Algorithmique numérique et fiabilité des calculs en arithmétique flottante
Introduction à l'arithmétique par intervalles

Cours M2 - ISFA

Nathalie Revol (INRIA)

25 novembre 2013

Compter sans se tromper : arithmétique par intervalles

Principe : nombres remplacés par des intervalles.

π remplacé par $[3.14159, 3.14160]$ ou $[3.14, 3.15]$ ou $[3, 4]$.

Théorème fondamental (tu ne mentiras point) : l'intervalle contient la valeur exacte.

Compter sans se tromper : arithmétique par intervalles

Principe : nombres remplacés par des intervalles.
π remplacé par $[3.14159, 3.14160]$ ou $[3.14, 3.15]$ ou $[3, 4]$.
Théorème fondamental (tu ne mentiras point) : l'intervalle contient la valeur exacte.

Exemple

Contenu de mon porte-monnaie : entre 10 Euros et 20 Euros,
$\in [10, 20]$ Euros.

Compter sans se tromper : arithmétique par intervalles

Principe : nombres remplacés par des intervalles.
π remplacé par $[3.14159, 3.14160]$ ou $[3.14, 3.15]$ ou $[3, 4]$.
Théorème fondamental (tu ne mentiras point) : l'intervalle contient la valeur exacte.

Exemple

Contenu de mon porte-monnaie : entre 10 Euros et 20 Euros,
$\in [10, 20]$ Euros.
Contenu de votre porte-monnaie : entre 5 Euros et 10 Euros,
$\in [5, 10]$ Euros.

Compter sans se tromper : arithmétique par intervalles

Principe : nombres remplacés par des intervalles.
π remplacé par $[3.14159, 3.14160]$ ou $[3.14, 3.15]$ ou $[3, 4]$.
Théorème fondamental (tu ne mentiras point) : l'intervalle contient la valeur exacte.

Exemple

Contenu de mon porte-monnaie : entre 10 Euros et 20 Euros,
$\in [10, 20]$ Euros.
Contenu de votre porte-monnaie : entre 5 Euros et 10 Euros,
$\in [5, 10]$ Euros.

Ensemble, nous avons entre 15 et 30 Euros,
$[10, 20] + [5, 10] = [15, 30]$ Euros.

Arithmétique par intervalles : premier problème

Contenu de mon porte-monnaie : entre 10 Euros et 20 Euros,
$\in [10, 20]$ Euros.

Arithmétique par intervalles : premier problème

Contenu de mon porte-monnaie : entre 10 Euros et 20 Euros,
$\in [10, 20]$ Euros.

Je vais voir vos grands-parents, qui me donnent une enveloppe pour vous, contenant entre 10 et 20 Euros.
Je range l'argent dans mon porte-monnaie, il contient maintenant entre 20 et 40 Euros : $[10, 20] + [10, 20] = [20, 40]$ Euros.

Arithmétique par intervalles : premier problème

Contenu de mon porte-monnaie : entre 10 Euros et 20 Euros,
$\in [10, 20]$ Euros.

Je vais voir vos grands-parents, qui me donnent une enveloppe pour vous, contenant entre 10 et 20 Euros.
Je range l'argent dans mon porte-monnaie, il contient maintenant entre 20 et 40 Euros : $[10, 20] + [10, 20] = [20, 40]$ Euros.

Je vous donne votre argent, entre 10 et 20 Euros.
Mon porte-monnaie contient $[20, 40] - [10, 20] = [0, 30]$ Euros.

Arithmétique par intervalles : premier problème

Contenu de mon porte-monnaie : entre 10 Euros et 20 Euros,
$\in [10, 20]$ Euros.

Je vais voir vos grands-parents, qui me donnent une enveloppe pour vous, contenant entre 10 et 20 Euros.
Je range l'argent dans mon porte-monnaie, il contient maintenant entre 20 et 40 Euros : $[10, 20] + [10, 20] = [20, 40]$ Euros.

Je vous donne votre argent, entre 10 et 20 Euros.
Mon porte-monnaie contient $[20, 40] - [10, 20] = [0, 30]$ Euros.

Autrement dit,

$$\text{porte-monnaie} + \text{enveloppe} - \text{enveloppe} \neq \text{porte-monnaie}.$$

Arithmétique par intervalles : deuxième problème

Rappel : un nombre au carré est toujours positif $\Rightarrow$ on ne peut définir la racine carrée d'un nombre que s'il est positif.

Arithmétique par intervalles : deuxième problème

Rappel : un nombre au carré est toujours positif $\Rightarrow$ on ne peut définir la racine carrée d'un nombre que s'il est positif.

Comment définir $\sqrt{[-1,2]}$?

Arithmétique par intervalles : deuxième problème

Rappel : un nombre au carré est toujours positif $\Rightarrow$ on ne peut définir la racine carrée d'un nombre que s'il est positif.

Comment définir $\sqrt{[-1,2]}$?

Par convention, $\sqrt{[-1,2]} = \sqrt{[0,2]} = [0,\sqrt{2}]$.
Il faut signaler qu'il y a eu un problème :

Arithmétique par intervalles : deuxième problème

Rappel : un nombre au carré est toujours positif $\Rightarrow$ on ne peut définir la racine carrée d'un nombre que s'il est positif.

Comment définir $\sqrt{[-1,2]}$?

Par convention, $\sqrt{[-1,2]} = \sqrt{[0,2]} = [0,\sqrt{2}]$.
Il faut signaler qu'il y a eu un problème :

- comment ? en " décorant " les intervalles 

Arithmétique par intervalles : deuxième problème

Rappel : un nombre au carré est toujours positif $\Rightarrow$ on ne peut définir la racine carrée d'un nombre que s'il est positif.

Comment définir $\sqrt{[-1,2]}$?

Par convention, $\sqrt{[-1,2]} = \sqrt{[0,2]} = [0,\sqrt{2}]$.
Il faut signaler qu'il y a eu un problème :

- comment ? en " décorant " les intervalles 
- comment faire pour ne pas pénaliser les performances des calculs sur ordinateur : temps de calcul, utilisation de la mémoire ?

Arithmétique par intervalles : troisième problème

Pour une opération entre des intervalles, il faut effectuer 2 (ou 4 ou . . .) opérations “ habituelles ”.

Pour des raisons liées à l'architecture des ordinateurs, il faut 100 fois plus de temps (ou pire) pour exécuter une série de calculs sur des intervalles qu'avec des nombres “ habituels ”.

Comment faire pour que les calculs soient moins lents ?
S'ils sont 10 à 15 fois moins lents, on est déjà satisfait.

