthogonalisée-normalisée.
- L'algorithme se poursuit tant que les exposants de Lyapunov n'ont pas convergé et qu'un nombre maximum d'itérations n'est pas dépassé.
- Le choix de T est délicat. Trop petit, on aurait trop de normalisations et on aurait, avec tous les vecteurs proches de 1, des erreurs de précision dans le calcul des volumes. Trop grand, on aurait un système de vecteurs mal conditionnés et des débordements de capacité. En général, on choisit pour T 10 à 20 fois la période "naturelle" du système (s'il existe une période, qui sera indiquée par l'examen du spectre de Fourier).

5.4 Les dimensions

Dans cette partie, nous allons brièvement présenter les différentes notions de dimensions, qui permettent de comparer les attracteurs[3]. Un attracteur est de dimension n si, dans un voisinage de tout point, il ressemble à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, i.e. il est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. C'est ainsi que l'on définit la dimension d'une variété en topologie différentielle. Par exemple, on définit par convention la dimension d'un point comme étant nulle ; la dimension d'un cycle limite est 1 puisque localement il ressemble à un intervalle, celle d'un tore est 2 puisque localement il ressemble à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une dimension correspond au nombre de variables d'état nécessaires pour décrire un état stationnaire.

3. Le cours de Rodney Coleman traite de ces dimensions en détail

Cependant cette définition ne convient pas pour les attracteurs étranges, qui en général ont une structure complexe, stratifiée, en pâte feuilletée, qui ne ressemble pas à un espace euclidien. Ce ne sont pas des variétés et la définition de dimension pour les variétés ne s'applique pas. Il y a eu plusieurs généralisations de la notion de dimension, plus ou moins satisfaisantes selon l'usage auquel elles sont destinées, et plus ou moins reliées. Ces dimensions peuvent prendre des valeurs non entières, elles sont parfois appelées *dimensions fractales*, un ensemble ayant une dimension non entière étant appelé *fractal*.

5.4.1 Capacité

Cette dimension est la plus simple. L'idée de sa définition consiste à recouvrir l'ensemble dont on cherche la dimension, l'attracteur A, par des volumes (sphères, cubes, ...) de diamètre ε, soit $N(\varepsilon)$ le nombre de tels éléments nécessaires pour recouvrir A. Quand ε diminue, la somme des volumes des éléments se rapproche du volume de A. Si A est une variété de dimension $d \in \mathbb{N}$, $N(\varepsilon)$ est inversement proportionnel à ε^d : $N(\varepsilon) = k\varepsilon^{-d}$.
On généralise cette idée en définissant la capacité par :

$$D_{cap} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

si cette limite existe, sinon D_{cap} n'est pas définie.
Pour être plus exact, si le choix de volumes (cubes et sphères par exemple) conduisent à des valeurs différentes de D_{cap}, on choisit la plus petite. D_{cap} devrait être définie par la borne inférieure sur tous les choix possibles de volumes de diamètre ε et sur les $N(\varepsilon)$ correspondants à ces volumes, de $\lim \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$ pour être rigoureux. Nous ne reviendrons pas sur ce point, mais il est valable pour les paragraphes suivants.

5.4.2 Information

On peut reprocher à la dimension précédente d'être peu adaptée à la mesure des attracteurs, parce qu'elle est purement métrique et n'utilise aucune information sur le comportement dynamique, temporel, du système. Pour obvier à cet inconvénient, on utilise la dimension suivante, probabiliste, définie en pondérant les volumes qui recouvrent A par leur fréquence de visite par une trajectoire. Ceci évite de donner trop d'importance à des volumes qui ne sont pas significatifs, pas souvent visités.
Soit un recouvrement de A par des volumes de diamètre ε, et soit $N(\varepsilon)$ le nombre d'éléments nécessaires pour recouvrir A,

$$D_I = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln S(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

où

$$S(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i$$

P_i étant la fréquence relative de visite de l'élément i par une trajectoire typique.
On peut reconnaître en S l'*entropie*, la quantité d'information nécessaire pour spécifier avec une précision ε l'état du système si l'on sait qu'il se trouve sur l'attracteur, d'où son nom d'*information*. Pour ε assez petit, on a $S(\varepsilon) = k\varepsilon^{-D_I}$.

