

# Introduction à l'arithmétique par intervalles

**Nathalie Revol**

INRIA, LIP, ENS-Lyon

Nathalie.Revol@ens-lyon.fr

École Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel

Session *Arithmétique des ordinateurs*

Grenoble, 29 mars - 2 avril 2004

# Plan (commenté) du cours

- **définition de l'arithmétique par intervalles** pour savoir de quoi on parle
- **avantages et inconvénients** dès le début, pour justifier la suite
- **optimisation globale** : exemple de problème où l'arithmétique par intervalles fait ce qu'aucune autre arithmétique n'est capable de faire
- **Newton** : exemple de problème où l'arithmétique par intervalles fait ce qu'aucune autre arithmétique n'est capable de faire et brique pour l'optimisation globale
- **résolution de contraintes** : algorithmes  
illustration des principes fondamentaux en arithmétique par intervalles

# Plan du cours

- **définition de l'arithmétique par intervalles**
  - objets
  - opérations
  - propriétés algébriques (perdues)
  - implantation
- **avantages et inconvénients**
- **optimisation globale**
- **Newton**
- **résolution de contraintes**

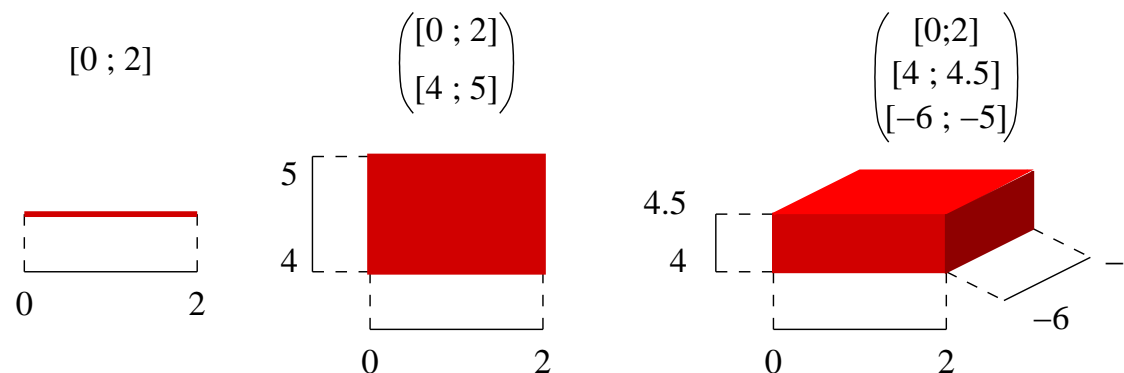
# Objets manipulés en arithmétique par intervalles

(Moore 1966, Kulisch 1983, Neumaier 1990, Rump 1994, Alefeld & Mayer 2000, Jaulin 2001)

Les nombres sont remplacés par des intervalles.

- $\pi$  remplacé par  $[3.14159, 3.14160]$
- donnée  $d$  mesurée avec une erreur  $\pm\varepsilon$  remplacée par  $[d - \varepsilon, d + \varepsilon]$
- résultat cherché sur tout l'intervalle  $[-10, 10]$ .

Vecteur intervalle : composantes = intervalles.



# Opérations en arithmétique par intervalles

**Définition abstraite :** le résultat d'une opération  $\diamond$  entre  $x$  et  $y$  est

$$\mathbf{x} \diamond \mathbf{y} = \{x \diamond y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$$

**En pratique, formules :**

$$\begin{aligned} [\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] &= [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}] \\ [\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}] &= [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}] \\ [\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}] &= [\min(\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \underline{y}, \bar{x} * \bar{y}), \max(\text{idem})] \\ [\underline{x}, \bar{x}]^2 &= [\min(\underline{x}^2, \bar{x}^2), \max(\underline{x}^2, \bar{x}^2)] \text{ si } 0 \notin [\underline{x}, \bar{x}] \\ &\quad \text{et } [0, \max(\underline{x}^2, \bar{x}^2)] \text{ sinon} \\ 1 / [\underline{y}, \bar{y}] &= [\min(1/\underline{y}, 1/\bar{y}), \max(1/\underline{y}, 1/\bar{y})] \text{ si } 0 \notin [\underline{y}, \bar{y}] \\ [\underline{x}, \bar{x}] / [\underline{y}, \bar{y}] &= [\underline{x}, \bar{x}] \times (1 / [\underline{y}, \bar{y}]) \text{ si } 0 \notin [\underline{y}, \bar{y}] \end{aligned}$$

# Fonctions en arithmétique par intervalles

**Définition abstraite :** le résultat d'une opération  $f$  sur  $x$  est

$$f(\mathbf{x}) = \text{Hull}\{f(x) \mid x \in \mathbf{x}\}$$

**En pratique, fonctions élémentaires :**

$$\begin{aligned}\exp([\underline{x}, \bar{x}]) &= [\exp \underline{x}, \exp \bar{x}] \text{ puisque } \exp \text{ est croissante,} \\ \text{acoth}([\underline{x}, \bar{x}]) &= [\text{acoth } \bar{x}, \text{acoth } \underline{x}] \text{ si } [\underline{x}, \bar{x}] \not\ni 0 : \text{acoth est décroissante} \\ \sin [\pi/3, \pi] &= [0, 1] \\ &\vdots\end{aligned}$$

On utilise la monotonie (comme pour les opérations), au moins par morceaux.

# Exemples

Expression polynomiale  $x^3 - 2x^2 + x - 3$ , avec  $x = [-5, 2]$  :

$$\begin{aligned} & [-5, 2]^3 - 2[-5, 2]^2 + [-5, 2] - 3 \\ &= [-125, 8] - 2[0, 25] + [-5, 2] - 3 \\ &= [-125, 8] - [0, 50] + [-5, 2] - 3 \\ &= [-183, 7]. \end{aligned}$$

# Exemples

Expression en plusieurs variables  $\sin x + 2x \exp y - y^2 \sqrt{z}$   
avec  $x = [-\pi, \pi/4]$ ,  $y = [-1, 1]$  et  $z = [1, 4]$  :

$$\begin{aligned} & \sin [-\pi, \pi/4] + 2 [-\pi, \pi/4] \times \exp [-1, 1] - [-1, 1]^2 \times \sqrt{[1, 4]} \\ &= [-1, \sqrt{2}/2] + [-2\pi, \pi/2] \times [1/e, e] - [0, 1] \times [1, 2] \\ &= [-1, \sqrt{2}/2] + [-2\pi e, \pi e/2] - [0, 2] \\ &= [-3 - 2\pi e, \sqrt{2}/2 + \pi e/2] \end{aligned}$$

## Propriétés algébriques (perdues)

**La soustraction n'est pas la réciproque de l'addition :**

si  $x = [2, 3]$ ,  $y = [-3, 5]$  et  $z = x + y = [-1, 8]$

$$z - y = [-1, 8] - [-3, 5] = [-6, 11] \supset x = [2, 3]$$

ou encore

$$x - x = [2, 3] - [2, 3] = [-1, 1] \neq 0$$

En effet,  $x - x = \{x - y \mid x \in x, y \in x\} \supset \{x - x \mid x \in x\} = \{0\}$ .