Agenda

Agenda

Definitions : functions

Definition :

an interval extension **f** of a function f satisfies

$$\forall \mathbf{x},\ f(\mathbf{x}) \subset \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \text{and}\ \forall x,\ f(\{x\}) = \mathbf{f}(\{x\}).$$

Elementary functions : again, use the monotony.

$$\begin{array}{lcl} \exp \mathbf{x} & = & [\exp \underline{x}, \exp \overline{x}] \\ \log \mathbf{x} & = & [\log \underline{x}, \log \overline{x}] \ \text{if}\ \underline{x} \geq 0, [-\infty, \log \overline{x}] \ \text{if}\ \overline{x} > 0 \\ \sin[\pi/6, 2\pi/3] & = & [1/2, 1] \\ \ldots & & \end{array}$$

Agenda

Definitions : function extension

Example : $f(x) = x^2 - x + 1$ with $x \in [-2, 1]$.
$[-2, 1]^2 - [-2, 1] + 1 = [0, 4] + [-1, 2] + 1 = [0, 7]$.

Definitions : function extension

Example : $f(x) = x^2 - x + 1$ with $x \in [-2, 1]$.
$[-2,1]^2 - [-2,1] + 1 = [0,4] + [-1,2] + 1 = [0,7]$.
Since $x^2 - x + 1 = x(x-1) + 1$, we get $[-2,1] \cdot ([-2,1] - 1) + 1 = [-2,1] \cdot [-3,0] + 1 = [-3,6] + 1 = [-2,7]$.

Definitions : function extension

Example : $f(x) = x^2 - x + 1$ with $x \in [-2, 1]$.
$[-2,1]^2 - [-2,1] + 1 = [0,4] + [-1,2] + 1 = [0,7]$.
Since $x^2 - x + 1 = x(x-1) + 1$, we get $[-2,1] \cdot ([-2,1] - 1) + 1 = [-2,1] \cdot [-3,0] + 1 = [-3,6] + 1 = [-2,7]$.
Since $x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4$, we get $([-2,1] - 1/2)^2 + 3/4 = [-5/2, 1/2]^2 + 3/4 = [0, 25/4] + 3/4 = [3/4, 7] = f([-2,1])$.

Problem with this definition : infinitely many interval extensions, syntactic use (instead of semantic).

How to choose the best extension ? How to choose a good one ?

Definitions : function extension

Mean value theorem of order 1 (Taylor expansion of order 1) :

$\forall x, \forall y, \exists \xi_{x,y} \in (x, y) \ : \ f(y) = f(x) + (y - x) \cdot f'(\xi_{x,y})$

Interval interpretation :

$\forall y \in \mathbf{x}, \forall \tilde{x} \in \mathbf{x}, \ f(y) \in f(\tilde{x}) + (y - \tilde{x}) \cdot \mathbf{f'}(\mathbf{x})$

$\Rightarrow f(\mathbf{x}) \subset f(\tilde{x}) + (\mathbf{x} - \tilde{x}) \cdot \mathbf{f'}(\mathbf{x})$

Definitions : function extension

Mean value theorem of order 1 (Taylor expansion of order 1) :

$\forall x, \forall y, \exists \xi_{x,y} \in (x,y) \ : \ f(y) = f(x) + (y-x) \cdot f'(\xi_{x,y})$

Interval interpretation :

$\forall y \in \mathbf{x}, \forall \tilde{x} \in \mathbf{x}, \ f(y) \in f(\tilde{x}) + (y - \tilde{x}) \cdot \mathbf{f'}(\mathbf{x})$

$\Rightarrow f(\mathbf{x}) \subset f(\tilde{x}) + (\mathbf{x} - \tilde{x}) \cdot \mathbf{f'}(\mathbf{x})$

Mean value theorem of order 2 (Taylor expansion of order 2) :

$\forall x, \forall y, \exists \xi_{x,y} \in (x,y) : f(y) = f(x) + (y-x) \cdot f'(x) + \frac{(y-x)^2}{2} \cdot f''(\xi_{x,y})$

Interval interpretation :

$\forall y \in \mathbf{x}, \forall \tilde{x} \in \mathbf{x}, \ f(y) \in f(\tilde{x}) + (y - \tilde{x}) \cdot f'(\tilde{x}) + \frac{(y-\tilde{x})^2}{2} \cdot \mathbf{f''}(\mathbf{x})$

$\Rightarrow f(\mathbf{x}) \subset f(\tilde{x}) + (\mathbf{x} - \tilde{x}) \cdot f'(\tilde{x}) + \frac{(\mathbf{x}-\tilde{x})^2}{2} \cdot \mathbf{f''}(\mathbf{x})$

Definitions : function extension

No need to go further :

- it is difficult to compute (automatically) the derivatives of higher order,
  especially for multivariate functions ;
- there is no (theoretical) gain in quality.

Theorem :

- for the natural extension $\mathbf{f}$ of f, it holds
  $d(f(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq \mathcal{O}(w(\mathbf{x}))$
- for the first order Taylor extension $\mathbf{f_{T_1}}$ of f, it holds
  $d(f(\mathbf{x}), \mathbf{f_{T_1}}(\mathbf{x})) \leq \mathcal{O}(w(\mathbf{x})^2)$
- getting an order higher than 3 is impossible without the squaring operation, is difficult even with it. . .

Agenda

Definitions : intervals, vectors, matrices

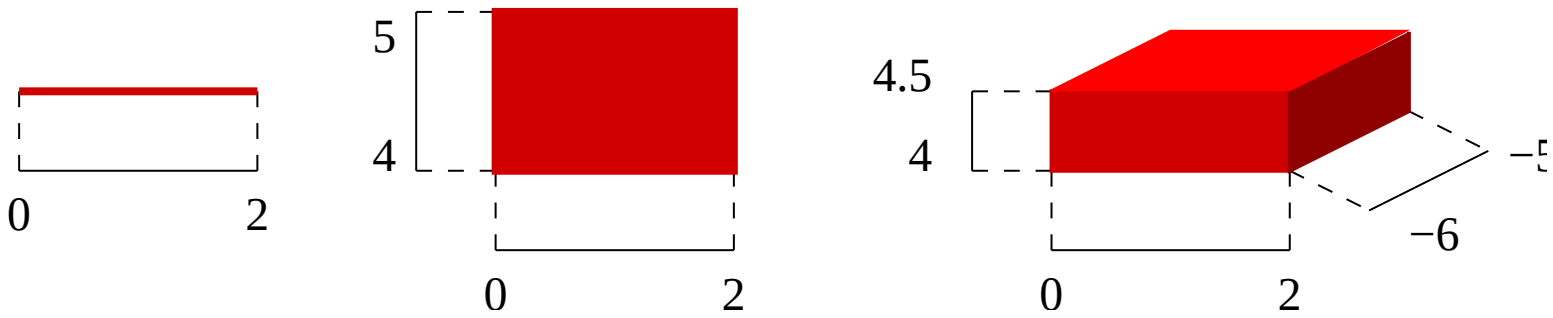
Objects :

