Algorithmique numérique

Contrôle de connaissances - mardi 10 mars 2015 de 10h à 12h.

Durée : deux heures.
Documents autorisés : notes prises en cours.

Dans toute la suite $\mathbb{F}$ désigne l'ensemble des nombres flottants en base β et précision p (sans contrainte sur la plage de l'exposant) et RN désigne une fonction d'*arrondi au plus proche*, de sorte que $|\mathrm{RN}(t) - t| = \min_{f\in\mathbb{F}} |f - t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{F}$. On note δ le nombre rationnel tel que $\mathrm{RN}(x + y) = (x + y)(1 + \delta)$.
   (a) Par quelle quantité le *premier modèle standard* (MS1) majore-t-il $|\delta|$?
   (b) Comment appelle-t-on cette quantité et comment s'exprime-t-elle en fonction de la base β et de la précision p?
   (c) Montrer que l'erreur absolue $|\mathrm{RN}(x + y) - (x + y)|$ est majorée par $\min\{|x|, |y|\}$.
   (d) Donner un exemple en base $\beta = 2$ pour lequel la majoration démontrée en (c) améliore MS1.

2. On suppose dans cet exercice que $\beta = 2$.
   (a) Montrer que $1/10$ ("un dixième") n'est pas un élément de $\mathbb{F}$, et ce quelle que soit la valeur de p.
   (b) Montrer que si $p = 5$ alors l'erreur relative commise en arrondissant $1/10$ avec RN est égale à $1/4$.

3. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments positifs de $\mathbb{F}$.
   (a) Expliquer pourquoi, en général, $\mathrm{RN}\big(\mathrm{RN}(x_1x_2)x_3\big) \neq \mathrm{RN}\big(x_1\mathrm{RN}(x_2x_3)\big)$ et illustrer ce phénomène avec un exemple en base $\beta = 2$.
   (b) Montrer que dans les deux cas on peut cependant majorer a priori l'erreur relative par une même quantité, que l'on indiquera.
   (c) Plus généralement, montrer que quelle que soit la façon de calculer le produit $r := x_1x_2 \cdots x_n$ à l'aide de $n - 1$ multiplications (chacune étant effectuée avec l'arrondi RN), alors le résultat $\widehat{r} \in \mathbb{F}$ obtenu vérifie

$$\frac{|\widehat{r} - r|}{|r|} \leqslant (1 + u)^{n-1} - 1 = (n - 1)u + O(u^2).$$

4. On se place dans $\mathbb{R}^n$.
   (a) Qu'est-ce qu'une matrice élémentaire de Householder ?
   (b) On calcule une factorisation QR d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en appliquant successivement des matrices élémentaires de Householder. On note $H_i = I - 2u_i.u_i^T$ la matrice élémentaire de Householder utilisée à la i-ème étape, pour transformer la i-ème colonne de A, que l'on note a_i : on a $H_ia_i = \alpha_ie_i$ où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique (et on ne considère plus les composantes 1 à $i - 1$ dans cette colonne). On rappelle que la i-ème étape de l'algorithme de factorisation QR par transformations élémentaires de Householder s'écrit :

$$
\begin{array}{rcl}
N_i & = & \sqrt{\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}^2} \\
\alpha_i & = & -\text{sign}(a_{i,i})N_i \\
z_{i,j} & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } j < i \\ a_{i,i} + \text{sign}(a_{i,i})N_i & \text{si } j = i \\ a_{i,j} & \text{si } j > i \end{array} \right. \\
Nz_i & = & \sqrt{\sum_{j=i}^{n} z_{i,j}^2} \\
u_{i,j} & = & \frac{z_{i,j}}{Nz_i} \text{ pour } j = i \dots n
\end{array}
$$

On considère que ces calculs sont effectués en arithmétique flottante. En utilisant le modèle standard (MS1), écrire l'erreur commise pour chaque calcul de cette i-ème étape : $|\widehat{N_i} - N_i|$, $|\widehat{\alpha_i} - \alpha_i|$, $|\widehat{z_{i,j}} - z_{i,j}|$, $|\widehat{Nz_i} - Nz_i|$ et $|\widehat{u_{i,j}} - u_{i,j}|$.
Que peut-on en conclure ?

5. On cherche à calculer les racines d'un polynôme par la méthode de Newton. Pour cet exercice, on considérera le polynôme $p(x) = x^2 + ax + b$ avec $a > 0$ et $b < -a^2/4 < 0$ (ces deux dernières conditions assurent l'existence de racines réelles distinctes et simplifient l'étude). On suppose que la valeur initiale x_0 est donnée.

   (a) Montrer que l'itération de Newton s'écrit $x_{n+1} = \frac{x_n^2 - b}{2x_n + a}$.

   (b) Rappeler la définition de l'ordre de convergence d'une méthode itérative. Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton ? Rappeler les hypothèses de validité.

   (c) Les calculs sont menés en arithmétique flottante en base $\beta = 2$. Avec les mêmes notations que dans l'exercice 1, utiliser le modèle standard (MS1) pour écrire la quantité calculée $\widehat{x_n^2 - b}$. Utiliser le modèle standard (MS2) pour écrire la quantité calculée $2\widehat{x_n + a}$. Utiliser ces deux résultats et le modèle standard (MS1) pour écrire la quantité calculée $\widehat{x_{n+1}}$.

   (d) Utiliser ce dernier résultat pour écrire l'erreur $\widehat{x_{n+1}} - x^*$ où x^* est la racine cherchée, de façon à mettre en évidence le terme usuel (sans erreur liée à l'arithmétique flottante) de l'itération de Newton, la racine, un dernier terme : on obtiendra une égalité du type $\widehat{x_{n+1}} - x^* = C_1(x_{n+1} - x^*) + C_2 x^* + C_3 f(x_n, a, b)$.
   Préciser les coefficients C_1, C_2, C_3 et la fonction f.
   Commenter cette formule.

6. Soient A une matrice inversible de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à $x \in \mathbb{R}^n$ associe $Ax - b$.

   (a) On cherche un zéro de la fonction f : écrire l'équation satisfaite par ce zéro.

   (b) On suppose que $x^0 \in \mathbb{R}^n$ est donné et on note les numéros d'itération en exposant : $x^n \in \mathbb{R}^n$ est le n-ième itéré. Rappeler comment s'écrit l'itération de Newton pour résoudre un système d'équations non-linéaires (ou linéaires) à n équations et n inconnues ?

   (c) Montrer que la Jacobienne de f en tout point de $\mathbb{R}^n$ est A.

   (d) Comment s'écrit l'itération de Newton pour cette fonction $f : x \mapsto Ax - b$?
   Commenter cette itération.

* * *