# TP3 : Déconvolution

On désigne par $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ et $\mathbf{f}$ les représentations vectorielles de trois images $(f_{n,m})_{0\leq n\leq N, 0\leq m\leq M}$, $(g_{n,m})_{0\leq n\leq N, 0\leq m\leq M}$ et $(\mathrm{f}_{n,m})_{0\leq n\leq N, 0\leq m\leq M}$. Les DFT 2D associées à $\boldsymbol{g}\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ et $\mathbf{f}$ seront notées $(\widehat{f}_{k,l})_{0\leq k\leq N, 0\leq l\leq M}$, $(\widehat{g}_{k,l})_{0\leq k\leq N, 0\leq l\leq M}$ et $(\widehat{\mathrm{f}}_{k,l})_{0\leq k\leq N, 0\leq l\leq M}$.

On notera $\boldsymbol{H}$ la matrice de transformation associée à une opération de filtrage d'une image de taille $N \times M$ et $\boldsymbol{R}$ la matrice de covariance d'un vecteur image $\boldsymbol{f}$. La réponse fréquentielle de $\boldsymbol{H}$ sera notée $(\widehat{H}_{k,l})_{0\leq k\leq N, 0\leq l\leq M}$ et la DFT 2D de $\boldsymbol{R}$ sera notée $(\widehat{R}_{k,l})_{0\leq k\leq N, 0\leq l\leq M}$ et correpond à la densité spectrale de puissance de l'image $\boldsymbol{f}$.

1. Dans ce TP, l'image $\boldsymbol{g}$ correspond à la version dégradée d'une image origine $\boldsymbol{f}$. Télécharger ces images ainsi que la réponse fréquentielle du filtre $(\widehat{H}_{k,l})_{0\leq k\leq N, 0\leq l\leq M}$, modélisant la distorsion du système de mesure. Selon vous, de quel type de dégradation s'agit-il ? Calculer l'erreur quadratique moyenne entre l'image originale et sa version dégradée.

2. Déterminer le bruit de mesure en calculant la DFT 2D inverse de
$$\widehat{g}_{k,l} - \widehat{H}_{k,l}\widehat{f}_{k,l}.$$
Vérifier que le bruit est centré. Tracer son histogramme à l'aide de la commande hist.m. Calculer son écart-type $\sigma_b$.

3. On cherche maintenant à produire une image restaurée $\mathbf{f}$, à partir de l'image dégradée $\boldsymbol{g}$. L'image originale $\boldsymbol{f}$ est indisponible dans la réalité mais elle est fournie dans le cadre de ce TP de façon à pouvoir évaluer l'erreur de restauration. On rappelle que $\mathbf{f}$ et $\boldsymbol{g}$ peuvent être reliées par la relation suivante
$$\mathbf{f} = (\boldsymbol{H}^\top \boldsymbol{H} + \lambda \boldsymbol{R}^{-1})^{-1}\boldsymbol{H}^\top \boldsymbol{g}$$
avec $\lambda > 0$. Cette relation peut être approchée efficacement à l'aide de DFT 2D par la relation suivante, pour tout $(k,l) \in \{1,\ldots,N\} \times \{1,\ldots,M\}$,
$$\widehat{\mathrm{f}}_{k,l} = \frac{\widehat{H}^*_{k,l}\widehat{g}_{k,l}}{|\widehat{H}_{k,l}|^2 + \lambda \widehat{R}^{-1}_{k,l}}$$
   - Comment choisir $\lambda$ et $\widehat{R}_{k,l}$ pour mettre en œuvre un filtrage inverse ? Observer l'image reconstruite. Calculer ses valeurs minimales et maximales.

- En choisissant des valeurs non nulles de $\lambda$ et en prenant $\widehat{R}_{k,l} = 1$, on réalise une régularisation quadratique. Faire varier $\lambda$. Que se passe t'il quand ce paramètre est grand ? Quelle est la valeur optimale du facteur de régularisation ?

- On modélise l'image $\boldsymbol{f}$ par un bruit blanc d'écart-type $\sigma_f$. En posant $\widehat{R}_{k,l} = \sigma_f^2$ et $\lambda = \sigma_b^2$, on retombe sur le filtrage de Wiener. Mettre en œuvre ce filtre et mesurer ses performances. Comment cette méthode se situe-t-elle par rapport à la précédente ? Comment pourrait-on améliorer les résultats ?