Encadrements effectifs des coefficients de Fourier des puissances entières de l’invariant modulaire j

Georges Philibert
LArAl, Univ. Saint-Étienne

Nicolas Brisebarre
LArAl, Univ. Saint-Étienne
Arénaire, LIP, É.N.S. Lyon

26 février 2004

$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) > 0\}$: le demi-plan de Poincaré.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $ad - bc = 1$.

$SL_2(\mathbb{Z})$ opère sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$: soient $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z = \begin{cases} \infty \text{ si } z = -d/c, \\ a/c \text{ si } z = \infty, \\ \dfrac{az+b}{cz+d} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $z \in \mathfrak{H}$, $\mathrm{Im}(g.z) = \frac{\mathrm{Im} z}{|cz+d|^2} > 0$.

Définition . *Soit k un entier. On appelle fonction faiblement modulaire de poids $2k$ toute fonction méromorphe f sur le demi-plan $\mathfrak{H}$ qui vérifie la relation*

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} f(z)$$

pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*.*

$f(z+1) = f(z) \Rightarrow$ il existe $\tilde{f}$ méromorphe dans $D' = \{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}$ t. q. $f(z) = \tilde{f}(e^{2i\pi z})$ pour tt $z \in \mathfrak{H}$. $\tilde{f}$: dévt de Fourier de f.

$f(z+1) = f(z) \Rightarrow$ il existe $\tilde{f}$ méromorphe dans $D' = \{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}$ t. q. $f(z) = \tilde{f}(e^{2i\pi z})$ pour tt $z \in \mathfrak{H}$. $\tilde{f}$: dévt de Fourier de f.

Si $\tilde{f}$ se prolonge en une fonction méromorphe (resp. holomorphe) en 0, on dira que f est méromorphe (resp. holomorphe) à l'infini.

Définition . *Une fonction faiblement modulaire est dite modulaire si elle est méromorphe à l'infini.*

Lorsque f est holomorphe à l'infini, on pose $f(\infty) = \tilde{f}(0)$.

Définition . *On appelle forme modulaire toute fonction modulaire qui est holomorphe partout. Si une telle fonction s'annule à l'infini, on dit que c'est une forme parabolique.*

$f(z+1) = f(z) \Rightarrow$ il existe $\tilde{f}$, $\tilde{f}(q) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q^n$.

f méromorphe à l'infini : $\tilde{f}(q) = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n q^n$ avec $n_0 \in \mathbb{Z}$.

f holomorphe à l'infini : $\tilde{f}(q) = \displaystyle\sum_{n=n_1}^{+\infty} a_n q^n$ avec $n_1 \in \mathbb{N}$.

f forme parabolique : f fonction modulaire t. q. $\tilde{f}(q) = \displaystyle\sum_{n=n_2}^{+\infty} a_n q^n$ avec $n_2 \geq 1$.

Exemples . Soit k un entier > 1, série d'Eisenstein

$$G_k(z) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$$

pour tout $z \in \mathfrak{H}$. G_k forme modulaire de poids $2k$. On a $G_k(\infty) = 2\zeta(2k)$.

On pose $g_2 = 60G_2$, $g_3 = 140G_3$, $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. On a $\Delta(\infty) = 0$: Δ forme parabolique de poids 12.

On pose $j = 1728\dfrac{g_2^3}{\Delta}$.

On pose $j = 1728\dfrac{g_2^3}{\Delta}$.

Proposition .

a) La fonction j *est une fonction modulaire de poids* 0*.*

b) Elle est holomorphe dans $\mathfrak{H}$ *et a un pôle simple à l'infini.*

c) Elle définit par passage au quotient une bijection de $\mathfrak{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbb{C}$*.*

Proposition . *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathfrak{H}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) f est une fonction modulaire de poids 0 ;

2) f est le quotient de deux formes modulaires de même poids ;

3) f est une fonction rationnelle de j.

Soit J le développement de Fourier de j, on a, pour $q \in \mathbb{C}, 0 < |q| < 1$,

$$J(q) = \frac{1}{q} + \sum_{n\geq 0} c(n)q^n = \frac{(1 + 240 \sum_{n\geq 1} \sigma_3(n)q^n)^3}{q \prod_{n\geq 1}(1 - q^n)^{24}}.$$

avec $\sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3$.

Les $c(n)$ sont dans $\mathbb{N}$.

Pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$J^m(q) = \frac{1}{q^m} + \sum_{n\geq -m+1} c_m(n)q^n.$$

Théorème stéphanois (Barré-Sirieix, Diaz, Gramain, Philibert, 1996) .
Soit $q \in \mathbb{C}^*, |q| < 1$, q *et* $J(q)$ *ne sont pas simultanément algébriques.*

Mahler (1974) : $c_m(n) \leq 1200 e^{4\pi\sqrt{nm}}$, pour $n,\ m \geq 1$.

Calcul des 7 premiers $c(n)$ en 1916 (Berwick), des 24 premiers en 1939 (Zuckerman) et des 100 premiers en 1953 (van Wijngaarden).

En 1932, Petersson : $c(n) \sim_\infty \dfrac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}\, n^{3/4}}$ (aussi obtenu en 1938 par Rademacher).

Herrmann (1975) : $c(n) \leq 6e^{4\pi\sqrt{n}}$, pour $n \geq 1$

Mahler (1974) : $c_m(n) \leq 1200e^{4\pi\sqrt{nm}}$, pour $n,\ m \geq 1$.

Mahler (1974) : $c_m(n) \leq 1200 e^{4\pi\sqrt{nm}}$, pour $n,\ m \geq 1$.

Théorème . *Pour tous $n,\ m \in \mathbb{N}$ tels que $nm \geq 1000$ et $n \geq 4m \ln^2 m$, nous avons*

$$c_m(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m^{1/4}}{n^{3/4}} e^{4\pi\sqrt{nm}} \left(1 - \frac{3}{32\pi} \frac{1}{\sqrt{nm}} + \varepsilon_{n,m}\right)$$

avec $|\varepsilon_{n,m}| \leq \dfrac{0.055}{nm}$.

Herrmann (1975) : $c(n) \leq 6e^{4\pi\sqrt{n}}$, pour $n \geq 1$

Théorème . *Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, nous avons*

$$c(n) = \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}\,n^{3/4}}\left(1 - \frac{3}{32\pi}\frac{1}{\sqrt{n}} + \varepsilon_n\right)$$

avec $|\varepsilon_n| \leq \dfrac{0.0021}{n}$.

En particulier, $c(n) \leq \dfrac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}\,n^{3/4}}$.

Expression de $c(n)$ sous forme de série

Théorème . [Rademacher, 1938] *Pour tout* $n \geq 1$,

$$c(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S(n,-1;k)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right)$$

avec $S(n,-1;k) = \sum_{\substack{1 \leq u,v \leq k \\ uv = 1 \, mod \, k}} e^{2i\pi\left(\frac{nu-v}{k}\right)}$.

La fonction partition

Pour tout $n \geq 1$, $p(n)$: nombre de manières d'exprimer n comme somme d'entiers strictement positifs $\leq n$.

On a

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^m} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n.$$

Soit η la fonction de Dedekind définie par

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau/12} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2i\pi m\tau}).$$

η forme modulaire de poids $1/2$.

Hardy, Ramanujan : méthode du cercle (1917).

Théorème (Hardy-Ramanujan, 1918) . *Pour tout* $n \geq 1$,

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k<\alpha\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{k}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{e^{\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right) + O(n^{-1/4})$$

avec

$$\alpha > 0, \qquad A_k(n) = \sum_{\substack{0\leq h<k\\(h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n h/k}$$

et

$$s(h,k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k} - \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2}\right).$$

Conséquence : $p(n) \sim_\infty \dfrac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}$.

Lehmer (1937) : la série est divergente.

Théorème (Rademacher, 1937) . *Pour tout* $n \geq 1$,

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{N} A_k(n)\sqrt{k}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right) + O(N^{-1/2}e^{2\pi n N^{-2}})$$

avec

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0\leq h<k \\ (h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n h/k}$$

et

$$s(h,k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k} - \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2}\right).$$

Travaux de Kloosterman

Soient $a_1, \ldots, a_s, n \in \mathbb{N}^*$. On cherche les solutions dans $\mathbb{Z}^s$ de

$$f(x_1, \ldots, x_s) := a_1 x_1^2 + \cdots + a_s x_s^2 = n. \tag{1}$$

Hardy, Littlewood, Ramanujan.

Méthode du cercle.

On pose $F(Z) = \sum_{x_i \in \mathbb{Z}} Z^{f(x_1, \ldots, x_s)}$.