- intervals of real numbers = closed connected sets of **R**
  - interval for π : $[3.14159, 3.14160]$
  - data d measured with an absolute error less than $\pm\varepsilon$: $[d-\varepsilon, d+\varepsilon]$
- interval vector : components = intervals ; also called *box*

$[0\ ;\ 2]$

$\begin{pmatrix} [0\ ;\ 2] \\ [4\ ;\ 5] \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} [0;2] \\ [4\ ;\ 4.5] \\ [-6\ ;\ -5] \end{pmatrix}$



- interval matrix : components = intervals.

Agenda

Agenda

Cons : overestimation (1/2)

The result encloses the true result, but it is too large :
overestimation phenomenon.
Two main sources : variable dependency and wrapping effect.

(Loss of) Variable dependency :

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} = \{x - y \ : \ x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{x}\} \neq \{x - x \ : \ x \in \mathbf{x}\} = \{0\}.$$

Cons : overestimation (2/2)

Wrapping effect

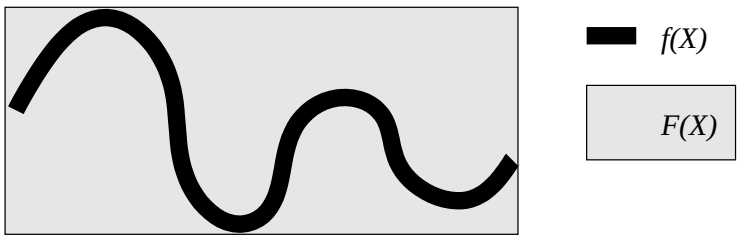
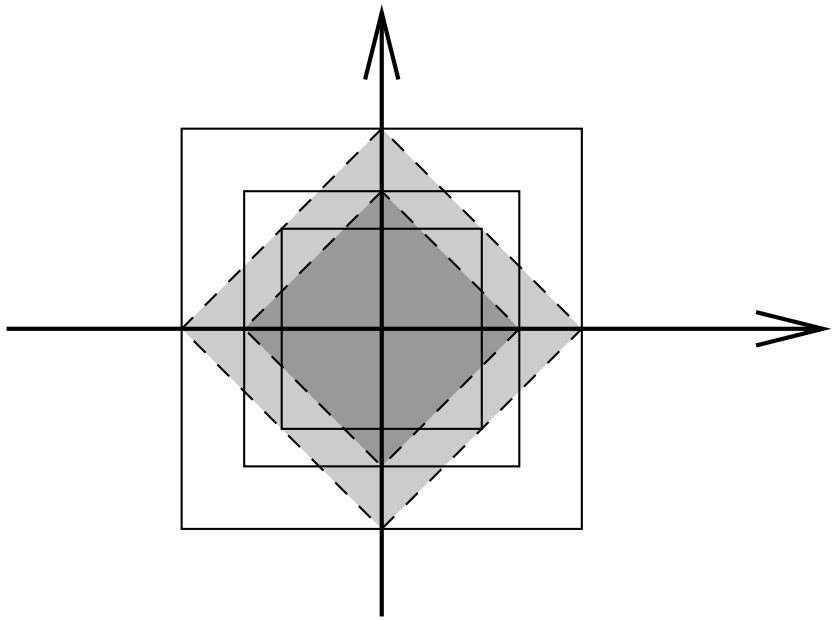


image of $f(\mathbf{x})$
with $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$



2 successive rotations of $\pi/4$
of the little central square

Cons : Complexity : almost every problem is NP-hard

Gaganov 1982, Rohn 1994 ff, Kreinovich...

- evaluate a function on a box (cartesian product of intervals)
- evaluate a function on a box up to ε
- solve a linear system
- solve a linear system up to $1/4n^4$ ($n =$ dim. of the system)
- determine if the solution of a linear system is bounded
- compute the matrix norm $\|\mathbf{A}\|_{\infty,1}$
- determine if an interval matrix (= a matrix with interval coefficients) is regular, i.e. if every possible punctual matrix in it is regular
- ...

Cons : Complexity : Gaganov 1982

evaluation of a multivariate polynomial with rational coeff. on a box is NP-hard

Idea : reduce polynomially CNF-3 to this problem.

On n boolean variables $q_1, \cdots, q_n$, a formula f in CNF-3 is defined by

$$f = \bigwedge_{i=1}^{m} f_i \text{ with } f_i = \bigvee_{j=1}^{1,2 or 3} r_{i,j}$$

with $r_{i,j} = q_{k_{i,j}}$ or $r_{i,j} = \neg q_{k_{i,j}}$.

Cons : Complexity : Gaganov 1982

evaluation of a multivariate polynomial with rational coeff. on a box is NP-hard

To each boolean variable q_i, let us associate a real variable $x_i \in [0,1]$.
Meaning : $x_i = 0$ if $q_i = F$ and $x_i = 1$ if $q_i = T$.

Goal : get a polynomial which takes only values in $[0,1]$ i.e. allow only product of terms or of $(1-$ term$)$.

Cons : Complexity : Gaganov 1982

evaluation of a multivariate polynomial with rational coeff. on a box is NP-hard

To each boolean variable q_i, let us associate a real variable $x_i \in [0, 1]$.
Meaning : $x_i = 0$ if $q_i = F$ and $x_i = 1$ if $q_i = T$.

Goal : get a polynomial which takes only values in $[0, 1]$
i.e. allow only product of terms or of $(1-$ term$)$.
A product corresponds to a conjunction and $1 - x$ to a negation

Cons : Complexity : Gaganov 1982

evaluation of a multivariate polynomial with rational coeff. on a box is NP-hard

To each boolean variable q_i, let us associate a real variable $x_i \in [0,1]$.
Meaning : $x_i = 0$ if $q_i = F$ and $x_i = 1$ if $q_i = T$.

Goal : get a polynomial which takes only values in $[0,1]$
i.e. allow only product of terms or of $(1-$ term$)$.
A product corresponds to a conjunction and $1 - x$ to a negation
$\Rightarrow$ express f and the f_i using conjonctions and negations

Cons : Complexity : Gaganov 1982

evaluation of a multivariate polynomial with rational coeff. on a box is NP-hard

To each boolean variable q_i, let us associate a real variable $x_i \in [0,1]$.
Meaning : $x_i = 0$ if $q_i = F$ and $x_i = 1$ if $q_i = T$.