**La division n'est pas la réciproque de la multiplication :**

si  $x = [2, 3]$   $x/x = [2, 3] / [2, 3] = [2/3, 3/2] \ni 1$ .

**Propriété essentielle : tout résultat contient le résultat exact.**

## La multiplication de $x$ par $x$ n'est pas égale à l'élevation au carré :

$$\begin{aligned} \text{si } \mathbf{x} &= [-3, 2] \quad \mathbf{x} \times \mathbf{x} = [-3, 2] \times [-3, 2] = [-6, 9] \\ \text{alors que } \mathbf{x}^2 &= \{x^2 \mid x \in \mathbf{x}\} = [0, 9]. \end{aligned}$$

## La multiplication est sous-distributive par rapport à l'addition :

$$\text{si } \mathbf{x} = [-2, 3], \mathbf{y} = [1, 4] \text{ et } \mathbf{z} = [-2, 1],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \{x \times (y + z) \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}, z \in \mathbf{z}\} \\ &= [-2, 3] \times ([1, 4] + [-2, 1]) \\ &= [-2, 3] \times [-1, 5] \\ &= [-10, 15] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} &= \{x \times y + x' \times z \mid x \in \mathbf{x}, x' \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}, z \in \mathbf{z}\} \\ &= [-2, 3] \times [1, 4] + [-2, 3] \times [-2, 1] \\ &= [-8, 12] + [-6, 4] \\ &= [-14, 16] \end{aligned}$$

# Implantation

- **opérations arithmétiques et algébriques :**

pour retourner un intervalle contenant  $[\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$   
il faut retourner un intervalle contenant  $[\nabla(\underline{x} - \bar{y}), \Delta(\bar{x} - \underline{y})]$   
OK si arithmétique IEEE-754 disponible (cf. cours AT)

- **fonctions mathématiques :**

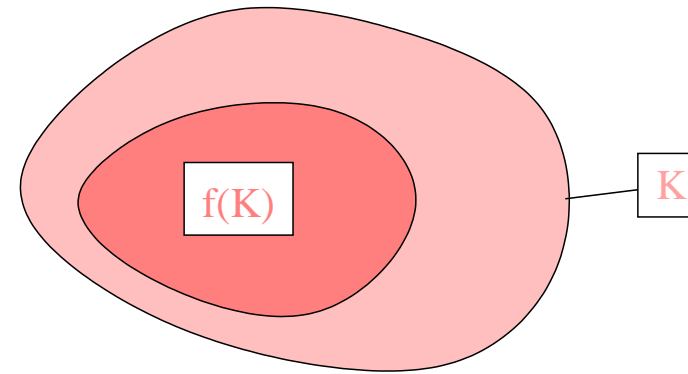
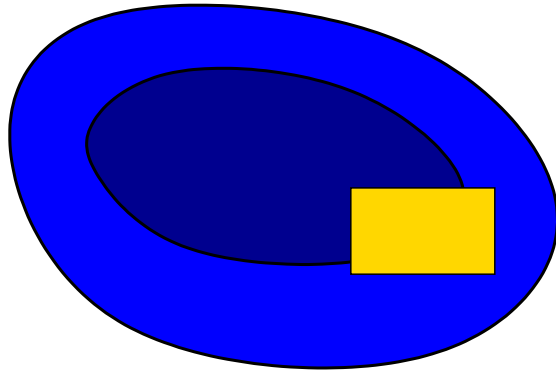
pour retourner un intervalle contenant  $\exp([\underline{x}, \bar{x}]) = [\exp \underline{x}, \exp \bar{x}]$   
il faut retourner un intervalle contenant  $[\nabla(\exp \underline{x}), \Delta(\exp \bar{x})]$   
mais ce n'est pas prévu par la norme IEEE-754...

Solution : écrire ses propres fonctions math. avec arrondis dirigés . . .  
ou utiliser une bibliothèque qui les implante, cf. MPFR (PZ *et al.*).

# Plan du cours

- **définition de l'arithmétique par intervalles**
- **avantages et inconvénients**
  - + calcul ensembliste
  - + optimisation globale
    - surestimation des résultats
    - tous les problèmes sont NP-durs
- **optimisation globale**
- **Newton**
- **résolution de contraintes**

# Calcul ensembliste

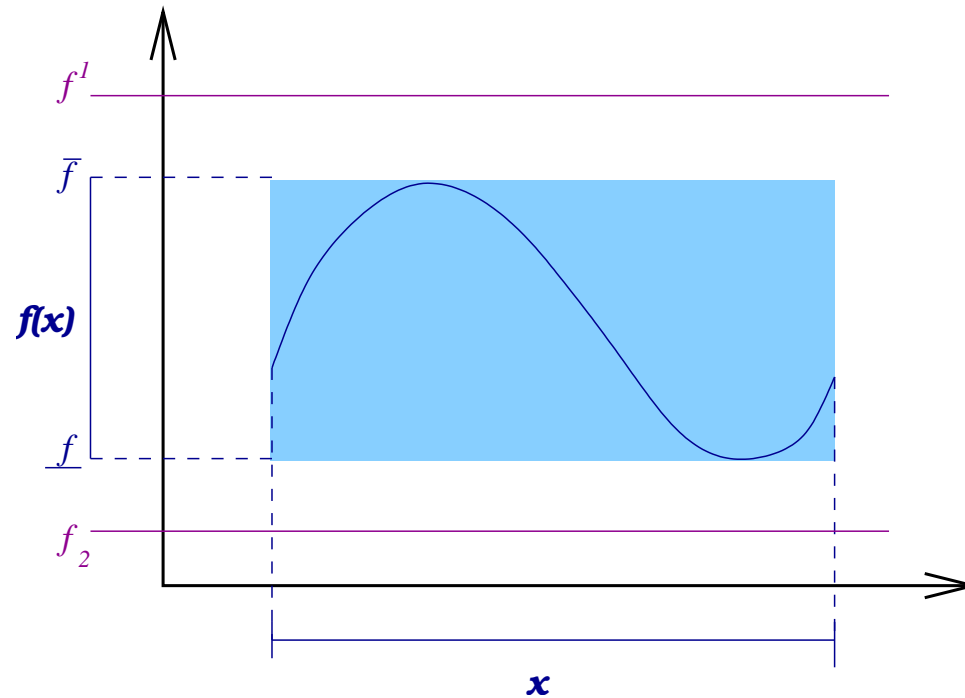


À gauche : **comportement** sûr ? **contrôlable** ? dangereux ?  
toujours contrôlable.

À droite : **théorème de Brouwer-Schauder** :  
 $f$  admet un unique point fixe sur  $K$ .

# Calcul ensembliste : optimisation

Question : sur  $x$ , les extrema de la fonction  $f$  sont-ils  $< f^1$  ?  $> f_2$  ?



Non si  $f(x) = [\underline{f}, \bar{f}]$  est inclus strictement dans  $[f_2, f^1]$ .

# Arithmétique par intervalles : inconvénient le résultat dépend de l'expression

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $I$  un intervalle.