5.4.3 Corrélation

Une autre dimension construite sur le même modèle est la dimension de corrélation. On se base toujours sur un recouvrement par des éléments de diamètre ε, et sur les fréquences relatives P_i, et on définit cette dimension par :

$$D_C = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} {P_i}^2}{\ln \varepsilon}$$

Justifions à la fois le numérateur de cette expression et ce nom de corrélation. Supposons que l'on connaisse N points d'une trajectoire, on définit la corrélation par

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N^2} \{\text{le nombre de paires de points } (x_i, x_j) \text{ telles que } \|x_i - x_j\| < \varepsilon\}$$

et alors

$$D_C = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$$

5.4.4 Dimensions de Renyi

Renyi[4] a défini une famille de dimensions qui inclut les trois dimensions présentées ci-dessus.
On définit, pour $q \in I\!N$, l'entropie généralisée

$$S_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} {P_i}^q(\varepsilon) \text{ si } q \neq 1$$

et

$$S_1(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) \ln P_i(\varepsilon) \text{ si } \ q = 1$$

et les dimensions de Renyi sont

$$\text{pour } q \in I\!N,\ D(q) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$$

On remarque alors que $D_{cap} = D(0)$, $D_I = D(1)$ et $D_C = D(2)$.

On peut montrer que D est une fonction décroissante de q : si $q < q'$, alors $D(q) \geq D(q')$.

Badii et Politi ont même défini un continuum de dimensions contenant, dans le cas des ensembles auto-similaires, les dimensions de Renyi.[5]

5.4.5 Dimension de Lyapunov

Cette dimension est tout à fait spécifique aux systèmes dynamiques, puisqu'elle utilise les exposants de Lyapunov.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les exposants de Lyapunov d'un système dynamique, soit j le plus

4. A. Renyi, *Probability theory*, North-Holland, Amsterdam, 1970
5. R. Badii and A. Politi : Statistical description of chaotic attractors: the dimension functions, *Journal of Statistical Physics*, 40, (5/6), 1985, pp 725-750

grand entier $\in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_j \geq 0$, la *dimension de Lyapunov* définie par Kaplan et Yorke[6] est

$$D_L = j + \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}$$

Par exemple, pour un système chaotique dans $\mathbb{R}^3$, les exposants de Lyapunov sont $\lambda_+, 0, \lambda_-$ avec $\lambda_+ + \lambda_- < 0$, on a

$$D_L = 2 + \frac{\lambda_+}{|\lambda_-|}$$

et on en déduit $2 < D_L < 3$. Plus généralement, la dimension de l'attracteur d'un système chaotique est presque toujours non entière.
Pour un cycle limite, $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, donc $j = 1$ et $D_L = 1$, ce qui était attendu.

5.4.6 Comparaison des différentes dimensions

Après cette liste de définitions, on est en droit de se demander quels sont les liens entre ces dimensions, et quelles sont les plus utiles.

Tout d'abord il faut noter que c'est un domaine de recherche ouvert, que toutes les réponses ne sont pas encore connues, et que les significations de ces dimensions ne sont pas élucidées. Ceci est dû en particulier à l'absence de consensus sur la définition d'un attracteur étrange, ainsi qu'à des connaissances incomplètes des propriétés statistiques utilisées par D_I, D_C, D_{nn}, D_L. Le choix d'une dimension plutôt qu'une autre n'est pas justifié actuellement, pas plus au plan théorique que pour la qualité de l'algorithme de calcul de cette dimension.

Quant à comparer ces différentes dimensions, on a vu que les dimensions de Renyi sont ordonnées, ce qui donne en résumé pour nous

$$D_C \leq D_I \leq D_{cap}$$

il a été conjecturé que $D_{cap} = D_L$, mais comme D_L est probabiliste (elle est basée sur une évolution temporelle *en moyenne*) et que D_{cap} ne l'est pas, cette conjecture a été abandonnée pour $D_L = D_I$; il existe des exemples analytiques qui contredisent cette égalité, mais ils ne sont pas structurellement stables[7] et on ignore encore le lien exact entre D_L et D_I.