Goal : get a polynomial which takes only values in $[0,1]$
i.e. allow only product of terms or of $(1-$ term$)$.
A product corresponds to a conjunction and $1-x$ to a negation
$\Rightarrow$ express f and the f_i using conjonctions and negations
$\Rightarrow$ express the f_i as $\neg \bigwedge_{j=1}^{1,2or3} \neg r_{i,j}$.

Cons : Complexity : Gaganov 1982

evaluation of a multivariate polynomial with rational coeff. on a box is NP-hard

More precisely :

1. to each $r_{i,j}$ let us associate a polynomial $y_{i,j}$ (corresponding to the negation of $r_{i,j}$) defined by

$$\begin{array}{lllllll} r_{i,j} & = & q_{k_{i,j}} & \rightarrow & y_{i,j}(x) & = & 1 - x_{k_{i,j}} \\ r_{i,j} & = & \neg q_{k_{i,j}} & \rightarrow & y_{i,j}(x) & = & x_{k_{i,j}} \end{array}$$

Cons : Complexity : Gaganov 1982

evaluation of a multivariate polynomial with rational coeff. on a box is NP-hard

More precisely :

1. to each $r_{i,j}$ let us associate a polynomial $y_{i,j}$ (corresponding to the negation of $r_{i,j}$) defined by
$$\begin{array}{lllllll} r_{i,j} & = & q_{k_{i,j}} & \rightarrow & y_{i,j}(x) & = & 1 - x_{k_{i,j}} \\ r_{i,j} & = & \neg q_{k_{i,j}} & \rightarrow & y_{i,j}(x) & = & x_{k_{i,j}} \end{array}$$
2. to each f_i, let us associate a polynomial p_i (corresponding to the negation of f_i) defined by
$f_i = \bigvee r_{i,j} = \neg \bigwedge \neg r_{i,j} \rightarrow p_i(x) = \prod y_{i,j}(x).$

Cons : Complexity : Gaganov 1982

evaluation of a multivariate polynomial with rational coeff. on a box is NP-hard

More precisely :

1. to each $r_{i,j}$ let us associate a polynomial $y_{i,j}$ (corresponding to the negation of $r_{i,j}$) defined by
$$\begin{array}{lllll} r_{i,j} & = & q_{k_{i,j}} & \rightarrow & y_{i,j}(x) = 1 - x_{k_{i,j}} \\ r_{i,j} & = & \neg q_{k_{i,j}} & \rightarrow & y_{i,j}(x) = x_{k_{i,j}} \end{array}$$
2. to each f_i, let us associate a polynomial p_i (corresponding to the negation of f_i) defined by
$f_i = \bigvee r_{i,j} = \neg \bigwedge \neg r_{i,j} \rightarrow p_i(x) = \prod y_{i,j}(x).$
3. to f, let us associate the polynomial p defined by
$f = \bigwedge_{i=1}^{m} f_i \rightarrow p(x) = \prod_{i=1}^{m}(1 - p_i(x)).$

Cons : Complexity : Gaganov 1982

evaluation of a multivariate polynomial with rational coeff. on a box is NP-hard

Lemma :

1. $\forall x \in [0,1]$, $p(x) \in [0,1]$.
2. if α is a boolean vector and β is the associated $0-1$ vector, then
$$\begin{array}{rcrcrcl} f(\alpha) & = & T & \Rightarrow & p(\beta) & = & 1 \\ f(\alpha) & = & F & \Rightarrow & p(\beta) & = & 0. \end{array}$$
3. if f is not feasible, then $\forall x \in [0,1]^n$, $p(x) \leq 7/8$.

Cons : Complexity : Gaganov 1982

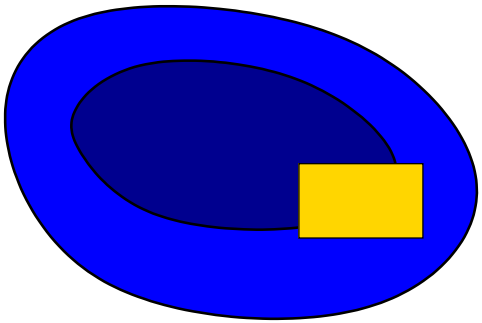
Proof of (3) : (proving (1) and (2) is easy).
$\forall x \in [0,1]^n$, let us consider β the 0-1 vector obtained by rounding x to the nearest.
Since f is not feasible, $p(\beta) = 0$.
Since $p(x) = \prod_{i=1}^{m}(1 - p_i(x))$, $\exists i_0$ such that $1 - p_{i_0}(\beta) = 0$.
One can prove that $p_{i_0}(x) \geq 1/8$, using the fact that it is the product of at most three terms, each of them $\geq 1/2$, using the fact that β is the rounding to nearest of x. Thus $1 - p_{i_0}(x) \leq 7/8$.
The remaining factors $1 - p_j(x)$ are less or equal to 1.
Thus $p(x) = \prod_{i=1}^{m}(1 - p_i(x)) \leq 7/8$.

Consequence : since checking the feasibility of a CNF-3 formula is NP-hard, evaluating a multivariate polynomial (up to a small ε) is NP-hard.

Agenda

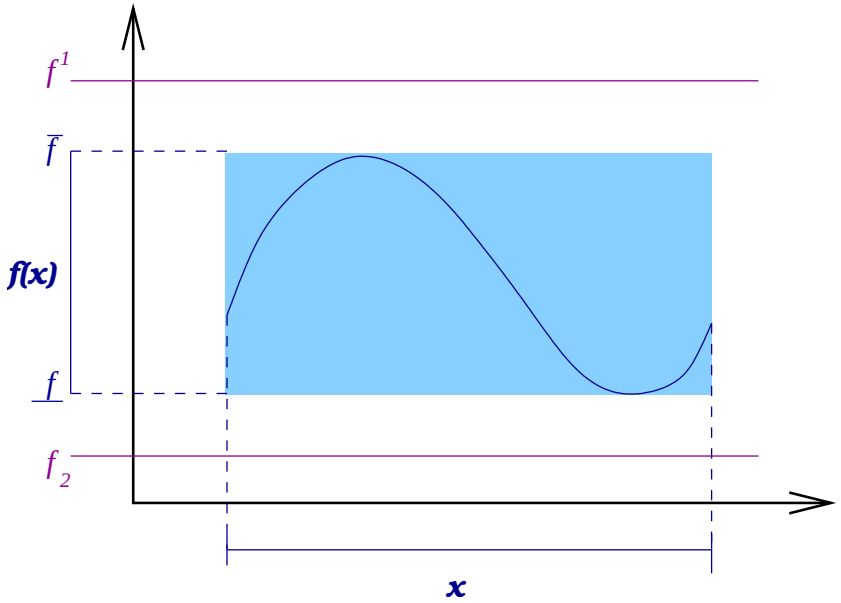
Pros : set computing

Behaviour safe ?
controllable ? dangerous ?



always controllable.