**Exemple** :  $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ ,  $I = [-1, 3]$

$I^2 - 2 * I + 1 = [-1, 3]^2 - 2[-1, 3] + 1 = [0, 9] + [-6, 2] + 1 = [-5, 12]$   
et en écrivant  $x^2 - 2 * x + 1 = x * (x - 2) + 1$

$I * (I - 2) + 1 = [-1, 3] * ([-1, 3] - 2) + 1 = [-1, 3] * [-3, 1] + 1 = [-8, 4]$

alors que  $F(I) = f(I) = ([-1, 3] - 1)^2 = [0, 4]$   
(en utilisant  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ ).

Cf. aussi perte de propriétés algébriques : **décorrélation des variables**  
(*variable dependency*).

# Arithmétique par intervalles : inconvénient

## Wrapping effect (effet enveloppant)

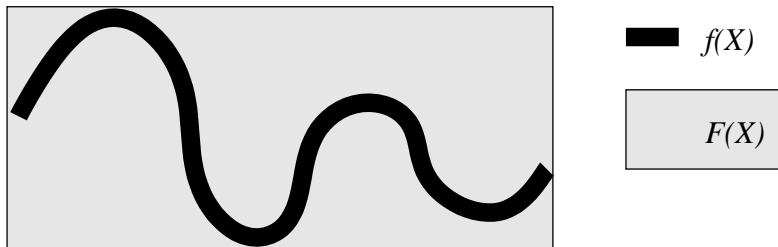
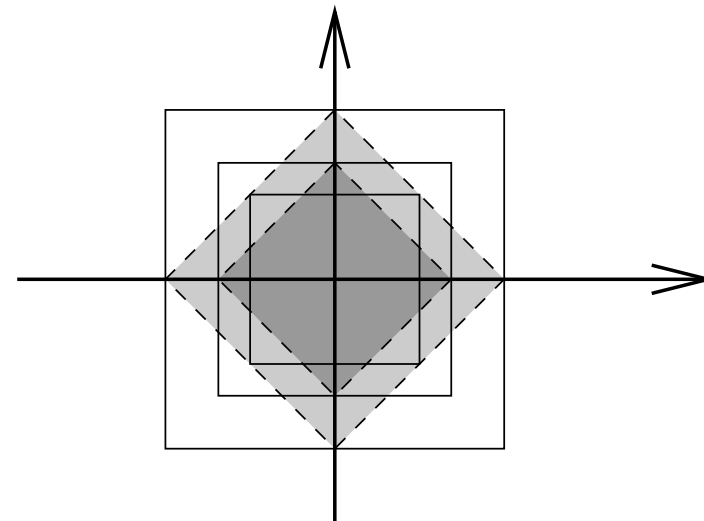


image de  $f(x)$   
avec  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



2 rotations successives de  $\pi/4$   
du petit carré central

# Arithmétique par intervalles : inconvénient (presque) tous les problèmes sont NP-durs

Rohn 1994 ff, Kreinovich. . .

- évaluer une fonction sur un pavé
- évaluer une fonction sur un pavé à  $\varepsilon$  près
- résoudre un système linéaire
- résoudre un système linéaire à  $1/4n^4$  près
- déterminer si la solution d'un système linéaire est bornée
- calculer la norme  $\|\mathbf{A}\|_{\infty,1}$  d'une matrice
- déterminer si une matrice par intervalles est régulière
- . . .

# Plan du cours

- définition de l'arithmétique par intervalles
- avantages et inconvénients
- optimisation globale
  - algorithme élémentaire
  - algorithme de Hansen
  - optimisation globale sous contraintes
- Newton
- résolution de contraintes

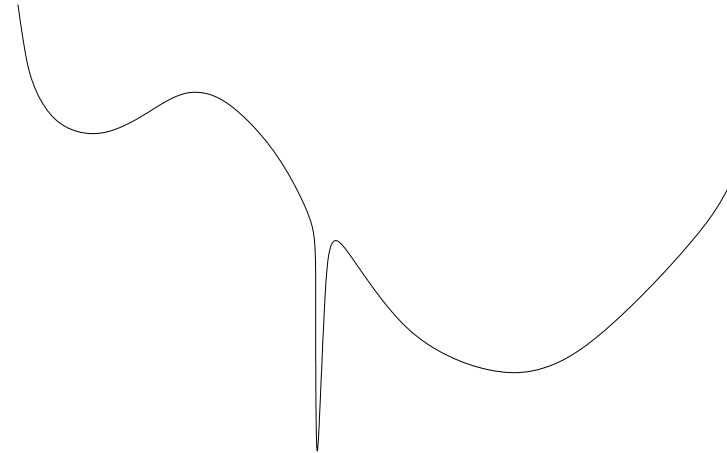
# Optimiser une fonction continue

**Problème :**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , trouver  $x^*$  et  $f^*$  tels que

$$f^* = f(x^*) = \min_x f(x)$$

## Hypothèses :

- recherche dans un pavé  $x_0$
- $x^* \in \text{intérieur}(x_0)$ , pas sur le bord
- $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$



# Optimiser une fonction continue

(Ratschek and Rokne 1988, Hansen 1992, Kearfott 1996. . . )

On cherche le minimum de  $f$  fonction continue sur un pavé  $\mathbf{x}_0$ .