$I(n)$, nombre de solutions de (1) : coefficient de Z^n.

$$I(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{F(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z$$

avec $r < 1$ proche de 1.

$I(n) = S(n) + R(n)$.

Une expression des coefficients de Fourier de j sous forme de série

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Formule de Cauchy :

$$c(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{J(q)}{q^{n+1}} \,\mathrm{d}q$$

avec $C_N = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| = e^{-2\pi N^{-2}} \right\}$.

Rappel : $J(q) = \frac{(1+240\sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)q^n)^3}{q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}}$ avec $\sigma_3(n) = \sum\limits_{d|n} d^3$.

Singularités : 0 et racines n-ièmes de l'unité pour tout $n \geq 1$.

Singularités : 0 et racines n-ièmes de l'unité pour tout $n \geq 1$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, racines k-ièmes de l'unité pour $k = 1, \ldots, N \Rightarrow$ Fractions de Farey d'ordre N :

$$\left\{ \frac{h}{k},\ h,\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq h \leq k \leq N,\ (h,k) = 1 \right\}.$$

On a

$$c(n) = \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0 \leq h < k \leq N}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_{h,k}} \frac{J(q)}{q^{n+1}} \, \mathrm{d}q = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0 \leq h < k}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_{h,k}} \frac{J(q)}{q^{n+1}} \, \mathrm{d}q$$

où les $\xi_{h,k}$ sont les arcs de Farey d'ordre N du cercle $C_N = \{z \in \mathbb{C}; |z| = e^{-2\pi N^{-2}}\}$.

Soit h/k une fraction de Farey d'ordre N, soient h_1/k_1 et h_2/k_2 ses voisines.

Arc de Farey $\xi_{h,k}$ d'ordre N : arc de cercle de C_N d'angle $\in \left[2\pi\,\frac{h_1+h}{k_1+k}, 2\pi\,\frac{h_2+h}{k_2+k}\right] = \left[2\pi\left(\frac{h}{k} - \frac{1}{k(k_1+k)}\right), 2\pi\left(\frac{h}{k} + \frac{1}{k(k_2+k)}\right)\right]$.

On pose $\theta'_{h,k} = 1/k(k_1+k)$ et $\theta''_{h,k} = 1/k(k_2+k)$. On a

$$c(n) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0\le h\le k-1}} e^{-\frac{2\pi i n h}{k}} \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} J\left(e^{\frac{2\pi i h}{k} - 2\pi(N^{-2} - i\phi)}\right) e^{2\pi n(N^{-2} - i\phi)}\mathrm{d}\phi.$$

Rappel : $J\left(e^{2i\pi\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}\right) = J\left(e^{2i\pi\tau}\right)$ pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Soit $h' \in \mathbb{N} \cap [0, k[$ t.q. $hh' = -1 \bmod k$. On utilise

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h' & -(hh'+1)/k \\ k & -h \end{pmatrix}$.

On a

$$c(n) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0 \leq h \leq k-1}} e^{-\frac{2\pi inh}{k}} \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} J\left(e^{\frac{2\pi ih'}{k} - \frac{2\pi}{k^2\omega}}\right) e^{2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi$$

avec $\omega = N^{-2} - i\phi$.

Rappel : $J(q) = \dfrac{1}{q} + D(q)$ avec $D(q) = \sum_{l \geq 0} c(l) q^l$.

$J(q) = \frac{1}{q} + D(q)$ avec $D(q) = \sum_{l \geq 0} c(l) q^l$.

On a $c(n) = Q(n) + R(n)$ avec

$$Q(n) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh' = -1 \bmod k \\ 0 \leq h < k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega} + 2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi$$

et

$$R(n) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh' = -1 \bmod k \\ 0 \leq h < k}} e^{-\frac{2\pi i n h}{k}} \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} D\left(e^{\frac{2\pi i h'}{k} - \frac{2\pi}{k^2\omega}} \right) e^{2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi$$

avec $\theta'_{h,k} = 1/k(k_1 + k)$, $\theta''_{h,k} = 1/k(k_2 + k)$ et $\omega = N^{-2} - i\phi$.

