TP : Optimisation convexe non-lisse

On désigne par $\overline{x} \in \mathbb{R}^N$ la représentation vectorielle de l'image originale (de taille $N = N_1 \times N_2$) et par $y = DH\overline{x} + \epsilon$ la représentation vectorielle de l'image dégradée par un opérateur de flou $H \in \mathbb{R}^{N \times N}$, un opérateur de décimation $D \in \mathbb{R}^{M \times N}$ et un bruit additif Gaussien $\epsilon \in \mathbb{R}^M$.

1. Le fichier correspondant à l'image originale se nomme 'cameraman.mat' et celui associé à l'image dégradée se nomme 'cameraman_cs.mat'. Télécharger ces deux fichiers et afficher les images associées. Commenter.

2. Télécharger la réponse fréquentielle du filtre stockée dans le fichier 'flou.mat'. Expliquer pourquoi le filtre est stocké dans une matrice de taille $N_1 \times N_2$ et non $N \times N$. Quel est l'effet de l'opérateur H ?

3. L'opérateur de décimation est une opération d'échantillonnage. Dans ce TP, il s'agit d'un échantillonnage aléatoire. Le masque de décimation est stocké dans le fichier 'decimation.mat'. Quel est le lien entre le masque de décimation et la matrice D ? Pourquoi ce genre d'opération peut-être utile en pratique ?

4. Dans le précédent TP, nous avons proposé de restaurer l'image originale $\overline{x}$ à partir des observations y en procédant à une reconstruction de type Tikhonov :

$$\widehat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \underbrace{\|DHx - y\|_2^2 + \lambda \|\Gamma x\|_2^2}_{\mathcal{J}(x)} \tag{1}$$

   où Γ modélise l'opérateur laplacien dont la réponse fréquentielle est stockée dans le fichier 'laplacien.mat'. Pour estimer $\widehat{x}$ nous avons mis en œuvre une méthode de descente de gradient, i.e,

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \gamma_k \nabla \mathcal{J}(x^{[k]}).$$

   Si besoin, une implémentation de la méthode de descente de gradient est disponible dans le fichier 'tp1.m'.

   (a) Dans le cas où $D = Id$ (pas de décimation), peut-on avoir une forme explicite pour $\widehat{x}$?

   (b) Même question dans le cas où $D \neq Id$.

5. Implémenter la méthode d'Armijo (cf. cours) qui consiste à mettre à jour le pas γ_k à chaque itération de la méthode de descente de gradient. Tracer le critère $\mathcal{J}(\cdot)$ au cours des itérations (cf. $\mathcal{J}(x^{[k]})$). Que constatez-vous par rapport à une méthode de descente de gradient à pas fixe ?

6. On cherche maintenant à améliorer la qualité de reconstruction obtenue par une approche de type Tikhonov en incorporant une pénalisation non-différentiable. Dans cette partie, nous nous limiterons au cas du débruitage, i.e., $y = \overline{x}+\epsilon$. La solution proposée consiste à minimiser le critère suivant :
$$\widehat{x}_\lambda = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^N} \underbrace{\frac{1}{2}\|x-y\|_2^2 + \lambda\|Lx\|_1}_{\mathcal{K}(x)}$$
où $L = [H^\top, V^\top]^\top$ où H et V désignent respectivement les opérateurs de différences finies horizontal et vertical. Il en résulte que $z = Lx \in \mathbb{R}^{2N}$.

   (a) Le fichier correspondant à l'image dégradée se nomme 'cameraman_bruit.mat'. Télécharger cette image.

   (b) La fonction op_reg.m permet d'effectuer la transformation L. Calculer sous MATLAB
   $>>$ $[z1, z2] = \text{op\_reg}(y)$;
   Expliquer le code associé.

   (c) Discuter de l'influence du paramètre λ sur la solution $\widehat{x}_\lambda$.

   (d) Montrer que le problème dual associé peut s'écrire
   $$\widehat{u}_\lambda \in \text{Argmin}_{u\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\|y+L^*u\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \|u\|_\infty \le \lambda,$$
   et que la relation entre les solutions primale et duale est
   $$\widehat{x}_\lambda = y + L^*\widehat{u}_\lambda.$$

   (e) Résoudre le problème dual à l'aide de l'algorithme explicite-implicte (forward-backward) présenté en cours.

   - Quelle est la fonction différentiable de gradient Lipschitz ? Préciser son gradient et sa constante de Lipschitz.

   - En utilisant la relation qui relie l'opérateur proximal d'une fonction $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^N)$ et sa fonction conjuguée f^*, i.e.,
   $$(\forall x \in \mathbb{R}^N) \quad \text{prox}_{\gamma f^*}x = x - \gamma\text{prox}_{\gamma^{-1}f}(\gamma^{-1}x),$$
   donner l'expression de $P_{\|\cdot\|_\infty\le\lambda}$.

- Implanter l'algorithme explicite-implicte et en déduire $\widehat{x}$. Utiliser les fonctions op_reg.m, op_reg_adj.m, prox_L1.m permettant de calculer respectivement L, L^* et l'opérateur proximal associé à la norme ℓ_1. Expliquer ces codes fournis.

- Pour vérifier la validité de votre implémentation, tracer le critère $\mathcal{K}(x^{[k]})$ au cours des itérations.

- Tracer l'évolution de l'erreur quadratique moyenne entre le signal original $\overline{x}$ et le signal estimé $\widehat{x}_\lambda$ en fonction de λ. Commenter.