Opérateurs monotones

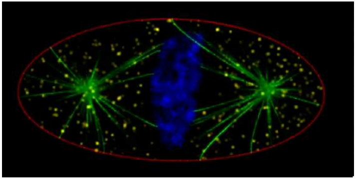
N. Pustelnik[1] **et J.-C. Pesquet**[2]

[1] ENS Lyon – Laboratoire de Physique – CNRS UMR 5672
[2] Université Paris-Est – LIGM – CNRS UMR 8049

Ecole d'été de Peyresq
Juin 2013

Opérateurs monotones et problèmes inverses

[Microscopie, Challenge ISBI 2013, F. Soulez]



?

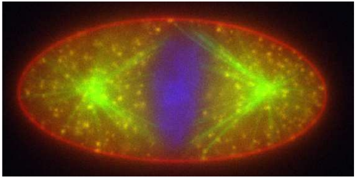
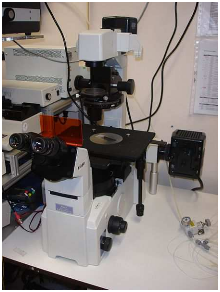


Image originale

Image dégradée



Opérateurs monotones et problèmes inverses

[Microscopie, Challenge ISBI 2013, F. Soulez]

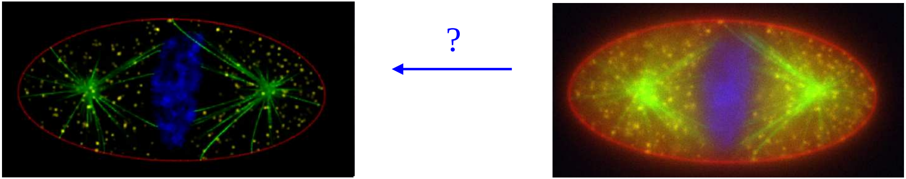


Image originale
$\overline{x} \in \mathbb{R}^N$

Image dégradée
$z = \mathcal{P}_\alpha(H\overline{x}) \in \mathbb{R}^M$

- $H \in \mathbb{R}^{M \times N}$: matrice associée à un opérateur de dégradation.
- $\mathcal{P}_\alpha : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$: effet du bruit paramétré par α (e.g. bruit de Poisson).

$\rightarrow$ Produire une bonne estimée de $\overline{x}$ à partir des observations z, en ayant souvent des connaissances sur H et la statistique du bruit.

Opérateurs monotones et problèmes inverses

Problème inverse :
Trouver $\widehat{x}$ le plus proche possible de $\overline{x}$ à partir des observations $z = \mathcal{P}_\alpha(H\overline{x})$.

- Filtrage inverse (si $M = N$ et H est inversible)

$$\begin{aligned}\widehat{x} &= H^{-1}z\\ &= H^{-1}(H\overline{x} + b) \quad \text{si bruit additif } b \in \mathbb{R}^M\\ &= \overline{x} + H^{-1}b\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Forme explicite mais amplification du bruit si H mal-conditionnée (*problème mal posé*).

Opérateurs monotones et problèmes inverses

Problème inverse :
Trouver $\widehat{x}$ le plus proche possible de $\overline{x}$ à partir des observations $z = \mathcal{P}_\alpha(H\overline{x})$.

- Filtrage inverse (si $M \geq N$ et le rang de H est N)

$$\begin{aligned}\widehat{x} &= (H^\top H)^{-1} H^\top z \\ &= (H^\top H)^{-1} H^\top (H\overline{x} + b) \quad \text{si bruit additif } b \in \mathbb{R}^M \\ &= \overline{x} + (H^\top H)^{-1} H^\top b\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Forme explicite mais amplification du bruit si H mal-conditionnée (*problème mal posé*).

Opérateurs monotones et problèmes inverses

Problème inverse :
Trouver $\widehat{x}$ au plus proche de $\overline{x}$ à partir des observations $z = \mathcal{P}_\alpha(H\overline{x})$.

- Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \; \underbrace{f_1(x)}_{\substack{\text{Attache aux données} \\ \text{e.g.} \|Hx - z\|_2^2}} + \underbrace{f_2(x)}_{\substack{\text{Terme de régularisation} \\ \text{e.g. } \lambda\|x\|_p^p \text{ avec } \begin{cases} p \geq 1 \\ \lambda \in \,]0, +\infty[\end{cases}}}$$

$\rightarrow$ Solution explicite rare (e.g. si $p \neq 2$ et $H \neq \mathrm{Id}$)
ou lourde à calculer (e.g. si $p = 2$, $H \neq \mathrm{Id}$ et $N \gg 1$)
$\rightarrow$ Méthode de résolution itérative.

Opérateurs monotones et problèmes inverses

Problème inverse :
Trouver $\widehat{x}$ au plus proche de $\overline{x}$ à partir des observations $z = \mathcal{P}_\alpha(H\overline{x})$.

- Approche variationnelle plus générale

$$\widehat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$$

où f_i termes de fidélité aux données/régularisation hybride/contraintes.
$\rightarrow$ Méthode de résolution itérative.

Opérateurs monotones et problèmes inverses

Méthode de résolution itérative = Algorithme d'optimisation :

Construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\widehat{x} \in \underset{x\in\mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$.

- Suite du type $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} = Tx_n$ où T opérateur de $\mathbb{R}^N$ vers $\mathbb{R}^N$.

  $\rightarrow$ Comment construire T à partir des propriétés des fonctions $(f_i)_{1\le i\le m}$ intervenant dans le problème ?

  $\rightarrow$ Quelles propriétés doivent être vérifiées par T de façon à assurer la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\widehat{x}$?

Une réponse simpliste

Théorème du point fixe (E. Picard, 1856-1941)

Si

- $\widehat{x}$ est un point fixe de T, i.e. $\widehat{x} = T\widehat{x}$
- T est une contraction stricte, i.e. il existe $\rho \in [0, 1[$ tel que

$$(\forall (x, x') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \qquad \|Tx - Tx'\| \leq \rho \|x - x'\|$$

alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\widehat{x}$.

<u>Preuve</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \widehat{x}\| &= \|Tx_n - T\widehat{x}\| \\ &\leq \rho \|x_n - \widehat{x}\|. \end{aligned}$$

D'où $\|x_n - \widehat{x}\| \leq \rho^n \|x_0 - \widehat{x}\|$. Ceci montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge linéairement vers $\widehat{x}$.

Pourquoi aller au delà ?

Difficultés :

- Il est difficile (voire parfois impossible) d'avoir un opérateur T *strictement* contractant.
- On peut préférer une récurrence du type $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} = T_n x_n$ où T_n est un opérateur de $\mathbb{R}^N$ vers $\mathbb{R}^N$.
- Souvent, construire T_n est complexe et il faut donc écrire T_n comme une composition d'opérateurs plus simples (*éclatement du problème*).
- T_n peut être multivalué, i.e. $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} \in T_n x_n$.

Philosophie du cours

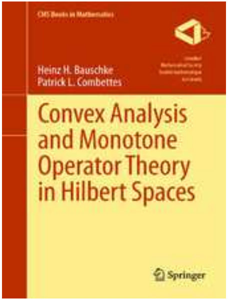
- Fournir une vision moderne de l'optimisation convexe permettant d'appréhender des problèmes non lisses (parcimonie)
  $\rightarrow$ fonctions non finies, opérateurs monotones,...

- Servir d'introduction à la littérature souvent technique sur le sujet
  $\rightarrow$ se placer dans des espaces de Hilbert de dimension infinie...
  même si la plupart des applications sont en dimension finie.

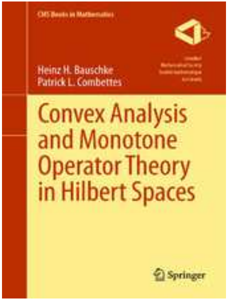
Philosophie du cours

- Essayer de donner une idée des raisonnements mais...
  sauter les démonstrations trop faciles ... ou celles trop longues.
- Illustrer de quelques exemples en problèmes inverses
  sans néanmoins entrer trop dans les détails.
- Ne pas explorer toutes les applications des opérateurs monotones.
- Mettre l'accent sur la convergence des itérées $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plutôt que sur celle du critère $\big(f(x_n)+g(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

La bible


CMS Books in Mathematics
Heinz H. Bauschke
Patrick L. Combettes
Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces
Springer

La bible ... et ses apôtres



Plan du cours

1. Généralités sur les opérateurs monotones et monotones maximaux

   $\rightarrow$ *Inversion d'opérateur, sous-différentiel, conjuguée d'une fonction convexe*

2. Contractions

   $\rightarrow$ *Taxinomie, résolvante et opérateur proximal*

3. Recherche d'un zéro d'un opérateur maximal monotone

   $\rightarrow$ *Points fixes, Fejér monotonie, Douglas-Rachford, Forward-Backward*

1ère Partie : Généralités

1. Opérateurs monotones
   - Définition
   - Propriétés
   - Opérations de base
   - Inversion
   - Maximalité
   - Intérêt en optimisation convexe (sous-différentiel)

2. Opérateurs monotones maximaux
   - Propriétés
   - Opérations de bases
   - Inversion
   - Intérêt de l'inversion en optimisation convexe

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (réel) est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et de la norme associée

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$$

qui est complet.

- Cas particulier $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$ (espace euclidien de dimension N).

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (réel) est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et de la norme associée

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$$

qui est complet.

- Cas particulier $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$ (espace euclidien de dimension N).

$2^{\mathcal{H}}$ est l'ensemble des parties de $\mathcal{H}$, i.e. l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathcal{H}$.

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Un opérateur linéaire $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ est borné (ou continu) si

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|_{\mathcal{G}}}{\|x\|_{\mathcal{H}}} < +\infty$$

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Un opérateur linéaire $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ est borné (ou continu) si

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|} < +\infty$$

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Un opérateur linéaire $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ est borné (ou continu) si

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|} < +\infty$$

- En dimension finie, tout opérateur linéaire est borné.

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Un opérateur linéaire $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ est **borné** (ou continu) si

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|} < +\infty$$

- En dimension finie, tout opérateur linéaire est borné.

$\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$: espace normé des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{G}$.

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Soit $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Son **adjoint L^*** est l'opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ défini par

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}) \qquad \langle x \mid Ly \rangle_{\mathcal{G}} = \langle L^* x \mid y \rangle_{\mathcal{H}} .$$

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Soit $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Son **adjoint L^*** est l'opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ défini par

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}) \qquad \langle x \mid Ly \rangle = \langle L^* x \mid y \rangle \,.$$

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Soit $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Son **adjoint L^*** est l'opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ défini par

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}) \qquad \langle Ly \mid x \rangle = \langle y \mid L^* x \rangle \,.$$

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Soit $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Son adjoint L^* est l'opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ défini par

$$(\forall (x,y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}) \qquad \langle Ly \mid x \rangle = \langle y \mid L^* x \rangle \, .$$

Exemple :

Si $\qquad L \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^n \colon y \mapsto (y, \ldots, y)$

alors $\qquad L^* \colon \mathcal{H}^n \to \mathcal{H} \colon x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$

Preuve :

$$\langle Ly \mid x \rangle = \langle (y, \ldots, y) \mid (x_1, \ldots, x_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle y \mid x_i \rangle = \left\langle y \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle$$

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Soit $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Son **adjoint L^*** est l'opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ défini par

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}) \qquad \langle Ly \mid x \rangle = \langle y \mid L^* x \rangle \,.$$

- On a $\|L^*\| = \|L\|$.
- Si L est bijective (i.e. un **isomorphisme**) alors $L^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ et $(L^{-1})^* = (L^*)^{-1}$.
- Si $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$ et $\mathcal{G} = \mathbb{R}^M$ alors $L^* = L^\top$.

Notions de base sur les espaces de Hilbert

Soit $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. L'opérateur L est

- auto-adjoint si $L^* = L$.
- semi-défini positif si $(\forall x \in \mathcal{H})\ \langle x \mid Lx \rangle \geq 0$.
- défini positif s'il est semi-défini positif et si $(\forall x \in \mathcal{H})\ \langle x \mid Lx \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- ρ-fortement positif où $\rho \in]0, +\infty[$ si $(\forall x \in \mathcal{H})\ \langle x \mid Lx \rangle \geq \rho \|x\|^2$.

- Si L est un opérateur auto-adjoint ρ-fortement positif alors c'est un isomorphisme et $\|L^{-1}\| \leq \rho^{-1}$.
- Si $\mathcal{H}$ est de dimension finie, alors L est défini positif ssi il est fortement positif.

Opérateurs monotones : définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A est monotone si

$$\big(\forall (x_1, u_1) \in \operatorname{gra} A\big)\big(\forall (x_2, u_2) \in \operatorname{gra} A\big) \qquad \langle u_1 - u_2 \mid x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

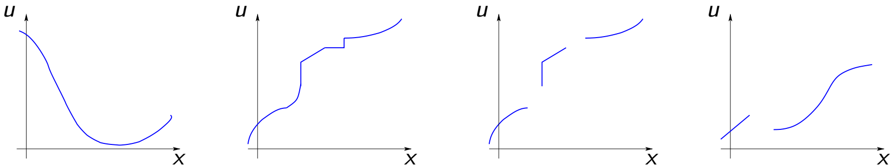
Opérateurs monotones : définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A est monotone si

$$\big(\forall (x_1, u_1) \in \boxed{\operatorname{gra} A}\big)\big(\forall (x_2, u_2) \in \boxed{\operatorname{gra} A}\big) \qquad \langle u_1 - u_2 \mid x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

- Le graphe de A est défini par $\operatorname{gra} A = \big\{ (x, u) \in \mathcal{H}^2 \mid u \in Ax \big\}$.



Opérateurs monotones : définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

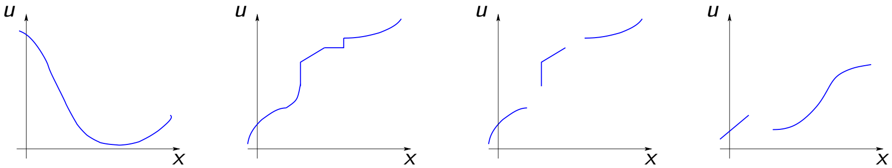
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.

A est monotone si

$$\big(\forall (x_1, u_1) \in \boxed{\mathrm{gra} A}\big)\big(\forall (x_2, u_2) \in \boxed{\mathrm{gra} A}\big) \qquad \langle u_1 - u_2 \mid x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

- Le graphe de A est défini par $\mathrm{gra} A = \big\{ (x, u) \in \mathcal{H}^2 \mid u \in Ax \big\}$.

Quels sont les graphes associés à des opérateurs monotones ?



Opérateurs monotones : définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

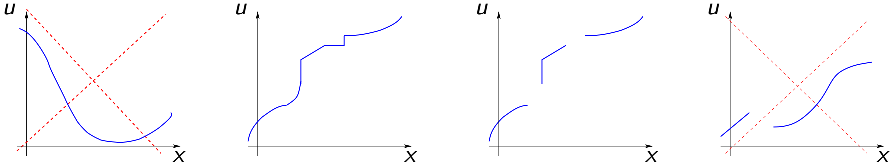
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.

A est monotone si

$$(\forall (x_1, u_1) \in \operatorname{gra} A)(\forall (x_2, u_2) \in \operatorname{gra} A) \qquad \langle u_1 - u_2 \mid x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

- Le graphe de A est défini par $\operatorname{gra} A = \{(x, u) \in \mathcal{H}^2 \mid u \in Ax\}$.

Quels sont les graphes associés à des opérateurs monotones ?



Opérateurs monotones : exemple

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

- A est monotone ssi A est semi-défini positif.
- A monotone $\Leftrightarrow A + A^*$ monotone $\Leftrightarrow A^*$ monotone

Opérateurs monotones : exemple

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

- A est monotone ssi A est semi-défini positif.
- A monotone $\Leftrightarrow$ $A + A^*$ monotone $\Leftrightarrow$ A^* monotone

Preuve :

$$
\begin{aligned}
A \text{ monotone} \quad & \Leftrightarrow \quad \big(\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{H}^2\big) \qquad \langle x_1 - x_2 \mid Ax_1 - Ax_2 \rangle \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathcal{H}) \qquad 2 \langle x \mid Ax \rangle \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \langle x \mid Ax \rangle + \langle A^* x \mid x \rangle \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \langle x \mid (A + A^*) x \rangle \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad A + A^* \text{ monotone}
\end{aligned}
$$

Opérateurs monotones : exemple

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

- A est monotone ssi A est semi-défini positif.
- A monotone $\Leftrightarrow$ $A + A^*$ monotone $\Leftrightarrow$ A^* monotone

- Le domaine de $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est $\operatorname{dom} A = \{x \in \mathcal{H} \mid Ax \neq \varnothing\}$.
- Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ et soit $C \subset \mathcal{H}$. Si le domaine de A est égal à C et, pour tout $x \in C$, Ax est un singleton, on identifie A à une fonction de C vers $\mathcal{H}$.
- A n'a pas besoin d'être auto-adjoint pour être monotone : $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ antisymétrique (i.e. $A^* = -A$) est monotone.

Opérateurs monotones : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert.
Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ et $B\colon \mathcal{G} \to 2^{\mathcal{G}}$ deux opérateurs monotones.
Les opérateurs suivants sont monotones :

- $x \mapsto y + \gamma\rho A(\rho x + z) = \{y + \gamma\rho u \mid u \in A(\rho x + z)\}$
  où $(y, z) \in \mathcal{H}^2$, $\gamma \in [0, +\infty[$ et $\rho \in \mathbb{R}$.
- $A \times B \,:\, \mathcal{H} \times \mathcal{G} \to 2^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}}$
  $$(x, y) \mapsto Ax \times Ay = \{(u, v) \mid u \in Ax, v \in Bx\}.$$
- $A + B \,:\, x \mapsto \{u + v \mid u \in Ax, v \in Bx\}$ si $\mathcal{G} = \mathcal{H}$
- $L^*BL \,:\, x \mapsto \{L^*v \mid v \in B(Lx)\}$ si $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$.

Opérateurs monotones : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert.
Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ et $B\colon \mathcal{G} \to 2^{\mathcal{G}}$ deux opérateurs monotones.
Les opérateurs suivants sont monotones :

- $x \mapsto y + \gamma\rho A(\rho x + z)$ où $(y, z) \in \mathcal{H}^2$, $\gamma \in [0, +\infty[$ et $\rho \in \mathbb{R}$.
- $A \times B$.
- $A + B$ si $\mathcal{G} = \mathcal{H}$
- $L^* BL$ si $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$.

Preuve : Soient $(x_1, u_1) \in \operatorname{gra}(L^* BL)$ et $(x_2, u_2) \in \operatorname{gra}(L^* BL)$.
On a $u_1 = L^* v_1$ et $u_2 = L^* v_2$ où $v_1 \in B(Lx_1)$ et $v_2 \in B(Lx_2)$.
De plus,

$$\begin{aligned}\langle u_1 - u_2 \mid x_1 - x_2\rangle &= \langle v_1 - v_2 \mid L(x_1 - x_2)\rangle \\ &= \langle v_1 - v_2 \mid Lx_1 - Lx_2\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Opérateurs monotones : inversion

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A^{-1} est l'opérateur de $\mathcal{H}$ vers $2^{\mathcal{H}}$ de graphe

$$\operatorname{gra}(A^{-1}) = \big\{(u,x) \;\big|\; (x,u) \in \operatorname{gra} A\big\}.$$

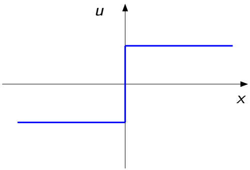
Opérateurs monotones : inversion

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A \colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A^{-1} est l'opérateur de $\mathcal{H}$ vers $2^{\mathcal{H}}$ de graphe

$$\mathrm{gra}(A^{-1}) = \big\{(u,x) \mid (x,u) \in \mathrm{gra}A\big\}.$$

Graphe de A

Quel est le graphe de A^{-1} ?



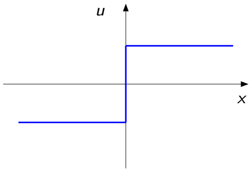
Opérateurs monotones : inversion

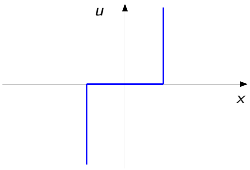
Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A^{-1} est l'opérateur de $\mathcal{H}$ vers $2^{\mathcal{H}}$ de graphe

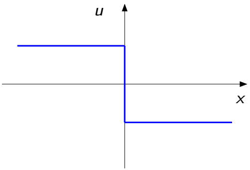
$$\mathrm{gra}(A^{-1}) = \big\{(u,x) \;\big|\; (x,u) \in \mathrm{gra}A\big\}.$$

Graphe de A

Quel est le graphe de A^{-1} ?







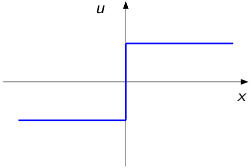
Opérateurs monotones : inversion

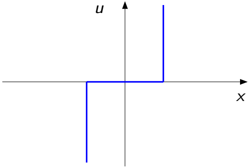
Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A \colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A^{-1} est l'opérateur de $\mathcal{H}$ vers $2^{\mathcal{H}}$ de graphe

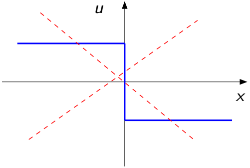
$$\mathrm{gra}(A^{-1}) = \big\{(u,x) \;\big|\; (x,u) \in \mathrm{gra} A\big\}.$$

Graphe de A

Quel est le graphe de A^{-1} ?







Opérateurs monotones : inversion

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A \colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A^{-1} est l'opérateur de $\mathcal{H}$ vers $2^{\mathcal{H}}$ de graphe

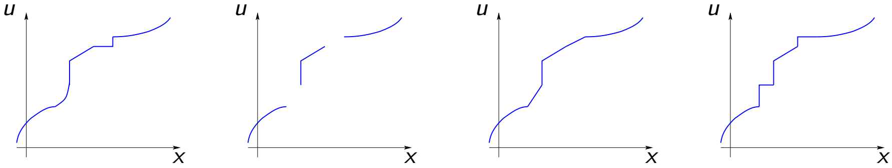
$$\mathrm{gra}(A^{-1}) = \big\{(u,x) \;\big|\; (x,u) \in \mathrm{gra} A\big\}.$$

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A \colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone.
A^{-1} est monotone.

Opérateurs monotones maximaux : définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A est **monotone maximal** si A est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone $B : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ autre que A tel que $\mathrm{gra} A$ soit inclus dans $\mathrm{gra} B$.

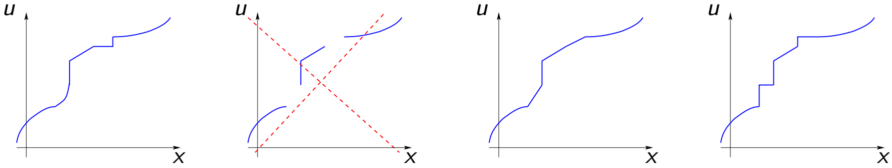
Graphes associés à des opérateurs A monotones maximaux ?



Opérateurs monotones maximaux : définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A est **monotone maximal** si A est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone $B : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ autre que A tel que $\mathrm{gra} A$ soit inclus dans $\mathrm{gra} B$.

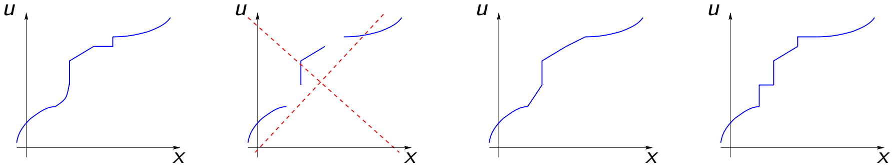
Graphes associés à des opérateurs A monotones maximaux ?



Opérateurs monotones maximaux : définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A est **monotone maximal** si A est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone $B : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ autre que A tel que $\mathrm{gra} A$ soit inclus dans $\mathrm{gra} B$.

Graphes associés à des opérateurs A monotones maximaux ?



Remarque : Si A est monotone maximal alors $\mathrm{gra} A \neq \varnothing$.

Opérateurs monotones maximaux : seconde définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
$A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est monotone maximal si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(i) A est monotone et il n'existe pas d'opérateur monotone $B \colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ autre que A tel que $\operatorname{gra} A$ soit inclus dans $\operatorname{gra} B$.

(ii) Pour tout $(x_1, u_1) \in \mathcal{H}^2$,

$$(x_1, u_1) \in \operatorname{gra} A \quad \Leftrightarrow \quad \big(\forall (x_2, u_2) \in \operatorname{gra} A\big) \quad \langle x_1 - x_2 \mid u_1 - u_2 \rangle \geq 0.$$

Equivalence des 2 définitions :
$(ii) \Rightarrow (i)$: La condition (ii) assure la monotonie de A.
Par ailleurs, si B monotone et $\operatorname{gra} A \subset \operatorname{gra} B$ alors $\big(\forall (x_1, u_1) \in \operatorname{gra} B\big)$

$$\big(\forall (x_2, u_2) \in \operatorname{gra} A\big) \quad \langle x_1 - x_2 \mid u_1 - u_2 \rangle \geq 0$$

La condition (ii) implique alors que $(x_1, u_1) \in \operatorname{gra} A$. D'où $B = A$.

Opérateurs monotones maximaux : seconde définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
$A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est monotone maximal si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(*i*) A est monotone et il n'existe pas d'opérateur monotone $B\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ autre que A tel que $\mathrm{gra} A$ soit inclus dans $\mathrm{gra} B$.

(*ii*) Pour tout $(x_1, u_1) \in \mathcal{H}^2$,
$$(x_1, u_1) \in \mathrm{gra} A \quad \Leftrightarrow \quad \big(\forall (x_2, u_2) \in \mathrm{gra} A\big) \quad \langle x_1 - x_2 \mid u_1 - u_2 \rangle \geq 0.$$

Equivalence des 2 définitions :
$(i) \Rightarrow (ii)$: Soit $(x_1, u_1) \in \mathcal{H}^2$ tel que l'inégalité ci-dessus soit satisfaite. Soit B tel que $\mathrm{gra} B = \mathrm{gra} A \cup \{(x_1, u_1)\}$. Si A est monotone, B est monotone tel que $\mathrm{gra} A \subset \mathrm{gra} B$. D'après la condition (i), on a $B = A \Rightarrow (x_1, u_1) \in \mathrm{gra} A$. La réciproque est évidente.

Cas des fonctions continues

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Si $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur monotone et continu
alors A est monotone maximal.

Cas des fonctions continues

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Si $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur monotone et continu
alors A est monotone maximal.