5.5 Reconstruction

Dans ce paragraphe, nous allons présenter un résultat remarquable, démontré par Takens en 1980 : on peut reconstruire un attracteur étrange à partir de mesures temporelles d'une seule composante de l'état. Ceci se révèle particulièrement utile pour les expérimentations physiques : en ne stockant qu'une seule composante on

6. J.L. Kaplan and J.A. Yorke : Chaotic behavior of multidimensional difference equations, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag, New York, 1979, pp 228-237

7. De façon informelle, un système est **structurellement stable** s'il n'existe pas de perturbation infinitésimale du système qui modifie le comportement qualitatif des solutions de ce système, i.e. les solutions de ce système et de tout système perturbé sont topologiquement équivalentes, conjuguées par un homéomorphisme. De façon formelle, $f : \Omega \to \Omega$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}^*$, f est **$\mathcal{C}^{\|}$-structurellement stable** si $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall g : \Omega \to \Omega$ de classe $\mathcal{C}^{\|}$, on a $||f - g||_{\mathcal{C}^{\|}} \leq \varepsilon$ implique que f et g sont topologiquement conjuguées.

réduit la quantité d'informations à mémoriser, ou bien on accède à la totalité d'un comportement dont certaines composantes ne sont pas mesurables.

Définition 63 *Soit A un attracteur d'un système de dimension n de flot Φ, inclus dans une variété compacte $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimension N. La* **fonction de reconstruction** *F est définie par*

$$\begin{array}{rccc} F: & M & \rightarrow & \mathbb{R}^{2N+1} \\ & x & \mapsto & \begin{pmatrix} \Phi_j(0,x) \\ \Phi_j(\tau,x) \\ \vdots \\ \Phi_j(N\tau,x) \end{pmatrix} \end{array}$$

où Φ_j est la j^e composante de Φ, j quelconque, et τ est la période d'échantillonnage, quelconque aussi.

Génériquement[8], F envoie difféomorphiquement M sur une variété compacte $M' \subset \mathbb{R}^{2N+1}$ de dimension N. Les attracteurs reconstruits ne sont pas identiques aux attracteurs d'origine, mais ils ont les mêmes propriétés qualitatives.

On peut justifier intuitivement cette propriété en remarquant que, tout comme on peut spécifier de façon unique une trajectoire par la donnée des n composantes de la condition initiale ou par la donnée des $n-1$ premières dérivées de la j^e composante $(\Phi_j(0,x_0), {\Phi_j}'(0,x_0), \ldots, {\Phi_j}^{(n-1)}(0,x_0))'$, on doit pouvoir la spécifier par la donnée de la j^e composante de n points successifs.
Des arguments de topologie différentielle permettent de montrer le théorème suivant.

Théorème 40 Théorème de Whitney-Takens (1980)
Si M est compacte et si $F: M \rightarrow \mathbb{R}^{2N+1}$ est de classe $\mathcal{C}^{\in}$, alors génériquement F envoie M sur une variété compacte $M' \subset \mathbb{R}^{2N+1}$ de dimension N.

Reste à savoir comment choisir τ, la période d'échantillonnage, et que faire si on ne connaît pas N.
Choisir τ Presque n'importe quel τ convient, mais en pratique, si on prend τ trop petit, $\Phi_j((k+1)\tau,x) \approx \Phi_j(k\tau,x)$ et on obtient la bissectrice de l'espace de reconstruction, si on prend τ trop grand, $\Phi_j((k+1)\tau,x)$ et $\Phi_j(k\tau,x)$ ne sont plus corrélés à cause de la perte de précision, et enfin si τ est proche d'une période du système, on va avoir un effet de stroboscope analogue à celui de l'application de Poincaré, qui gèle la composante périodique. Il existe des méthodes algorithmiques assez optimisées pour déterminer τ.
Choisir N si on ne le connaît pas. On le détermine itérativement, en le prenant égal à 1, en reconstruisant l'attracteur et en estimant sa dimension (de capacité par exemple), puis on l'incrémente de 1 et on recommence, et on s'arrête quand la dimension ne change plus. On a alors obtenu la dimension de l'attracteur et le plus petit N qui conduit à cette valeur est la dimension de l'espace de reconstruction.

Cas discret On procède de la même façon : si f est le difféomorphisme définissant le système $x_{k+1} = f(x_k)$, avec un attracteur A inclus dans une variété

8. Une propriété **génériquement vraie** est vraie partout sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle.

compacte M de dimension N, la fonction de reconstruction est définie par

$$\begin{array}{cccc} F: & M & \to & \mathbb{R}^{2N+1} \\ & x & \mapsto & \left(\begin{array}{c} x_j \\ f^m(x)_j \\ \vdots \\ f^{2Nm}(x)_j \end{array} \right) \end{array}$$

avec m entier strictement positif quelconque et l'indice j indiquant la j^e composante. Si f est de classe $\mathcal{C}^{\in}$, alors génériquement, F reconstruit l'attracteur A.