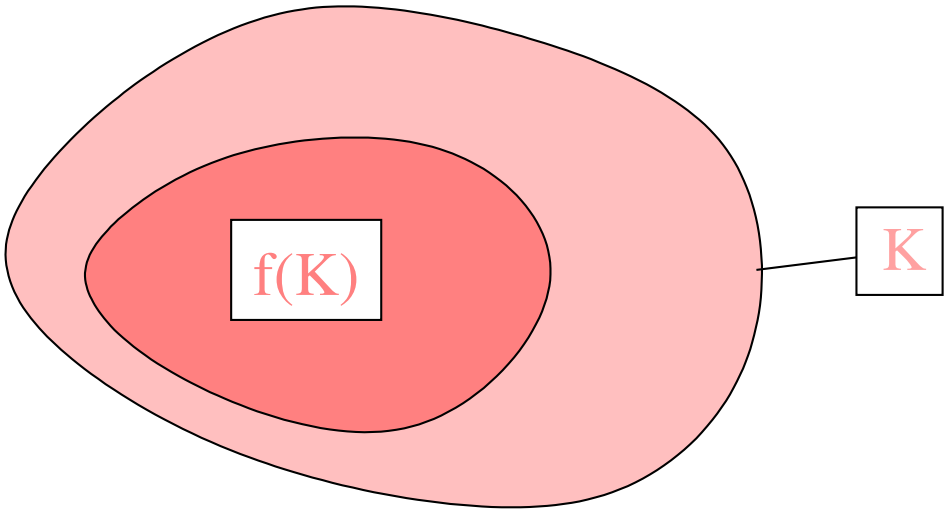
On **x**, are the extrema of the function f $> f^1$, $< f_2$?



No if $f(\mathbf{x}) = [\underline{f}, \overline{f}] \subset [f_2, f^1]$.

Pros : Brouwer-Schauder theorem

A function f which is continuous on the unit ball B and which satisfies $f(B) \subset B$ has a fixed point on B.
Furthermore, if $f(B) \subset \text{int}B$ (and some other conditions) then f has a unique fixed point on B.



The theorem remains valid if B is replaced by a compact K and in particular an interval.

Agenda

Affine arithmetic

Comba, Stolfi and Figueiredo (1993, 2004)

Definition : each input or computed quantity x is represented by
$x = x_0 + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_n\varepsilon_n$
where x_0, α_1, $\ldots \alpha_n$ are known real / floating-point numbers,
and ε_1, ε_2 $\ldots \varepsilon_n$ are symbolic variables $\in [-1, +1]$.
Example : $x \in [3, 7]$ is represented by $x = 5 + 2\varepsilon$.

Operations :
$(x + \sum_k \alpha_k\varepsilon_k) + (y + \sum_k \beta_k\varepsilon_k) = (x + y) + \sum_k(\alpha_k + \beta_k)\varepsilon_k$.
$(x+\sum_k \alpha_k\varepsilon_k)\times(y+\sum_k \beta_k\varepsilon_k) = (x\times y)+\sum_k(x\beta_k+y\alpha_k)\varepsilon_k+\gamma_I\varepsilon_I$
with ε_I a new variable.

Roundoff errors : compute δ_I an upper bound of all roundoff errors and add it to γ_I.

Taylor models

Berz, Hoefkens and Makino 1998, Nedialkov, Neher

Principle : represent a function $f(x)$ for $x \in [-1, 1]$ by a polynomial part $p(x)$ and a reminder part (a big bin) I such that $\forall x \in [-1, 1],\ f(x) \in p(x) + I$.

Operations :

- affine operations : straigthforward ;
- non-affine operations : enclose the nonlinear terms and add this enclosure to the reminder.

Roundoff errors : determine an upper bound b on the roundoff errors and add $[-b, b]$ to the reminder.

Agenda

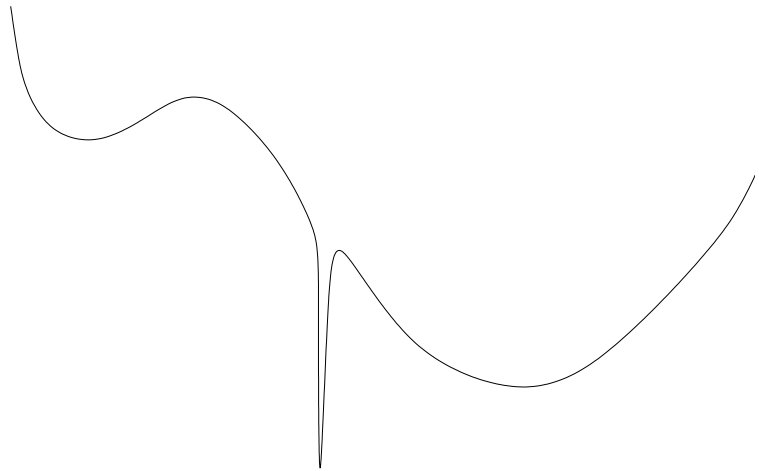
Algorithm : optimize a continuous function

Problem : $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, determine x^* and f^* that verify

$$f^* = f(x^*) = \min_x f(x)$$

Assumptions :

- search within a box $\mathbf{x_0}$
- $x^* \in$ in the interior of $(\mathbf{x_0})$, not at the boundary
- f continuous enough : $\mathcal{C}^2$



Algorithm : optimize a continuous function

(Ratschek and Rokne 1988, Hansen 1992, Kearfott 1996...)

Goal : find the minimum of f, continuous function on a box $\mathbf{x}_0$.