Preuve :
Soit $(x_1, u_1) \in \mathcal{H}^2$.
Supposons que, pour tout $x_2 \in \mathcal{H}$, $\langle x_1 - x_2 \mid u_1 - Ax_2 \rangle \geq 0$.
Posons $x_2^\alpha = x_1 + \alpha(u_1 - Ax_1)$ où $\alpha > 0$.
On a $\langle u_1 - Ax_1 \mid u_1 - Ax_2^\alpha \rangle = -\alpha^{-1} \langle x_1 - x_2^\alpha \mid u_1 - Ax_2^\alpha \rangle \leq 0$.
Quand $\alpha \to 0$, $x_2^\alpha \to x_1$ et $\|u_1 - Ax_1\|^2 \leq 0$. D'où $u_1 = Ax_1$.

Cas des fonctions continues

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Si $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur monotone et continu
alors A est monotone maximal.

Exemple :
Si $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ est semi-défini positif alors L est monotone maximal.

Opérateurs

maximaux

monotones

Opérateurs

maximaux

monotones

Opérateurs

maximaux

monotones

Intérêt en

optimisation

convexe

Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

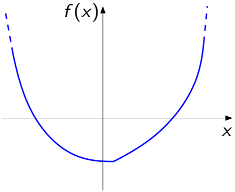
- Le domaine de f est $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) < +\infty\}$.
- La fonction f est propre si $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

- Le domaine de f est $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathcal{H} \,|\, f(x) < +\infty\}$.
- La fonction f est propre si $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$.

Quel est le domaine de cette fonction ?

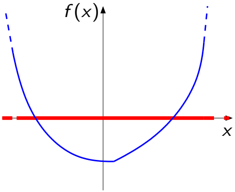


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

- Le domaine de f est $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathcal{H} \,|\, f(x) < +\infty\}$.
- La fonction f est propre si $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$.

Quel est le domaine de cette fonction ?



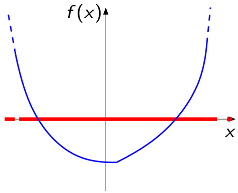
$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

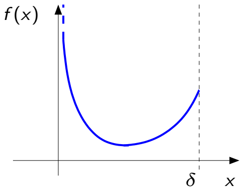
Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

- Le domaine de f est $\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathcal{H} \,|\, f(x) < +\infty\}$.
- La fonction f est propre si $\mathrm{dom}\, f \neq \varnothing$.

Quel est le domaine de cette fonction ?



$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$

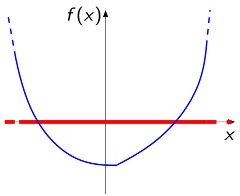


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

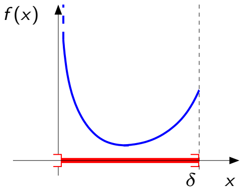
Soit $f : \mathcal{H} \to \left]-\infty, +\infty\right]$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

- Le domaine de f est $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) < +\infty\}$.
- La fonction f est propre si $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$.

Quel est le domaine de cette fonction ?



$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$



$\operatorname{dom} f = \left]0, \delta\right]$

Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

$C \subset \mathcal{H}$ est un **ensemble convexe** si

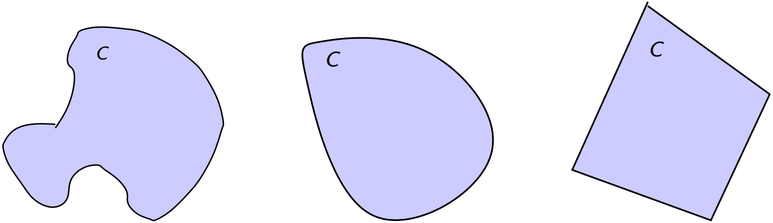
$$(\forall (x, y) \in C^2)(\forall \alpha \in]0, 1[) \qquad \alpha x + (1 - \alpha) y \in C$$

Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

$C \subset \mathcal{H}$ est un **ensemble convexe** si

$$(\forall (x,y) \in C^2)(\forall \alpha \in]0,1[) \qquad \alpha x + (1-\alpha) y \in C$$

Quels sont les ensembles convexes ?

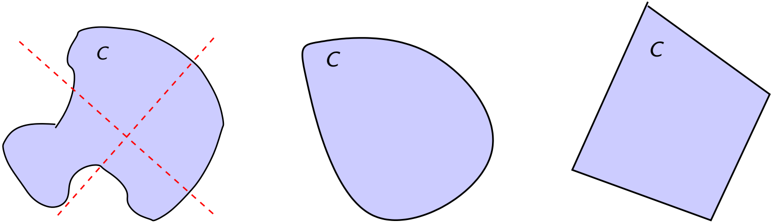


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

$C \subset \mathcal{H}$ est un **ensemble convexe** si

$$(\forall (x,y) \in C^2)(\forall \alpha \in]0,1[) \qquad \alpha x + (1-\alpha) y \in C$$

Quels sont les ensembles convexes ?



Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

$f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ est une fonction convexe si

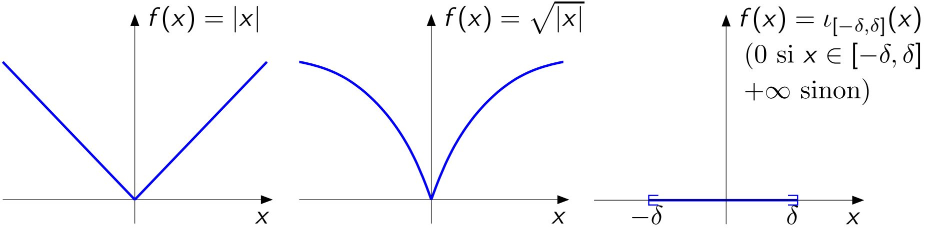
$$(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2)(\forall \alpha \in [0, 1])$$
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

$f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ est une **fonction convexe** si

$$(\forall (x,y) \in \mathcal{H}^2)(\forall \alpha \in [0,1]) \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

<u>Quelles sont les fonctions convexes</u> ?

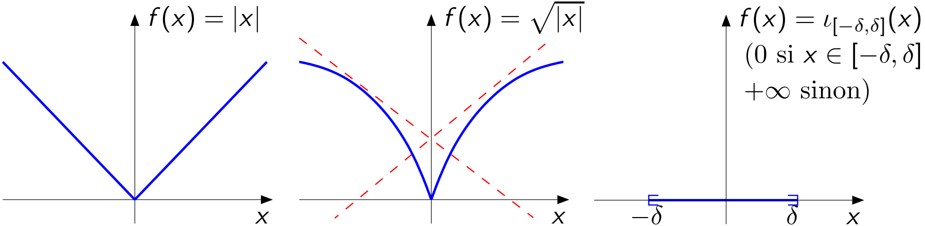


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

$f : \mathcal{H} \to \left]-\infty, +\infty\right]$ est une **fonction convexe** si

$$(\forall (x,y) \in \mathcal{H}^2)(\forall \alpha \in [0,1])$$
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Quelles sont les fonctions convexes ?



Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

$f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ est convexe ssi son épigraphe

$$\operatorname{epi} f = \left\{(x, \zeta) \in \operatorname{dom} f \times \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \leq \zeta\right\}$$

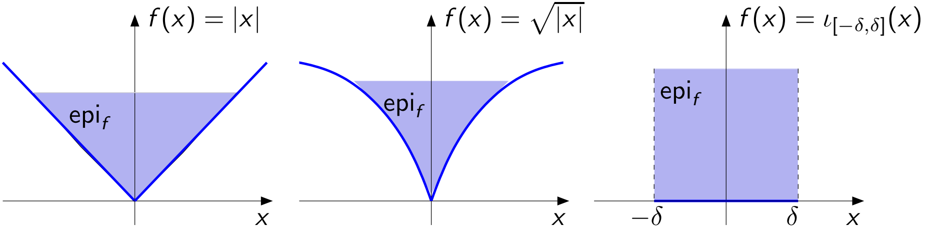
est convexe.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

$f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ est convexe ssi son épigraphe

$$\operatorname{epi} f = \big\{(x, \zeta) \in \operatorname{dom} f \times \mathbb{R} \;\big|\; f(x) \leq \zeta\big\}$$

est convexe.

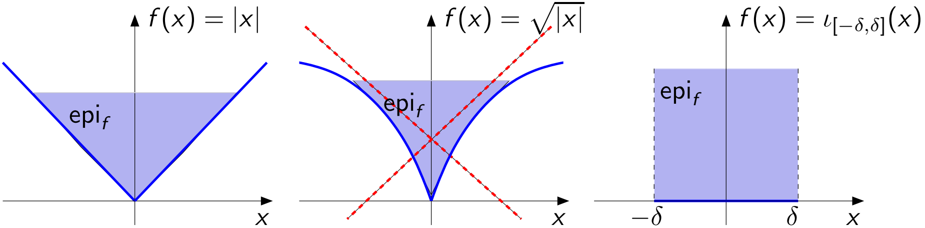


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

$f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ est convexe ssi son **épigraphe**

$$\text{epi}\, f = \left\{ (x, \zeta) \in \operatorname{dom} f \times \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \leq \zeta \right\}$$

est convexe.

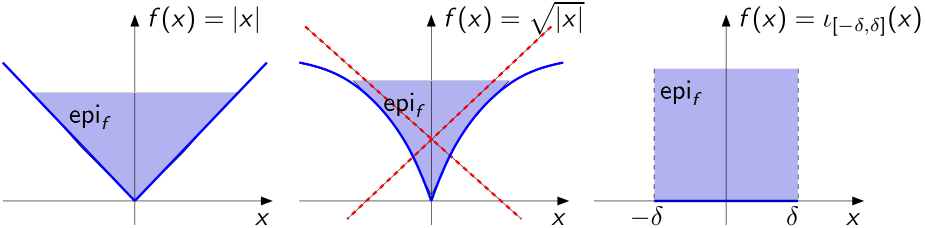


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

$f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ est convexe ssi son épigraphe

$$\operatorname{epi} f = \left\{ (x, \zeta) \in \operatorname{dom} f \times \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \leq \zeta \right\}$$

est convexe.



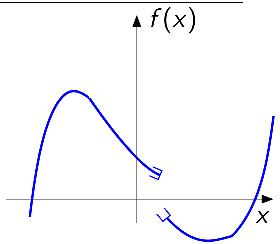
- $f : \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty[$ est concave si $-f$ est convexe.

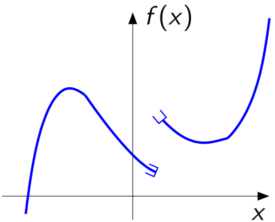
Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
f est une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i.) sur $\mathcal{H}$
si, pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$,

$$\lim_{i\to+\infty} \|x_i - x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq \liminf f(x_i).$$

Quelle est la fonction s.c.i ?



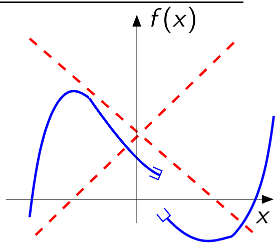


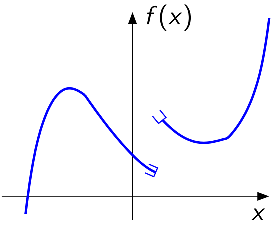
Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$.
f est une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i.) sur $\mathcal{H}$
si, pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$,

$$\lim_{i \to +\infty} \|x_i - x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq \liminf f(x_i).$$

Quelle est la fonction s.c.i ?



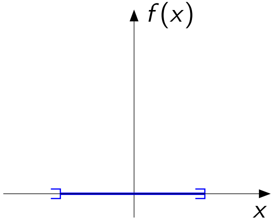


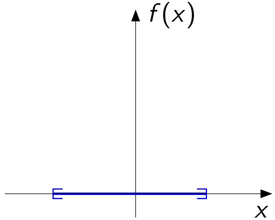
Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
f est une fonction **semi-continue inférieurement** (s.c.i.) sur $\mathcal{H}$ si, pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$,

$$\lim_{i\to+\infty} \|x_i - x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq \liminf f(x_i).$$

Quelle est la fonction s.c.i ?



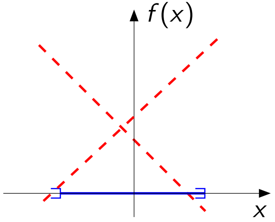


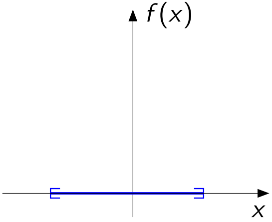
Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$.
f est une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i.) sur $\mathcal{H}$ si, pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$,

$$\lim_{i\to+\infty} \|x_i - x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq \liminf f(x_i).$$

Quelle est la fonction s.c.i ?





Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
f est une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i.) sur $\mathcal{H}$
si, pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$,

$$\lim_{i\to+\infty} \|x_i - x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \le \liminf f(x_i).$$

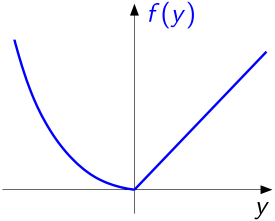
- Toute fonction continue sur $\mathcal{H}$ est s.c.i.
- $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ est s.c.i. ssi son épigraphe est fermé.
- Toute somme finie de fonctions s.c.i. (convexe) est s.c.i. (convexe).
- Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions s.c.i. (convexes). $\sup_{i\in I} f_i$ est s.c.i. (convexe).
- L'ensemble des fonctions convexes, s.c.i. et propres est noté $\Gamma_0(\mathcal{H})$.
- Si $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ alors, pour tout $x \in \mathcal{H}$ et $y \in \mathrm{dom}\, f$, $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha\ge 0}} f((1-\alpha)x + \alpha y) = f(x)$.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

La sous-différentielle (de Moreau) de f, notée ∂f,

Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

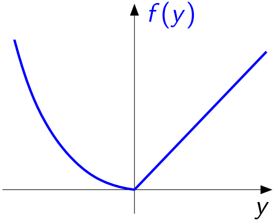
Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle (de Moreau) de f, notée ∂f,

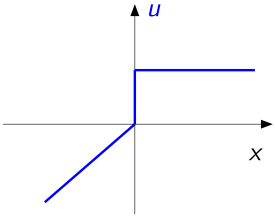


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle (de Moreau) de f, notée ∂f, est telle que

$$\begin{aligned}\partial f : \mathcal{H} &\to 2^{\mathcal{H}}\\ x &\to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u \rangle + f(x) \le f(y)\}\end{aligned}$$

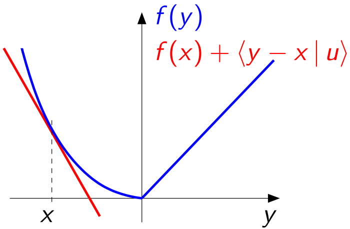


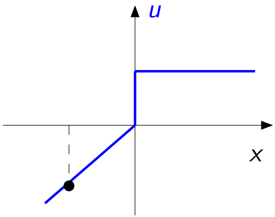


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La **sous-différentielle (de Moreau) de f**, notée ∂f, est telle que

$$\partial f : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$$
$$x \to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u\rangle + f(x) \leq f(y)\}$$

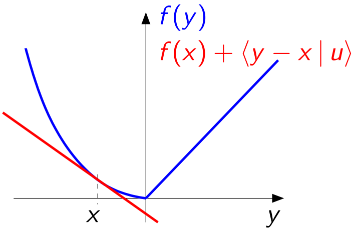


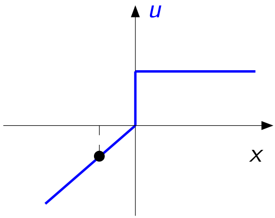


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle (de Moreau) de f, notée ∂f, est telle que

$$\partial f : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$$
$$x \to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u \rangle + f(x) \leq f(y)\}$$



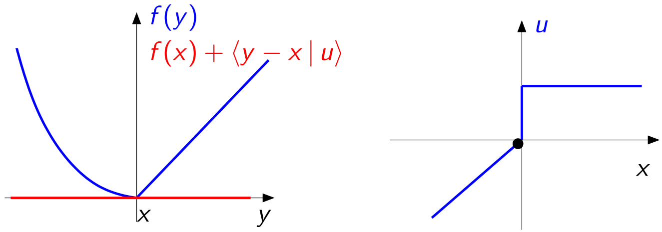


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.

La **sous-différentielle (de Moreau) de f**, notée ∂f, est telle que

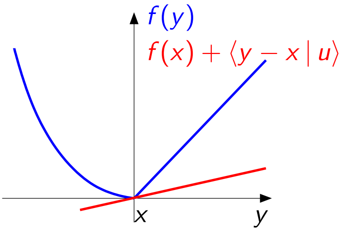
$$\partial f : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$$
$$x \to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u \rangle + f(x) \leq f(y)\}$$

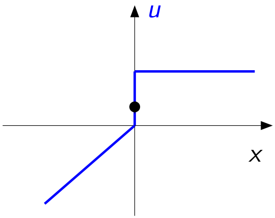


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle (de Moreau) de f, notée ∂f, est telle que

$$\partial f : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$$
$$x \to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u \rangle + f(x) \le f(y)\}$$

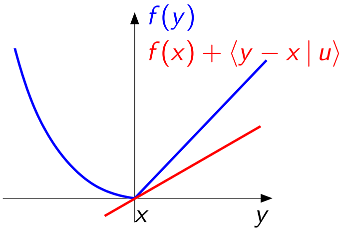


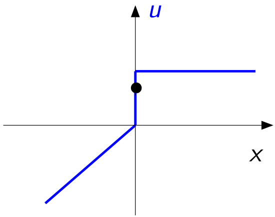


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle (de Moreau) de f, notée ∂f, est telle que

$$\partial f : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$$
$$x \to \{u \in \mathcal{H} \mid (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u\rangle + f(x) \leq f(y)\}$$

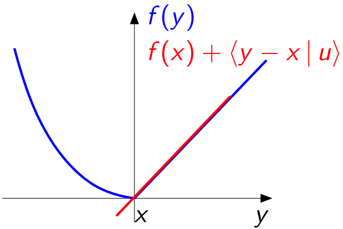


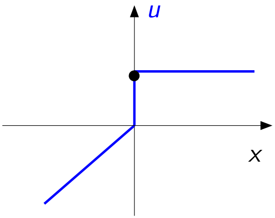


Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to\ ]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La **sous-différentielle (de Moreau) de f**, notée ∂f, est telle que

$$\begin{aligned} \partial f : \mathcal{H} &\to 2^{\mathcal{H}} \\ x &\to \{u \in \mathcal{H} \mid (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u\rangle + f(x) \leq f(y)\} \end{aligned}$$

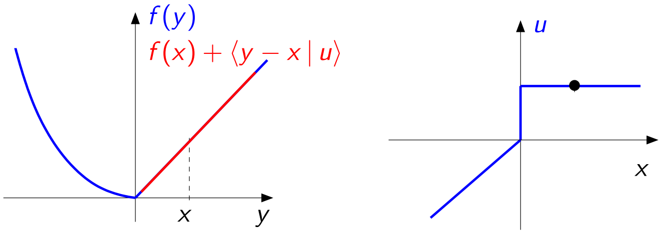




Sous-différentielle d'une fonction convexe : définitions

Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle (de Moreau) de f, notée ∂f, est telle que

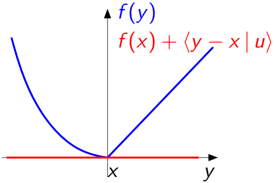
$$\partial f : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$$
$$x \to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u\rangle + f(x) \leq f(y)\}$$

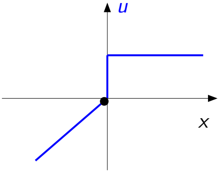


Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle de f, notée ∂f, est telle que

$$\begin{aligned} \partial f : \mathcal{H} &\to 2^{\mathcal{H}} \\ x &\to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u \rangle + f(x) \leq f(y)\} \end{aligned}$$





- **Règle de Fermat** : $0 \in \partial f(x) \Leftrightarrow (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x \,|\, 0 \rangle + f(x) \leq f(y)$
  $\Leftrightarrow x \in \mathrm{Argmin} f$

Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle de f, notée ∂f, est telle que

$$\begin{aligned} \partial f : \mathcal{H} &\to 2^{\mathcal{H}} \\ x &\to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u \rangle + f(x) \leq f(y)\} \end{aligned}$$

- $u \in \partial f(x)$ est un sous-gradient de f en x.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle de f, notée ∂f, est telle que

$$\begin{aligned} \partial f : \mathcal{H} &\to 2^{\mathcal{H}} \\ x &\to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u\rangle + f(x) \leq f(y)\} \end{aligned}$$

- $u \in \partial f(x)$ est un sous-gradient de f en x.
- Si $x \notin \mathrm{dom}\, f$ alors $\partial f(x) = \varnothing$.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle de f, notée ∂f, est telle que

$$\begin{aligned}\partial f : \mathcal{H} &\to 2^{\mathcal{H}}\\ x &\to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u \rangle + f(x) \leq f(y)\}\end{aligned}$$

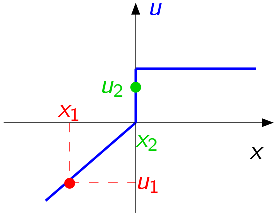
- $u \in \partial f(x)$ est un sous-gradient de f en x.
- Si $x \notin \operatorname{dom} f$ alors $\partial f(x) = \varnothing$.
- Pour tout $x \in \operatorname{dom} f$, $\partial f(x)$ est un convexe fermé.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle de f, notée ∂f, est telle que

$$\begin{aligned} \partial f : \mathcal{H} &\to 2^{\mathcal{H}} \\ x &\to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u \rangle + f(x) \leq f(y)\} \end{aligned}$$

- ∂f est un opérateur monotone :



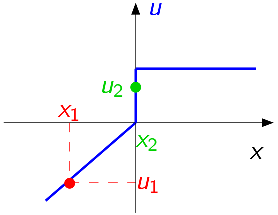
Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle de f, notée ∂f, est telle que

$$\begin{aligned} \partial f : \mathcal{H} &\to 2^{\mathcal{H}} \\ x &\to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u \rangle + f(x) \leq f(y)\} \end{aligned}$$

- ∂f est un opérateur monotone :

  Soient $u_1 \in \partial f(x_1)$ et $u_2 \in \partial f(x_2)$.

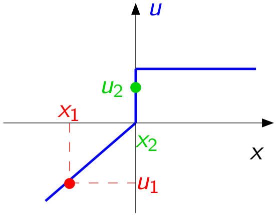


Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle de f, notée ∂f, est telle que

$$\begin{aligned} \partial f : \mathcal{H} &\to 2^{\mathcal{H}} \\ x &\to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u \rangle + f(x) \leq f(y)\} \end{aligned}$$

- **∂f est un opérateur monotone** :
  Soient $u_1 \in \partial f(x_1)$ et $u_2 \in \partial f(x_2)$.
  D'après la définition :
  $$\langle x_2 - x_1 | u_1 \rangle + f(x_1) \leq f(x_2)$$
  $$\langle x_1 - x_2 | u_2 \rangle + f(x_2) \leq f(x_1)$$



Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

Soit $f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
La sous-différentielle de f, notée ∂f, est telle que

$$\begin{aligned} \partial f : \mathcal{H} &\to 2^{\mathcal{H}} \\ x &\to \{u \in \mathcal{H} \,|\, (\forall y \in \mathcal{H})\ \langle y - x | u \rangle + f(x) \leq f(y)\} \end{aligned}$$

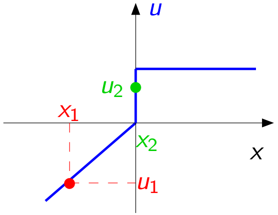
- ∂f est un opérateur monotone :

  Soient $u_1 \in \partial f(x_1)$ et $u_2 \in \partial f(x_2)$.

  D'après la définition :

  $$\langle x_2 - x_1 | u_1 \rangle + f(x_1) \leq f(x_2)$$
  $$\langle x_1 - x_2 | u_2 \rangle + f(x_2) \leq f(x_1)$$

  ce qui conduit à $\langle x_1 - x_2 \,|\, u_1 - u_2 \rangle \geq 0$.



Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

- Sous-différentielle d'une fonction convexe et propre
  - Monotone
  - Si f est différentiable au sens de Gâteaux en x alors $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$

Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

- Sous-différentielle d'une fonction convexe et propre
  - Monotone
  - Si f est différentiable au sens de Gâteaux en x alors $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$

$$(\forall y \in \mathcal{H}) \qquad \langle \nabla f(x) \mid y \rangle = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha \neq 0}} \frac{f(x+\alpha y) - f(x)}{\alpha}.$$

<u>Preuve</u> :
Pour tout $\alpha \in [0,1]$ et $y \in \mathcal{H}$,

$$f\big(x + \alpha(y-x)\big) \leq (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y)$$

$$\Rightarrow \quad \langle \nabla f(x) \mid y - x \rangle = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha \neq 0}} \frac{f\big(x+\alpha(y-x)\big) - f(x)}{\alpha} \leq f(y) - f(x)$$

D'où $\nabla f(x) \in \partial f(x)$.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

- Sous-différentielle d'une fonction convexe et propre
  - Monotone
  - Si f est différentiable au sens de Gâteaux en x alors $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$

$$(\forall y \in \mathcal{H}) \qquad \langle \nabla f(x) \mid y \rangle = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha \neq 0}} \frac{f(x+\alpha y) - f(x)}{\alpha}.$$

Preuve :
Inversement, si $u \in \partial f(x)$, alors, pour tout $\alpha \in [0, +\infty[$ et $y \in \mathcal{H}$,

$$f(x+\alpha y) \geq f(x) + \langle u \mid x + \alpha y - x \rangle$$
$$\Rightarrow \quad \langle \nabla f(x) \mid y \rangle = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha \neq 0}} \frac{f(x+\alpha y) - f(x)}{\alpha} \geq \langle u \mid y \rangle$$

En choisissant $y = u - \nabla f(x)$, on en déduit que $\|u - \nabla f(x)\|^2 \leq 0$.
D'où $u = \nabla f(x)$.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

- Sous-différentielle d'une fonction convexe et propre
  - Monotone
  - Si f est différentiable au sens de Gâteaux en x alors $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$
  - Non nécessairement monotone maximal

Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

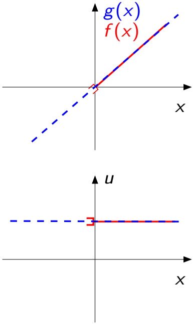
- Sous-différentielle d'une fonction convexe et propre
  - Monotone
  - Si f est différentiable au sens de Gâteaux en x alors $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$
  - Non nécessairement monotone maximal

Contre-exemple : Pour tout $x \in \mathcal{H}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}, \qquad g(x) = x$$

$$\Rightarrow \quad \partial f(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x > 0 \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}, \qquad \partial g(x) = \{1\}.$$

D'où $\mathrm{gra}\,\partial f = \,]0, +\infty[\, \times \{1\} \subset \mathbb{R} \times \{1\} = \mathrm{gra}\,\partial g$.



Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

- Sous-différentielle d'une fonction convexe, propre et s.c.i.
  - Monotone maximal

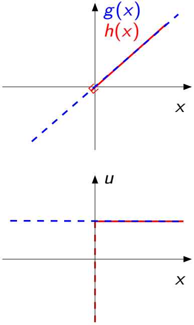
Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

- Sous-différentielle d'une fonction convexe, propre et s.c.i.
  - Monotone maximal

Exemple : Pour tout $x \in \mathcal{H}$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}, \quad g(x) = x$$

$$\Rightarrow \quad \partial h(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x > 0 \\ ]-\infty, 1] & \text{si } x = 0 \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}, \quad \partial g(x) = \{1\}.$$



D'où $\operatorname{gra}\partial h \not\subset \operatorname{gra}\partial g$.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : propriétés

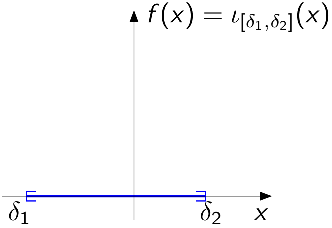
- Sous-différentielle d'une fonction convexe, propre et s.c.i.
  - Monotone maximal
  - Si $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, équivalence entre les deux propriétés.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : exemple

Soit $C \subset \mathcal{H}$.
La **fonction indicatrice de C** est

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \iota_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple : $C = [\delta_1, \delta_2]$



Sous-différentielle d'une fonction convexe : exemple

Soit $C \subset \mathcal{H}$.
La fonction indicatrice de C est

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \iota_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $\iota_C \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ ssi C est un convexe fermé non vide.
  Preuve : $\mathrm{epi}_{\iota_C} = C \times [0, +\infty[$.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : exemple

Soit $C \subset \mathcal{H}$.
La **fonction indicatrice de C** est

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \iota_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $\iota_C \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ ssi C est un convexe fermé non vide.
  Preuve : $\mathrm{epi}_{\iota_C} = C \times [0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\partial \iota_C(x)$ est le **cône normal** à C en x défini par

$$N_C(x) = \begin{cases} \{u \in \mathcal{H} \mid (\forall y \in C) \ \ \langle u \mid y - x \rangle \le 0\} & \text{si } x \in C \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sous-différentielle d'une fonction convexe : exemple

Soit $C \subset \mathcal{H}$.
La fonction indicatrice de C est

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \iota_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $\iota_C \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ ssi C est un convexe fermé non vide.
  Preuve : $\mathrm{epi}_{\iota_C} = C \times [0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\partial \iota_C(x)$ est le cône normal à C en x défini par

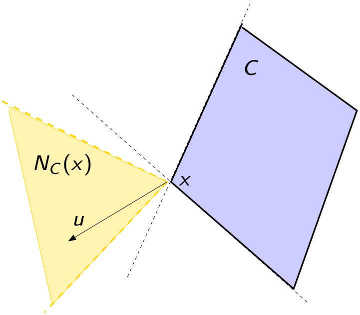
$$N_C(x) = \begin{cases} \{u \in \mathcal{H} \mid (\forall y \in C) \;\; \langle u \mid y - x \rangle \leq 0\} & \text{si } x \in C \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

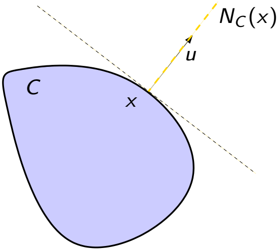
- Si $x \in \operatorname{int} C$ alors $N_C(x) = \{0\}$.

Sous-différentielle d'une fonction convexe : exemple

Pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\partial\iota_C(x)$ est le côné normal à C en x défini par

$$N_C(x) = \begin{cases} \{u \in \mathcal{H} \mid (\forall y \in C) \;\; \langle u \mid y - x\rangle \leq 0\} & \text{si } x \in C \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$





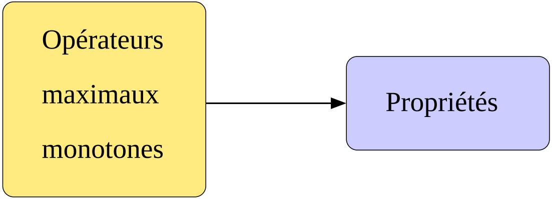
Sous-différentielle d'une fonction convexe : exemple

Pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\partial\iota_C(x)$ est le cône normal à C en x défini par

$$N_C(x) = \begin{cases} \big\{u \in \mathcal{H} \;\big|\; (\forall y \in C) \;\; \langle u \mid y - x\rangle \le 0\big\} & \text{si } x \in C \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Si C est un espace vectoriel alors, pour tout $x \in C$, $N_C(x) = C^{\perp}$.
- Soit $c \in \mathcal{H}$, $\rho \in\;]0, +\infty[$ et $C = \overline{\mathcal{B}}(c, \rho) = \big\{y \in \mathcal{H} \;\big|\; \|y - c\| \le \rho\big\}$. Pour tout $x \in C$,

$$N_C(x) = \begin{cases} \big\{\alpha(x - c) \;\big|\; \alpha \in [0, +\infty[\big\} & \text{si } \|x - c\| = \rho \\ \{0\} & \text{si } \|x - c\| < \rho. \end{cases}$$


Opérateurs
maximaux
monotones
Propriétés

Opérateurs monotones maximaux : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal.
Pour tout $x \in \mathcal{H}$, Ax est un convexe fermé.

<u>Preuve</u> :

$$Ax = \bigcap_{(x',u')\in \operatorname{gra} A} \left\{ u \in \mathcal{H} \;\middle|\; \left\langle x - x' \mid u - u' \right\rangle \geq 0 \right\}.$$

Donc Ax intersection de convexes fermés.

Opérateurs monotones maximaux : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal.
Pour tout $x \in \mathcal{H}$, Ax est un convexe fermé.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Si $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est un opérateur monotone maximal de domaine borné alors A est surjectif i.e. $(\forall u \in \mathcal{H})(\exists x \in \mathcal{H})\ u \in Ax$.

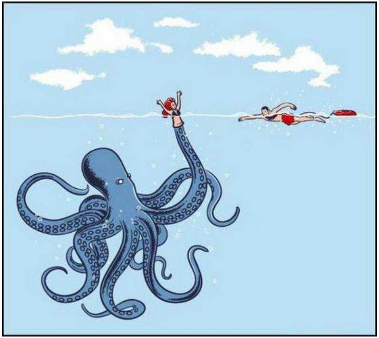
Opérateurs monotones maximaux : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert.
Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ et $B\colon \mathcal{G} \to 2^{\mathcal{G}}$ deux opérateurs monotones maximaux.
Les opérateurs suivants sont monotones maximaux :

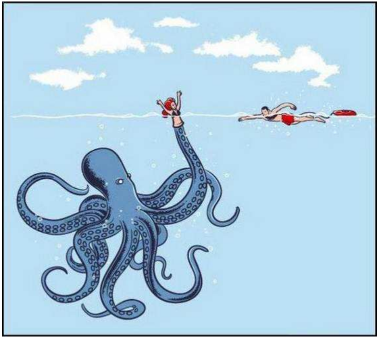
- $y + \gamma\rho A(\rho \cdot + z)$ où $(y, z) \in \mathcal{H}^2$, $\gamma \in [0, +\infty[$ et $\rho \in \mathbb{R}$
- $A \times B$
- A^{-1}.

Inverse d'un opérateur

maximal monotone



Inverse d’un opérateur maximal monotone $\rightarrow$ A quoi ça sert ?



Conjuguée : définition

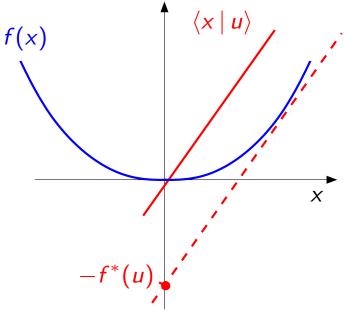
Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty,+\infty]$.
La conjuguée de f est $f^*\colon \mathcal{H} \to [-\infty,+\infty]$ telle que

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad f^*(u) = \sup_{x\in\mathcal{H}} \big(\langle x \mid u\rangle - f(x)\big) .$$

Conjuguée : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty,+\infty]$.
La conjuguée de f est $f^*\colon \mathcal{H} \to [-\infty,+\infty]$ telle que

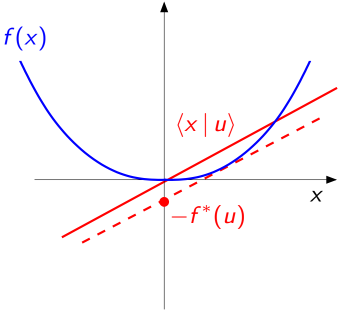
$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad f^*(u) = \sup_{x\in \operatorname{dom} f} \big(\langle x \mid u\rangle - f(x)\big)$$



Conjuguée : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f\colon \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$.
La conjuguée de f est $f^*\colon \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty]$ telle que

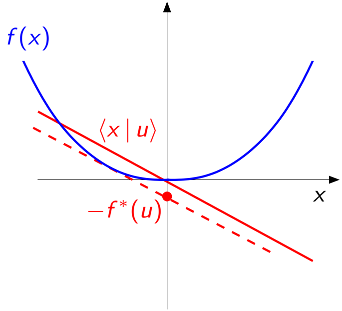
$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad f^*(u) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} \big(\langle x \mid u \rangle - f(x) \big)$$



Conjuguée : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
La conjuguée de f est $f^*\colon \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty]$ telle que

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad \boxed{f^*(u) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} \big(\langle x \mid u \rangle - f(x) \big)}$$



Conjuguée : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty,+\infty]$.
La conjuguée de f est $f^*\colon \mathcal{H} \to [-\infty,+\infty]$ telle que

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad f^*(u) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} \big(\langle x \mid u \rangle - f(x) \big)$$

Exemples :

- $f = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2 \Rightarrow f^* = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$

  Preuve : Pour tout $(x,u) \in \mathcal{H}^2$, $\langle x \mid u \rangle - \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\|u-x\|^2$ est maximum en $x = u$.
  Par conséquent, $f^*(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$.

Conjuguée : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f\colon \mathcal{H} \to\ ]-\infty,+\infty]$.
La conjuguée de f est $f^*\colon \mathcal{H} \to [-\infty,+\infty]$ telle que

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad f^*(u) = \sup_{x\in \mathrm{dom}\, f} \big(\langle x \mid u\rangle - f(x)\big)$$

Exemples :

- $f = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2 \Rightarrow f^* = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$.
- Soit $\phi\colon \mathbb{R} \to\ ]-\infty,+\infty]$ une fonction paire. $(\phi \circ \|\cdot\|)^* = \phi^* \circ \|\cdot\|$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^N)\ f(x) = \frac{1}{q}\|x\|_q^q$ avec $q \in]1,+\infty[$
  $\Rightarrow (\forall u \in \mathbb{R}^N)\ \ f^*(u) = \frac{1}{q^*}\|u\|_{q^*}^{q^*}$ avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$

Conjuguée : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
La **conjuguée** de f est $f^*\colon \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty]$ telle que

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad f^*(u) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} \big(\langle x \mid u \rangle - f(x) \big)$$

- Si f est paire alors f^* est paire.

<u>Preuve</u> :

$$\begin{aligned}(\forall u \in \mathcal{H}) \quad f^*(-u) &= \sup_{x \in \mathcal{H}} \big(\langle x \mid -u \rangle - f(x) \big)\\ &= \sup_{x \in \mathcal{H}} \big(\langle x \mid u \rangle - f(-x) \big)\\ &= \sup_{x \in \mathcal{H}} \big(\langle x \mid u \rangle - f(x) \big)\\ &= f^*(u)\end{aligned}$$

Conjuguée : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
La conjuguée de f est $f^*\colon \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty]$ telle que

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad f^*(u) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} \big(\langle x \mid u \rangle - f(x) \big)$$

- Si f est paire alors f^* est paire.
- Pour tout $\alpha \in \,]0, +\infty[$, $(\alpha f)^* = \alpha f^*(\cdot/\alpha)$.
- Pour tout $(y, v) \in \mathcal{H}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
  $\big(f(\cdot - y) + \langle \cdot \mid v \rangle + \alpha\big)^* = f^*(\cdot - v) + \langle y \mid \cdot - v \rangle - \alpha$.
- Soit $\mathcal{G}$ un espace de Hilbert et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ un isomorphisme.
  $(f \circ L)^* = f^* \circ (L^{-1})^*$.
- f^* est s.c.i. et convexe.

Conjuguée : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
La conjuguée de f est $f^* : \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty]$ telle que

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad f^*(u) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} \big(\langle x \mid u \rangle - f(x) \big)$$

Théorème de Moreau-Fenchel
Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
f est s.c.i. et convexe ssi $f^{**} = f$.

Conjuguée : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
La conjuguée de f est $f^* : \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty]$ telle que

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad f^*(u) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} \big(\langle x \mid u \rangle - f(x) \big)$$

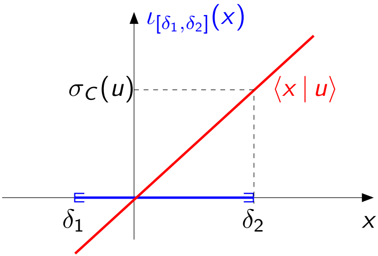
Théorème de Moreau-Fenchel
Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre.
f est s.c.i. et convexe ssi $f^{**} = f$.

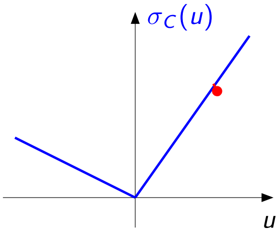
- Conséquence : Si $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ alors $f^* \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.

Conjuguée : exemple

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $C \subset \mathcal{H}$.
σ_C est la **fonction d'appui** de C si

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad \sigma_C(u) = \sup_{x \in C} \langle x \mid u \rangle = \iota_C^*(u).$$

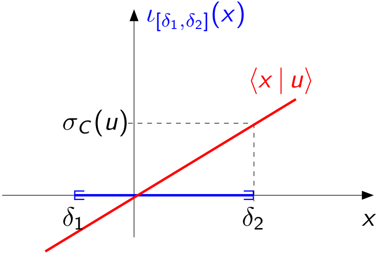


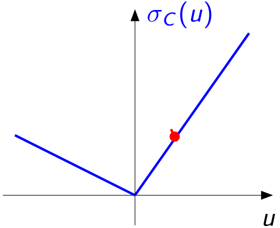


Conjuguée : exemple

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $C \subset \mathcal{H}$.
σ_C est la fonction d'appui de C si

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad \sigma_C(u) = \sup_{x \in C} \langle x \mid u \rangle$$
$$= \iota_C^*(u).$$

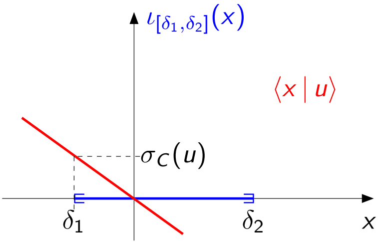


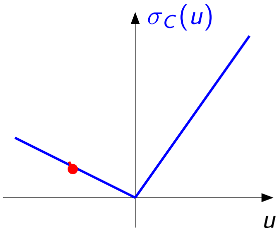


Conjuguée : exemple

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $C \subset \mathcal{H}$.
σ_C est la fonction d'appui de C si

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \qquad \sigma_C(u) = \sup_{x \in C} \langle x \mid u \rangle$$
$$= \iota_C^*(u).$$





Conjuguée : exemple

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
$f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ est positive homogène si

$$(\forall x \in \mathcal{H})(\forall \alpha \in \,]0, +\infty[) \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

f est positive homogène et appartient à $\Gamma_0(\mathcal{H})$ ssi $f = \sigma_C$ où C est un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.

Conjuguée : exemple

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
$f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ est **positive homogène** si

$$(\forall x \in \mathcal{H})(\forall \alpha \in \,]0, +\infty[) \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

f est positive homogène et appartient à $\Gamma_0(\mathcal{H})$ ssi $f = \sigma_C$ où C est un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.

<u>Preuve</u> : $(\Leftarrow)$
$f = \iota_C^*$ et $\iota_C \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. D'où $\sigma_C \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.
De plus, $(\forall x \in \mathcal{H})$ $(\forall \alpha \in \,]0, +\infty[)$ $\sigma_C(\alpha x) = \alpha \sigma_C(x)$.

Conjuguée : exemple

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
$f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty,+\infty]$ est positive homogène si

$$(\forall x \in \mathcal{H})(\forall \alpha \in \,]0,+\infty[) \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

f est positive homogène et appartient à $\Gamma_0(\mathcal{H})$ ssi $f = \sigma_C$ où C est un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.

<u>Preuve</u> : $(\Rightarrow)$
Soit $y \in \operatorname{dom} f$.
$f(0) = \lim_{\alpha\to 0, \alpha\geq 0} f\big((1-\alpha)0 + \alpha y\big) = \lim_{\alpha \to 0} \alpha f(y) = 0$.
Soit $C = \big\{u \in \mathcal{H} \;\big|\; (\forall x \in \mathcal{H})\, \langle x \mid u\rangle \leq f(x)\big\}$.
On a, pour tout $u \in C$,
$f^*(u) = \sup_{x\in\mathcal{H}} \langle x \mid u\rangle - f(x) \leq 0 = \langle 0 \mid u\rangle - f(0) \leq f^*(u)$.
D'où $f^*(u) = 0$.

Conjuguée : exemple

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
$f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ est positive homogène si

$$(\forall x \in \mathcal{H})(\forall \alpha \in \,]0, +\infty[) \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

f est positive homogène et appartient à $\Gamma_0(\mathcal{H})$ ssi $f = \sigma_C$ où C est un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.

Preuve : $(\Rightarrow)$
De plus, pour tout $u \notin C$, il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que $\langle x \mid u \rangle > f(x)$. On a alors, pour tout $\alpha \in \,]0, +\infty[$,
$f^*(u) \geq \langle \alpha x \mid u \rangle - f(\alpha x) = \alpha\big(\langle x \mid u \rangle - f(x)\big)$. En faisant tendre α vers $+\infty$, on en deduit que $f^*(u) = +\infty$.
En conclusion, $f^* = \iota_C \in \Gamma_0(\mathcal{H}) \Rightarrow f = \sigma_C$ et C est un convexe fermé non vide.

Conjuguée : exemples de fonctions d'appui

- Soit $f : \mathbb{R} \to \,]-\infty, +\infty] : x \mapsto \begin{cases} \delta_1 x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \delta_2 x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
  avec $-\infty \leq \delta_1 < \delta_2 \leq +\infty$.
  On a $f = \sigma_C$ où C est un intervalle réel fermé tel que $\inf C = \delta_1$ et $\sup C = \delta_2$.

Conjuguée : exemples de fonctions d'appui

- Soit $f\colon \mathbb{R} \to \,]-\infty,+\infty] : x \mapsto \begin{cases} \delta_1 x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \delta_2 x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
  avec $-\infty \leq \delta_1 < \delta_2 \leq +\infty$.
  On a $f = \sigma_C$ où C est un intervalle réel fermé tel que $\inf C = \delta_1$ et $\sup C = \delta_2$.

- Soit f une norme ℓ^q de $\mathbb{R}^N$ avec $q \in [1,+\infty]$.
  On a $f = \sigma_C$ où

$$C = \left\{ y \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \|y\|_{q^*} \leq 1 \right\} \qquad \text{avec } \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1.$$

Conjuguée : exemples de fonctions d'appui

- Soit $f : \mathbb{R} \to \,]-\infty, +\infty] : x \mapsto \begin{cases} \delta_1 x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \delta_2 x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
  avec $-\infty \leq \delta_1 < \delta_2 \leq +\infty$.
  On a $f = \sigma_C$ où C est un intervalle réel fermé tel que $\inf C = \delta_1$ et $\sup C = \delta_2$.

- Soit f une norme ℓ^q de $\mathbb{R}^N$ avec $q \in [1, +\infty]$.
  On a $f = \sigma_C$ où

$$C = \left\{ y \in \mathbb{R}^N \mid \|y\|_{q^*} \leq 1 \right\} \qquad \text{avec } \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1.$$

<u>Cas particulier</u> : norme ℓ^1 de $\mathbb{R}^N$: $C = [-1, 1]^N$.

Conjuguée : sous-différentielle

Inégalité de Fenchel-Young : si f est propre alors

$$\left(\forall (x, u) \in \mathcal{H}^2\right) \qquad f(x) + f^*(u) \geq \langle x \mid u \rangle \,.$$

Conjuguée : sous-différentielle

Inégalité de Fenchel-Young : si f est propre alors

$$(\forall (x,u) \in \mathcal{H}^2) \qquad f(x) + f^*(u) \geq \langle x \mid u \rangle \, .$$

<u>Preuve</u> :

Puisque f est propre, $f^*(u) = \sup_{y \in \mathcal{H}} \langle u \mid y \rangle - f(y) \neq -\infty$ et $f^*(u) \geq \langle x \mid u \rangle - f(x)$.

Conjuguée : sous-différentielle

Inégalité de Fenchel-Young : si f est propre alors

$$\big(\forall (x,u) \in \mathcal{H}^2\big) \qquad f(x) + f^*(u) \geq \langle x \mid u \rangle \,.$$

Si f est propre alors

$$\big(\forall (x,u) \in \mathcal{H}^2\big) \qquad u \in \partial f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + f^*(u) = \langle x \mid u \rangle \,.$$

Conjuguée : sous-différentielle

Inégalité de Fenchel-Young : si f est propre alors

$$(\forall (x,u) \in \mathcal{H}^2) \qquad f(x) + f^*(u) \geq \langle x \mid u \rangle \,.$$

Si f est propre alors

$$(\forall (x,u) \in \mathcal{H}^2) \qquad u \in \partial f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + f^*(u) = \langle x \mid u \rangle \,.$$

<u>Preuve</u> :

En effet,

$$\begin{aligned} f(x) + f^*(u) = \langle x \mid u \rangle \quad & \Leftrightarrow \quad (\forall y \in \mathcal{H}) \ \langle u \mid y \rangle - f(y) \leq \langle x \mid u \rangle - f(x) \\ & \Leftrightarrow \quad (\forall y \in \mathcal{H}) \ f(y) \geq f(x) + \langle u \mid y - x \rangle \end{aligned}$$

Conjuguée : sous-différentielle

Soit $f\colon \mathcal{H} \to \left]-\infty, +\infty\right]$ propre et soit $x \in \mathcal{H}$.
Si $u \in \partial f(x)$ alors $x \in \partial f^*(u)$.

Conjuguée : sous-différentielle

Soit $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ propre et soit $x \in \mathcal{H}$.
Si $u \in \partial f(x)$ alors $x \in \partial f^*(u)$.

<u>Preuve</u> :

$$
\begin{array}{rcl}
u \in \partial f(x) & \Leftrightarrow & (\forall y \in \mathcal{H})\ \ f(y) \geq f(x) + \langle u \mid y - x \rangle \\
& \Leftrightarrow & (\forall y \in \mathcal{H})\ \ f(x) - \langle u \mid x \rangle + \langle u \mid y \rangle - f(y) \leq 0 \\
& \Rightarrow & f(x) - \langle u \mid x \rangle + f^*(u) \leq 0 \\
& \Leftrightarrow & (\forall v \in \mathcal{H})\ \ \langle v \mid x \rangle - f(x) \geq f^*(u) + \langle x \mid v - u \rangle \\
\text{Fenchel-Young} & \Rightarrow & (\forall v \in \mathcal{H})\ \ f^*(v) \geq f^*(u) + \langle x \mid v - u \rangle \\
& \Leftrightarrow & x \in \partial f^*(u)
\end{array}
$$

Conjuguée : sous-différentielle

Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ propre et soit $x \in \mathcal{H}$.
Si $u \in \partial f(x)$ alors $x \in \partial f^*(u)$.

Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $x \in \mathcal{H}$.
$u \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(u)$

Conjuguée : sous-différentielle

Soit $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty,+\infty]$ propre et soit $x \in \mathcal{H}$.
Si $u \in \partial f(x)$ alors $x \in \partial f^*(u)$.

Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $x \in \mathcal{H}$.
$u \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(u)$

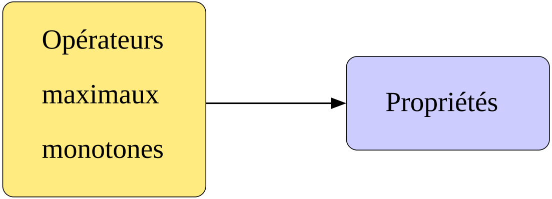
Preuve :
On a $u \in \partial f(x) \Rightarrow x \in \partial f^*(u)$.
De plus, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H}) \Rightarrow f^* \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $f^{**} = f$.
D'où $x \in \partial f^*(u) \Rightarrow u \in \partial f^{**}(x) = \partial f(x)$.

Conjuguée : sous-différentielle

Soit $f\colon \mathcal{H} \to \left]-\infty, +\infty\right]$ propre et soit $x \in \mathcal{H}$.
Si $u \in \partial f(x)$ alors $x \in \partial f^*(u)$.

Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $x \in \mathcal{H}$.
$u \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(u)$

Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.
$(\partial f)^{-1} = \partial f^*$


Opérateurs
maximaux
monotones
Propriétés

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soient A et B deux opérateurs monotones maximaux.
$A + B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement monotone maximal.

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soient A et B deux opérateurs monotones maximaux.
$A + B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement monotone maximal.

Contre-exemple :
Soit $c \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $A = N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}(x) = \dots$$

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soient A et B deux opérateurs monotones maximaux.
$A+B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement monotone maximal.

Contre-exemple :
Soit $c \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $A = N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \{\alpha(x-c) \mid \alpha \in [0,+\infty[\} & \text{si } \|x-c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x-c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases}$$

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soient A et B deux opérateurs monotones maximaux.
$A+B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement monotone maximal.

Contre-exemple :

Soit $c \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $A = N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}$ et $B = N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \{\alpha(x-c) \mid \alpha \in [0,+\infty[\} & \text{si } \|x-c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x-c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}(x) = \ldots$$

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soient A et B deux opérateurs monotones maximaux.
$A+B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement monotone maximal.

Contre-exemple :
Soit $c \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $A = N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}$ et $B = N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \{\alpha(x-c) \mid \alpha \in [0,+\infty[\} & \text{si } \|x-c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x-c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \{\beta(x+c) \mid \beta \in [0,+\infty[\} & \text{si } \|x+c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x+c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soient A et B deux opérateurs monotones maximaux.
$A+B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement monotone maximal.

Contre-exemple :
Soit $c \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $A = N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}$ et $B = N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \{\alpha(x-c) \mid \alpha \in [0,+\infty[\} & \text{si } \|x-c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x-c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \{\beta(x+c) \mid \beta \in [0,+\infty[\} & \text{si } \|x+c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x+c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a ainsi $\operatorname{dom}(A+B) = \dots$

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soient A et B deux opérateurs monotones maximaux.
$A+B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement monotone maximal.

Contre-exemple :
Soit $c \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $A = N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}$ et $B = N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \{\alpha(x-c) \mid \alpha \in [0,+\infty[\} & \text{si } \|x-c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x-c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \{\beta(x+c) \mid \beta \in [0,+\infty[\} & \text{si } \|x+c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x+c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a ainsi $\operatorname{dom}(A+B) = \{0\}$

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soient A et B deux opérateurs monotones maximaux.
$A+B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement monotone maximal.