Chapitre 6

Une brève conclusion

On espère que les Systèmes Dynamiques vous amusent désormais autant qu'ils nous amusent...

Ce polycopié a été rédigé, puis remanié dans une certaine urgence, et tout le soin et le calme nécessaires à l'élaboration d'un poly parfait n'ont pas été réunis. Ceci signifie deux choses : premièrement, que toutes vos remarques et critiques, aussi bien sur le fond que sur la forme, sont les bienvenues, ensuite qu'une bibliographie, indispensable dans un poly d'introduction à une telle matière, n'a pas été faite. Vous êtes donc invités à envoyer vos critiques à Nathalie Revol, LMC-IMAG, 46 avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble cedex 1, ou par courrier électronique, à revol@ano.univ-lille1.fr, et à réclamer avec insistance une bibliographie à Jean Della Dora, C.I.C.G., 351, avenue de la Bibliothèque, Domaine Universitaire, BP 53 - 38041 Grenoble cedex 9 (e-mail : Jean.DellaDora@imag.fr)

Annexe A

Annexe : Preuve du théorème sur la dépendance des conditions initiales

RAPPEL DES THEOREMES UTILES

$(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé est un espace de Banach s'il est complet.
Par exemple $(\mathcal{C}_b^0(I, I\!\!R^n), \|.\|)$ où $\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(t)\|,\ t \in I\}$ l'ensemble des fonctions continues bornées d'un intervalle $I \subset I\!\!R$ dans $I\!\!R^n$ est un espace de Banach.

Soit $X \subset (E, \|.\|)$ espace vectoriel normé, soit $T : X \to X$,
$a \in X$ est un point fixe de T si et seulement si $T(a) = a$.

T est une k-contraction si $\exists k \in I\!\!R \,/\, \forall x \in X,\ \forall y \in X,\ \|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|$

Théorème du point fixe
Soit X un fermé d'un espace de Banach $(E, \|.\|)$.
Une k-contraction T de X avec $0 < k < 1$ possède un unique point fixe.

Théorème du point fixe avec paramètre
Soient X un fermé d'un espace de Banach et U un sous-ensemble de $I\!\!R^p$, et soit

$$\begin{array}{rcl} T : X \times U & \to & X \\ (x, y) & \mapsto & T(x, y) = T_y(x) \end{array}$$

une application continue. Supposons que pour tout $y \in U$ les applications partielles $T_y : X \to X$ soient des k-contractions avec $0 < k < 1$, indépendant de y.
Soit $a(y)$ l'unique point fixe de T_y.
Alors l'application $y \mapsto a(y)$ de U dans X est continue.

Exemple important (par la suite)
Prenons pour espace de Banach $E = \mathcal{C}_b^0(I, I\!\!R^n)$ l'espace des fonctions continues bornées de I dans $I\!\!R^n$.

Les points fixes des T_y sont des applications continues

$$\varphi_y : I \to \mathbb{R}^n$$

et l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : I \times U & \to & \mathbb{R}^n \\ (t, y) & \mapsto & \varphi_y(t) \end{array}$$

est continue, en effet elle est continue en t, uniformément en y.

Définition d'une solution d'une équation différentielle du 1^{er} ordre

Soit $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Une solution φ de l'équation différentielle du 1^{er} ordre

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{A.1}$$

est une application dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $t \in I$ on ait

$$(\varphi(t), t) \in \Omega \ et \ \varphi'(t) = f(\varphi(t), t) \tag{A.2}$$

Une solution φ de (A.1) vérifie la *condition initiale ou condition de Cauchy* $(x_0, t_0) \in \Omega$ si

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{A.3}$$

Définitions

Une application f d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est *k-lipschitzienne en x* si

$$\forall (t, x) \in \Omega, \, \forall (t, y) \in \Omega, \, \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|$$

L'application f est dite *localement lipschitzienne en x* si $\forall (x_0, t_0) \in \Omega$, il existe un voisinage V de (x_0, t_0) dans Ω et une constante $k > 0$ telle que la restriction de f à V soit k-lipschitzienne.

