

TP : Estimation spectrale

On se propose d'analyser un signal $x = \{x[n]\}_{0 \leq n \leq N}$ composé de K exponentielles amorties, i.e.

$$x[n] = \sum_{k=1}^K \beta_k e^{j\phi_k} e^{(2\pi j f_k - \alpha_k)n} \quad (1)$$

$$= \sum_{k=1}^K h_k z_k^n \quad (2)$$

avec $z_k = e^{2\pi j f_k - \alpha_k}$ et $h_k = \beta_k e^{j\phi_k}$. Dans ce TP, l'analyse est menée à l'aide du modèle de Prony est permet d'estimer $\{\beta_k, \alpha_k, \phi_k, f_k\}_{1 \leq k \leq K}$ à partir du signal x .

1. Le signal x que l'on souhaite analyser peut-être généré à partir du fichier 'create_signal.m'. Afficher le signal dans Matlab. Dans la suite on supposera que $K = 6$. Justifier ce choix.
2. On rappelle que tout signal x de la forme (1) peut s'écrire comme

$$(\forall n \geq k) \quad x[n] = - \sum_{k=1}^K a_k x[n-k]$$

on de façon équivalente

$$\begin{pmatrix} x[K] & x[K-1] & \dots & x[0] \\ x[K+1] & x[K] & \dots & x[1] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x[N] & x[N-1] & \dots & x[N-K] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix} = 0$$

Estimer $a = (a_k)_{0 \leq k \leq K}$ à l'aide de la fonction 'svd.m' de Matlab.

3. La fonction 'roots.m' permet de calculer les racines du polynôme dont les coefficients sont les éléments d'un vecteur. On utilisera cette fonction pour calculer les $(z_k)_{1 \leq k \leq K}$ à partir du filtre a estimé à la question précédente. On se rapportera au cours pour plus de détails sur le lien entre a et z . En déduire $(f_k)_{1 \leq k \leq K}$ et $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq K}$.

4. Par définition de x (cf. eq. 2), on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_K \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{K-1} & z_2^{K-1} & \dots & z_K^{K-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[K-1] \end{pmatrix}$$

Estimer $(h_k)_{1 \leq k \leq K}$. En déduire $(\beta_k)_{1 \leq k \leq K}$ et $(\phi_k)_{1 \leq k \leq K}$.

5. Comparer les paramètres estimés avec les paramètres originaux. Commenter.

6. Ajouter du bruit sur le signal x puis estimer à nouveau les paramètres. Que remarquez-vous ?