Contre-exemple :
Soit $c \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $A = N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}$ et $B = N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \big\{\alpha(x-c) \;\big|\; \alpha \in [0,+\infty[\big\} & \text{si } \|x-c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x-c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \big\{\beta(x+c) \;\big|\; \beta \in [0,+\infty[\big\} & \text{si } \|x+c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x+c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a ainsi $\operatorname{dom}(A+B) = \{0\}$ et $(A+B)(0) = \ldots$.

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soient A et B deux opérateurs monotones maximaux.
$A+B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement monotone maximal.

Contre-exemple :
Soit $c \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $A = N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}$ et $B = N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \big\{\alpha(x-c) \bigm| \alpha \in [0,+\infty[\big\} & \text{si } \|x-c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x-c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \big\{\beta(x+c) \bigm| \beta \in [0,+\infty[\big\} & \text{si } \|x+c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x+c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a ainsi $\operatorname{dom}(A+B) = \{0\}$ et $(A+B)(0) = \big\{\gamma c \bigm| \gamma \in \mathbb{R}\big\}$.

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soient A et B deux opérateurs monotones maximaux.
$A+B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement monotone maximal.

Contre-exemple :
Soit $c \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $A = N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}$ et $B = N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \big\{\alpha(x-c) \;\big|\; \alpha \in [0,+\infty[\big\} & \text{si } \|x-c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x-c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \big\{\beta(x+c) \;\big|\; \beta \in [0,+\infty[\big\} & \text{si } \|x+c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x+c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a ainsi $\operatorname{dom}(A+B) = \{0\}$ et $(A+B)(0) = \big\{\gamma c \;\big|\; \gamma \in \mathbb{R}\big\}$. Donc ?

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soient A et B deux opérateurs monotones maximaux.
$A+B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement monotone maximal.

Contre-exemple :
Soit $c \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $A = N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}$ et $B = N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \left\{\alpha(x-c) \;\middle|\; \alpha \in [0,+\infty[\right\} & \text{si } \|x-c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x-c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$N_{\overline{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}(x) = \begin{cases} \left\{\beta(x+c) \;\middle|\; \beta \in [0,+\infty[\right\} & \text{si } \|x+c\| = \|c\| \\ \{0\} & \text{si } \|x+c\| < \|c\| \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a ainsi $\operatorname{dom}(A+B) = \{0\}$ et $(A+B)(0) = \left\{\gamma c \;\middle|\; \gamma \in \mathbb{R}\right\}$. Donc $A+B$ est de domaine borné mais n'est pas surjectif.

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Si A et B deux opérateurs monotones maximaux de $\mathcal{H}$ dans $2^{\mathcal{H}}$ tels que l'une des propriétés suivantes soient vérifiées :

- $\operatorname{dom} B = \mathcal{H}$
- $\operatorname{dom} A \cap \operatorname{int}(\operatorname{dom} B) \neq \varnothing$
- $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} A - \operatorname{dom} B)$

alors $A + B$ est monotone maximal.

Opérateurs monotones maximaux : somme

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Si A et B deux opérateurs monotones maximaux de $\mathcal{H}$ dans $2^{\mathcal{H}}$ tels que l'une des propriétés suivantes soient vérifiées :

- $\mathrm{dom}\, B = \mathcal{H}$
- $\mathrm{dom}\, A \cap \mathrm{int}\,(\mathrm{dom}\, B) \neq \varnothing$
- $0 \in \mathrm{int}\,(\mathrm{dom}\, A - \mathrm{dom}\, B)$

alors $A + B$ est monotone maximal.

<u>Conséquence</u> : Soit $\alpha \in [0, +\infty[$. Si A est monotone maximale alors $A + \alpha \mathrm{Id}$ est monotone maximal.

Opérateurs monotones maximaux : transformée linéaire

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert.
Si un opérateur monotone maximal $B\colon \mathcal{G} \to 2^{\mathcal{G}}$ est $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ sont tels que l'une des propriétés suivantes soient vérifiées :

- L est surjectif
- $0 \in \operatorname{int}\left(\operatorname{dom} B - \operatorname{ran} L\right)$

alors $L^* B L$ est monotone maximal.

Opérateurs monotones maximaux : transformée linéaire

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert.
Si un opérateur monotone maximal $B\colon \mathcal{G} \to 2^{\mathcal{G}}$ est $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ sont tels que l'une des propriétés suivantes soient vérifiées :

- L est surjectif
- $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} B - \operatorname{ran} L)$

alors L^*BL est monotone maximal.

Conséquence : Soit $\mu \in \,]0, +\infty[$.
Si A est monotone maximal et $LL^* = \mu \mathrm{Id}$ alors L^*AL est monotone maximal.

Preuve : $LL^* = \mu \mathrm{Id} \Rightarrow \operatorname{ran} L = \mathcal{H}$.

2ème Partie : Contractions

1. Généralités sur les contractions
   - Définition
   - Propriétés
   - Exemples
   - Résolvante

2. Opérateur proximal
   - Définition
   - Propriétés
   - Exemples

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$.
A est une contraction si $\left(\forall (x,y) \in C^2\right) \quad \|Ax - Ay\| \leq \|x - y\|$.

Si $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est une contraction et $\alpha \in [-1, 1]$,
alors $\mathrm{Id} + \alpha A$ est monotone maximal.

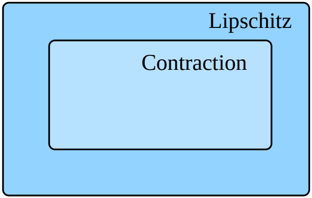
Preuve :
$\mathrm{Id} + \alpha A$ est continu sur $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $(x, y) \in \mathcal{H}^2$,

$$\begin{aligned}
\langle (\mathrm{Id} + \alpha A)x - (\mathrm{Id} + \alpha A)y \mid x - y \rangle &= \|x - y\|^2 - \alpha \langle Ax - Ay \mid x - y \rangle \\
&\geq \|x - y\|^2 - |\alpha| \|Ax - Ay\| \|x - y\| \\
&\geq (1 - |\alpha|) \|x - y\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$.
A est une contraction si $(\forall (x,y) \in C^2) \quad \|Ax - Ay\| \leq \|x - y\|$.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$ et $\nu \in \,]0,+\infty[$
A est ν-lipschitzien si $\nu^{-1}A$ est une contraction.



Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$
A est une contraction ferme si

$$(\forall (x,u) \in \operatorname{gra} A)(\forall (y,v) \in \operatorname{gra} A) \quad \langle u - v \mid x - y \rangle \geq \|u - v\|^2 .$$

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$.
A est **une contraction ferme** si

$$(\forall x \in C)(\forall y \in C) \quad \langle Ax - Ay \mid x - y \rangle \geq \|Ax - Ay\|^2 .$$

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$.
A est une contraction ferme si

$$\left(\forall (x,y) \in C^2\right) \quad \|Ax - Ay\|^2 + \|(\mathrm{Id} - A)x - (\mathrm{Id} - A)y\|^2 \leq \|x - y\|^2 .$$

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$.
A est une contraction ferme si

$$(\forall (x,y) \in C^2) \quad \|Ax - Ay\|^2 + \|(\mathrm{Id} - A)x - (\mathrm{Id} - A)y\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

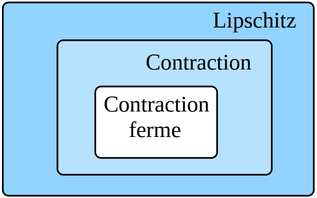
- A est une contraction ferme ssi $\mathrm{Id} - A$ est une contraction ferme.
- A est une contraction ferme ssi $2A - \mathrm{Id}$ est une contraction.
  $2A - \mathrm{Id}$ est appelée la réflexion de A.

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$.
A est une contraction ferme si

$$(\forall (x,y) \in C^2) \quad \|Ax - Ay\|^2 + \|(\mathrm{Id} - A)x - (\mathrm{Id} - A)y\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

Si A est une contraction ferme alors A est une contraction.



Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A \colon C \to \mathcal{H}$ et $\beta \in \,]0, +\infty[$.
A est β-cocoercif si βA est une contraction ferme.

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$ et $\beta \in \,]0, +\infty[$.
A est β-cocoercif si

$$(\forall x \in C)(\forall y \in C) \quad \langle x - y \mid Ax - Ay \rangle \geq \beta \|Ax - Ay\|^2 .$$

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$ et $\beta \in]0, +\infty[$.
A est β-cocoercif si

$$(\forall x \in C)(\forall y \in C) \quad \langle x - y \mid Ax - Ay \rangle \geq \beta \|Ax - Ay\|^2 .$$

- Soit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ non nul. Si $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est β-cocoercif alors L^*AL est $\|L\|^{-2}\beta$-cocoercif.

  Preuve : Pour tout $(x, y) \in \mathcal{H}^2$,

  $\langle L^*ALx - L^*ALy \mid x - y \rangle = \langle ALx - ALy \mid Lx - Ly \rangle \geq \beta \|ALx - ALy\|^2$

  De plus, $\|L^*ALx - L^*ALy\|^2 \leq \|L\|^2 \|ALx - ALy\|^2$.
  D'où $\langle L^*ALx - L^*ALy \mid x - y \rangle \geq \beta \|L^*ALx - L^*ALy\|^2 / \|L\|^2$.

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$ et $\beta \in \,]0,+\infty[$.
A est **β-cocoercif** si

$$(\forall x \in C)(\forall y \in C) \quad \langle x - y \mid Ax - Ay\rangle \geq \beta\|Ax - Ay\|^2 .$$

- Soit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ non nul. Si $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est β-cocoercif alors L^*AL est $\|L\|^{-2}\beta$-cocoercif.

- Si A est β-cocoercif alors A est β^{-1}-lipschitzien.

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$ et $\beta \in]0, +\infty[$.
A est **β-cocoercif** si

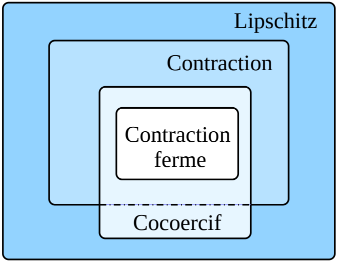
$$(\forall x \in C)(\forall y \in C) \quad \langle x - y \mid Ax - Ay\rangle \geq \beta \|Ax - Ay\|^2 .$$

- Soit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ non nul. Si $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est β-cocoercif alors L^*AL est $\|L\|^{-2}\beta$-cocoercif.
- Si A est β-cocoercif alors A est β^{-1}-lipschitzien.
- Si $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est β-cocoercif alors A est monotone maximal.

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$ et $\beta \in \left]0, +\infty\right[$.
A est β-cocoercif si

$$(\forall x \in C)(\forall y \in C) \quad \langle x - y \mid Ax - Ay \rangle \geq \beta \|Ax - Ay\|^2 .$$



Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A : C \to \mathcal{H}$ et soit $\alpha \in]0,1[$.
A est α-moyenné s'il existe une contraction $R\colon C \to \mathcal{H}$ tel que

$$A = (1-\alpha)\mathrm{Id} + \alpha R.$$

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A : C \to \mathcal{H}$ et soit $\alpha \in]0,1[$.
A est α-moyenné si

$$\big(\forall (x,y) \in C^2\big) \quad \|Ax - Ay\|^2 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\|(\mathrm{Id} - A)x - (\mathrm{Id} - A)y\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A : C \to \mathcal{H}$ et soit $\alpha \in]0,1[$.
A est **α-moyenné** si

$$(\forall (x,y) \in C^2) \quad \|Ax - Ay\|^2 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\|(\mathrm{Id} - A)x - (\mathrm{Id} - A)y\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

- Un opérateur α-moyenné est contractant.
- Un opérateur est fermement contractant ssi il est $1/2$-moyenné.
- Un opérateur α-moyenné est α'-moyenné, pour tout $\alpha' \in [\alpha, 1[$.
- Soit $\lambda \in]0, 1/\alpha[$. Si A est α-moyenné alors $(1-\lambda)\mathrm{Id} + \lambda A$ est $\lambda\alpha$-moyenné.

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A : C \to \mathcal{H}$ et soit $\alpha \in]0,1[$.
A est **α-moyenné** si

$$(\forall (x,y) \in C^2) \quad \|Ax - Ay\|^2 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\|(\mathrm{Id} - A)x - (\mathrm{Id} - A)y\|^2 \leq \|x-y\|^2.$$

- Soit $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n} \in]0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ et soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in]0,1[^n$. Si, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $A_i : C \to \mathcal{H}$ est α_i-moyenné, alors $\sum_{i=1}^n \omega_i A_i$ est α-moyenné avec $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$.

- Soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in]0,1[^n$. Si, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $A_i : C \to C$ est α_i-moyenné, alors $A_1 \cdots A_n$ est α-moyenné avec
$$\alpha = \frac{n}{n - 1 + \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i}}.$$

Contractions : définitions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A : C \to \mathcal{H}$ et soit $\alpha \in]0,1[$.
A est α-moyenné si

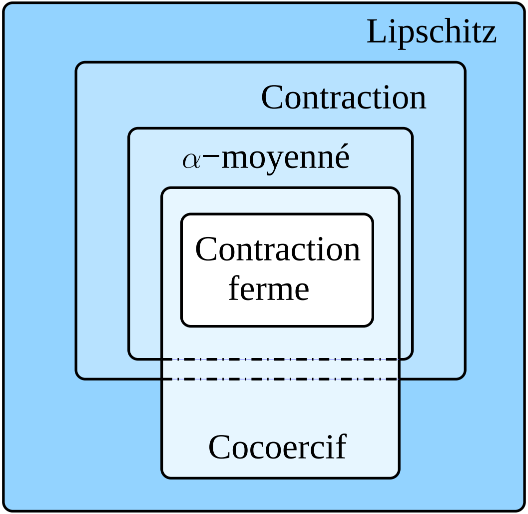
$$(\forall (x,y) \in C^2) \quad \|Ax - Ay\|^2 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\|(\mathrm{Id} - A)x - (\mathrm{Id} - A)y\|^2 \leq \|x-y\|^2.$$

- Si $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur α-moyenné avec $\alpha \in]0,1/2]$, alors A est monotone maximal.

  Preuve : A est continue. De plus, pour tout $(x,y) \in \mathcal{H}^2$,

$$0 \leq \|Ax - Ay\|^2 + (1-2\alpha)\|x-y\|^2 \leq 2(1-\alpha)\langle x - y \mid Ax - Ay\rangle .$$

Contractions : résumé de la situation



Contractions : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $C \subset \mathcal{H}$ non-vide.
Soit $A\colon C \to \mathcal{H}$ et soient $\beta \in \,]0, +\infty[$ et $\gamma \in]0, 2\beta[$.
Si A est β-cocoercif alors $\mathrm{Id} - \gamma A$ est $\gamma/(2\beta)$-moyenné.

Preuve :

A β-cocoercif $\Leftrightarrow$ βA contraction ferme.

Il existe donc une contraction $R\colon C \to \mathcal{H}$ telle que $\beta A = (\mathrm{Id} + R)/2$.

On a donc

$$\mathrm{Id} - \gamma A = \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\mathrm{Id} + \frac{\gamma}{2\beta}(-R).$$

$(-R)$ étant une contraction, $\mathrm{Id} - \gamma A$ est $\gamma/(2\beta)$-moyenné.

Contractions

Contractions → A quoi ça sert ?

Contractions : exemple

Lemme de descente

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ et $\nu \in\ ]0,+\infty[$. Si f est différentiable et de gradient ν-lipschitzien alors

$$\big(\forall (x,y) \in \mathcal{H}^2\big) \quad f(y) \leq f(x) + \langle y - x \mid \nabla f(x) \rangle + \frac{\nu}{2}\|y-x\|^2.$$

Contractions : exemple

Lemme de descente

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ et $\nu \in \,]0,+\infty[$. Si f est différentiable et de gradient ν-lipschitzien alors

$$\left(\forall (x,y)\in\mathcal{H}^2\right) \quad f(y) \le f(x) + \langle y-x \mid \nabla f(x)\rangle + \frac{\nu}{2}\|y-x\|^2.$$

<u>Preuve</u> :

Pour tout $(x,y)\in\mathcal{H}^2$ et $t\in\mathbb{R}$, soit $\varphi(t) = f(x+t(y-x))$.

φ est différentiable et $\varphi'(t) = \langle y-x \mid \nabla f(x+t(y-x))\rangle$. On a alors

$$\begin{aligned} &\varphi(1)-\varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt \\ \Leftrightarrow\ & f(y)-f(x)-\langle y-x \mid \nabla f(x)\rangle \\ &\qquad = \int_0^1 \langle y-x \mid \nabla f(x+t(y-x)) - \nabla f(x)\rangle\, dt. \end{aligned}$$

Contractions : exemple

Lemme de descente

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ et $\nu \in\ ]0,+\infty[$. Si f est différentiable et de gradient ν-lipschitzien alors

$$\big(\forall (x,y)\in\mathcal{H}^2\big)\quad f(y) \le f(x) + \langle y-x \mid \nabla f(x)\rangle + \frac{\nu}{2}\|y-x\|^2.$$

<u>Preuve</u> :

$$f(y)-f(x)-\langle y-x \mid \nabla f(x)\rangle = \int_0^1 \langle y-x \mid \nabla f(x+t(y-x)) - \nabla f(x)\rangle \, dt.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle y-x \mid \nabla f(x+t(y-x)) - \nabla f(x)\rangle \le \|y-x\|\|\nabla f(x+t(y-x)) - \nabla f(x)\| \le t\nu\|y-x\|^2.$$

Contractions : exemple

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\nu \in \,]0, +\infty[$. Si f est différentiable et de gradient ν-lipschitzien alors, pour tout $(x, y) \in \mathcal{H}^2$,

$$f^*(\nabla f(y)) \geq f^*(\nabla f(x)) + \langle x \mid \nabla f(y) - \nabla f(x) \rangle + \frac{1}{2\nu} \|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|^2.$$

Contractions : exemple

Preuve :
D'après le lemme de descente, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{H}^3$,

$$\begin{aligned} f^*(\nabla f(y)) &\geq \langle z \mid \nabla f(y) \rangle - f(z) \\ &\geq \langle z \mid \nabla f(y) - \nabla f(x) \rangle + \langle x \mid \nabla f(x) \rangle - f(x) - \frac{\nu}{2}\|z - x\|^2. \end{aligned}$$

De plus, d'après l'inégalité de Fenchel-Young,

$$\langle x \mid \nabla f(x) \rangle - f(x) = f^*(\nabla f(x)).$$

D'où

$$f^*(\nabla f(y)) \geq \langle z \mid \nabla f(y) - \nabla f(x) \rangle + f^*(\nabla f(x)) - \frac{\nu}{2}\|z - x\|^2$$

Contractions : exemple

Preuve :

D'où

$$\begin{aligned} f^*(\nabla f(y)) \geq & \langle z \mid \nabla f(y) - \nabla f(x) \rangle + f^*(\nabla f(x)) - \frac{\nu}{2}\|z-x\|^2 \\ = & f^*(\nabla f(x)) + \langle x \mid \nabla f(y) - \nabla f(x) \rangle \\ & + \langle z - x \mid \nabla f(y) - \nabla f(x) \rangle - \frac{\nu}{2}\|z-x\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f^*(\nabla f(y)) \geq & f^*(\nabla f(x)) + \langle x \mid \nabla f(y) - \nabla f(x) \rangle \\ & + \left(\nu\|\cdot\|^2/2\right)^*\left(\nabla f(y) - \nabla f(x)\right) \\ \geq & f^*(\nabla f(x)) + \langle x \mid \nabla f(y) - \nabla f(x) \rangle \\ & + \frac{1}{2\nu}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|^2. \end{aligned}$$

Contractions : exemple

Théorème de Baillon-Haddad

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\nu \in \,]0, +\infty[$. Si f est différentiable, ∇f ν-lipschitzien $\Leftrightarrow$ ∇f ν^{-1}-cocoercif.

Contractions : exemple

Théorème de Baillon-Haddad
Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\nu \in \,]0,+\infty[$. Si f est différentiable, ∇f ν-lipschitzien $\Leftrightarrow$ ∇f ν^{-1}-cocoercif.

Preuve :
Pour tout $(x, y) \in \mathcal{H}^2$,

$$f^*(\nabla f(y)) \geq f^*(\nabla f(x)) + \langle x \mid \nabla f(y) - \nabla f(x)\rangle + \frac{1}{2\nu}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|^2$$

et symétriquement

$$f^*(\nabla f(x)) \geq f^*(\nabla f(y)) + \langle y \mid \nabla f(x) - \nabla f(y)\rangle + \frac{1}{2\nu}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2.$$

En sommant,

$$-\langle y - x \mid \nabla f(y) - \nabla f(x)\rangle + \frac{1}{\nu}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \leq 0.$$

Contractions : exemple

Théorème de Baillon-Haddad

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\nu \in \,]0, +\infty[$. Si f est différentiable, ∇f ν-lipschitzien $\Leftrightarrow$ ∇f ν^{-1}-cocoercif.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, $\nu \in \,]0, +\infty[$ et $\gamma \in]0, 2\nu^{-1}[$. Si f est différentiable et de gradient ν-lipschitzien alors $\mathrm{Id} - \gamma\nabla f$ est $\gamma\nu/2$-moyenné.

Remarque : $\mathrm{Id} - \gamma\nabla f$ est l'opérateur de descente de gradient.

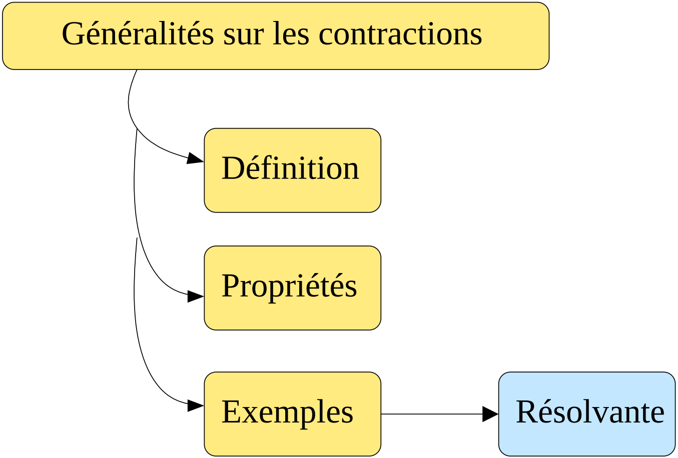
Contractions : exemple

Théorème de Baillon-Haddad

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\nu \in \,]0, +\infty[$. Si f est différentiable, ∇f ν-lipschitzien $\Leftrightarrow$ ∇f ν^{-1}-cocoercif.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\nu \in \,]0, +\infty[$.
Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. f est différentiable de gradient ν-lipschitzien ssi f^* est ν^{-1}-fortement convexe.

Remarque : f^* est ν^{-1}-fortement convexe si $f^* - \nu^{-1}\| \cdot \|^2/2$ est convexe.


Généralités sur les contractions
Définition
Propriétés
Exemples
Résolvante

Résolvante : définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
La résolvante de A est

$$J_A = (\mathrm{Id} + A)^{-1}.$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ et $\gamma \in \,]0, +\infty[$.
L' approximation de Yosida de A d'indice γ est

$$^{\gamma}A = \frac{1}{\gamma}(\mathrm{Id} - J_{\gamma A}).$$

Résolvante : définition

L' image d'un opérateur $B\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est

$$\operatorname{ran} B = \big\{ u \in \mathcal{H} \;\big|\; \exists x \in \mathcal{H}, u \in Bx \big\}.$$

Thèorème de Minty

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone. Si $\operatorname{ran}(\mathrm{Id} + A) = \mathcal{H}$ alors A est monotone maximal.

<u>Preuve</u> : Pour tout $(x_1, u_1) \in \mathcal{H}^2$, supposons que
$\big(\forall (x_2, u_2) \in \operatorname{gra} A\big) \quad \langle x_1 - x_2 \mid u_1 - u_2 \rangle \geq 0$.
Puisque $\operatorname{ran}(\mathrm{Id} + A) = \mathcal{H}$, il existe $(x_2', u_2') \in \operatorname{gra} A$ tel que
$x_1 + u_1 = x_2' + u_2'$. Par conséquent,
$0 \leq \langle x_1 - x_2' \mid u_1 - u_2' \rangle = \langle x_1 - x_2' \mid x_2' - x_1 \rangle = -\|x_1 - x_2'\|^2$.
D'où $x_1 = x_2'$ et $u_1 = u_2'$.

Résolvante : définition

L' image d'un opérateur $B \colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est

$$\operatorname{ran} B = \left\{ u \in \mathcal{H} \;\middle|\; \exists x \in \mathcal{H}, u \in Bx \right\}.$$

Thèorème de Minty

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A \colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone.
A est monotone maximal ssi $\operatorname{ran}(\mathrm{Id} + A) = \mathcal{H}$.

Résolvante : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A est monotone ssi J_A est une contraction ferme.

<u>Preuve</u> : A est monotone ssi

$$
\begin{aligned}
&\big(\forall (x,u) \in \operatorname{gra} A\big)\big(\forall (y,v) \in \operatorname{gra} A\big) \quad \langle x-y \mid u-v\rangle \geq 0\\
\Leftrightarrow &\big(\forall (x,u) \in \operatorname{gra} A\big)\big(\forall (y,v) \in \operatorname{gra} A\big) \quad \langle x-y \mid x-y+u-v\rangle \geq \|x-y\|^2\\
\Leftrightarrow &\big(\forall (x,u') \in \operatorname{gra}(\mathrm{Id}+A)\big)\big(\forall (y,v') \in \operatorname{gra}(\mathrm{Id}+A)\big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \big\langle x-y \mid u'-v'\big\rangle \geq \|x-y\|^2\\
\Leftrightarrow &\big(\forall (u',x) \in \operatorname{gra} J_A\big)\big(\forall (v',y) \in \operatorname{gra} J_A\big) \quad \big\langle u'-v' \mid x-y\big\rangle \geq \|x-y\|^2\\
\Leftrightarrow &J_A \text{ est une contraction ferme}
\end{aligned}
$$

Résolvante : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A est monotone ssi J_A est une contraction ferme.

Preuve : A est monotone ssi

$$
\begin{aligned}
&\big(\forall (x,u) \in \operatorname{gra} A\big)\big(\forall (y,v) \in \operatorname{gra} A\big) \quad \langle x-y \mid u-v \rangle \geq 0 \\
\Leftrightarrow &\big(\forall (x,u) \in \operatorname{gra} A\big)\big(\forall (y,v) \in \operatorname{gra} A\big) \quad \langle x-y \mid x-y+u-v \rangle \geq \|x-y\|^2 \\
\Leftrightarrow &\big(\forall (x,u') \in \operatorname{gra} (\mathrm{Id}+A)\big)\big(\forall (y,v') \in \operatorname{gra} (\mathrm{Id}+A)\big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left\langle x-y \mid u'-v' \right\rangle \geq \|x-y\|^2 \\
\Leftrightarrow &\big(\forall (u',x) \in \operatorname{gra} J_A\big)\big(\forall (v',y) \in \operatorname{gra} J_A\big) \quad \left\langle u'-v' \mid x-y \right\rangle \geq \|x-y\|^2 \\
\Leftrightarrow &J_A \text{ est une contraction ferme}
\end{aligned}
$$

Remarque : $J_A \colon \operatorname{ran}(\mathrm{Id}+A) \to \mathcal{H}$.