Un exemple important est le cas où f est dérivable en x sur Ω et où sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue. On déduit alors aisément de l'inégalité des accroissements finis que f est localement lipschitzienne en x.
C'est évidemment le cas des applications $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui sont affines en x et continues en t : $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ où A et b sont des applications continues de I dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et de I dans $\mathbb{R}^n$ respectivement.

Soit (t_0, x_0) un point d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on pose

$$\begin{array}{rcl} lclB_r(x_0) & = & \{x \in \mathbb{R}^n \, / \, \|x - x_0\| \leq r\} \\ I_\alpha(t_0) & = &]t_0 - \alpha \, ; \, t_0 + \alpha[\end{array}$$

Soit f de Ω dans $\mathbb{R}^n$ une application continue, localement lipschitzienne en x et soit V un voisinage compact de (t_0, x_0) dans Ω sur lequel f est k-lipschitzienne.
Notons M un majorant de $\|f(t, x)\|$ sur V. On peut choisir $r > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$I_\alpha \times B_r \subset V \ et \ \alpha M < r$$

Un tel voisinage de (t_0, x_0) s'appelle un *cylindre de sécurité* pour f en (t_0, x_0). Rappelons les propriétés qui le caractérisent : $\exists M,\ k,\ \alpha,\ r$ réels strictement positifs tels que :

$$\alpha M < r \ \text{ et } \ \forall (t,x) \in I_\alpha \times B_r, \ \ \forall (s,y) \in I_\alpha \times B_r, \ \ \|f(t,x)\| \leq M$$

et

$$\|f(t,x) - f(s,y)\| \leq k\|x - y\|$$

Théorème d'existence et d'unicité locale
Soit f une application continue, localement lipschitzienne en x d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et soit $I_\alpha \times B_r$ un cylindre de sécurité pour f en $(t_0, x_0) \in \Omega$. (B_r est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, $I_\alpha =]t_0 - \alpha; t_0 + \alpha[$).
Alors il existe une unique solution

$$\varphi : I_\alpha \to B_r \subset \mathbb{R}^n$$

de $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$
qui vérifie la condition de Cauchy $\varphi(t_0) = x_0$

Preuve
Puisque f est continue, toutes les solutions sont de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi une application $\varphi : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions

$$(t, \varphi(t)) \in \Omega \quad et \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

$$\varphi(t_0) = x_0$$

si et seulement si

$$(t, \varphi(t)) \in \Omega \quad et \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u))du$$

Soit E l'espace de Banach $\mathcal{C}_b^0(I_\alpha, \mathbb{R}^n)$ des applications continues bornées $\psi\ : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$. L'ensemble X des ψ de E telles que $\psi(I_\alpha) \subset B_r$ est un fermé de E. (Il est donc complet). X est donc un espace de Banach.
Si ψ appartient à X, l'application $\psi_1 : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\psi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \psi(u))du$$

est continue et vérifie

$$\|\psi_1(t) - x_0\| \ \leq | \int_{t_0}^{t} \|f(u, \psi(u))\| du| \ \leq \ \alpha M \ < \ r$$

ψ_1 est encore un élément de X.
Notons T l'application de X dans X définie par $T(\psi) = \psi_1$.
f étant localement lipschitzienne, si $\psi \in X$, $\overline{\psi} \in X$, on a pour tout $t \in I_\alpha$:

$$\begin{aligned} (1) \ \ \|T(\psi)(t) - T(\overline{\psi})(t)\| &\leq |\int_{t_0}^{t} \|f(u, \psi(u)) - f(u, \overline{\psi}(u))\| du| \\ &\leq k|\int_{t_0}^{t} \|\psi(u) - \overline{\psi}(u)\| du| \end{aligned}$$

1/ Première technique
En passant au sup. pour $t \in I_\alpha$, on en déduit

$$\|T(\psi) - T(\overline{\psi})\| \leq k\alpha\|\psi - \overline{\psi}\|$$

Lorsque $k\alpha < 1$ on peut appliquer le théorème du point fixe. L'unique point fixe de T vérifie

$$(\varphi(t), t) \in \Omega \;\; et \;\; \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u), u)du$$

ce qui prouve le théorème. Si $k\alpha \geq 1$, on pourrait choisir $\alpha' < \alpha$ de telle sorte que $k\alpha' < 1$ et prouver le théorème pour $I_{\alpha'} \times B_r$.