$\mathbf{x}_0$  pavé à examiner

$\bar{f}$  majorant courant de  $f^*$

tant qu'il reste un pavé  $\mathbf{x}$  à examiner

si  $f(\mathbf{x}) > \bar{f}$  alors

rejeter  $\mathbf{x}$

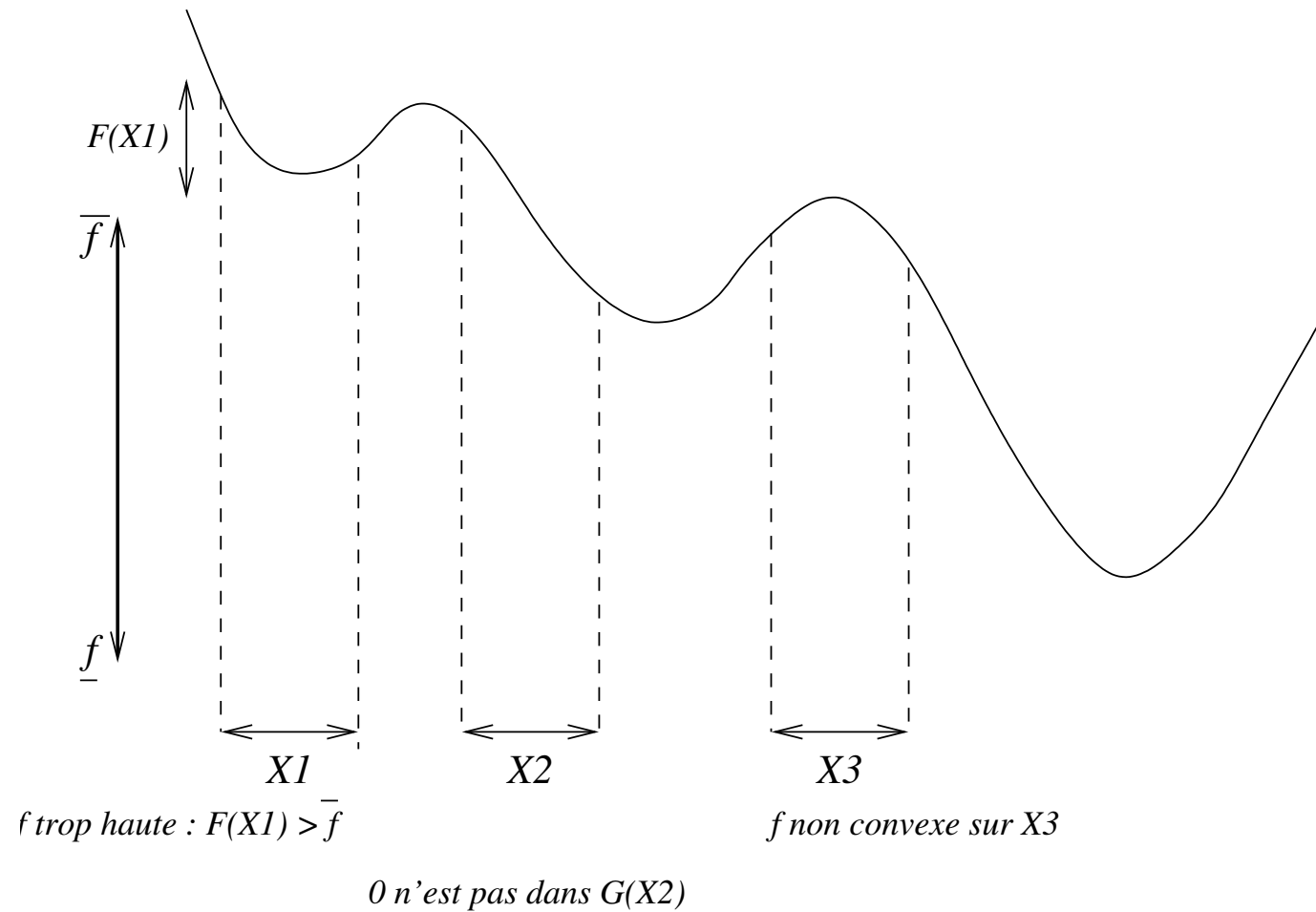
sinon

màj  $\bar{f}$  : si  $f(\text{mid}(\mathbf{x})) < \bar{f}$  alors  $\bar{f} = f(\text{mid}(\mathbf{x}))$

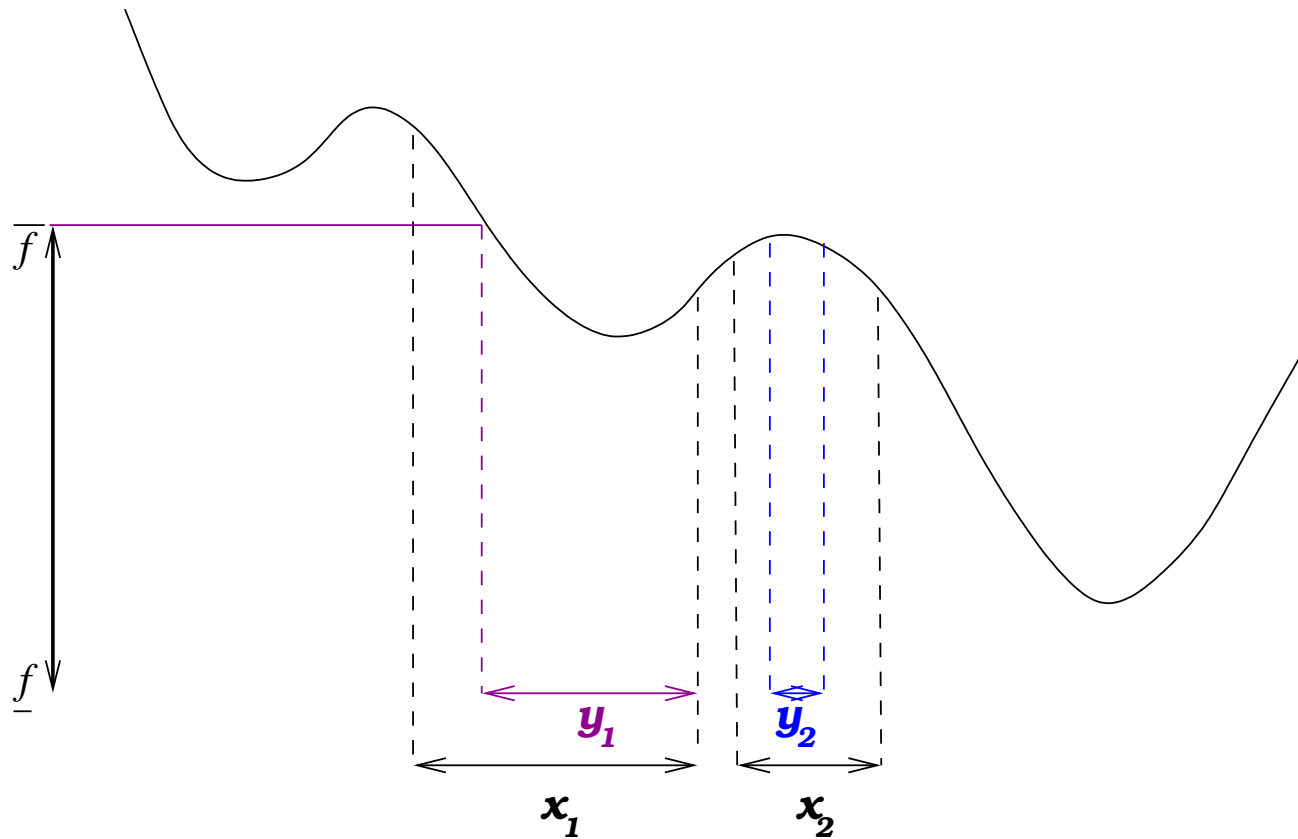
couper  $\mathbf{x}$  en 2 :  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$