Résolvante : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A est monotone ssi J_A est une contraction ferme.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A est monotone maximal ssi $J_A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est une contraction ferme.

Preuve : A monotone $\Leftrightarrow$ $J_A : \mathrm{ran}\,(\mathrm{Id} + A) \to \mathcal{H}$ contraction ferme
$+$ théorème de Minty.

Résolvante : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A est monotone ssi J_A est une contraction ferme.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
A est monotone maximal ssi $J_A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est une contraction ferme.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ monotone maximal et $\gamma \in \,]0, +\infty[$.
Pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique $p \in \mathcal{H}$ tel que $x - p \in \gamma A p$
et on a $p = J_{\gamma A} x$.

<u>Preuve</u> : $x \in (\mathrm{Id} + \gamma A)(p) \Leftrightarrow p = J_{\gamma A} x$

Résolvante : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ monotone maximal et $\gamma \in \,]0, +\infty[$.

- $J_{\gamma A}$ et $\mathrm{Id} - J_{\gamma A}$ sont des contractions fermes.
- La résolvante réfléchie $R_{\gamma A} = 2J_{\gamma A} - \mathrm{Id}$ est une contraction.
- ${}^{\gamma}A$ est γ-cocoercive.

Résolvante : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal.

- Soit $z \in \mathcal{H}$ et $B = A(\cdot - z)$. On a : $J_B = z + J_A(\cdot - z)$.
- Soit $z \in \mathcal{H}$ et $B = z + A$. On a : $J_B = J_A(\cdot - z)$.
- Soit $\alpha \in [0, +\infty[$ et $B = A + \alpha \mathrm{Id}$. On a : $J_B = J_{\frac{A}{1+\alpha}}\left(\frac{\cdot}{1+\alpha}\right)$

Preuve :

Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} p = J_{A+\alpha\mathrm{Id}} x \quad & \Leftrightarrow \quad x - p \in (A + \alpha \mathrm{Id})(p) \\ & \Leftrightarrow \quad (1+\alpha)^{-1} x - p \in (1+\alpha)^{-1} A p \\ & \Leftrightarrow \quad p = J_{(1+\alpha)^{-1} A}\big((1+\alpha)^{-1} x\big). \end{aligned}$$

Résolvante : propriétés

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\mathcal{H}_i$ un espace de Hilbert et $A_i \colon \mathcal{H}_i \to 2^{\mathcal{H}_i}$ un opérateur monotone maximal.

$$\begin{aligned} J_{A_1 \times \cdots \times A_n} = J_{A_1} \times \cdots \times J_{A_n} \colon \mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n &\to \mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (J_{A_1} x_1, \ldots, J_{A_n} x_n). \end{aligned}$$

Résolvante : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal et $\gamma \in \,]0, +\infty[$.

$$J_{\gamma A^{-1}} = \mathrm{Id} - \gamma J_{\gamma^{-1}A}(\gamma^{-1}\cdot)$$

<u>Preuve</u> : Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
p = J_{\gamma A^{-1}} x \quad & \Leftrightarrow \quad x \in (\mathrm{Id} + \gamma A^{-1})(p) \\
& \Leftrightarrow \quad \gamma^{-1}(x-p) \in A^{-1}p \\
& \Leftrightarrow \quad p \in A\big(\gamma^{-1}(x-p)\big) \\
& \Leftrightarrow \quad \gamma^{-1}p \in \gamma^{-1}A\big(\gamma^{-1}(x-p)\big) \\
& \Leftrightarrow \quad \gamma^{-1}x \in (\mathrm{Id} + \gamma^{-1}A)\big(\gamma^{-1}(x-p)\big) \\
& \Leftrightarrow \quad \gamma^{-1}(x-p) = J_{\gamma^{-1}A}\big(\gamma^{-1}x\big) \\
& \Leftrightarrow \quad p = x - \gamma J_{\gamma^{-1}A}\big(\gamma^{-1}x\big).
\end{aligned}$$

Résolvante : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal et $\gamma \in \,]0, +\infty[$.

$$J_{\gamma A^{-1}} = \mathrm{Id} - \gamma J_{\gamma^{-1} A}(\gamma^{-1} \cdot)$$

Remarque : $J_A + J_{A^{-1}} = \mathrm{Id}$.

Résolvante : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ monotone maximal et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tel que $LL^* = \mu \mathrm{Id}$ où $\mu \in \,]0, +\infty[$. On a

$$\boxed{J_{L^*AL} = \mathrm{Id} - L^* \circ {}^{\mu}A \circ L}.$$

<u>Preuve</u> : $LL^* = \mu \mathrm{Id} \Rightarrow \operatorname{ran} L = \mathcal{H}$ est fermé et, par conséquent, $V = \operatorname{ran}(L^*) = (\ker L)^{\perp}$ est fermé. La projection orthogonale sur V est $P_V = L^*(LL^*)^{-1}L = \mu^{-1}L^*L$.
Pour tout $x \in \mathcal{H}$, $p = J_{L^*AL}x \Leftrightarrow x - p \in L^*ALp$. Donc $x - p \in V$.
On en déduit que $P_{V^\perp}p = P_{V^\perp}x = x - P_V x = x - \mu^{-1}L^*Lx$.
De plus, $x - p \in L^*ALp \Rightarrow Lx - Lp \in \mu ALp \Leftrightarrow Lp = J_{\mu A}(Lx)$.
On a ainsi $P_V p = \mu^{-1}L^*Lp = \mu^{-1}L^*J_{\mu A}(Lx)$ et
$p = P_V p + P_{V^\perp}p = x - \mu^{-1}L^*(\mathrm{Id} - J_{\mu A})(Lx) = x - L^*({}^{\mu}A(Lx))$.

Résolvante : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ monotone maximal et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tel que $LL^* = \mu \mathrm{Id}$ où $\mu \in \,]0, +\infty[$. On a

$$J_{L^*AL} = \mathrm{Id} - L^* \circ {}^{\mu}A \circ L \,.$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ monotone maximal et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ une isométrie bijective. On a $J_{L^*AL} = L^* J_A L$.

<u>Preuve</u> : $L^{-1} = L^* \Rightarrow \mathrm{Id} - L^*(\mathrm{Id} - J_A)L = L^* J_A L$

Résolvante : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ monotone maximal et $B = \rho A(\rho \cdot)$ où $\rho \in \mathbb{R}^*$. On a $J_B = \rho^{-1} J_{\rho^2 A}(\rho \cdot)$.

Preuve : $L = \rho \mathrm{Id}$.

Résolvante : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ monotone maximal et $B = \rho A(\rho \cdot)$ où $\rho \in \mathbb{R}^*$. On a $J_B = \rho^{-1} J_{\rho^2 A}(\rho \cdot)$.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ monotone maximal, et $B = -A(-\cdot)$. On a $J_B = -J_A(-\cdot)$.

Résolvante

Résolvante →

→ Opérateurs proximaux

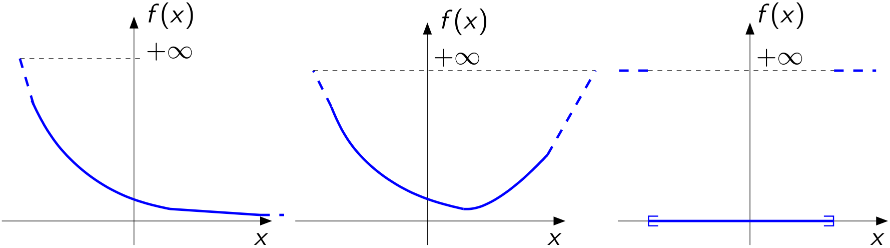
Opérateur proximal : rappels

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f\colon \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$.
f est **coercive** si $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Opérateur proximal : rappels

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
f est coercive si $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.

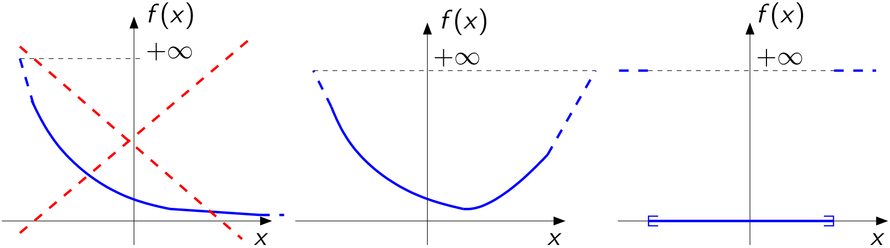
Quelles sont les fonctions coercives ?



Opérateur proximal : rappels

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
f est coercive si $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Quelles sont les fonctions coercives ?



Opérateur proximal : rappels

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
f est strictement convexe si

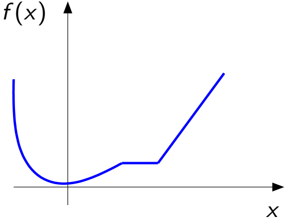
$$(\forall x \in \operatorname{dom} f)(\forall y \in \operatorname{dom} f)(\forall \alpha \in]0,1[)$$
$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

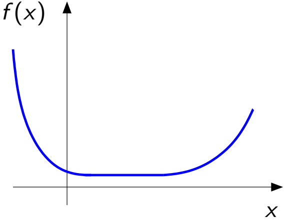
Opérateur proximal : rappels

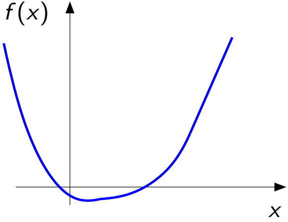
Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f\colon \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$.
f est strictement convexe si

$$(\forall x \in \mathrm{dom}\, f)(\forall y \in \mathrm{dom}\, f)(\forall \alpha \in]0,1[)$$
$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Quelles sont les fonctions strictement convexes ?





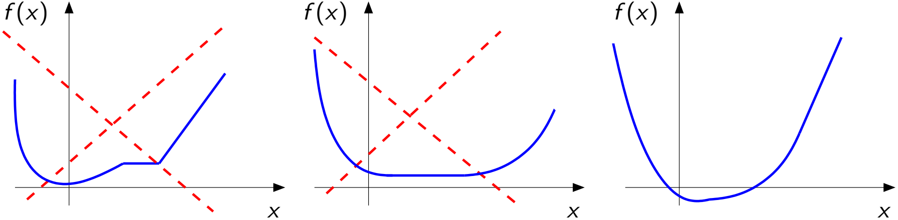


Opérateur proximal : rappels

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f\colon \mathcal{H} \to\ ]-\infty, +\infty]$.
f est **strictement convexe** si

$$(\forall x \in \operatorname{dom} f)(\forall y \in \operatorname{dom} f)(\forall \alpha \in]0,1[)$$
$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Quelles sont les fonctions strictement convexes ?



Opérateur proximal : rappels

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé de $\mathcal{H}$. Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ tel que $\operatorname{dom} f \cap C \neq \varnothing$.
Si f est coercive ou C est borné alors il existe $p \in C$ tel que

$$f(p) = \inf_{x \in C} f(x).$$

Si, de plus, f est strictement convexe, ce minimiseur p est unique.

Opérateur proximal : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\gamma \in \,]0, +\infty[$.
Pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique $p \in \mathcal{H}$ tel que

$$f(p) + \frac{1}{2\gamma}\|p - x\|^2 = \inf_{y \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma}\|y - x\|^2 .$$

Opérateur proximal : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\gamma \in \,]0,+\infty[$.
Pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique $p \in \mathcal{H}$ tel que

$$f(p) + \frac{1}{2\gamma}\|p-x\|^2 = \inf_{y\in\mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma}\|y-x\|^2 .$$

Preuve : $f \in \Gamma_0(\mathcal{H}) \Leftrightarrow f^* \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. Il existe donc $u \in \mathcal{H}$ tel que $f^*(u) \in \mathbb{R}$. D'après l'inégalité de Fenchel-Young, on a

$$(\forall y \in \mathcal{H}) \qquad f(y) \geq \langle u \mid y\rangle - f^*(u).$$

On a donc $f(y) + (2\gamma)^{-1}\|y-x\|^2 \to +\infty$ quand $\|y\| \to +\infty$.
Par ailleurs $(2\gamma)^{-1}\|\cdot - x\|^2$ étant strictement convexe,
$f + (2\gamma)^{-1}\|\cdot - x\|^2$ est une fonction coercive strictement convexe.

Opérateur proximal : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\gamma \in \,]0, +\infty[$.
Pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique $p \in \mathcal{H}$ tel que

$$f(p) + \frac{1}{2\gamma}\|p - x\|^2 = \inf_{y \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma}\|y - x\|^2 .$$

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.

- L' enveloppe de Moreau de paramètre $\gamma \in \,]0, +\infty[$ de f est

$$^{\gamma}f : \mathcal{H} \to \mathbb{R} : x \mapsto \inf_{y \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma}\|y - x\|^2.$$

- L' opérateur proximal de f est

$$\mathrm{prox}_f : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : x \mapsto \operatorname*{argmin}_{y \in \mathcal{H}} \; f(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2.$$

Opérateur proximal : définition

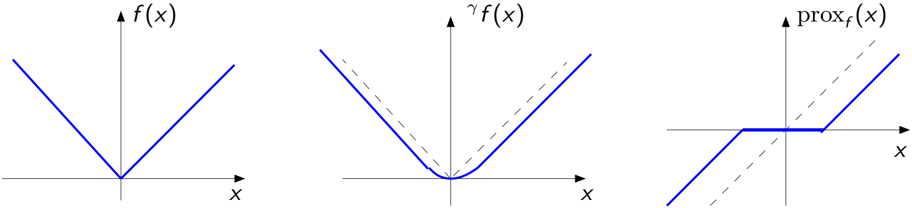
Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.

- L' **enveloppe de Moreau** de paramètre $\gamma \in \,]0, +\infty[$ de f est

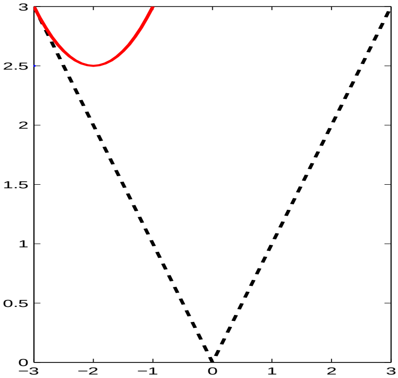
$$^{\gamma}f : \mathcal{H} \to \mathbb{R} : x \mapsto \inf_{y \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma}\|y - x\|^2.$$

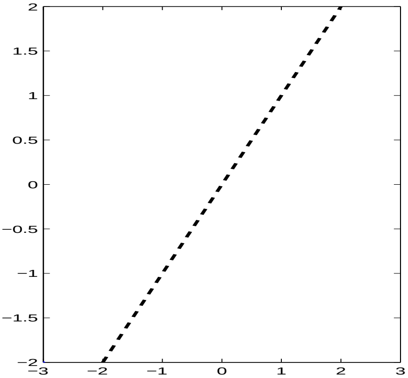
- L' **opérateur proximal** de f est

$$\mathrm{prox}_f : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : x \mapsto \underset{y \in \mathcal{H}}{\mathrm{argmin}} \; f(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2.$$