2/ Deuxième technique (Théorème de la puissance k-ème contractante) : il n'est pas nécessaire de réduire α
Soient ψ_0, $\overline{\psi_0} \in X$; notons

$$\psi_m = T^m(\psi_0), \; \overline{\psi_m} = T^m(\overline{\psi_0}), \; m \in \aleph$$

De la majoration (1) on déduit

$$\|\psi_1(t) - \overline{\psi_1}(t)\| \leq k\;|t - t_0|\;\|\psi_0 - \overline{\psi_0}\|$$

Un calcul simple par induction montre que

$$\|\psi_m(t) - \overline{\psi_m}(t)\| \leq \frac{k^m}{m!}\;|t - t_0|^m\;\|\psi_0 - \overline{\psi_0}\|$$

En passant au sup. pour $t \in I_\alpha$ on déduit

$$\|\psi_m - \overline{\psi_m}\| \leq \frac{(k\alpha)^m}{m!}\;\|\psi_0 - \overline{\psi_0}\|$$

Puisque $\frac{(k\alpha)^m}{m!} \longrightarrow 0$ quand $m \to \infty$, $\exists q > 0 \;/\; k_q = \frac{(k\alpha)^q}{q!} < 1$. Ainsi T^q est une k_q-contraction avec $k_q < 1$, donc T^q a un unique point fixe x_q. T a donc au plus un point fixe qui ne peut être que x_q. Montrons que x_q est bien un point fixe de T:

$$\|x_q - T(x_q)\| = \|T^q(x_q) - T(T^q(x_q))\| = \|T^q(x_q) - T^q(T(x_q))\| \leq k_q\|x_q - T(x_q)\|$$

et comme $0 < k_q < 1$, $\|x_q - T(x_q)\| = 0$
CQFD

Théorème d'existence et d'unicité globale
Pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une unique solution maximale de (A.1) notée $\varphi_{t_0,x_0} : J_{t_0,x_0} =]\omega_-;\omega_+[\to I\!R^n$ vérifiant $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$

DEPENDANCE AUX CONDITIONS INITIALES
Définitions
On note W la réunion

$$W = \bigcup_{(t_0,x_0)\in\Omega} (t_0, x_0) \times J_{t_0,x_0} \;\subset\; \Omega \times I\!R$$

et on note

$$\begin{array}{rcl}\Phi : W & \to & \mathbb{R}^n \\ \Phi(t_0, x_0; t) & = & \varphi_{t_0,x_0}(t)\end{array}$$

Théorème
Si f est une application continue, localement lipschitzienne en x, d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
alors W est un ouvert de $\Omega \times \mathbb{R}$ et Φ est continue et possède les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll}(*) & \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0, x_0; t) = f(t, \Phi(t_0, x_0; t)) \; si \; (t_0, x_0) \in \Omega \\ (**) & \Phi(t_0, x_0; t_0) = x_0 \; si \; (t_0, x_0) \in \Omega \\ (***) & si \; (t_0, x_0; t_1) \in W, \; alors \\ & [(t_0, x_0, t) \in W] \Longleftrightarrow [(\Phi(t_0, x_0; t_1), t_1; t) \in W] \\ & et \; alors \; on \; a \; \Phi(t_0, x_0; t) = \Phi(t_1, \Phi(t_0, x_0; t_1); t)\end{array}$$

Preuve :
Il est clair que Φ vérifie $(*)$ et $(**)$ par définition. Quant à $(***)$, c'est une conséquence du théorème d'existence et d'unicité des solutions maximales. En effet, soient $t_1 \in J_{t_0,x_0}$, $x_1 = \varphi_{t_0,x_0}(t_1)$, les solutions maximales φ_{t_0,x_0} et φ_{t_1,x_1} coïncident en t_1, donc elles sont identiques; c'est-à-dire $t \in J_{t_0,x_0}$ si et seulement si $t \in J_{t_1,x_1}$, et alors $\varphi_{t_0,x_0}(t) = \varphi_{t_1,x_1}(t)$.