examiner  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$

# Optimiser une fn continue : algorithme de Hansen principe des différentes procédures de rejet



# Optimiser une fn continue : algorithme de Hansen principe des différentes procédures de réduction



# Optimiser une fonction continue

## algorithme de Hansen

$\mathcal{L}$  = liste des pavés en attente :=  $\{x_0\}$

**tant que**  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  **faire**

sortir  $x$  de  $\mathcal{L}$

**rejeter**  $x$  ?

oui si  $f(x) > \bar{f}$

oui si  $\text{Grad} f(x) \neq 0$

oui si  $Hf(x)$  à diagonale non  $> 0$

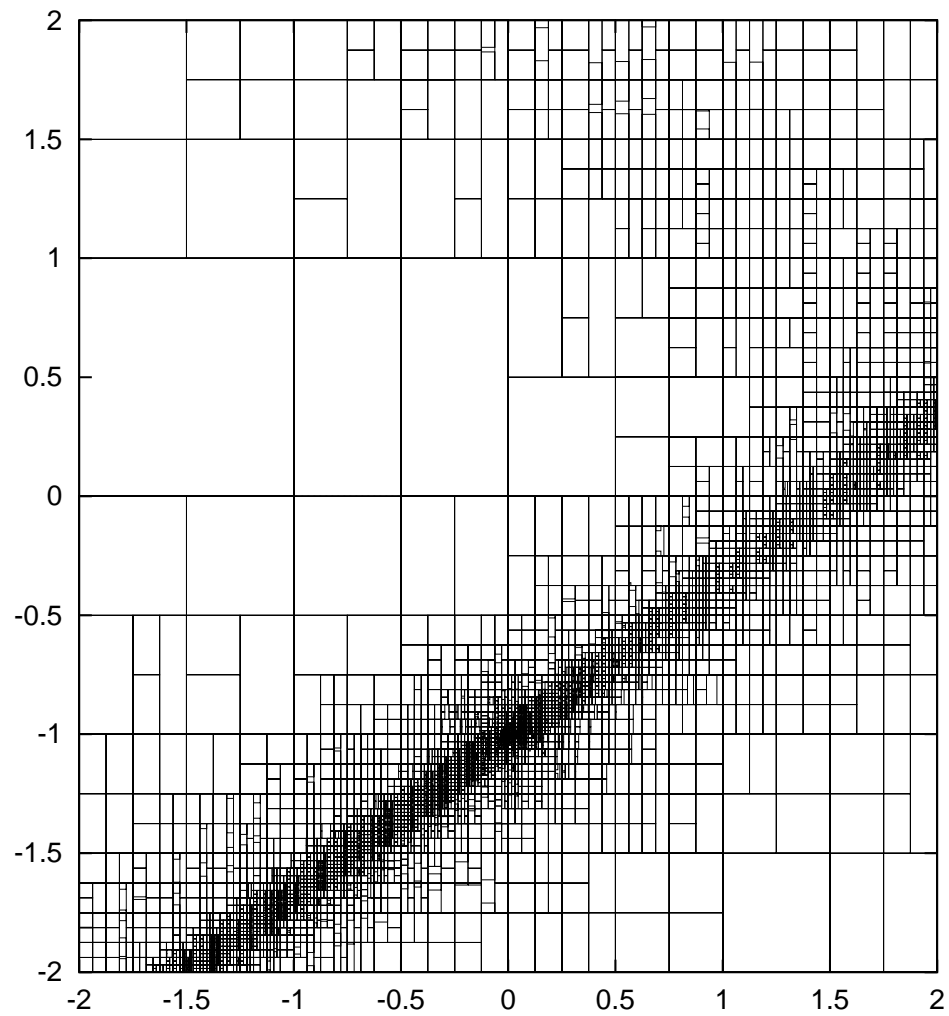
**réduire**  $x$

Newton sur le gradient

résoudre  $y \subset x$  tel que  $f(y) \leq \bar{f}$

**couper**  $y$  en **2** :  $y_1$  et  $y_2$

ranger  $y_1$  et  $y_2$  dans  $\mathcal{L}$



# Optimisation sous contraintes

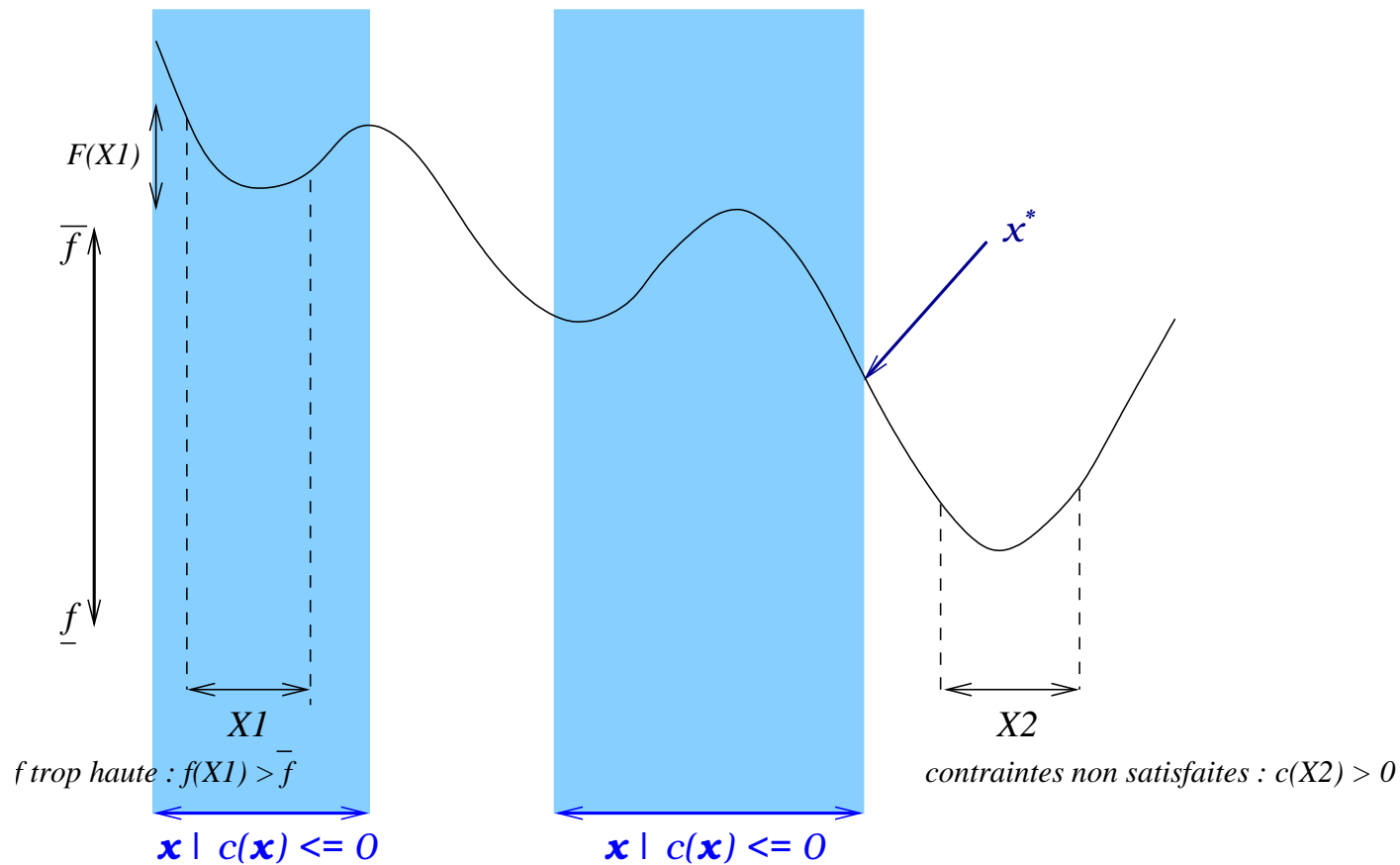
**Problème :**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  
trouver  $x^*$  et  $f^*$  tels que

$$f^* = f(x^*) = \min_{\{x \mid c(x) \leq 0\}} f(x)$$

## Hypothèses :

- recherche dans un pavé  $x_0$
- $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$
- $c$  de classe  $\mathcal{C}^1$