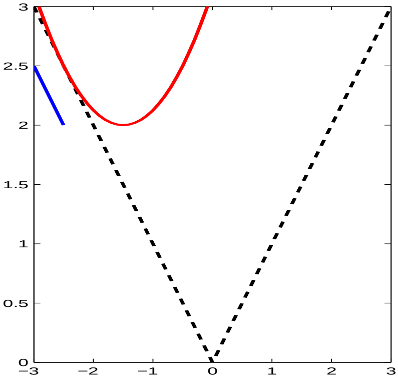


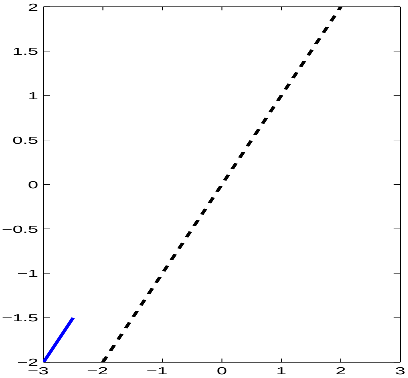
Opérateur proximal : définition



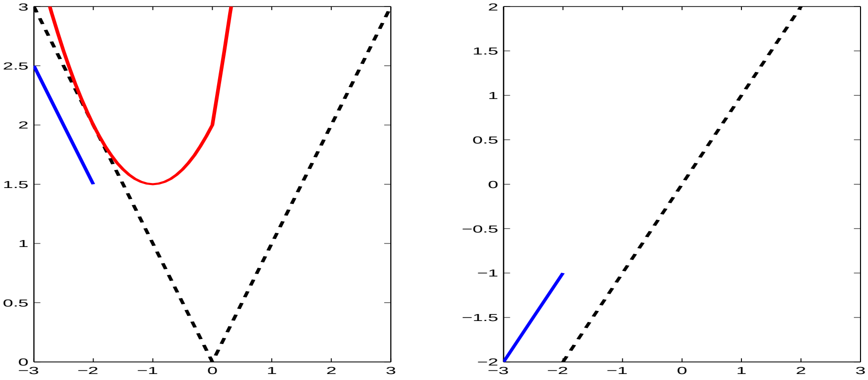


Opérateur proximal : définition

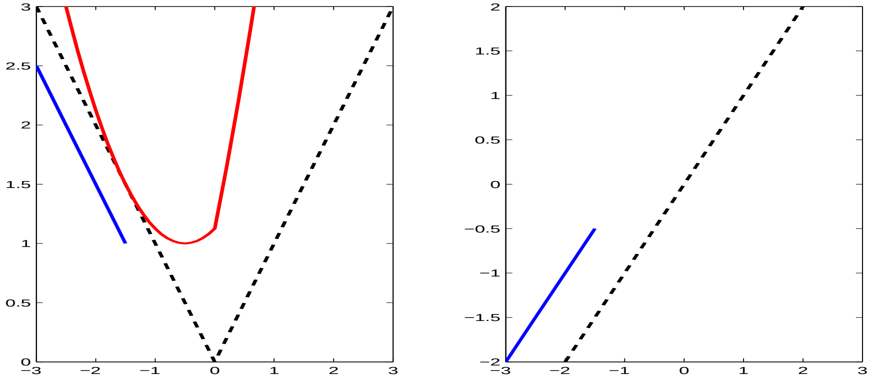




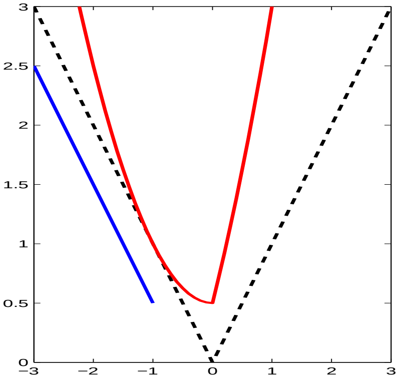
Opérateur proximal : définition

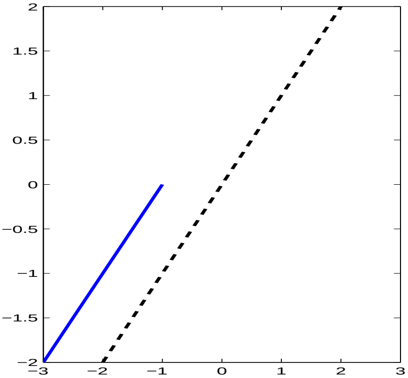


Opérateur proximal : définition

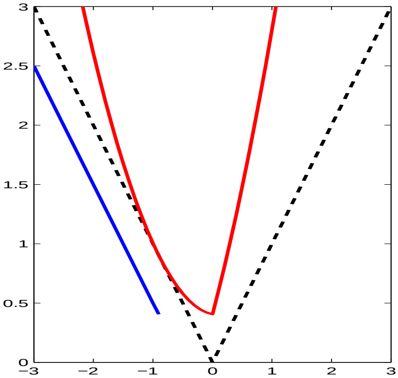


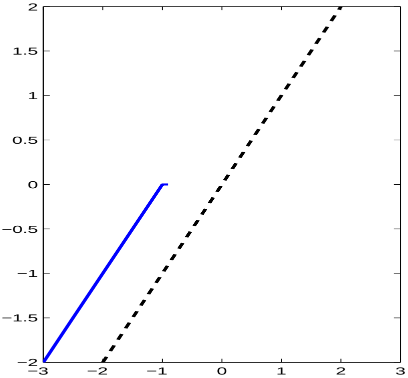
Opérateur proximal : définition



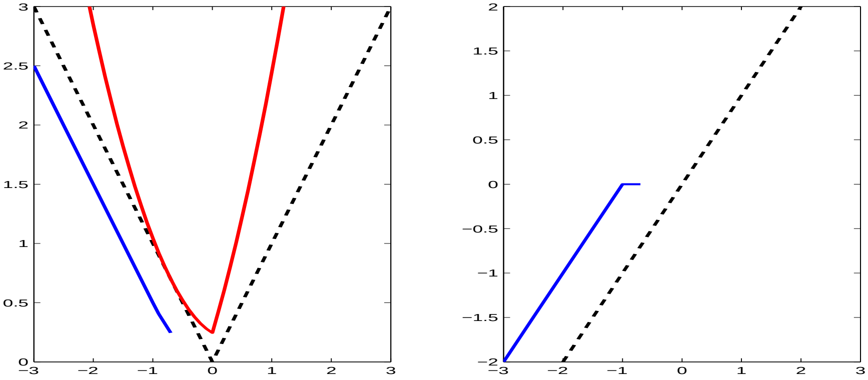


Opérateur proximal : définition

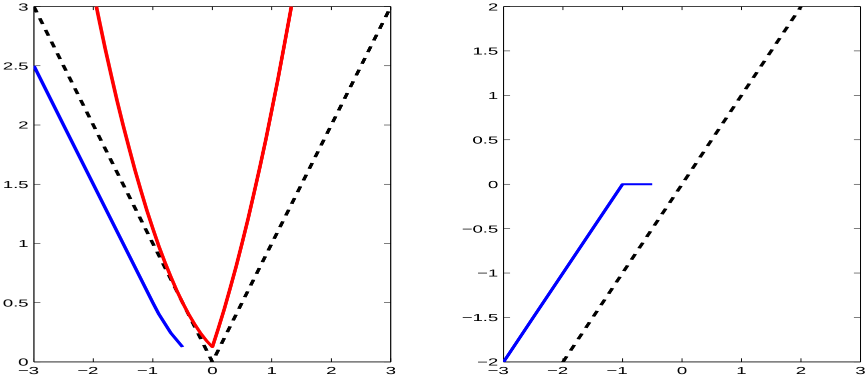




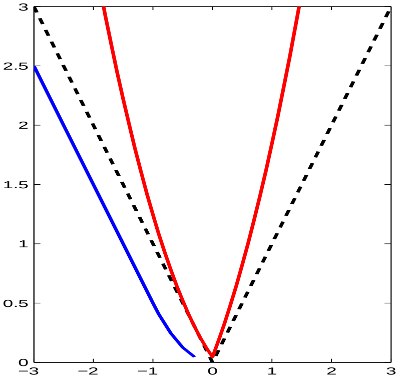
Opérateur proximal : définition

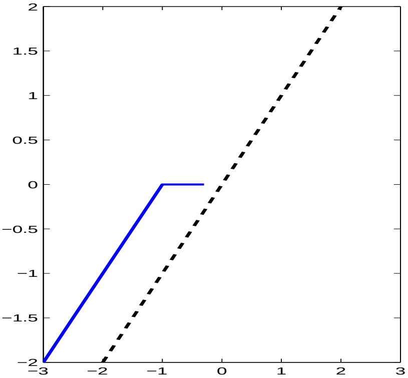


Opérateur proximal : définition

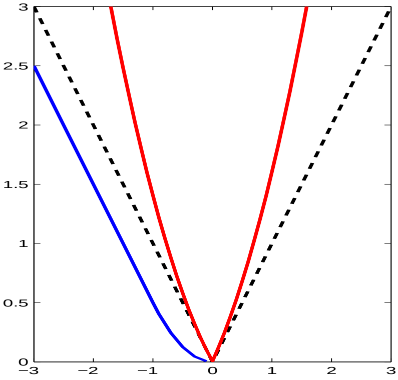


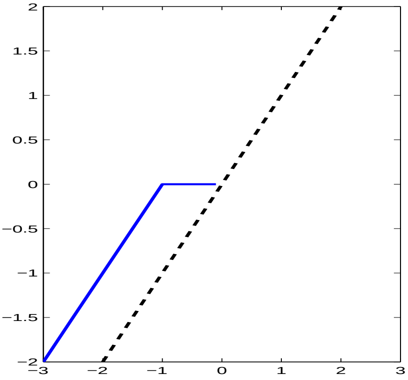
Opérateur proximal : définition



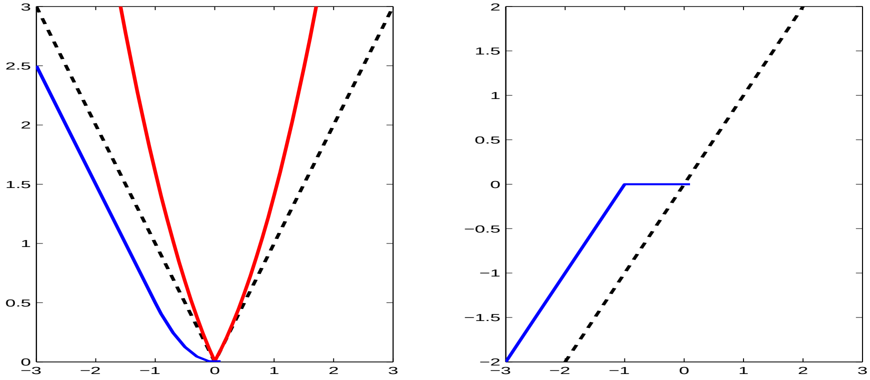


Opérateur proximal : définition

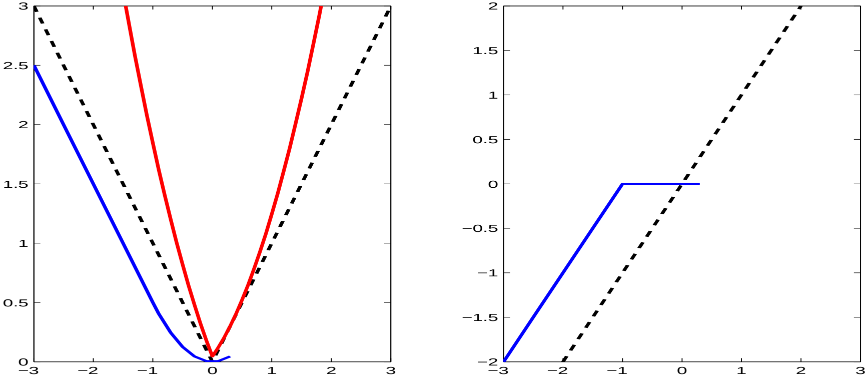




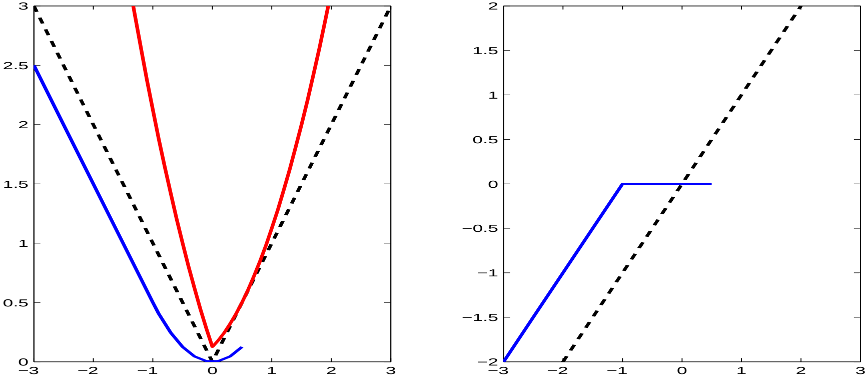
Opérateur proximal : définition



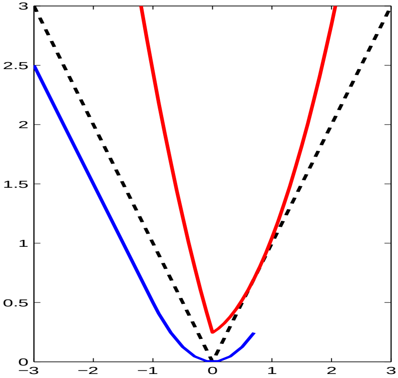
Opérateur proximal : définition

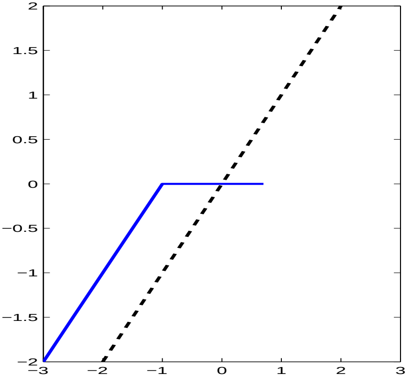


Opérateur proximal : définition

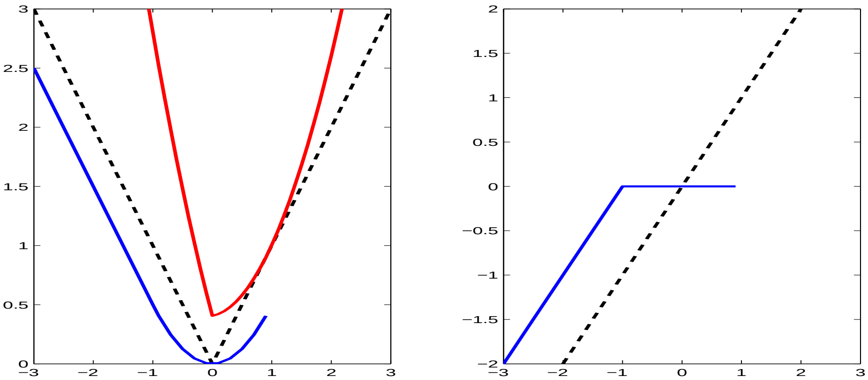


Opérateur proximal : définition

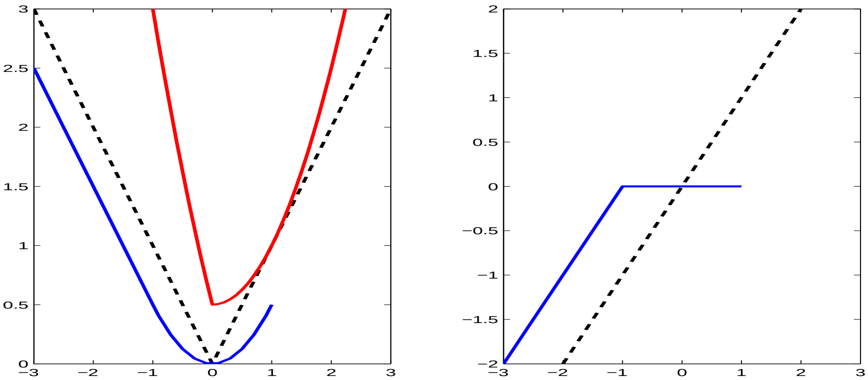




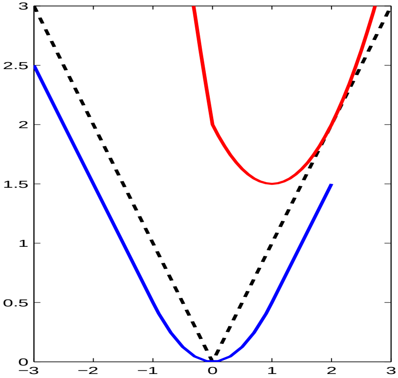
Opérateur proximal : définition

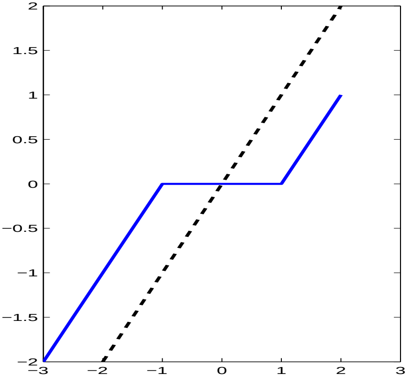


Opérateur proximal : définition

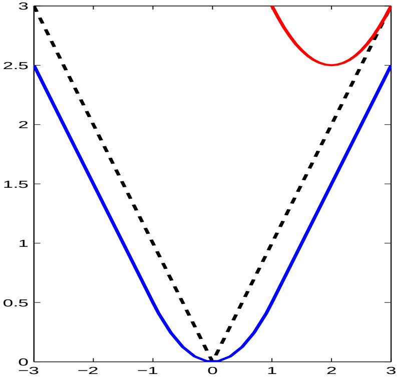


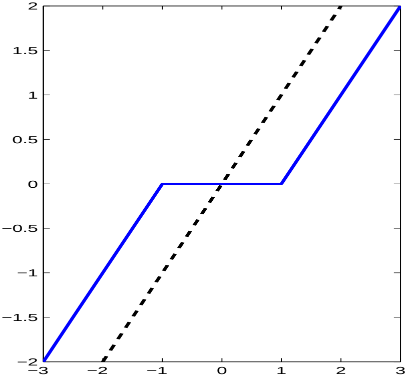
Opérateur proximal : définition





Opérateur proximal : définition





Opérateur proximal : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.
Si $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} g \neq \varnothing$ alors $\partial(f+g) = \partial f + \partial g$.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.

$$\operatorname{prox}_f = J_{\partial f}.$$

Opérateur proximal : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.
Si $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{int}\,\mathrm{dom}\, g \neq \varnothing$ alors $\partial(f+g) = \partial f + \partial g$.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.

$$\mathrm{prox}_f = J_{\partial f}.$$

Preuve : D'après la règle de Fermat, pour tout $x \in \mathcal{H}$,
$p = \mathrm{argmin}\ \ f + (2\gamma)^{-1}\|\cdot - x\|^2$ ssi

$$\begin{aligned} & 0 \in \partial\left(f + \frac{1}{2}\|\cdot - x\|^2\right)(p) = \partial f(p) + p - x \\ \Leftrightarrow \quad & x \in (\mathrm{Id} + \partial f)(p). \end{aligned}$$

Opérateur proximal : définition

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.
Si $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{int}\,\mathrm{dom}\, g \neq \varnothing$ alors $\partial(f+g) = \partial f + \partial g$.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.

$$\mathrm{prox}_f = J_{\partial f}.$$

<u>Remarque</u> : Comme $\mathrm{dom}\,(\mathrm{prox}_f) = \mathcal{H}$, cela fournit une preuve que ∂f est un opérateur monotone *maximal* !

Opérateur proximal : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $(x, p) \in \mathcal{H}^2$.

$$p = \mathrm{prox}_{\gamma f} x \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y \in \mathcal{H}) \;\; \langle y - p \mid x - p \rangle + f(p) \leq f(y).$$

Opérateur proximal : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $(x,p) \in \mathcal{H}^2$.

$$p = \mathrm{prox}_{\gamma f} x \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y \in \mathcal{H}) \;\; \langle y - p \mid x - p \rangle + f(p) \leq f(y).$$

Preuve : $(\Rightarrow)$
Soit $p_\alpha = \alpha y + (1-\alpha)p$ où $y \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in]0,1]$. On a

$$\begin{aligned} f(p) + \frac{1}{2}\|p - x\|^2 &\leq f(p_\alpha) + \frac{1}{2}\|p_\alpha - x\|^2 \\ &\leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(p) + \frac{1}{2}\|p - x + \alpha(y-p)\|^2. \end{aligned}$$

D'où $f(p) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(p) + \alpha \langle y - p \mid p - x \rangle + \frac{\alpha^2}{2}\|y-p\|^2$
$\Leftrightarrow \langle y - p \mid x - p \rangle + f(p) \leq f(y) + \frac{\alpha}{2}\|y - p\|^2$.
On obtient le résultat quand $\alpha \to 0$.

Opérateur proximal : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $(x, p) \in \mathcal{H}^2$.

$$p = \mathrm{prox}_{\gamma f} x \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y \in \mathcal{H}) \ \ \langle y - p \mid x - p \rangle + f(p) \leq f(y).$$

<u>Preuve</u> : $(\Leftarrow)$
On a, pour tout $y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} f(p) + \frac{1}{2}\|p - x\|^2 &\leq f(y) + \langle y - p \mid p - x \rangle + \frac{1}{2}\|p - x\|^2 \\ &= f(y) + \frac{1}{2}\|y - p + p - x\|^2 - \frac{1}{2}\|y - p\|^2 \\ &\leq f(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2. \end{aligned}$$

Opérateur proximal : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $(x, p) \in \mathcal{H}^2$.

$$p = \mathrm{prox}_{\gamma f} x \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y \in \mathcal{H}) \;\; \langle y - p \mid x - p \rangle + f(p) \leq f(y).$$

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\gamma \in]0, +\infty[$. ${}^{\gamma}f$ est différentiable de gradient γ^{-1}-lispchitzien et

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad \nabla\, {}^{\gamma}f = \gamma^{-1}(\mathrm{Id} - \mathrm{prox}_{\gamma f}) = {}^{\gamma}\partial f.$$

Opérateur proximal : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $(x, p) \in \mathcal{H}^2$.

$$p = \mathrm{prox}_{\gamma f} x \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y \in \mathcal{H}) \;\; \langle y - p \mid x - p \rangle + f(p) \leq f(y).$$

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\gamma \in \,]0, +\infty[$. ${}^{\gamma}f$ est différentiable de gradient γ^{-1}-lispchitzien et

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad \nabla\, {}^{\gamma}f = \gamma^{-1}(\mathrm{Id} - \mathrm{prox}_{\gamma f}) = {}^{\gamma}\partial f.$$

Preuve : Propriété précédente + ... des calculs.

Opérateur proximal : propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $x \in \mathcal{H}$ et $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.

Propriétés	$g(x)$	$\mathrm{prox}_g x$
Translation	$f(x-z), z \in \mathcal{H}$	$z + \mathrm{prox}_f(x-z)$
Perturbation quadratique	$f(x) + \alpha \parallel x \parallel^2 /2 + \langle z \mid x \rangle + \gamma$ $z \in \mathcal{H}, \alpha > 0, \gamma \in \mathbb{R}$	$\mathrm{prox}_{\frac{f}{\alpha+1}}(\frac{x-z}{\alpha+1})$
Changement d'échelle	$f(\rho x), \rho \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{\rho}\mathrm{prox}_{\rho^2 f}(\rho x)$
Réflexion	$f(-x)$	$-\mathrm{prox}_f(-x)$
Enveloppe de Moreau	${}^{\gamma}f(x) = \inf\limits_{y \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma}\lVert x-y \rVert^2$ $\gamma > 0$	$\frac{1}{1+\gamma}\left(\gamma x + \mathrm{prox}_{(1+\gamma)f}(x)\right)$

Opérateur proximal : propriétés

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\mathcal{H}_i$ un espace de Hilbert et $f_i \in \Gamma_0(\mathcal{H}_i)$.
Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$,
si

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

alors

$$\boxed{\mathrm{prox}_f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\mathrm{prox}_{f_i}(x_i)\right)_{1 \leq i \leq n}}.$$

Opérateur proximal : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(b_i)_{i\in I}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$.
Pour tout $i \in I$, soit $\varphi_i \in \Gamma_0(\mathbb{R})$ tel que $\varphi_i \geq 0$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, si

$$f(x) = \sum_{i\in I} \varphi_i(\langle x \mid b_i\rangle)$$

alors

$$\operatorname{prox}_f(x) = \textstyle\sum_{i\in I} \operatorname{prox}_{\varphi_i}(\langle x \mid b_i\rangle) b_i.$$

Remarque : L'hypothèse $(\forall i \in I)\ \varphi_i \geq 0$ peut être relaxée si $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

Opérateur proximal : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(b_i)_{i\in I}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$.
Pour tout $i \in I$, soit $\varphi_i \in \Gamma_0(\mathbb{R})$ tel que $\varphi_i \geq 0$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, si

$$f(x) = \sum_{i\in I} \varphi_i(\langle x \mid b_i\rangle)$$

alors

$$\mathrm{prox}_f(x) = \textstyle\sum_{i\in I} \mathrm{prox}_{\varphi_i}(\langle x \mid b_i\rangle) b_i.$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\gamma \in \,]0,+\infty[$.

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \mathrm{prox}_{\gamma f^*} x = x - \gamma \mathrm{prox}_{\gamma^{-1} f}(\gamma^{-1} x).$$

Opérateur proximal : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tel que $\operatorname{ran} L = \mathcal{H}$. On a

$$\partial f \circ L = L^* \, \partial f \, L.$$

Opérateur proximal : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tel que $\operatorname{ran} L = \mathcal{H}$. On a

$$\partial f \circ L = L^* \, \partial f \, L.$$

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tel que $LL^* = \mu \mathrm{Id}$ où $\mu \in \,]0, +\infty[$. On a

$$\boxed{\mathrm{prox}_{f \circ L} = \mathrm{Id} - \mu^{-1} L^* \circ (\mathrm{Id} - \mathrm{prox}_f) \circ L.}$$

Opérateur proximal : propriétés

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tel que $\operatorname{ran} L = \mathcal{H}$. On a

$$\partial f \circ L = L^* \, \partial f \, L.$$

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tel que $LL^* = \mu \mathrm{Id}$ où $\mu \in \,]0, +\infty[$. On a

$$\mathrm{prox}_{f \circ L} = \mathrm{Id} - \mu^{-1} L^* \circ (\mathrm{Id} - \mathrm{prox}_f) \circ L.$$

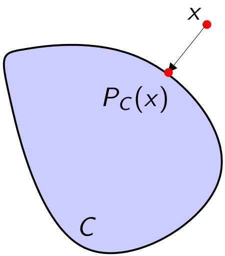
Remarque :

Si $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ est une isométrie bijective, alors $\mathrm{prox}_{f \circ L} = L^* \mathrm{prox}_f L$.

Opérateur proximal : exemples

Projection :
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \mathrm{prox}_{\iota_C}(x) = \underset{y \in C}{\mathrm{argmin}} \frac{1}{2}\|y - x\|^2 = P_C(x).$$



Opérateur proximal : exemples

Projection :
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \operatorname{prox}_{\iota_C}(x) = \operatorname*{argmin}_{y \in C} \frac{1}{2}\|y - x\|^2 = P_C(x).$$

Remarques :

- $p = P_C(x) \Leftrightarrow x - p \in \partial \iota_C(p) = N_C(p) \Leftrightarrow (\forall y \in C)\ \langle y - p \mid x - p \rangle \leq 0$.
  En particulier, si C est un espace vectoriel : $p = P_C(x) \Leftrightarrow x - p \in C^{\perp}$.
- ${}^{\gamma}\iota_C = (2\gamma)^{-1} d_C^2$ où d_C distance au convexe C définie par $d_C \colon x \mapsto \inf_{y \in C} \|y - x\| = \|x - P_C x\|$. On a alors $\nabla d_C^2 = \nabla({}^{\frac{1}{2}}\iota_C) = 2(\mathrm{Id} - P_C)$.

Opérateur proximal : exemples

Projection :
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \mathrm{prox}_{\iota_C}(x) = \underset{y \in C}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|y - x\|^2 = P_C(x).$$

Remarques :

- $p = P_C(x) \Leftrightarrow x - p \in \partial\iota_C(p) = N_C(p) \Leftrightarrow (\forall y \in C)\ \langle y - p \mid x - p\rangle \leq 0.$
  En particulier, si C est un espace vectoriel : $p = P_C(x) \Leftrightarrow x - p \in C^{\perp}$.
- ${}^{\gamma}\iota_C = (2\gamma)^{-1} d_C^2$ où d_C distance au convexe C définie par $d_C : x \mapsto \inf_{y \in C} \|y - x\| = \|x - P_C x\|$. On a alors $\nabla d_C^2 = \nabla({}^{\frac{1}{2}}\iota_C) = 2(\mathrm{Id} - P_C)$.

Opérateur proximal : exemples

Fonction quadratique :
Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert.
Soient $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, $\gamma \in \,]0, +\infty[$ et $z \in \mathcal{G}$.

$$f = \gamma \left\| L \cdot - z \right\|^2 / 2 \Rightarrow \operatorname{prox}_f = (\mathrm{Id} + \gamma L^* L)^{-1}(\cdot + \gamma L^* z).$$

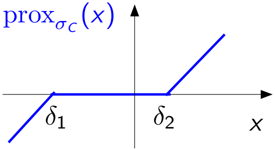
Opérateur proximal : exemples

Fonction d'appui :
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad \operatorname{prox}_{\sigma_C} = \operatorname{Id} - P_C.$$

Cas du seuillage doux : $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, $\delta_1 = \inf C$ et $\delta_2 = \sup C$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_C(x) = \begin{cases} \delta_1 x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \delta_2 x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{prox}_{\sigma_C}(x) = \operatorname{soft}_C(x) = \begin{cases} x - \delta_1 & \text{si } x < \delta_1 \\ 0 & \text{si } x \in C \\ x - \delta_2 & \text{si } x > \delta_2. \end{cases}$$



3ère Partie : Recherche d'un zéro

1. Zéros d'un opérateur monotone (maximal)

2. Points fixes

3. Convergence
   - Définition
   - Fejér monotonie
   - Principe de demi-fermeture

4. Algorithmes
   - Krasnosel'skii Mann
   - Douglas-Rachford
   - PPXA
   - *Forward-Backward*
   - *Forward-Backward-Forward*

Opérateurs monotones : zéros

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone.
L' ensemble des zéros de A, noté $\operatorname{zer} A$, est

$$\operatorname{zer} A = \{x \in \mathcal{H} \,|\, 0 \in Ax\}.$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur maximal monotone.
Si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée

- A est surjectif
- $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \inf \|Ax\| = \lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \inf\{\|u\| \mid (\exists x \in \mathcal{H})\ u \in Ax\} = +\infty$,
- $\operatorname{dom} A$ est borné,

alors $\operatorname{zer} A \neq \varnothing$.

Opérateur monotones maximaux : zéros

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal.
$\mathrm{zer}\, A$ est fermé et convexe.

Opérateur monotones maximaux : zéros

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal.
$\operatorname{zer} A$ est fermé et convexe.

Preuve :
A opérateur monotone maximal ssi A^{-1} opérateur monotone maximal.
$\operatorname{zer} A = A^{-1}0$ est un convexe fermé.

Opérateurs monotones : zéros

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est strictement monotone si

$$\big(\forall (x_1, u_1) \in \operatorname{gra} A\big)\big(\forall (x_2, u_2) \in \operatorname{gra} A\big) \;\; x_1 \neq x_2 \Rightarrow \langle u_1 - u_2 \mid x_1 - x_2 \rangle > 0.$$

Opérateurs monotones : zéros

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est strictement monotone si

$$\big(\forall(x_1,u_1)\in \mathrm{gra}A\big)\big(\forall(x_2,u_2)\in \mathrm{gra}A\big)\quad x_1\neq x_2 \Rightarrow \langle u_1-u_2 \mid x_1-x_2\rangle > 0.$$

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur strictement monotone.
$\mathrm{zer}\, A$ contient au plus un élément.

Preuve :
Si $(x_1,x_2)\in(\mathrm{zer}\, A)^2$ et $x_1\neq x_2$ alors $0=\langle x_1-x_2 \mid 0-0\rangle \leq 0$!

Opérateurs monotones : zéros

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\beta \in \left]0, +\infty\right[$.
$A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est β-fortement monotone si

$$\big(\forall (x_1, u_1) \in \mathrm{gra} A\big)\big(\forall (x_2, u_2) \in \mathrm{gra} A\big) \quad \langle u_1 - u_2 \mid x_1 - x_2 \rangle \geq \beta \|x_1 - x_2\|^2.$$

Opérateurs monotones : zéros

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\beta \in\ ]0, +\infty[$.
$A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est **β-fortement monotone** si

$$\big(\forall (x_1, u_1) \in \operatorname{gra} A\big)\big(\forall (x_2, u_2) \in \operatorname{gra} A\big) \quad \langle u_1 - u_2 \mid x_1 - x_2 \rangle \geq \beta \|x_1 - x_2\|^2.$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\beta \in\ ]0, +\infty[$.
Si $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est β-fortement monotone ssi $A^{-1}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est β-cocoercif.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\beta \in\ ]0, +\infty[$.
$A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est β-fortement monotone alors A est strictement monotone.

Opérateurs monotones : zéros

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\beta \in\ ]0,+\infty[$. Si $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est monotone maximal et β-fortement monotone alors $\operatorname{zer} A$ est un singleton

<u>Preuve</u> : Pour tout $(x_1, u_1) \in \operatorname{gra} A$ et $(x_2, u_2) \in \operatorname{gra} A$,

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\|\|u_1\| &\geq \langle x_1 - x_2 \mid u_1 \rangle \\
&= \langle x_1 - x_2 \mid u_1 - u_2 \rangle + \langle x_1 - x_2 \mid u_2 \rangle \\
&\geq \frac{\beta}{2}\|x_1 - x_2\|^2 + \langle x_1 - x_2 \mid u_2 \rangle
\end{aligned}$$

En fixant x_2 et u_2, si $\|x_1\| \to +\infty$, on en déduit que $\|u_1\| \to +\infty$. Ceci montre que $\lim_{\|x\|\to+\infty} \inf \|Ax\| = +\infty$ et donc $\operatorname{zer} A \neq \varnothing$. De plus, A étant strictement monotone, il y a un seul élément dans $\operatorname{zer} A$.

Opérateurs monotones : zéros et minimiseurs

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre strictement convexe alors ∂f est strictement monotone.

Opérateurs monotones : zéros et minimiseurs

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f\colon \mathcal{H} \to \left]-\infty, +\infty\right]$ une fonction propre strictement convexe alors ∂f est strictement monotone.

Preuve : Soient $(x_1, u_1) \in \operatorname{gra}\partial f$ et $(x_2, u_2) \in \operatorname{gra}\partial f$ tels que $x_1 \neq x_2$. On a, pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x_1) + \langle u_1 \mid \alpha(x_2 - x_1)\rangle &\leq f(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) \\ &< (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2) \\ \Rightarrow \langle u_1 \mid x_2 - x_1\rangle &< f(x_2) - f(x_1). \end{aligned}$$

Symétriquement, $\langle u_2 \mid x_1 - x_2\rangle < f(x_1) - f(x_2)$ et, par sommation,

$$\langle u_1 - u_2 \mid x_2 - x_1\rangle < 0$$

Opérateurs monotones : zéros et minimiseurs

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f : \mathcal{H} \to \left]-\infty, +\infty\right]$ une fonction propre strictement convexe alors ∂f est strictement monotone.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $f : \mathcal{H} \to \left]-\infty, +\infty\right]$ une fonction propre strictement convexe alors f possède au plus un minimiseur.

Opérateurs monotones : zéros et minimiseurs

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $\beta \in \,]0, +\infty[$ et $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre β-fortement convexe alors ∂f est β-fortement monotone.

Opérateurs monotones : zéros et minimiseurs

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $\beta \in \,]0, +\infty[$ et $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre β-fortement convexe alors ∂f est β-fortement monotone.

Preuve : f β-fortement convexe si $f = h + \beta\| \cdot \|^2/2$ où h est convexe. Soient $(x_1, u_1) \in \mathrm{gra}\partial f$ et $(x_2, u_2) \in \mathrm{gra}\partial f$. On a

$$u_1 \in \partial f(x_1) \Leftrightarrow u_1 - \beta x_1 \in \partial h(x_1).$$

De plus,

$$\begin{aligned} f(x_2) = h(x_2) + \frac{\beta}{2}\|x_2\|^2 &\geq h(x_1) + \langle u_1 - \beta x_1 \mid x_2 - x_1 \rangle + \frac{\beta}{2}\|x_2\|^2 \\ &= f(x_1) + \langle u_1 \mid x_2 - x_1 \rangle + \frac{\beta}{2}\|x_1 - x_2\|^2. \end{aligned}$$

Symétriquement, $f(x_1) \geq f(x_2) + \langle u_2 \mid x_1 - x_2 \rangle + \frac{\beta}{2}\|x_2 - x_1\|^2$.
D'où, en sommant,

$$0 \geq \langle u_1 - u_2 \mid x_2 - x_1 \rangle + \beta\|x_1 - x_2\|^2.$$

Opérateurs monotones : zéros et minimiseurs

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $\beta \in \,]0, +\infty[$ et $f : \mathcal{H} \to \,]-\infty, +\infty]$ une fonction propre β-fortement convexe alors ∂f est β-fortement monotone.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $\beta \in \,]0, +\infty[$ et $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ une fonction β-fortement convexe alors f possède un unique minimiseur.