Il s'agit donc de prouver que W est un ouvert et que Φ est continue. Cette démonstration repose sur le théorème du point fixe avec paramètre. Elle est longue. Nous allons la décomposer en deux parties :
-construction d'une contraction
-Φ est continue et W est un ouvert

Construction d'une contraction T et conséquences
Soit K un compact contenu dans Ω et soit M un majorant de $\|f(t,x)\|$ sur K. En utilisant la compacité de K, on sait qu'un tel majorant existe car f est continue.
Pour tout $(t_0, x_0) \in K$ on peut choisir $k(t_0, x_0)$, $r(t_0, x_0) > 0$ et $\alpha(t_0, x_0) > 0$ (r et α continus en (t_0, x_0)) tels que $\exists V \subset K$ un voisinage de (t_0, x_0) sur lequel f est $k(t_0, x_0)$-lipschitzienne et $B_{r(t_0,x_0)} \times I_{\alpha(t_0,x_0)} \subset V$. K étant compact et les fonctions r et α étant continues, il existe des réels $r = \min r(t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in K, r > 0$ et $\alpha_0 = \min \alpha(t_0, x_0), (t_0, x_0) \in K, \alpha_0 > 0$. On choisit alors $k = \max\{k(t_0, x_0), (t_0, x_0) \in K\}$, K étant compact, montrez que k est fini. (Pour ma part, je commence à fatiguer).
On choisit $\alpha \leq \alpha_0$ de telle sorte que

$$\alpha > 0, \; \alpha M < r, \; \alpha k < 1$$

$\forall (t_0, x_0) \in K$, $C_{r,\alpha}(t_0, x_0) = I_\alpha(t_0) \times B_r(x_0)$ est un cylindre de sécurité pour f sur lequel f est k-lipschitzienne.
Soit X_{t_0,x_0} l'ensemble des $\psi : I_\alpha(t_0) \to B_r(x_0)$ qui sont continues et qui vérifient $\psi(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in K$. Nous avons vu dans la preuve du théorème d'existence et

d'unicité que si on pose

$$\psi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \psi(u))du \quad t \in I_\alpha(t_0)$$

l'application $T_{t_0,x_0} : \psi \mapsto \psi_1$ est une $k\alpha$-contraction sur X_{t_0,x_0}. Il n'est pas possible d'appliquer directement le théorème du point fixe avec paramètre aux T_{t_0,x_0} puisqu'ils n'opèrent pas sur le même espace (T_{t_0,x_0} opère sur X_{t_0,x_0}). Pour y parvenir, il faut recentrer en 0 les espaces source et but des $\psi \in X_{t_0,x_0}$. On procède de la façon suivante; soit $\overline{X}$ l'ensemble des applications continues

$$\begin{array}{rcl} \overline{\psi} : I_\alpha(0) =]-\alpha;\alpha[& \to & B_r(0) \\ s & \mapsto & \overline{\psi}(s) \end{array}$$

et soit

$$\overline{} : X_{t_0,x_0} \to \overline{X}$$

la bijection définie par

$$\overline{} : \psi \mapsto \overline{\psi} \quad avec \quad \overline{\psi}(s) = \psi(t_0 + s) - x_0$$

A l'opérateur T_{t_0,x_0} correspond l'opérateur $\overline{T_{t_0,x_0}}$ sur $\overline{X}$ défini par

$$\overline{\psi_1} = \overline{T_{t_0,x_0}}(\overline{\psi}) \quad si \quad T_{t_0,x_0}(\psi) = \psi_1$$

c'est-à-dire que $\psi \mapsto \overline{\psi_1}$ est défini par :

$$\overline{\psi_1}(s) = \int_0^s f(v + t_0, \overline{\psi}(v) - x_0)dv$$

Il est clair que $\overline{T_{t_0,x_0}}$ est - comme T_{t_0,x_0} - une $k\alpha$-contraction sur $\overline{X}$. D'autre part $\overline{X}$ est un fermé de l'espace de Banach $\mathcal{C}_b^0(I_\alpha(0), \mathbb{R}^n)$, donc un ensemble complet. Soit

$$\begin{array}{rcl} \overline{T} \ : \ \overline{X} \times K & \to & \overline{X} \\ (\overline{\psi}, t_0, x_0) & \mapsto & \overline{T_{t_0,x_0}}(\overline{\psi}) \end{array}$$