# Optimisation sous contraintes $c(x) \leq 0$ principe des différentes procédures de rejet





# Optimisation sous contraintes $c(x) \leq 0$

$\mathcal{L} := \{x_0\}$

**tant que**  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  **faire**

sortir  $x$  de  $\mathcal{L}$

**rejeter**  $x$  ?

oui si  $f(x) > \bar{f}$

oui si  $\text{Grad}f(x) \neq 0$

oui si  $f$  non convexe sur  $x$

**réduire**  $x$

résoudre  $y \subset x \mid f(y) \leq \bar{f}$

Newton sur le gradient

**couper**  $y$  en 2 :  $y_1$  et  $y_2$

ranger  $y_1$  et  $y_2$  dans  $\mathcal{L}$

$\mathcal{L} := \{x_0\}$

**tant que**  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  **faire**

sortir  $x$  de  $\mathcal{L}$

**rejeter**  $x$  ?

oui si  $f(x) > \bar{f}$

oui si  $c(x) > 0$

**réduire**  $x$

résoudre  $y \subset x$  tel que  $c(y) \leq 0$

Newton sur le Lagrangien

**couper**  $y$  en 2 :  $y_1$  et  $y_2$

ranger  $y_1$  et  $y_2$  dans  $\mathcal{L}$

# Plan du cours

- **définition de l'arithmétique par intervalles**
- **avantages et inconvénients**
- **optimisation globale**
- **Newton**
  - besoin d'une itération spécifique
  - algorithme
  - propriétés : preuve d'existence et unicité
- **résolution de contraintes**

# Résoudre un système non linéaire : Newton

## Pourquoi une itération spécifique ?

Formule ponctuelle :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Équivalent intervalle :

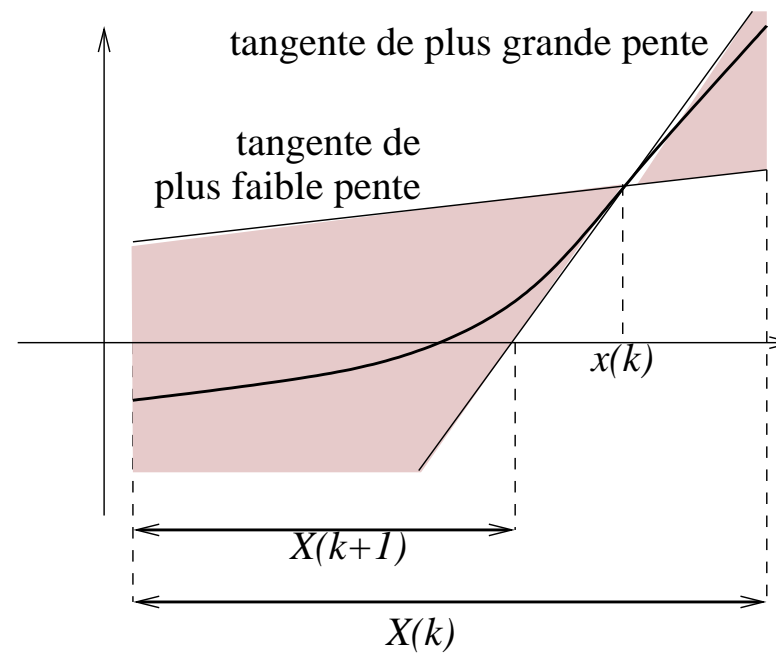
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{f(\mathbf{x}_k)}{f'(\mathbf{x}_k)}$$

$$w(\mathbf{x}_{k+1}) = w(\mathbf{x}_k) + w\left(\frac{f(\mathbf{x}_k)}{f'(\mathbf{x}_k)}\right) > w(\mathbf{x}_k)$$

**divergence !**

# Algorithme de Newton par intervalles principe d'une itération

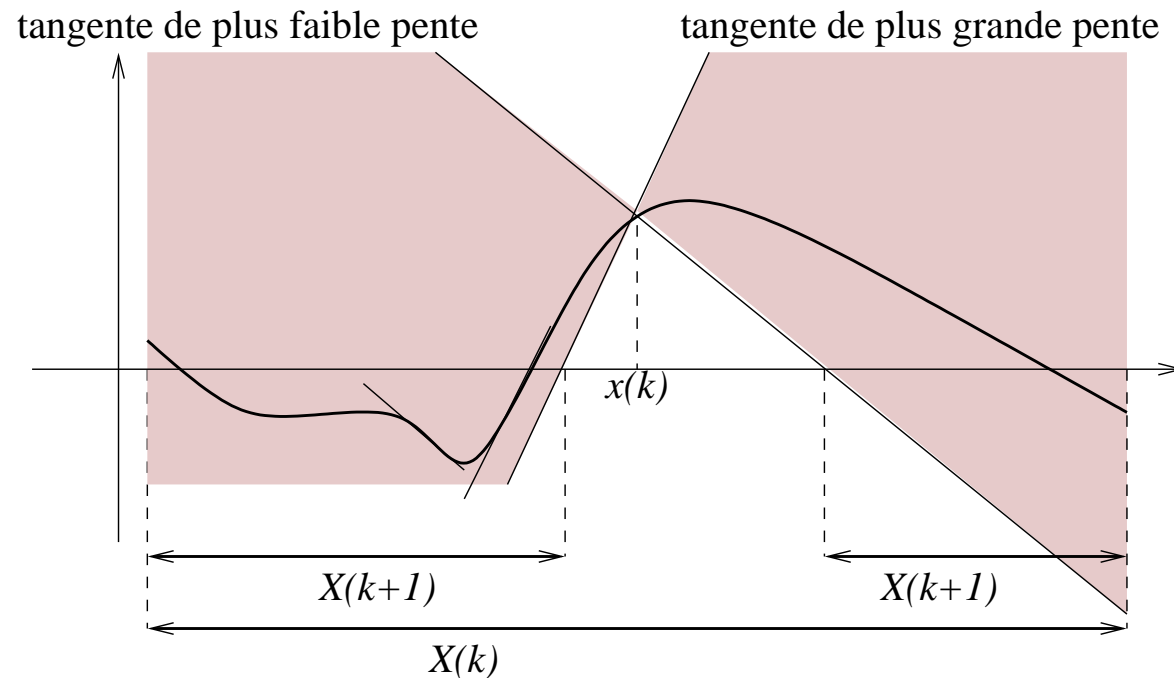
(Hansen & Greenberg 83, Baker Kearfott 95-97, Mayer 95, van Hentenryck et al. 97)



$$\mathbf{x}_1 := \left( x - \frac{F(\{x\})}{F'(\mathbf{x})} \right) \cap x$$

# Algorithme de Newton par intervalles principe d'une itération

(Hansen & Greenberg 83, Baker Kearfott 95-97, Mayer 95, van Hentenryck et al. 97)



$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \left( x - \frac{F(\{x\})}{F'(\mathbf{x})} \right) \cap x$$