Algorithmes de points fixes : zéros et points fixes

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $B : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
L'ensemble des points fixes de B est défini

$$\mathrm{Fix} B = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x \in Bx\}$$

Algorithmes de points fixes : zéros et points fixes

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $B : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
L'ensemble des points fixes de B est défini

$$\mathrm{Fix} B = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x \in Bx\}$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone et soit $\gamma \in\,]0, +\infty[$.
On a

$$\mathrm{Fix} J_{\gamma A} = \mathrm{zer}\, A$$

Algorithmes de points fixes : zéros et points fixes

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $B : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
L'ensemble des points fixes de B est défini

$$\mathrm{Fix} B = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x \in Bx\}$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone et soit $\gamma \in \,]0, +\infty[$.
On a

$$\mathrm{Fix} J_{\gamma A} = \mathrm{zer}\, A$$

Preuve : $(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad 0 \in Ax \quad \Leftrightarrow \quad \ldots$

$$\Leftrightarrow \quad \ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad \ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad x = J_{\gamma A} x$$

Algorithmes de points fixes : zéros et points fixes

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $B : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.
L'ensemble des points fixes de B est défini

$$\mathrm{Fix} B = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x \in Bx\}$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone et soit $\gamma \in \,]0, +\infty[$.
On a

$$\mathrm{Fix} J_{\gamma A} = \mathrm{zer}\, A$$

<u>Preuve</u> :

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in \mathcal{H}) \qquad 0 \in Ax \quad & \Leftrightarrow \quad 0 \in \gamma Ax \\
& \Leftrightarrow \quad x \in (\mathrm{Id} + \gamma A)x \\
& \Leftrightarrow \quad x \in (\mathrm{Id} + \gamma A)^{-1}x \\
& \Leftrightarrow \quad x = J_{\gamma A}x
\end{aligned}
$$

Algorithmes de points fixes : notions de convergence

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ et $\widehat{x} \in \mathcal{H}$.

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge fortement** vers $\widehat{x}$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \widehat{x}\| = 0.$$

  On note $x_n \to \widehat{x}$.

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge faiblement** vers $\widehat{x}$ si

$$(\forall y \in \mathcal{H}) \qquad \lim_{n\to+\infty} \langle y \mid x_n - \widehat{x}\rangle = 0.$$

  On note $x_n \rightharpoonup \widehat{x}$.

Remarque : Dans un espace de Hilbert de dimension finie, les convergences forte et faible sont équivalentes.

Algorithmes de points fixes : notions de convergence

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement ssi

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

  et

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au plus un point d'accumulation dans la topologie faible.

- $\widehat{x}$ est un point d'accumulation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la topologie faible s'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers $\widehat{x}$.

Algorithmes de points fixes : notions de convergence

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge faiblement** ssi

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

  et

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède **au plus** un **point d'accumulation** dans la topologie faible.

Illustration :

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
1	-1	1	-1	1	-1	...

$\rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais possède 2 points d'accumulations -1 et 1.
$\rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Algorithmes de points fixes : notions de convergence

Lemme 1

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $D \subset \mathcal{H}$ non vide.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un point de D si

- pour tout $x \in D$, $(\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

  et

- tout point d'accumulation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la topologie faible appartient à D.

Algorithmes de points fixes : notions de convergence

Preuve :

Si $(\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
Supposons que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ soient telles que $x_{n_k} \rightharpoonup \widehat{x}$ et $x_{n_\ell} \rightharpoonup \widehat{x}'$ où $(\widehat{x}, \widehat{x}') \in D^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2\left\langle x_n \mid \widehat{x}' - \widehat{x}\right\rangle = \|x_n - \widehat{x}\|^2 - \|x_n - \widehat{x}'\|^2 - \|\widehat{x}\|^2 + \|\widehat{x}'\|^2.$$

Puisque $(\|x_n - \widehat{x}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\|x_n - \widehat{x}'\|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x_n \mid \widehat{x}' - \widehat{x}\rangle \to \alpha$ et donc $\langle x_{n_k} \mid \widehat{x}' - \widehat{x}\rangle \to \langle \widehat{x} \mid \widehat{x}' - \widehat{x}\rangle = \alpha$.
De la même façon, $\langle \widehat{x}' \mid \widehat{x}' - \widehat{x}\rangle = \alpha$. D'où $\|\widehat{x}' - \widehat{x}\|^2 = 0 \Rightarrow \widehat{x} = \widehat{x}'$.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $D \subset \mathcal{H}$ non vide.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite Fejér-monotone par rapport à D si

$$(\forall x \in D)(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \|x_{n+1} - x\| \leq \|x_n - x\|.$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $D \subset \mathcal{H}$ non vide.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite Fejér-monotone par rapport à D alors

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- pour tout $x \in D$, $(\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- $\big(d_D(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Convergence d'une suite Fejér-monotone

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $D \subset \mathcal{H}$ non vide.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un point de D si

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite Fejér-monotone par rapport à D

  et
- tout point d'accumulation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la topologie faible appartient à D.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Lemme 2

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de C convergeant faiblement vers $\widehat{x}$ alors $\widehat{x} \in C$.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Lemme 2

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de C convergeant faiblement vers $\widehat{x}$ alors $\widehat{x} \in C$.

<u>Preuve</u> :

On a $\widehat{x} - P_C\widehat{x} \in N_C\big(P_C\widehat{x}\big)$.

Puisque $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \in C$, on a

$$\langle x_n - P_C\widehat{x} \mid \widehat{x} - P_C\widehat{x}\rangle \leq 0.$$

En utilisant le fait que $x_n \rightharpoonup \widehat{x}$, on en déduit que $\|\widehat{x} - P_C\widehat{x}\|^2 = 0$, d'où $\widehat{x} = P_C(\widehat{x}) \in C$.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Principe de demi-fermeture

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.
Soit $T\colon C \to \mathcal{H}$ un opérateur contractant.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de C convergeant faiblement vers $\widehat{x}$ et si $Tx_n - x_n \to 0$ alors $\widehat{x} \in \operatorname{Fix} T$.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Principe de demi-fermeture

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.
Soit $T\colon C \to \mathcal{H}$ un opérateur contractant.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de C convergeant faiblement vers $\widehat{x}$ et si $Tx_n - x_n \to 0$ alors $\widehat{x} \in \operatorname{Fix} T$.

Preuve :

$x_n \rightharpoonup \widehat{x} \Rightarrow \widehat{x} \in C$ et $T\widehat{x}$ défini. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - T\widehat{x}\|^2 = \|x_n - \widehat{x}\|^2 + \|\widehat{x} - T\widehat{x}\|^2 + 2\,\langle x_n - \widehat{x} \mid \widehat{x} - T\widehat{x}\rangle$$

$$\|x_n - T\widehat{x}\|^2 = \|x_n - Tx_n\|^2 + \|Tx_n - T\widehat{x}\|^2 + 2\,\langle x_n - Tx_n \mid Tx_n - T\widehat{x}\rangle$$

$$\Rightarrow \|\widehat{x} - T\widehat{x}\|^2 = \|x_n - Tx_n\|^2 + \|Tx_n - T\widehat{x}\|^2 - \|x_n - \widehat{x}\|^2 + 2\,\langle x_n - Tx_n \mid Tx_n - T\widehat{x}\rangle - 2\,\langle x_n - \widehat{x} \mid \widehat{x} - T\widehat{x}\rangle$$

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Principe de demi-fermeture

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.
Soit $T\colon C \to \mathcal{H}$ un opérateur contractant.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de C convergeant faiblement vers $\widehat{x}$ et si $Tx_n - x_n \to 0$ alors $\widehat{x} \in \operatorname{Fix} T$.

Preuve :

$$\begin{aligned}\|\widehat{x} - T\widehat{x}\|^2 = &\|x_n - Tx_n\|^2 + \|Tx_n - T\widehat{x}\|^2 - \|x_n - \widehat{x}\|^2\\ &+ 2\left\langle x_n - Tx_n \mid Tx_n - T\widehat{x}\right\rangle - 2\left\langle x_n - \widehat{x} \mid \widehat{x} - T\widehat{x}\right\rangle .\end{aligned}$$

T étant une contraction et, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\|\widehat{x} - T\widehat{x}\|^2 &\le \|x_n - Tx_n\|^2 + 2\|x_n - Tx_n\|\|Tx_n - T\widehat{x}\| - 2\left\langle x_n - \widehat{x} \mid \widehat{x} - T\widehat{x}\right\rangle\\ &\le \|x_n - Tx_n\|^2 + 2\|x_n - Tx_n\|\|x_n - \widehat{x}\| - 2\left\langle x_n - \widehat{x} \mid \widehat{x} - T\widehat{x}\right\rangle .\end{aligned}$$

$x_n \rightharpoonup \widehat{x} \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ borné, d'où le résultat par passage à la limite.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.
Soit $T\colon C \to C$ un opérateur contractant tel que $\operatorname{Fix} T \neq \varnothing$.
Soit $x_0 \in C$,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = Tx_n.$$

Si $x_n - Tx_n \to 0$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un point de $\operatorname{Fix} T$.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.
Soit $T\colon C \to C$ un opérateur contractant tel que $\operatorname{Fix} T \neq \varnothing$.
Soit $x_0 \in C$,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = Tx_n.$$

Si $x_n - Tx_n \to 0$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un point de $\operatorname{Fix} T$.

Preuve :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \operatorname{Fix} T$, $\|x_{n+1} - y\| \leq \|Tx_n - Ty\| \leq \|x_n - y\|$.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc Fejér-monotone par rapport à $\operatorname{Fix} T$.
Soit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle $x_{n_k} \rightharpoonup \widehat{x}$ où $\widehat{x} \in \mathcal{H}$.
Par hypothèse $x_{n_k} - Tx_{n_k} \to 0$ et donc, d'après le principe de demi-fermeture, $\widehat{x} \in \operatorname{Fix} T$.
Ceci assure la convergence faible de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Algorithmes de points fixes : algorithme du point proximal

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal tel que $\operatorname{zer} A \neq \varnothing$.
Soit $\gamma \in \,]0, +\infty[$ et $x_0 \in \mathcal{H}$.
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = J_{\gamma A} x_n$, alors $x_n - x_{n+1} \to 0$.

Algorithmes de points fixes : algorithme du point proximal

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal tel que $\operatorname{zer} A \neq \varnothing$.
Soit $\gamma \in \,]0, +\infty[$ et $x_0 \in \mathcal{H}$.
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = J_{\gamma A} x_n$, alors $x_n - x_{n+1} \to 0$.

<u>Preuve</u> : $J_{\gamma A}$ étant fermement contractant, pour tout $x \in \operatorname{zer} A = \operatorname{Fix} J_{\gamma A}$,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x\|^2 &= \|J_{\gamma A} x_n - J_{\gamma A} x\|^2 \\
&\leq \|x_n - x\|^2 - \|(\mathrm{Id} - J_{\gamma A}) x_n - (\mathrm{Id} - J_{\gamma A}) x\|^2 \\
&= \|x_n - x\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x_{n+1} - x\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 \leq \|x_n - x\|^2.$$

D'où $\sum_{k=0}^{n} \|x_k - x_{k+1}\|^2 \leq \|x_0 - x\|^2 < +\infty$. On en déduit que $x_n - x_{n+1} \to 0$.

Algorithmes de points fixes : algorithme du point proximal

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal tel que $\operatorname{zer} A \neq \varnothing$.
Soit $\gamma \in \,]0, +\infty[$ et $x_0 \in \mathcal{H}$.
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = J_{\gamma A} x_n$, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un zéro de A.

Algorithmes de points fixes : algorithme du point proximal

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal tel que $\operatorname{zer} A \neq \varnothing$.
Soit $\gamma \in \,]0, +\infty[$ et $x_0 \in \mathcal{H}$.
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = J_{\gamma A} x_n$, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un zéro de A.

Preuve : $J_{\gamma A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est une contraction et $x_n - J_{\gamma A} x_n \to 0$.

Algorithmes de points fixes : algorithme du point proximal

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal tel que $\operatorname{zer} A \neq \varnothing$.

Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $]0, +\infty[$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n^2 = +\infty$ et $x_0 \in \mathcal{H}$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = J_{\gamma_n A} x_n$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un zéro de A.

Algorithmes de points fixes : algorithme du point proximal

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal tel que $\operatorname{zer} A \neq \varnothing$.
Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $]0, +\infty[$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n^2 = +\infty$ et $x_0 \in \mathcal{H}$.
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = J_{\gamma_n A} x_n$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un zéro de A.

Preuve : ... plus sportive.

Méthodes d'optimisation : algorithme du point proximal

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\mathrm{Argmin} f \neq \varnothing$.

Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $]0,+\infty[$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n^2 = +\infty$ et $x_0 \in \mathcal{H}$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\gamma_n f} x_n$$

alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un minimiseur (global) de f.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Algorithme de Krasnosel'skii-Mann

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.
Soit $T\colon C \to C$ un opérateur contractant tel que $\mathrm{Fix}\, T \neq \varnothing$.
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0,1]$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(1-\lambda_n) = +\infty.$$

Soit $x_0 \in C$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n(Tx_n - x_n)$. Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est Fejér-monotone par rapport à $\mathrm{Fix}\, T$.
- $(Tx_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers 0.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un point de $\mathrm{Fix}\, T$.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Preuve :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par combinaison convexe, $x_n \in C$.

Fejér-monotonicité par rapport à $\mathrm{Fix}\, T$: $(\forall x \in \mathrm{Fix}\, T)(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - x\|^2\\
=&\|x_n + \lambda_n(Tx_n - x_n) - x\|^2\\
=&\|(1-\lambda_n)(x_n - x) + \lambda_n(Tx_n - x)\|^2\\
=&(1-\lambda_n)^2\|x_n - x\|^2 + \lambda_n^2\|Tx_n - x\|^2 - 2\lambda_n(1-\lambda_n)\left\langle x - x_n \mid Tx_n - x\right\rangle\\
=&(1-\lambda_n)\|x_n - x\|^2 + \lambda_n\|Tx_n - x\|^2 - \lambda_n(1-\lambda_n)\|Tx_n - x + x - x_n\|^2\\
=&(1-\lambda_n)\|x_n - x\|^2 + \lambda_n\|Tx_n - Tx\|^2 - \lambda_n(1-\lambda_n)\|Tx_n - x_n\|^2\\
\leq&(1-\lambda_n)\|x_n - x\|^2 + \lambda_n\|x_n - x\|^2 - \lambda_n(1-\lambda_n)\|Tx_n - x_n\|^2\\
\leq&\|x_n - x\|^2.
\end{aligned}$$

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Preuve :
Montrons que $Tx_n - x_n \to 0$.
On déduit de $\|x_{n+1} - x\|^2 \leq \|x_n - x\|^2 - \lambda_n(1-\lambda_n)\|Tx_n - x_n\|^2$ que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(1-\lambda_n)\|Tx_n - x_n\|^2 \leq \|x_0 - x\|^2$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \inf_{k\geq n} \|Tx_k - x_k\|^2 \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda_k(1-\lambda_k) \to 0.$$

Les hypothèses sur la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conduisent à $\liminf_{n\to+\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Preuve :
Les hypothèses sur la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conduisent à $\liminf_{n\to+\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$. De plus, en utilisant l'hypothèse que T est une contraction

$$\begin{aligned}
\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| &= \|Tx_{n+1} - Tx_n + (1-\lambda_n)(Tx_n - x_n)\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x_n\| + (1-\lambda_n)\|Tx_n - x_n\| \\
&= \|Tx_n - x_n\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(\|Tx_n - x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$Tx_n - x_n \to 0.$$

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Preuve :

Soit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n_k} \rightharpoonup \widehat{x}$. D'après le principe de demi-fermeture, $Tx_{n_k} - x_{n_k} \to 0$, implique que $\widehat{x} \in \mathrm{Fix}\, T$.
La convergence faible de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x se déduit de la Fejér-monotonicité de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à $\mathrm{Fix}\, T$.

Algorithmes de points fixes : Douglas-Rachford

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\gamma \in \,]0, +\infty[$.
Soient $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ et $B\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ deux opérateurs monotones. On a

$$\operatorname{zer}(A + B) = J_{\gamma B}(\operatorname{Fix} R_{\gamma A} R_{\gamma B}).$$

Algorithmes de points fixes : Douglas-Rachford

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\gamma \in \,]0, +\infty[$.
Soient $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ et $B\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ deux opérateurs monotones. On a

$$\mathrm{zer}\,(A+B) = J_{\gamma B}(\mathrm{Fix} R_{\gamma A} R_{\gamma B}).$$

Preuve : Soit $x \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned}
0 \in \gamma(Ax + Bx) &\Leftrightarrow (\exists y \in \mathcal{H}) \;\; x - y \in \gamma Ax \text{ et } y - x \in \gamma Bx \\
&\Leftrightarrow (\exists y \in \mathcal{H}) \;\; 2x - y \in (\mathrm{Id} + \gamma A)x \text{ et } x = J_{\gamma B} y \\
&\Leftrightarrow (\exists y \in \mathcal{H}) \;\; x = J_{\gamma A}(R_{\gamma B} y) \text{ et } x = J_{\gamma B} y \\
&\Leftrightarrow (\exists y \in \mathcal{H}) \;\; R_{\gamma A}(R_{\gamma B} y) = 2x - R_{\gamma B} y = y \\
&\qquad\qquad \text{et } x = J_{\gamma B} y \\
&\Leftrightarrow (\exists y \in \mathrm{Fix} R_{\gamma A} R_{\gamma B}) \;\; x = J_{\gamma B} y.
\end{aligned}$$

Algorithmes de points fixes : Douglas-Rachford

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension finie.

Soient $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ et $B\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ deux opérateurs monotones maximaux.
Soit $\gamma \in \,]0,+\infty[$ et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0,2]$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(2-\lambda_n) = +\infty$.
Supposons que $\mathrm{zer}\,(A+B) \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathcal{H}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} y_n = J_{\gamma B} x_n \\ z_n = J_{\gamma A}(2y_n - x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n(z_n - y_n). \end{cases}$$

Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $x_n \to \widehat{x}$
- $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $J_{\gamma B}\widehat{x} \in \mathrm{zer}\,(A+B)$.

Algorithmes de points fixes : Douglas-Rachford

Preuve : Soit $T = R_{\gamma A} R_{\gamma B}$. T est contractant et $\varnothing \neq \operatorname{zer}(A+B) = J_{\gamma B}(\operatorname{Fix} R_{\gamma A} R_{\gamma B}) \Rightarrow \operatorname{Fix} T \neq \varnothing$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \lambda_n \big(J_{\gamma A}(2 J_{\gamma B} x_n - x_n) - J_{\gamma B} x_n \big) \\ &= x_n + \lambda_n \big(J_{\gamma A}(R_{\gamma B} x_n) - J_{\gamma B} x_n \big) \\ &= x_n + \frac{\lambda_n}{2} \big(2 J_{\gamma A}(R_{\gamma B} x_n) - R_{\gamma B} x_n - x_n \big) \\ &= x_n + \frac{\lambda_n}{2} \big(T x_n - x_n \big). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Algorithme de Krasnosel'skii-Mann avec facteurs de relaxations $(\lambda_n/2)_{n\in\mathbb{N}}$.
On en déduit que $T x_n - x_n \to 0$ et $x_n \to \widehat{x} \in \operatorname{Fix} T$.

Algorithmes de points fixes : Douglas-Rachford

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n - y_n = J_{\gamma A}(2J_{\gamma B}x_n - x_n) - J_{\gamma B}x_n = \frac{1}{2}(Tx_n - x_n) \to 0$$

$J_{\gamma B}$ étant continue, on a $y_n \to J_{\gamma B}\widehat{x} \in \operatorname{zer}(A+B)$.
Puisque $z_n - y_n \to 0$, on a aussi que $z_n \to J_{\gamma B}\widehat{x} \in \operatorname{zer}(A+B)$.

Algorithmes de points fixes : Douglas-Rachford

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

Soient $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ et $B\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ deux opérateurs monotones maximaux.

Soit $\gamma \in \,]0, +\infty[$ et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0, 2]$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(2-\lambda_n) = +\infty$.

Supposons que $\operatorname{zer}(A+B) \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathcal{H}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} y_n = J_{\gamma B} x_n \\ z_n = J_{\gamma A}(2y_n - x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n(z_n - y_n). \end{cases}$$

Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $x_n \rightharpoonup \widehat{x}$
- $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent faiblement vers $J_{\gamma B}\widehat{x} \in \operatorname{zer}(A+B)$.

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.
Soit $\gamma \in \,]0, +\infty[$ et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0, 2]$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(2-\lambda_n) = +\infty$.
Supposons que $\operatorname{zer}(\partial f + \partial g) \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathcal{H}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\gamma g} x_n \\ z_n = \operatorname{prox}_{\gamma f}(2y_n - x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n(z_n - y_n). \end{cases}$$

Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $x_n \rightharpoonup \widehat{x}$
- $z_n - y_n \to 0$, $y_n \rightharpoonup \widehat{y}$ et $z_n \rightharpoonup \widehat{y}$ où $\widehat{y} = \operatorname{prox}_{\gamma g}\widehat{x} \in \operatorname{Argmin}(f+g)$.

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Restauration d'image : $\boxed{z = A\overline{x} + n}$

- $\overline{x} \in \mathbb{R}^N$: image originale (inconnue),
- $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$: opérateur de flou,
- $n \in \mathbb{R}^N$: bruit additif blanc gaussien centré,
- $z \in \mathbb{R}^N$: observation $=$ image floue et bruitée

$\Rightarrow$ Trouver une image $\widehat{x}$ la plus proche possible de $\overline{x}$ à partir de z

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x\in\mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta\|Wx\|_1 \quad \text{avec} \quad \eta \in \left]0, +\infty\right[\quad \text{et} \quad W \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

- Algorithme de Douglas-Rachford avec $g = \|A\cdot - z\|_2^2$ et $f = \eta\|W\cdot\|_1$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\gamma g} x_n \\ z_n = \operatorname{prox}_{\gamma f}(2y_n - x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n(z_n - y_n). \end{cases}$$

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x\in\mathbb{R}^N}{\mathrm{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta\|Wx\|_1 \quad \text{avec} \quad \eta \in \,]0,+\infty[\quad \text{et} \quad W \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

- Algorithme de Douglas-Rachford avec $g = \|A\cdot - z\|_2^2$ et $f = \eta\|W\cdot\|_1$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} y_n = \mathrm{prox}_{\gamma g} x_n & \rightarrow \quad \text{Forme explicite} \\ z_n = \mathrm{prox}_{\gamma f}(2y_n - x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n(z_n - y_n). \end{cases}$$

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta \|Wx\|_1 \quad \text{avec} \quad \eta \in \,]0, +\infty[\quad \text{et} \quad W \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

- Algorithme de Douglas-Rachford avec $g = \|A \cdot - z\|_2^2$ et $f = \eta \|W \cdot \|_1$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\gamma g} x_n \\ z_n = \operatorname{prox}_{\gamma f}(2y_n - x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n (z_n - y_n). \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Forme explicite}$$

$$\boxed{\operatorname{prox}_{\gamma\eta|\cdot|_1} = \mathsf{soft}_{[-\gamma\eta, \gamma\eta]}}$$

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x\in\mathbb{R}^N}{\mathrm{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta\|Wx\|_1 \quad \text{avec} \quad \eta \in\,]0,+\infty[\quad \text{et} \quad W \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

- Algorithme de Douglas-Rachford avec $g = \|A\cdot - z\|_2^2$ et $f = \eta\|W\cdot\|_1$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} y_n = \mathrm{prox}_{\gamma g} x_n \\ z_n = \mathrm{prox}_{\gamma f}(2y_n - x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n(z_n - y_n). \end{cases} \quad \rightarrow$$

Forme explicite si $W^{-1} = W^*$
(e.g. transformée en ondelettes)

$$\boxed{\mathrm{prox}_{f\circ W} = W^* \mathrm{prox}_f(W\cdot)}$$

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta \|Wx\|_1 \quad \text{avec} \quad \eta \in \,]0, +\infty[\quad \text{et} \quad W \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

- Algorithme de Douglas-Rachford

Image dégradée z

Image restaurée $\widehat{x}$ [DR – DWT]

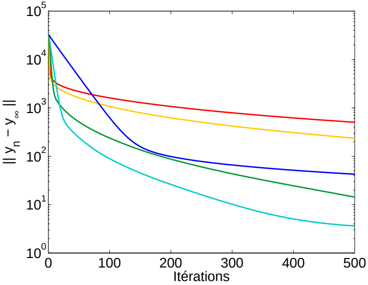
Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta \|Wx\|_1 \quad \text{avec} \quad \eta \in \,]0, +\infty[\quad \text{et} \quad W \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

- Algorithme de Douglas-Rachford

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\gamma g} x_n \\ z_n = \operatorname{prox}_{\gamma f}(2y_n - x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n (z_n - y_n). \end{cases}$$



$$\gamma = \{50, 10^2, 5.10^2, 10^3, 5.10^3\}$$

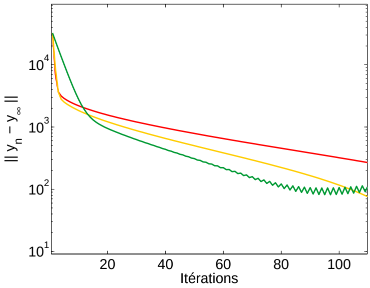
Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x\in\mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta\|Wx\|_1 \quad \text{avec} \quad \eta \in \,]0,+\infty[\quad \text{et} \quad W \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

- Algorithme de Douglas-Rachford

$$\boxed{\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\gamma g} x_n \\ z_n = \operatorname{prox}_{\gamma f}(2y_n - x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n(z_n - y_n). \end{cases}}$$



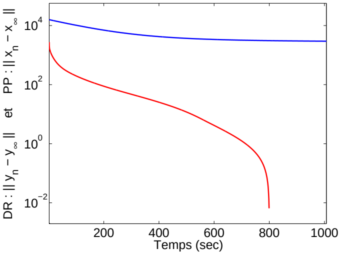
$$\lambda_n \equiv \{1, 1.5, 2.1\}$$

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta \|Wx\|_1 \quad \text{avec} \quad \eta \in \,]0, +\infty[\quad \text{et} \quad W \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

- Algorithme de Douglas-Rachford



$\rightarrow$ DR (rouge)

$\rightarrow$ Point proximal (bleu)

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Soit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de Hilbert.
Soient $g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tel que $\mathrm{ran}\, L$ est fermé et $L^* L$ est un isomorphisme.
Soit $\gamma \in \,]0, +\infty[$ et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0, 2]$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(2 - \lambda_n) = +\infty$.
Supposons que $\mathrm{zer}\,(L^* \circ \partial g \circ L) \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathcal{H}$, $v_0 = (L^* L)^{-1} L^* x_0$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} y_n = \mathrm{prox}_{\gamma g} x_n \\ c_n = (L^* L)^{-1} L^* y_n \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n \big(L(2c_n - v_n) - y_n \big) \\ v_{n+1} = v_n + \lambda_n (c_n - v_n). \end{cases}$$

On a alors :
$v_n \rightharpoonup \widehat{v}$ où $\widehat{v} \in \mathrm{Argmin}(g \circ L)$.

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Eléments de preuve :

$$\underset{v\in\mathcal{G}}{\text{minimize}}\;\; g(Lv) \quad\Leftrightarrow\quad \underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimize}}\;\; \iota_E(x)+g(x)$$

où $E=\operatorname{ran} L$.
On applique l'algorithme de Douglas-Rachford avec
$f=\iota_E \Rightarrow \operatorname{prox}_{\gamma f}=P_E$ et en posant

$$(\forall n\in\mathbb{N})\qquad P_E y_n = Lc_n \;\text{ et }\; P_E x_n = Lv_n$$

où $c_n=\underset{c\in\mathcal{H}}{\operatorname{argmin}}\;\|y_n-Lc\|^2=(L^*L)^{-1}L^*y_n$.