$\mathbf{x}_0$ current box

$\bar{f}$ current upper bound of f^*

while there is a box in the waiting list

if $f(\mathbf{x}) > \bar{f}$ then

reject $\mathbf{x}$

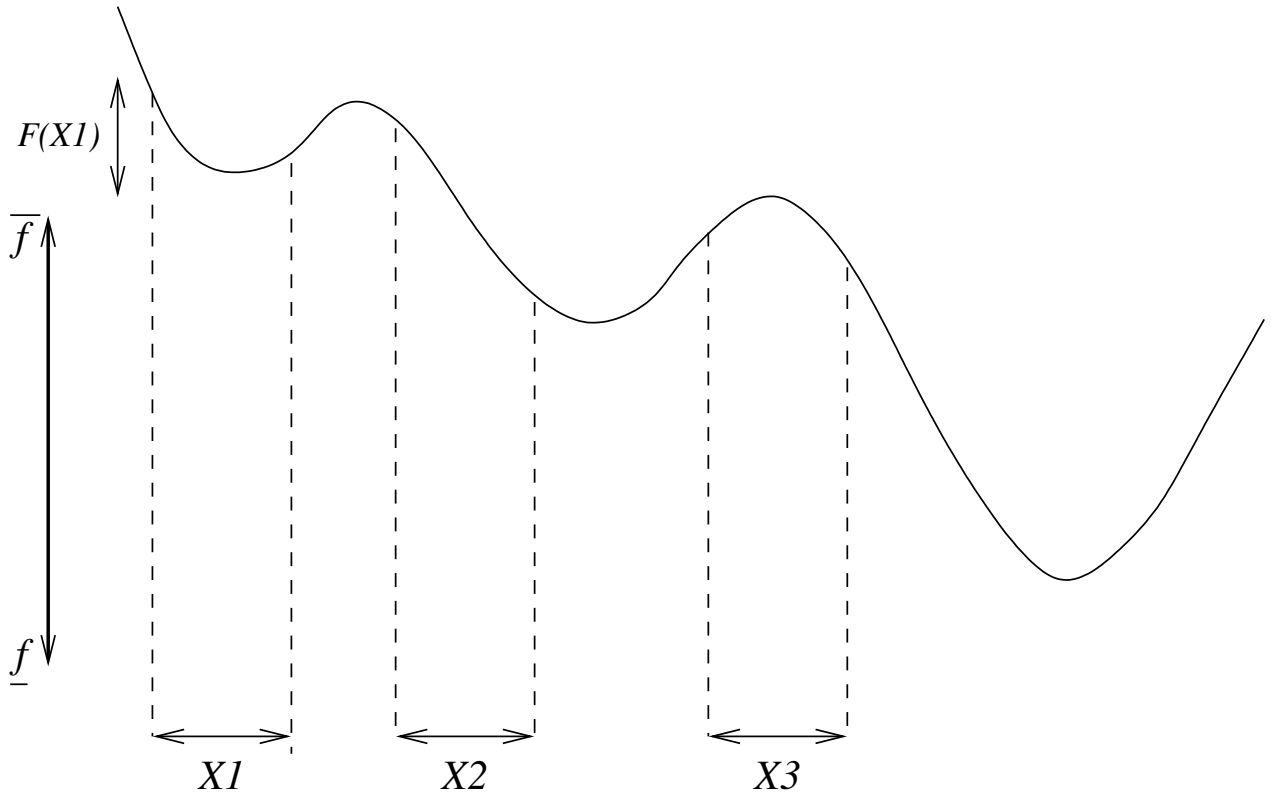
otherwise

update $\bar{f}$: if $f(mid(\mathbf{x})) < \bar{f}$ then $\bar{f} = f(mid(\mathbf{x}))$

bisect $\mathbf{x}$ into $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$

examine $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$

Algorithm : optimize a continuous function the rejection procedure



f trop haute : $F(X1) > \overline{f}$

f non convexe sur X3

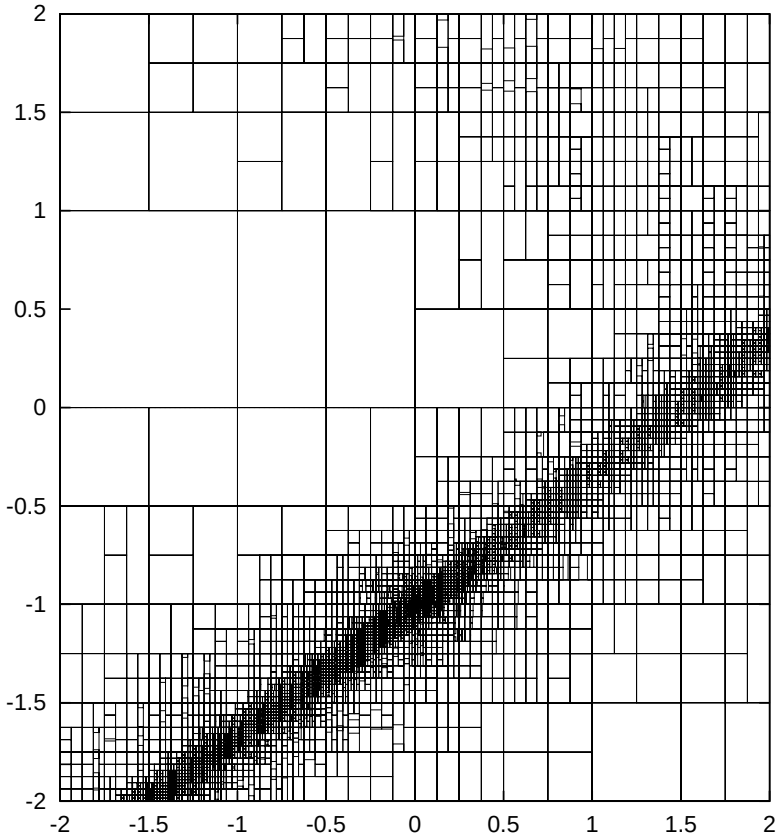
0 n'est pas dans G(X2)

Algorithm : optimize a continuous function

Hansen algorithm Hansen 1992

$\mathcal{L}$ = list of not yet examined boxes := $\{\mathbf{x}_0\}$
while $\mathcal{L} \neq \emptyset$ **loop**
    remove $\mathbf{x}$ from $\mathcal{L}$
    reject $\mathbf{x}$ **?**
        yes if $f(\mathbf{x}) > \bar{f}$
        yes if $\mathrm{Grad} f(\mathbf{x}) \not\ni 0$
        yes if $Hf(\mathbf{x})$ has its diagonal non > 0
    reduce $\mathbf{x}$
        Newton applied to the gradient
        solve $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$ such that $f(\mathbf{y}) \leq \bar{f}$
    bisect $\mathbf{y}$: insert the resulting $\mathbf{y}_1$ and $\mathbf{y}_2$ in $\mathcal{L}$

Example of the splitting of the box $[-2,2]^2$



Agenda

Reference for this section

W. Kahan : *How Futile is Mindless Assessment of Roundoff in Floating-Point Computation ?*, 2006.

Agenda

Five approaches detailed in Kahan's paper

1. Repeat the computation in arithmetics of increasing precision, increase it until as many as desired of the results' digits agree.
2. Repeat the computation in arithmetic of the same precision but rounded differently, say *Down*, and then *Up*, and maybe *Towards Zero* too, besides *To Nearest*, and compare three or four results.
3. Repeat the computation a few times in arithmetic of the same precision rounding operations randomly, some *Up*, some *Down*, and treat results statistically.
4. Repeat the computation a few times in arithmetic of the same precision but with slightly different input data each time, and see how widely results spread.
5. Perform the computation in *Significance Arithmetic*, or in *Interval Arithmetic*.