# Interval Newton algorithm

**Input:**  $F, F', \mathbf{x}_0$  //  $\mathbf{x}_0$  initial search interval

**Initialization:**  $\mathcal{L} = \{\mathbf{x}_0\}, \alpha = 0.75$  // any value in  $]0.5, 1[$  is suitable

**Loop:** while  $\mathcal{L} \neq \emptyset$

    Suppress  $(\mathbf{x}, \mathcal{L})$

$x := \text{mid}(\mathbf{x})$

$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \left(x - \frac{F(\{x\})}{F'(x)}\right) \cap \mathbf{x}$  //  $\mathbf{x}_1$  and  $\mathbf{x}_2$  can be empty

    if  $w(\mathbf{x}_1) > \alpha w(\mathbf{x})$  or  $w(\mathbf{x}_2) > \alpha w(\mathbf{x})$  then  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \text{bisect}(\mathbf{x})$

    if  $\mathbf{x}_1 \neq \emptyset$  and  $F(\mathbf{x}_1) \ni 0$  then

        if  $w(\mathbf{x}_1)/|\text{mid}(\mathbf{x}_1)| \leq \varepsilon_x$  or  $w(F(\mathbf{x}_1)) \leq \varepsilon_Y$  then Insert  $\mathbf{x}_1$  in Res

        else Insert  $\mathbf{x}_1$  in  $\mathcal{L}$

    same handling of  $\mathbf{x}_2$

**Output:** Res, a list of intervals that may contain the roots.

# Algorithme de Newton par intervalles propriétés

**Existence et unicité d'un zéro sont prouvées :**

s'il n'y a pas de trou et si le nouvel itéré (avant  $\cap$ ) est contenu dans l'intérieur du précédent.

**Existence d'un zéro prouvée :**

- à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires :  
OK si  $f(\inf(\mathbf{x}))$  et  $f(\sup(\mathbf{x}))$  sont de signes opposés. (Théorème de Miranda en dimension supérieure).
- grâce au théorème de Schauder : si le nouvel itéré (avant  $\cap$ ) est contenu dans le précédent.

# Plan du cours

- définition de l'arithmétique par intervalles
- avantages et inconvénients
- optimisation globale
- Newton
- résolution de contraintes

définition

algorithme

cas particulier d'un système linéaire

# Contraintes

Cleary 1987, Benhamou et al. 1999, Jaulin et al. 2001

Problème :

$$\begin{cases} c_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ c_p(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

que l'on réécrit :

$$y_i = x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

$$y_k = y_i \diamond y_j \quad \text{pour } n + 1 \leq k \leq m \text{ et } i, j < k$$

$y_k$  variable intermédiaire

$$\text{ou } y_k = \varphi(y_i) \quad \text{pour } n + 1 \leq k \leq m \text{ et } i < k$$

# Contraintes : algorithme de résolution

**Initialisations :**  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  donnés

$$\mathbf{y}_1 := \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{y}_n := \mathbf{x}_n$$

## Propagation

pour  $k = n + 1$  à  $m$

$$\mathbf{y}_k := \mathbf{y}_i \diamond \mathbf{y}_j \text{ ou } \mathbf{y}_k := \varphi(\mathbf{y}_i)$$

## Rétro-propagation

pour  $k = m$  à  $n$

si  $\mathbf{y}_k$  est défini comme  $\mathbf{y}_i \diamond \mathbf{y}_j$  alors

$$\mathbf{y}_i := (\mathbf{y}_k \diamond^{-r} \mathbf{y}_j) \cap \mathbf{y}_i$$

$$\mathbf{y}_j := (\mathbf{y}_i \diamond^{-l} \mathbf{y}_k) \cap \mathbf{y}_j$$

sinon si  $\mathbf{y}_k$  est défini comme  $\varphi(\mathbf{y}_i)$  alors

$$\mathbf{y}_i := \varphi^{-1}(\mathbf{y}_k) \cap \mathbf{y}_i$$

Algorithme de résolution de contraintes :  $\begin{cases} x_1 x_2^2 - 2x_3 = 0 \\ \cos x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

$$\mathbf{x}_1 = [0, 2\pi/3], \mathbf{x}_2 = [-1, 1], \mathbf{x}_3 = [-1/2, 3]$$

itér. 1 : propagation

$$\mathbf{y}_4 = \mathbf{y}_2^2$$

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_4$$

$$\mathbf{y}_6 = 2\mathbf{y}_3$$

$$\mathbf{y}_7 = \mathbf{y}_5 - \mathbf{y}_6$$

$$\mathbf{y}_8 = \cos \mathbf{y}_1$$

$$\mathbf{y}_9 = \mathbf{y}_8 + \mathbf{y}_3$$

rétro-propagation

$$\mathbf{y}_9 = \mathbf{y}_8 + \mathbf{y}_3$$

$$\mathbf{y}_8 = \cos \mathbf{y}_1$$

$$\mathbf{y}_7 = \mathbf{y}_5 - \mathbf{y}_6$$

$$\mathbf{y}_6 = 2\mathbf{y}_3$$

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_4$$

$$\mathbf{y}_4 = \mathbf{y}_2^2$$

$$\mathbf{y}_1 = [0, 2\pi/3], \mathbf{y}_2 = [-1, 1], \mathbf{y}_3 = [-1/2, 3]$$

$$\mathbf{y}_4 = [0, 1]$$

$$\mathbf{y}_5 = [0, 2\pi/3]$$

$$\mathbf{y}_6 = [-1, 6]$$

$$\mathbf{y}_7 = [-6, 1 + 2\pi/3] \ni 0$$

$$\mathbf{y}_8 = [-1/2, 1]$$

$$\mathbf{y}_9 = [-1, 4] \ni 0$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}_8 = (\mathbf{y}_9 - \mathbf{y}_3) \cap \mathbf{y}_8 = [-1/2, 1/2] \\ \mathbf{y}_3 = (\mathbf{y}_9 - \mathbf{y}_8) \cap \mathbf{y}_3 = [-1/2, 1/2] \end{cases}$$

$$\mathbf{y}_1 = \cos^{-1} \mathbf{y}_8 \cap \mathbf{y}_1 = [\pi/3, 2\pi/3]$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}_5 = (\mathbf{y}_7 + \mathbf{y}_6) \cap \mathbf{y}_5 = [0, 2\pi/3] \\ \mathbf{y}_6 = (\mathbf{y}_5 - \mathbf{y}_7) \cap \mathbf{y}_6 = [0, 2\pi/3] \end{cases}$$

$$\mathbf{y}_3 = (1/2 \mathbf{y}_6) \cap \mathbf{y}_3 = [0, 1/2]$$

$$\mathbf{y}_3 = (1/2 \mathbf{y}_6) \cap \mathbf{y}_3 = [0, 1/2]$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = (\mathbf{y}_5 / \mathbf{y}_4) \cap \mathbf{y}_1 = [\pi/3, 2\pi/3] \\ \mathbf{y}_4 = (\mathbf{y}_5 / \mathbf{y}_1) \cap \mathbf{y}_4 = [0, 1] \end{cases}$$