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Cas particulier de l'algorithme de Douglas-Rachford :

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \cdots \mathcal{H}_m$ où $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_m$ espaces de Hilbert

$\big(\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{H}\big)\ g(x) = \sum_{i=1}^m g_i(x_i)$

où $(\forall i \in \{1, \dots, m\}\ g_i \in \Gamma_0(\mathcal{H}_i)$

$L\colon v \mapsto (L_1 v, \dots, L_m v)$ où $(\forall i \in \{1, \dots, m\})\ L_i \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H}_i)$.

Algorithme PPXA+

Soit $(x_{0,i})_{1\le i\le m} \in \mathcal{H}$, $v_0 = (\sum_{i=1}^m L_i^* L_i)^{-1} \sum_{i=1}^m L_i^* x_{0,i}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} y_{n,i} = \mathrm{prox}_{\gamma g_i} x_{n,i}, \quad i \in \{1, \dots, m\} \\ c_n = (\sum_{i=1}^m L_i^* L_i)^{-1} \sum_{i=1}^m L_i^* y_{n,i} \\ x_{n+1,i} = x_{n,i} + \lambda_n\big(L_i(2c_n - v_n) - y_{n,i}\big), \quad i \in \{1, \dots, m\} \\ v_{n+1} = v_n + \lambda_n(c_n - v_n). \end{cases}$$

On a alors $v_n \rightharpoonup \widehat{v} \in \mathrm{Argmin} \sum_{i=1}^m g_i \circ L_i$.

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Cas particulier de l'algorithme de Douglas-Rachford :
$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \cdots \mathcal{H}_m$ où $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m$ espaces de Hilbert
$\big(\forall x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{H}\big)$ $g(x) = \sum_{i=1}^m g_i(x_i)$
où $(\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ $g_i \in \Gamma_0(\mathcal{H}_i)$
$L\colon v \mapsto (L_1 v, \ldots, L_m v)$ où $(\forall i \in \{1, \ldots, m\})$ $L_i \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H}_i)$.

Algorithme PPXA+

Soit $(x_{0,i})_{1 \le i \le m} \in \mathcal{H}$, $v_0 = (\sum_{i=1}^m L_i^* L_i)^{-1} \sum_{i=1}^m L_i^* x_{0,i}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} y_{n,i} = \mathrm{prox}_{\gamma g_i} x_{n,i}, \quad i \in \{1, \ldots, m\} \\ c_n = (\sum_{i=1}^m L_i^* L_i)^{-1} \sum_{i=1}^m L_i^* y_{n,i} \\ x_{n+1,i} = x_{n,i} + \lambda_n\big(L_i(2c_n - v_n) - y_{n,i}\big), \quad i \in \{1, \ldots, m\} \\ v_{n+1} = v_n + \lambda_n(c_n - v_n). \end{cases}$$

Si $\mathcal{H}_1 = \ldots = \mathcal{H}_m$ et $L_1 = \ldots = L_m = \mathrm{Id} \Rightarrow$ algorithme PPXA

Algorithmes d'optimisation : Douglas-Rachford

Cas particulier de l'algorithme de Douglas-Rachford :
$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \cdots \mathcal{H}_m$ où $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m$ espaces de Hilbert
$\big(\forall x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{H}\big)$ $g(x) = \sum_{i=1}^m g_i(x_i)$
où $(\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ $g_i \in \Gamma_0(\mathcal{H}_i)$
$L\colon v \mapsto (L_1 v, \ldots, L_m v)$ où $(\forall i \in \{1, \ldots, m\})$ $L_i \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H}_i)$.

Algorithme PPXA

Soit $(x_{0,i})_{1 \le i \le m} \in \mathcal{H}$, $v_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{0,i}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} y_{n,i} = \mathrm{prox}_{\gamma g_i} x_{n,i}, & i \in \{1, \ldots, m\} \\ c_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{n,i} \\ x_{n+1,i} = x_{n,i} + \lambda_n \big(2c_n - v_n - y_{n,i}\big), & i \in \{1, \ldots, m\} \\ v_{n+1} = v_n + \lambda_n (c_n - v_n). \end{cases}$$

Si $\mathcal{H}_1 = \ldots = \mathcal{H}_m$ et $L_1 = \ldots = L_m = \mathrm{Id} \Rightarrow$ algorithme PPXA

Algorithmes d'optimisation : PPXA+

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x\in\mathbb{R}^N}{\mathrm{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta\|[H^* V^*]^* x\|_{2,1} + \iota_C(x) \text{ avec } \begin{cases} \eta \in \,]0, +\infty[\\ H, V \in \mathbb{R}^{N\times N} \\ C = [0, 255]^N \end{cases}$$

- Algorithme PPXA+ avec $g_1 = \|A\cdot - z\|_2^2$ et $L_1 = \mathrm{Id}$
  $g_2 = \eta\|\cdot\|_{1,2}$ et $L_2 = [H^* V^*]^*$
  $g_3 = \iota_C$ et $L_3 = \mathrm{Id}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} y_{n,i} = \mathrm{prox}_{\gamma g_i} x_{n,i},\, i \in \{1,2,3\} \\ c_n = (\sum_{i=1}^3 L_i^* L_i)^{-1} \sum_{i=1}^3 L_i^* y_{n,i} \\ x_{n+1,i} = x_{n,i} + \lambda_n\big(L_i(2c_n - v_n) - y_{n,i}\big),\; i \in \{1,2,3\} \\ v_{n+1} = v_n + \lambda_n(c_n - v_n). \end{cases}$$

Algorithmes d'optimisation : PPXA+

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta \|[H^* V^*]^* x\|_{2,1} + \iota_C(x) \text{ avec } \begin{cases} \eta \in]0, +\infty[\\ H, V \in \mathbb{R}^{N \times N} \\ C = [0, 255]^N \end{cases}$$

- Algorithme PPXA+ avec $g_1 = \|A \cdot - z\|_2^2$ et $L_1 = \mathrm{Id}$

  $g_2 = \eta \| \cdot \|_{1,2}$ et $L_2 = [H^* V^*]^*$

  $g_3 = \iota_C$ et $L_3 = \mathrm{Id}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} y_{n,i} = \operatorname{prox}_{\gamma g_i} x_{n,i}, \, i \in \{1, 2, 3\} & \rightarrow \quad \text{Forme explicite} \\ c_n = \left(\sum_{i=1}^3 L_i^* L_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^3 L_i^* y_{n,i} & \rightarrow \quad \text{Forme explicite} \\ x_{n+1,i} = x_{n,i} + \lambda_n \big(L_i(2c_n - v_n) - y_{n,i} \big), \; i \in \{1, 2, 3\} \\ v_{n+1} = v_n + \lambda_n (c_n - v_n). \end{cases}$$

Algorithmes d'optimisation : PPXA+

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\mathrm{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta \|[H^* V^*]^* x\|_{2,1} + \iota_C(x) \text{ avec } \begin{cases} \eta \in \,]0, +\infty[\\ H, V \in \mathbb{R}^{N \times N} \\ C = [0, 255]^N \end{cases}$$

- Algorithme PPXA+

Image dégradée z

Image restaurée $\widehat{x}$ [PPXA – TV]

Algorithmes d'optimisation : PPXA+

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta \|[H^* V^*]^* x\|_{2,1} + \iota_C(x) \text{ avec } \begin{cases} \eta \in \,]0, +\infty[\\ H, V \in \mathbb{R}^{N \times N} \\ C = [0, 255]^N \end{cases}$$

- Algorithme PPXA+

Image dégradée z

Image restaurée $\widehat{x}$ [DR – DWT]

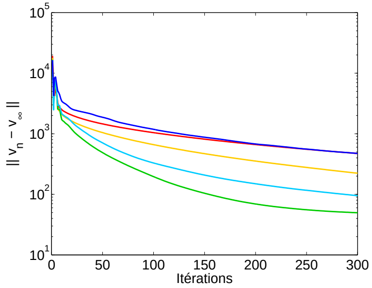
Algorithmes d'optimisation : PPXA+

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta \|[H^* V^*]^* x\|_{2,1} + \iota_C(x) \text{ avec } \begin{cases} \eta \in \,]0, +\infty[\\ H, V \in \mathbb{R}^{N \times N} \\ C = [0, 255]^N \end{cases}$$

- Algorithme PPXA+

$$\begin{cases} y_{n,i} = \operatorname{prox}_{\gamma g_i} x_{n,i}, \\ c_n = \left(\sum_{i=1}^3 L_i^* L_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^2 L_i^* y_{n,i} \\ x_{n+1,i} = x_{n,i} + \lambda_n \big(L_i(2c_n - v_n) - y_{n,i}\big), \\ v_{n+1} = v_n + \lambda_n (c_n - v_n). \end{cases}$$



$$\gamma = \{5.10^2, 10^3, 5.10^3, 10^4, 5.10^4\}$$

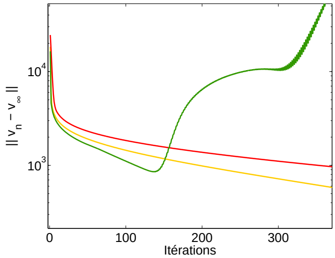
Algorithmes d'optimisation : PPXA+

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{x} \in \underset{x\in\mathbb{R}^N}{\mathrm{Argmin}} \|Ax - z\|_2^2 + \eta\|[H^* V^*]^* x\|_{2,1} + \iota_C(x) \text{ avec } \begin{cases} \eta \in \,]0,+\infty[\\ H, V \in \mathbb{R}^{N\times N} \\ C = [0,255]^N \end{cases}$$

- Algorithme PPXA+

$$\begin{cases} y_{n,i} = \mathrm{prox}_{\gamma g_i} x_{n,i}, \\ c_n = \left(\sum_{i=1}^{3} L_i^* L_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{2} L_i^* y_{n,i} \\ x_{n+1,i} = x_{n,i} + \lambda_n\Big(L_i(2c_n - v_n) - y_{n,i}\Big), \\ v_{n+1} = v_n + \lambda_n(c_n - v_n). \end{cases}$$



$\lambda_n \equiv \{1, 1.8, 2.1\}$

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\alpha \in]0,1[$.
Soit $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur α-moyenné avec $\alpha \in]0,1[$ tel que $\mathrm{Fix}\, T \neq \varnothing$.
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0, 1/\alpha]$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(1-\alpha\lambda_n) = +\infty.$$

Soit $x_0 \in \mathcal{H}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n(Tx_n - x_n)$. Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est Fejér-monotone par rapport à $\mathrm{Fix}\, T$.
- $(Tx_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers 0.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un point de $\mathrm{Fix}\, T$.

Algorithmes de points fixes : suites Fejér-monotones

Preuve :
T étant α-moyenné, il existe une contraction R telle que $T = (1-\alpha)\mathrm{Id} + \alpha R$.
Soit $(\forall n \in \mathbb{N})\ \mu_n = \alpha\lambda_n \in [0,1]$.
Les itérations peuvent se ré-écrire

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \lambda_n(Tx_n - x_n) \\ &= x_n + \mu_n(Rx_n - x_n). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathrm{Fix} R = \mathrm{Fix}\, T$.
$+$ Algorithme de Krasnosel'skii-Mann.

Algorithmes de points fixes : algorithme Explicite-Implicite (*Forward-Backward*)

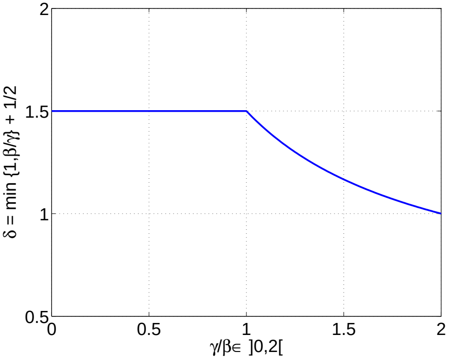
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal.
Soit $B\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur β-cocoercif où $\beta \in \left]0, +\infty\right[$.
Soient $\gamma \in]0, 2\beta[$ et $\delta = \min\{1, \beta/\gamma\} + 1/2$.
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0, \delta[$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\delta - \lambda_n) = +\infty$.
Supposons que $\operatorname{zer}(A + B) \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathcal{H}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} y_n = x_n - \gamma B x_n \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n (J_{\gamma A} y_n - x_n). \end{cases}$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un point de $\operatorname{zer}(A + B)$.

Algorithmes de points fixes : algorithme Explicite-Implicite (*Forward-Backward*)

Soient $\gamma \in]0, 2\beta[$ et $\delta = \min\{1, \beta/\gamma\} + 1/2$.
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0, \delta[$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\delta - \lambda_n) = +\infty$.



Algorithmes de points fixes : *Forward-Backward*

Preuve : Soit $T = J_{\gamma A}(\mathrm{Id} - \gamma B)$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$x \in \mathrm{Fix}\, T \Leftrightarrow x - \gamma Bx \in (\mathrm{Id} + \gamma A)x \Leftrightarrow 0 \in Ax + Bx.$$

D'où $\mathrm{Fix}\, T = \mathrm{zer}\,(A + B) \neq \varnothing$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_n(Tx_n - x_n).$$

Par ailleurs, $J_{\gamma A}$ est $1/2$-moyenné et
B β-cocoercif et $\gamma \in]0, 2\beta[\Rightarrow \mathrm{Id} - \gamma B$ est $\gamma/(2\beta)$-moyenné.
On en déduit que T est α-moyenné avec

$$\alpha = \frac{2}{1 + \frac{1}{\max\{\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2\beta}\}}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^{-1} = \delta.$$

Le résultat découle alors du précédent.

Algorithmes de points fixes : *Forward-Backward*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal.

Soit $B\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur β-cocoercif où $\beta \in \left]0, +\infty\right[$.

Soient $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}]$ où $0 < \underline{\gamma} \leq \overline{\gamma} < 2\beta$.

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[\underline{\lambda}, 1]$ où $\underline{\lambda} \in]0, 1]$.

Supposons que $\operatorname{zer}(A+B) \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathcal{H}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} y_n = x_n - \gamma_n B x_n \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n (J_{\gamma_n A} y_n - x_n). \end{cases}$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un point de $\operatorname{zer}(A+B)$.

Remarque : Quand $B = 0$ et $\lambda_n \equiv 1$, on retrouve l'algorithme du point proximal.

Algorithmes d'optimisation : *Forward-Backward*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.
Soit $g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ de gradient $1/\beta$-lipschitzien où $\beta \in \,]0, +\infty[$.
Soient $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}]$ où $0 < \underline{\gamma} \leq \overline{\gamma} < 2\beta$.
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[\underline{\lambda}, 1]$ où $\underline{\lambda} \in]0, 1]$.
Supposons que $\mathrm{Argmin}(f+g) \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathcal{H}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} y_n = x_n - \gamma_n \nabla g(x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n(\mathrm{prox}_{\gamma_n f} y_n - x_n). \end{cases}$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un minimiseur de $f+g$.

Algorithmes d'optimisation : *Forward-Backward*

Interprétation MM (Majoration-Minimisation)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $p_n = \mathrm{prox}_{\gamma_n f}\big(x_n - \gamma_n \nabla g(x_n)\big)$. On a :

$$f(x_{n+1}) = f\big((1-\lambda_n)x_n + \lambda_n p_n\big) \leq (1-\lambda_n) f(x_n) + \lambda_n f(p_n).$$

Par ailleurs, d'après le lemme de descente,

$$g(x_{n+1}) \leq g(x_n) + \langle \nabla g(x_n) \mid x_{n+1} - x_n \rangle + \frac{1}{2\beta}\|x_{n+1} - x_n\|^2.$$

Enfin, d'après la définition de l'opérateur proximal,

$$\gamma_n f(p_n) + \frac{1}{2}\|p_n - x_n + \gamma_n \nabla g(x_n)\|^2 \leq \gamma_n f(x_n) + \frac{1}{2}\gamma_n^2 \|\nabla g(x_n)\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad f(p_n) + \langle \nabla g(x_n) \mid p_n - x_n \rangle + \frac{1}{2}\gamma_n^{-1}\|p_n - x_n\|^2 \leq f(x_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_n f(p_n) + \langle \nabla g(x_n) \mid x_{n+1} - x_n \rangle + \frac{1}{2}\gamma_n^{-1}\lambda_n^{-1}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \lambda_n f(x_n)$$

puisque $x_{n+1} - x_n = \lambda_n(p_n - x_n)$.

Algorithmes d'optimisation : *Forward-Backward*

Interprétation MM (Majoration-Minimisation)

$$\begin{cases} f(x_{n+1}) = f\big((1-\lambda_n)x_n + \lambda_n p_n\big) \le (1-\lambda_n)f(x_n) + \lambda_n f(p_n) \\ g(x_{n+1}) \le g(x_n) + \langle \nabla g(x_n) \mid x_{n+1} - x_n \rangle + \frac{1}{2\beta}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \\ \lambda_n f(p_n) + \langle \nabla g(x_n) \mid x_{n+1} - x_n \rangle + \frac{1}{2}\gamma_n^{-1}\lambda_n^{-1}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \le \lambda_n f(x_n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) + \frac{1}{2}(\gamma_n^{-1}\lambda_n^{-1} - \beta^{-1})\|x_{n+1} - x_n\|^2 \le f(x_n) + g(x_n).$$

Donc si $\gamma_n^{-1}\lambda_n^{-1} - \beta^{-1} \ge 0 \Rightarrow \gamma_n\lambda_n \le \beta$, $\big(f(x_n) + g(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

Puisque $(\forall n \in \mathbb{N})$ $p_n = \mathrm{prox}_{\gamma_n f} y_n \in \mathrm{dom}\, f$, si $x_0 \in \mathrm{dom}\, f$,
alors $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n p_n \in \mathrm{dom}\, f$.
Ainsi, $\big(f(x_n) + g(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante.

Algorithmes d'optimisation : *Forward-Backward*

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{u} \in \underset{u \in \mathbb{R}^N}{\mathrm{Argmin}} \|AF^* u - z\|_2^2 + \eta \|u\|_1 \text{ avec } \eta \in \,]0, +\infty[\text{ et } F \in \mathbb{R}^{N \times M}$$

- Algorithme FB avec $g = \|AF^* \cdot - z\|_2^2$, $f = \eta \| \cdot \|_1$ et $\widehat{x} = F^* \widehat{u}$.

$$\begin{cases} y_n = x_n - \gamma_n \nabla g(x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n (\mathrm{prox}_{\gamma_n f} y_n - x_n) \end{cases}$$

Algorithmes d'optimisation : *Forward-Backward*

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{u} \in \underset{u \in \mathbb{R}^N}{\mathrm{Argmin}} \|AF^* u - z\|_2^2 + \eta \|u\|_1 \text{ avec } \eta \in \,]0, +\infty[\text{ et } F \in \mathbb{R}^{N \times M}$$

- Algorithme FB avec $g = \|AF^* \cdot - z\|_2^2$, $f = \eta \| \cdot \|_1$ et $\widehat{x} = F^* \widehat{u}$.

$$\begin{cases} y_n = x_n - \gamma_n \nabla g(x_n) & \rightarrow \quad \text{Forme explicite : } 2FA^*(AF^* \cdot - z) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n (\mathrm{prox}_{\gamma_n f} y_n - x_n) & \rightarrow \quad \text{Forme explicite} \end{cases}$$

Algorithmes d'optimisation : *Forward-Backward*

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{u} \in \underset{u \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|AF^* u - z\|_2^2 + \eta \|u\|_1 \text{ avec } \eta \in \,]0, +\infty[\text{ et } F \in \mathbb{R}^{N \times M}$$

- Algorithme FB

Image dégradée z

Image restaurée [FB – DTT]

Algorithmes d'optimisation : *Forward-Backward*

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{u} \in \underset{u \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|AF^* u - z\|_2^2 + \eta \|u\|_1 \text{ avec } \eta \in \,]0, +\infty[\text{ et } F \in \mathbb{R}^{N \times M}$$

- Algorithme FB

Image dégradée z

Image restaurée [PPXA – TV]

Algorithmes d'optimisation : *Forward-Backward*

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{u} \in \underset{u \in \mathbb{R}^N}{\text{Argmin}} \|AF^* u - z\|_2^2 + \eta \|u\|_1 \text{ avec } \eta \in \,]0, +\infty[\text{ et } F \in \mathbb{R}^{N \times M}$$

- Algorithme FB

Image dégradée z

Image restaurée
[DR – DWT]

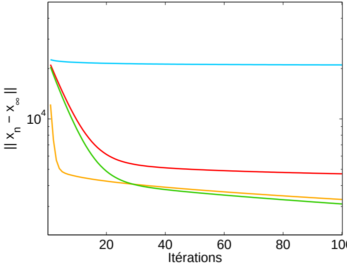
Algorithmes d'optimisation : *Forward-Backward*

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{u} \in \underset{u \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} \|AF^* u - z\|_2^2 + \eta \|u\|_1 \text{ avec } \eta \in \,]0, +\infty[\text{ et } F \in \mathbb{R}^{N \times M}$$

- Algorithme FB

$$\begin{cases} y_n = x_n - \gamma_n \nabla g(x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n (\operatorname{prox}_{\gamma_n f} y_n - x_n) \end{cases}$$



$$2\|AF^*\|^2 \gamma_n \equiv \{0.1, 1.5, 1.9, 2\}$$

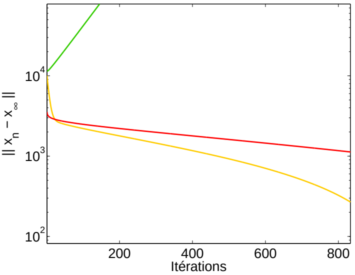
Algorithmes d'optimisation : *Forward-Backward*

Restauration d'image : Approche variationnelle

$$\widehat{u} \in \underset{u\in\mathbb{R}^N}{\mathrm{Argmin}} \|AF^*u - z\|_2^2 + \eta\|u\|_1 \text{ avec } \eta \in \,]0,+\infty[\text{ et } F \in \mathbb{R}^{N\times M}$$

- Algorithme FB

$$\begin{cases} y_n = x_n - \gamma_n \nabla g(x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n (\mathrm{prox}_{\gamma_n f} y_n - x_n) \end{cases}$$



$$\lambda_n \equiv \{0.5, 1, 1.1\}$$

Algorithmes d'optimisation : gradient projeté

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit C un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$.
Soit $g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ de gradient $1/\beta$-Lipschitzien où $\beta \in \,]0,+\infty[$.
Soient $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[\underline{\gamma},\overline{\gamma}]$ où $0 < \underline{\gamma} \leq \overline{\gamma} < 2\beta$.
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[\underline{\lambda},1]$ où $\underline{\lambda} \in]0,1]$.
Supposons que $\mathrm{Argmin}_{x\in C}\, g(x) \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathcal{H}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} y_n = x_n - \gamma_n \nabla g(x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n (P_C y_n - x_n). \end{cases}$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un minimiseur de g sur C.

Algorithmes d'optimisation : gradient projeté

Restauration d'image : Approche variationnelle sous forme régularisée

$$\widehat{u} \in \underset{u \in \mathbb{R}^N}{\mathrm{Argmin}} \|AF^* u - z\|_2^2 + \eta \|u\|_1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \eta \in \,]0, +\infty[\\ F \in \mathbb{R}^{N \times M} \end{cases}$$

Restauration d'image : Approche variationnelle sous forme contrainte

$$\widehat{u} \in \underset{u \in \mathbb{R}^N, \|u\|_1 \leq \epsilon}{\mathrm{Argmin}} \|AF^* u - z\|_2^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \epsilon \in \,]0, +\infty[\\ F \in \mathbb{R}^{N \times M} \end{cases}$$

Algorithmes de points fixes : *Forward-Backward-Forward*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur monotone maximal.

Soit $B\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur monotone $1/\beta$-lipschitzien où $\beta \in\ ]0, +\infty[$.

Soient $\varepsilon \in]0, \beta/(1+\beta)[$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[\varepsilon, (1-\epsilon)\beta]$.

Supposons que $\operatorname{zer}(A+B) \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathcal{H}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} y_n = x_n - \gamma_n B x_n \\ p_n = J_{\gamma_n A} y_n \\ q_n = p_n - \gamma_n B p_n \\ x_{n+1} = x_n - y_n + q_n. \end{cases}$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent faiblement vers $\widehat{x} \in \operatorname{zer}(A+B)$.

Algorithmes d'optimisation : *Forward-Backward-Forward*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.
Soit $g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ de gradient $1/\beta$-lipschitzien où $\beta \in \,]0, +\infty[$.
Soient $\varepsilon \in]0, \beta/(1+\beta)[$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[\varepsilon, (1-\epsilon)\beta]$.
Supposons que $\operatorname{Argmin}(f+g) \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathcal{H}$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} y_n = x_n - \gamma_n \nabla g(x_n) \\ p_n = \operatorname{prox}_{\gamma_n f} y_n \\ q_n = p_n - \gamma_n \nabla g(p_n) \\ x_{n+1} = x_n - y_n + q_n. \end{cases}$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent faiblement vers $\widehat{x} \in \operatorname{Argmin}(f+g)$.

Conclusions

- Cadre très flexible
  Unifiant un certain nombre de problèmes :
  - approches régularisées

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimize}} \;\; f(x)+\sum_{i=1}^{m} g_i(x)$$

  où $f\colon \mathcal{H}\to\mathbb{R}$, $(\forall i\in\{1,\ldots,m\})$ $g_i\colon\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ sont convexes.
  - approches d'admissibilité

$$\text{Trouver } x\in\mathcal{H} \text{ tel que} \quad x\in\bigcap_{i=1}^{m} C_i$$

  où $(\forall i\in\{1,\ldots,m\})$ C_i est un convexe non vide fermé de $\mathcal{H}$.

Conclusions

- Cadre très flexible
  Unifiant un certain nombre de problèmes :
  - problèmes parcimonieux (*sparse*)

    $$\underset{x \in \mathcal{H}}{\operatorname{minimize}} \; f(x) + \sigma_C(x)$$

    où $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et C est convexe non vide fermé de $\mathcal{H}$.
  - problèmes contraints

    $$\underset{x \in C}{\operatorname{minimize}} \; g(x)$$

    où $g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.

Conclusions

- Résultats en dimension infinie (problèmes continus).

- L'importance de (s')éclater.
  Méthodes parallèles appropriées aux implantations multi-cœurs.

- Robustesse des méthodes aux erreurs numériques sommables.

$$\mathrm{prox}_f x_n \to \mathrm{prox}_f x_n + e_n$$

  où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{H}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|e_n\| < +\infty$.

- Applications à d'autres domaines : théorie des jeux, EDP,...
  Traquez les opérateurs monotones dans vos domaines de prédilection !

- Extension au cadre non convexe à explorer.