On déduit aisément de la formule intégrale qui donne $\overline{T_{t_0,x_0}}$ que $\overline{T}$ est une application continue. Soit $\overline{\varphi_{t_0,x_0}}$ l'unique point fixe de $\overline{T_{t_0,x_0}}$. D'après le théorème du point fixe avec paramètre, l'application $(t_0, x_0) \mapsto \overline{\varphi_{t_0,x_0}}$ de K dans $\overline{X}$ est continue et d'après l'exemple qui le suit

$$\begin{array}{rcl} \overline{\Phi_{K,\alpha}} \ : \ K \times I_\alpha(0) & \to & \mathbb{R}^n \\ \overline{\Phi_{K,\alpha}}(t_0, x_0; s) & = & \overline{\varphi_{t_0,x_0}}(s) \end{array}$$

est aussi continue. La restriction $\Phi_{K,\alpha}$ de Φ à $W_{K,\alpha} = \bigcup_{(t_0,x_0)\in K}(t_0, x_0) \times I_\alpha(t_0)$ s'écrit par définition de $\overline{} : \psi \mapsto \overline{\psi}$

$$\Phi_{K,\alpha}(t_0, x_0; t) = \overline{\Phi_{K,\alpha}}(t_0, x_0; t - t_0) + x_0$$

Elle est donc continue.

Φ est continue - W est un ouvert

Soit $(t_0, x_0; t)$ un point de W. Le résultat précédent prouve que pour t_1 assez proche de t_0, ie $t_1 \in I_\alpha(t_0)$, Φ est définie sur un voisinage de $(t_0, x_0; t_1)$: $(t_0, x_0) \times [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha]$, et continue en ce point.

Il s'agit de montrer que ces deux propriétés restent vraies pour tout $t_1 \in J_{t_0,x_0}$.
Supposons $t_1 > t_0, t_1 \in J_{t_0,x_0}$, le cas où $t_1 < t_0$ se traite de la même façon.
Soit K un voisinage compact de $\{(t, \Phi(t_0, x_0; t))$ avec $t \in [t_0; t_1]\}$. K joue dans cette partie le rôle du compact K de la partie précédente. D'après la partie de la preuve qui précède, $\exists \alpha > 0$ tel que Φ est définie et continue sur

$$W_{K,\alpha} = \{(t'_0, x'_0; t)/(t'_0, x'_0) \in K \; et \; |t'_0 - t| \leq \alpha\}$$

C'est ce que nous avons noté par

$$W_{K,\alpha} = \bigcup_{(t_0,x_0)\in K} (t_0, x_0) \times I_\alpha(t_0)$$

au paragraphe précédent.
Notons m l'entier tel que $\alpha m \leq t_1 < \alpha(m+1)$.
Soit V_1 un voisinage de (t_0, x_0) tel que $\Phi(t'_0, x'_0; t'_0 + \alpha)$ appartienne à K si $(t'_0, x'_0) \in V_1$. Ce voisinage existe car $(\Phi(t_0, x_0; t_0+\alpha), t_0+\alpha) \in K$ qui est un voisinage compact de la trajectoire de la solution maximale vérifiant les conditions de Cauchy (t_0, x_0), et Φ est définie et continue sur $W_{K,\alpha}$.
D'après

$$(***) \; : \quad si \; (t_0, x_0; \tau) \in W, \; alors \; on \; a \; l'équivalence$$
$$[(t_0, x_0, t) \in W] \Longleftrightarrow [(\tau, \Phi(t_0, x_0; \tau); t) \in W]$$
$$et \; alors \; on \; a \; \Phi(t_0, x_0; t) = \Phi(\tau, \Phi(t_0, x_0; \tau); t)$$

et les propriétés de définition et de continuité de Φ sur $W_{K,\alpha}$,
pour tout $(t'_0, x'_0) \in V_1$, on a

$$\Phi(t'_0 + \alpha, \Phi(t'_0, x'_0; t'_0 + \alpha); t) = \Phi(t'_0, x'_0; t)$$

si $|(t'_0 + \alpha) - t| \leq \alpha$.
En remplaçant dans cette formule t par $t'_0 + 2\alpha$, on montre que Φ est définie et continue en tout point $(t'_0, x'_0; t)$ de $V_1 \times I\!R$ tel que $|t'_0 - t| \leq 2\alpha$. En répétant m fois ce raisonnement, on montre qu'il existe un voisinage V_m de (t_0, x_0) tel que pour tout point $(t'_0, x'_0; t) \in V_m \times I\!R$ vérifiant $|t - t'_0| \leq m\alpha$, Φ soit définie et continue en $(t_0, x'_0; t)$. En particulier, Φ est définie sur un voisinage de $(t_0, x_0; t_1)$ et continue en ce point.
CQFD!!!