$$\mathbf{y}_4 = (\mathbf{y}_5 / \mathbf{y}_1) \cap \mathbf{y}_4 = [0, 1]$$

$$\mathbf{y}_2 = \pm \sqrt{\mathbf{y}_4} \cap \mathbf{y}_2 = [-1, 1]$$

**Algorithme de résolution de contraintes :**  $\begin{cases} x_1 x_2^2 - 2x_3 = 0 \\ \cos x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

$$\mathbf{x}_1 = [0, \frac{2\pi}{3}], \mathbf{x}_2 = [-1, 1], \mathbf{x}_3 = [-\frac{1}{2}, 3]$$

$$\mathbf{y}_1 = [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}], \mathbf{y}_2 = [-1, 1], \mathbf{y}_3 = [0, \frac{1}{2}]$$

$$\mathbf{y}_4 = [0, 1], \mathbf{y}_5 = [0, 2\pi/3], \mathbf{y}_6 = [0, 1]$$

$$\mathbf{y}_7 = 0, \mathbf{y}_8 = [-1/2, 1/2], \mathbf{y}_9 = 0$$

## 2. propagation

$$\mathbf{y}_4 = \mathbf{y}_2^2$$

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_4$$

$$\mathbf{y}_6 = 2\mathbf{y}_3$$

$$\mathbf{y}_8 = \cos \mathbf{y}_1$$

$$\mathbf{y}_4 = [0, 1]$$

$$\mathbf{y}_5 = [0, 2\pi/3]$$

$$\mathbf{y}_6 = [0, 1]$$

$$\mathbf{y}_8 = [-1/2, 1/2]$$

## rétro-propagation

$$\mathbf{y}_9 = \mathbf{y}_8 + \mathbf{y}_3$$

$$\mathbf{y}_8 = \cos \mathbf{y}_1$$

$$\mathbf{y}_7 = \mathbf{y}_5 - \mathbf{y}_6$$

$$\mathbf{y}_6 = 2\mathbf{y}_3$$

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_4$$

$$\mathbf{y}_4 = \mathbf{y}_2^2$$

$$\mathbf{x}_1 = [0, \frac{2\pi}{3}], \mathbf{x}_2 = [-1, 1], \mathbf{x}_3 = [-\frac{1}{2}, 3]$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}_8 = (\mathbf{y}_9 - \mathbf{y}_3) \cap \mathbf{y}_8 = [-1/2, 0] \\ \mathbf{y}_3 = (\mathbf{y}_9 - \mathbf{y}_8) \cap \mathbf{y}_3 = [0, 1/2] \end{cases}$$

$$\mathbf{y}_1 = \cos^{-1} \mathbf{y}_8 \cap \mathbf{y}_1 = [\pi/2, 2\pi/3]$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}_5 = (\mathbf{y}_7 + \mathbf{y}_6) \cap \mathbf{y}_5 = [0, 1] \\ \mathbf{y}_6 = (\mathbf{y}_5 - \mathbf{y}_7) \cap \mathbf{y}_6 = [0, 1] \end{cases}$$

$$\mathbf{y}_3 = (1/2 \mathbf{y}_6) \cap \mathbf{y}_3 = [0, 1/2]$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = (\mathbf{y}_5 / \mathbf{y}_4) \cap \mathbf{y}_1 = [\pi/2, 2\pi/3] \\ \mathbf{y}_4 = (\mathbf{y}_5 / \mathbf{y}_1) \cap \mathbf{y}_4 = [0, 2/\pi] \end{cases}$$

$$\mathbf{y}_2 = \pm \sqrt{\mathbf{y}_4} \cap \mathbf{y}_2 = [-\sqrt{2/\pi}, \sqrt{2/\pi}]$$

$$\mathbf{y}_1 = [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}], \mathbf{y}_2 = [-\sqrt{2/\pi}, \sqrt{2/\pi}], \mathbf{y}_3 = [0, \frac{1}{2}]$$

$$\mathbf{y}_1 = [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}], \mathbf{y}_2 = [-\sqrt{2/\pi}, \sqrt{2/\pi}], \mathbf{y}_3 = [0, \frac{1}{2}]$$

$$\mathbf{y}_1 = [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}], \mathbf{y}_2 = [-\sqrt{2/\pi}, \sqrt{2/\pi}], \mathbf{y}_3 = [0, \frac{1}{2}]$$

$$\mathbf{y}_1 = [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}], \mathbf{y}_2 = [-\sqrt{2/\pi}, \sqrt{2/\pi}], \mathbf{y}_3 = [0, \frac{1}{2}]$$

$$\text{Problème } \begin{cases} x_1 x_2^2 - 2x_3 = 0 \\ \cos x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

avec  $\mathbf{x}_1 = [0, \frac{2\pi}{3}]$ ,  $\mathbf{x}_2 = [-1, 1]$ ,  $\mathbf{x}_3 = [-\frac{1}{2}, 3]$ .

Solution optimale obtenue en deux itérations :

$$\mathbf{x}_1 = [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}], \mathbf{x}_2 = [-\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}], \mathbf{x}_3 = [0, \frac{1}{2}].$$

# Résolution de systèmes linéaires : Hansen-Sengupta

**Problème :** résoudre  $Ax = b$  qui s'écrit aussi :

$$A_{i,1}x_1 + \dots + A_{i,i}x_i + \dots + A_{i,n}x_n = b_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

On cherche  $\text{Hull}(\Sigma_{\exists\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{b})) = \text{Hull}(\{x : \exists A \in \mathbf{A}, \exists b \in \mathbf{b}, Ax = b\})$ .

**Pré-traitement :** multiplier le système par  $mid(\mathbf{A})^{-1}$ .

Nouveau système =  $mid(\mathbf{A})^{-1}Ax = b$ . Espoir : itération contractante.

**Algorithme :** appliquer l'itération de Gauss-Seidel

tant que convergence non atteinte faire

pour  $i = 1$  à  $n$  faire

$$x_i := \left( b_i - \sum_{j \neq i} A_{i,j}x_j \right) / A_{i,i}$$

# Conclusion

## Arithmétique par intervalles

- permet de résoudre des problèmes insolubles par d'autres techniques
- permet de se rapprocher du calcul ensembliste
- rend effectifs des théorèmes qui n'en avaient pas l'air (Schauder)
- permet de rechercher tous les zéros d'une fonction ou ses extrema globaux
- renvoie des résultats trop larges
- est plus coûteuse que l'arithmétique flottante  $\Rightarrow$  résolution de problèmes plus petits

# Conclusion

## Morale

- oublier ses préjugés :
  - ne pas utiliser aveuglément des algorithmes qui ont bonne presse
  - considérer des algorithmes qui ont mauvaise presse (Gauss-Seidel)
- préférer des itérations contractantes

## Credo personnel

Quand on a une itération contractante : bisection (mais complexité exponentielle) ou mieux, on peut atteindre une précision arbitraire. . . pourvu que l'arithmétique sous-jacente le permette  
⇒ arithmétique par intervalles en précision arbitraire : bibliothèque MPFI et algorithmes (Newton, systèmes linéaires. . . )