The mindless use of these approaches is qualified as "futile" by Kahan.

Multiple Precision Interval Arithmetic

Almost foolproof is extendable-precision Interval Arithmetic.
Let's be almost foolproof : let's use MPFI today.

What is MPFI ?

- based on MPFR library : arbitrary precision :
- MPFR stands for *Multiple Precision Reliable Floating-point library* :
- MPFI stands for *Multiple Precision reliable Floating-point Interval library* :
- the computing precision of each operation can be specified :
- no limit apart from the memory of your computer.

Influence of the computing precision (1/2)

Influence on an interval computation : theoretically, the overestimation of the result is proportional to the ulp : $\mathrm{w}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathrm{w}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(2^{-p}|\mathbf{x}|)$ where p is the computing precision.

Influence of the computing precision (2/2)

Influence on an interval computation : in practice,

- use the midpoint-radius representation for thin intervals : the radius accounts for roundoff errors,
- use iterative refinement to reduce the width,
- use higher precision for critical intermediate computations (residual) to hide the effect of the computing precision,

and get $\mathrm{w}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathrm{w}(\mathbf{x}) \simeq 2^{-p}|\mathbf{x}|$, i.e. the best possible result.

Examples : linear systems solving, Newton iteration.

Agenda

Agenda

Historique de l'arithmétique par intervalles

- **1962 :** Ramon Moore définit l'arithmétique par intervalles dans sa thèse de doctorat et complète ce travail dans un livre en 1966

Historique de l'arithmétique par intervalles

- **1962 :** Ramon Moore définit l'arithmétique par intervalles dans sa thèse de doctorat et complète ce travail dans un livre en 1966
- **1958 :** Tsunaga, dans son mémoire de mastère en japonais

Historique de l'arithmétique par intervalles

- **1962 :** Ramon Moore définit l'arithmétique par intervalles dans sa thèse de doctorat et complète ce travail dans un livre en 1966
- **1958 :** Tsunaga, dans son mémoire de mastère en japonais
- **1956 :** Warmus

Historique de l'arithmétique par intervalles

- **1962 :** Ramon Moore définit l'arithmétique par intervalles dans sa thèse de doctorat et complète ce travail dans un livre en 1966
- **1958 :** Tsunaga, dans son mémoire de mastère en japonais
- **1956 :** Warmus
- **1951 :** Dwyer, dans un cas particulier

Historique de l'arithmétique par intervalles

- **1962 :** Ramon Moore définit l'arithmétique par intervalles dans sa thèse de doctorat et complète ce travail dans un livre en 1966
- **1958 :** Tsunaga, dans son mémoire de mastère en japonais
- **1956 :** Warmus
- **1951 :** Dwyer, dans un cas particulier
- **1931 :** Rosalind Cecil Young dans sa thèse de doctorat à Cambridge (RU) utilise quelques formules

Historique de l'arithmétique par intervalles

- **1962 :** Ramon Moore définit l'arithmétique par intervalles dans sa thèse de doctorat et complète ce travail dans un livre en 1966
- **1958 :** Tsunaga, dans son mémoire de mastère en japonais
- **1956 :** Warmus
- **1951 :** Dwyer, dans un cas particulier
- **1931 :** Rosalind Cecil Young dans sa thèse de doctorat à Cambridge (RU) utilise quelques formules
- **1927 :** Bradis, dans un cas encore plus particulier, en russe

Historique de l'arithmétique par intervalles

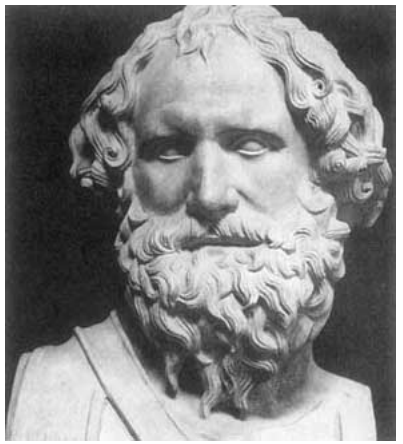
- **1962 :** Ramon Moore définit l'arithmétique par intervalles dans sa thèse de doctorat et complète ce travail dans un livre en 1966
- **1958 :** Tsunaga, dans son mémoire de mastère en japonais
- **1956 :** Warmus
- **1951 :** Dwyer, dans un cas particulier
- **1931 :** Rosalind Cecil Young dans sa thèse de doctorat à Cambridge (RU) utilise quelques formules
- **1927 :** Bradis, dans un cas encore plus particulier, en russe
- **1908 :** Young, dans un autre cas particulier, en italien

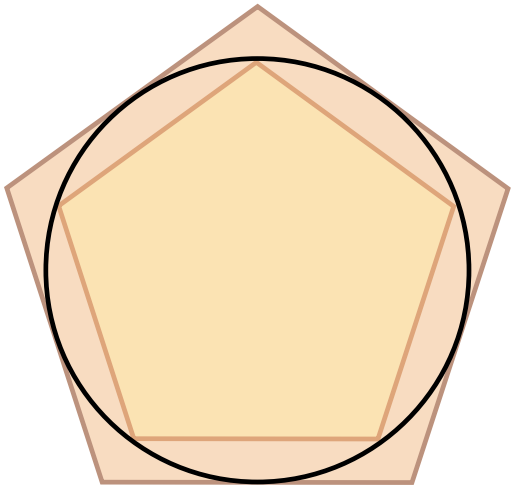
Historique de l'arithmétique par intervalles

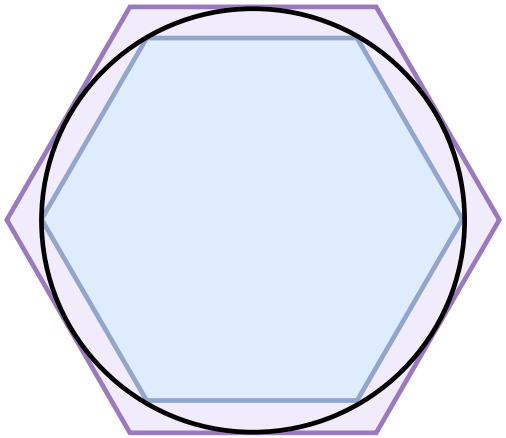
- **1962 :** Ramon Moore définit l'arithmétique par intervalles dans sa thèse de doctorat et complète ce travail dans un livre en 1966
- **1958 :** Tsunaga, dans son mémoire de mastère en japonais
- **1956 :** Warmus
- **1951 :** Dwyer, dans un cas particulier
- **1931 :** Rosalind Cecil Young dans sa thèse de doctorat à Cambridge (RU) utilise quelques formules
- **1927 :** Bradis, dans un cas encore plus particulier, en russe
- **1908 :** Young, dans un autre cas particulier, en italien
- **3e siècle avant JC :** Archimède, pour calculer un encadrement de π !

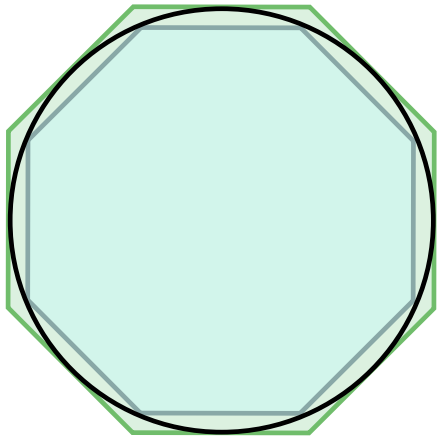
Cf. http://www.cs.utep.edu/interval-comp/, cliquer sur *Early papers by Others*.

Archimède et un encadrement de π

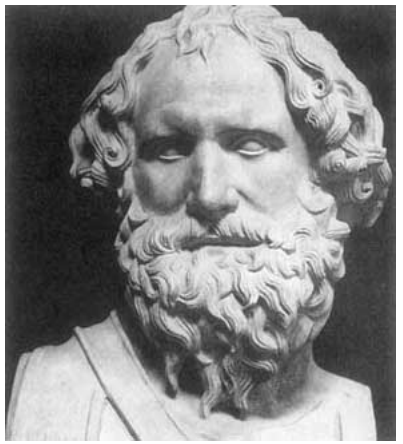


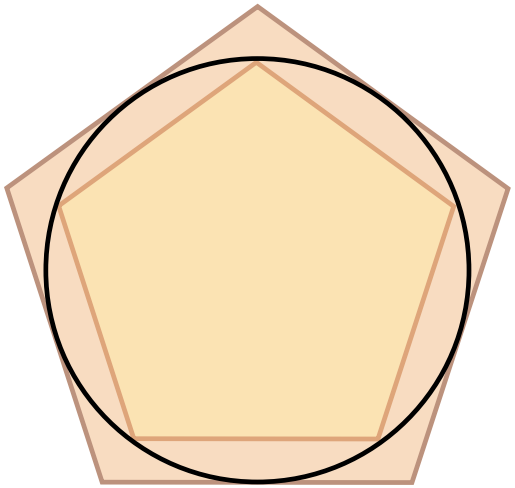


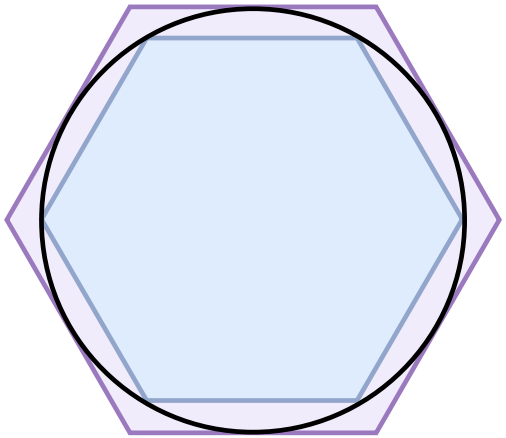


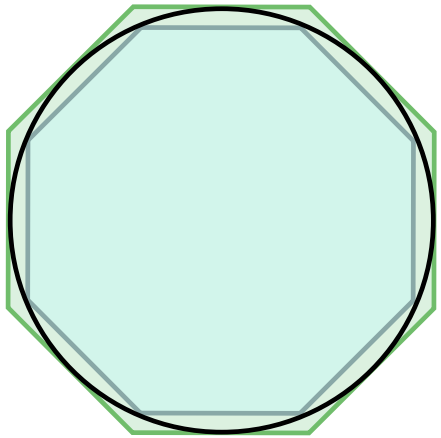


Archimède et un encadrement de π









$$3 + \frac{10}{71} \simeq 3.1408 \leq \pi \leq 3 + \frac{1}{7} \simeq 3.1429.$$

Historical remarks

Childhood until the seventies.

Popularization in the 1980, German school (U. Kulisch).

IEEE-754 standard for floating-point arithmetic in 1985 : directed roundings are standardized and available (?).

Since the nineties : interval **algorithms**.

IEEE-1788 standard for interval arithmetic in 2014 ?
I hope so. . .

Agenda

References on interval arithmetic

- R. Moore : *Interval Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- A. Neumaier : *Interval methods for systems of equations*, CUP, 1990.
- R. Moore, R.B. Kearfott, M.J. Cloud : *Introduction to interval analysis*, SIAM, 2009.
- W. Tucker : *Validated Numerics : A Short Introduction to Rigorous Computations*, Princeton University Press, 2011.
- S.M. Rump : *Computer-assisted proofs and Self-Validating Methods*, pp. 195-240. Handbook on Accuracy and Reliability in Scientific Computation (B. Einarsson ed.), SIAM, 2005.
- S.M. Rump : *Verification methods : Rigorous results using floating-point arithmetic*, Acta Numerica, vol. 19, pp. 287-449, 2010.

References on interval arithmetic

- J. Rohn : *A Handbook of Results on Interval Linear Problems*, http://www.cs.cas.cz/rohn/handbook 2006.
- E. Hansen and W. Walster : *Global optimization using interval analysis*, MIT Press, 2004.
- R.B. Kearfott : *Rigorous global search : continuous problems*, Kluwer, 1996.
- V. Kreinovich, A. Lakeyev, J. Rohn, P. Kahl : *Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations*, Dordrecht, 1997.
- L.H. Figueiredo, J. Stolfi : *Affine arithmetic* http://www.ic.unicamp.br/~stolfi/EXPORT/projects/affine-arith/.
- *Taylor models arith. :* M. Berz and K. Makino, N. Nedialkov, M. Neher.