On a

$$Q(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh'=-1 \bmod k \\ 0\le h<k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \int_{-\frac{1}{k(k_1+k)}}^{-\frac{1}{k(N+k)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi}_{Q_0(n)}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh'=-1 \bmod k \\ 0\le h<k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \int_{-\frac{1}{k(N+k)}}^{\frac{1}{k(N+k)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi}_{Q_1(n)}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh'=-1 \bmod k \\ 0\le h<k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \int_{\frac{1}{k(N+k)}}^{\frac{1}{k(k_2+k)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi}_{Q_2(n)} .$$

On a

$$Q(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh'=-1 \bmod k \\ 0\le h<k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \int_{-\frac{1}{k(k_1+k)}}^{-\frac{1}{k(N+k)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi}_{Q_0(n)}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh'=-1 \bmod k \\ 0\le h<k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \int_{-\frac{1}{k(N+k)}}^{\frac{1}{k(N+k)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi}_{Q_1(n)}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh'=-1 \bmod k \\ 0\le h<k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \int_{\frac{1}{k(N+k)}}^{\frac{1}{k(k_2+k)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi}_{Q_2(n)}.$$

Sommes de Kloosterman :

$$S(a,b;c) = \sum_{\substack{1\le u,v\le c \\ uv=1 \bmod c}} e^{2i\pi\left(\frac{au+bv}{c}\right)}$$

avec a, b, $c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$.

Sommes de Kloosterman :

$$S(a,b;c)=\sum_{\substack{1\leq u,v\leq c\\ uv=1 \bmod c}} e^{2i\pi\left(\frac{au+bv}{c}\right)}$$

avec a, b, $c \in \mathbb{Z}$, $c>0$.

On a (Weil, 1948) :

$$|S(a,b;c)| \leq (a,b,c)^{1/2} c^{1/2} d(c)$$

où $(a,b,c) =$ p.g.c.d. de a, b et c et $d(c) =$ nombre de diviseurs positifs de c.
D'où, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon > 0$ tel que

$$|S(a,b;c)| \leq C_\varepsilon (a,b,c)^{1/2} c^{1/2+\varepsilon}.$$

$S(a,b;c) \in \mathbb{R}$.

On a

$$Q_1(n) = \sum_{k=1}^{N} S(n,-1;k) \int_{-\frac{1}{k(N+k)}}^{\frac{1}{k(N+k)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi$$

$$= \sum_{k=1}^{N} S(n,-1;k) \frac{1}{i} \int_{\gamma_0} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\omega$$

où $\gamma_0 : u \in [-1,1] \mapsto N^{-2} + \frac{iu}{k(N+k)}$.

Soient $\gamma_1 : u \in [-1,1] \mapsto -uN^{-2} + \frac{i}{k(N+k)}$,

$\gamma_2 : u \in [-1,1] \mapsto -N^{-2} - \frac{iu}{k(N+k)}$, $\gamma_3 : u \in [-1,1] \mapsto uN^{-2} - \frac{i}{k(N+k)}$ et R est le lacet $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$

$$Q_1(n) = 2\pi \sum_{k=1}^{N} S(n,-1;k) \frac{1}{2i\pi} \int_R e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\omega$$
$$-\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{N} S(n,-1;k) \Bigg(\underbrace{\int_{\gamma_1} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\omega}_{J_1}$$
$$+ \underbrace{\int_{\gamma_2} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\omega}_{J_2} + \underbrace{\int_{\gamma_3} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\omega}_{J_3} \Bigg).$$

$$\underbrace{\int_{\gamma_1} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega}\mathrm{d}\omega}_{J_1}+\underbrace{\int_{\gamma_2} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega}\mathrm{d}\omega}_{J_2}+\underbrace{\int_{\gamma_3} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega}\mathrm{d}\omega}_{J_3}$$

On obtient facilement

$$\max(|J_1|,|J_3|) \le 2N^{-2}e^{8\pi+2\pi n N^{-2}} \text{ et } |J_2| \le 2/(kN).$$

On a

$$\sum_{k=1}^{N} S(n,-1;k)(J_1+J_2+J_3) = O_\varepsilon(e^{2\pi n N^{-2}} n^{1/2} N^{-1/2+\varepsilon})$$

$$Q_1(n) = 2\pi \sum_{k=1}^{N} S(n,-1;k) \frac{1}{2i\pi} \int_R e^{\frac{2\pi}{k^2\omega} + 2\pi n\omega} \mathrm{d}\omega$$

$$+ O_\varepsilon(e^{2\pi n N^{-2}} n^{1/2} N^{-1/2+\varepsilon}).$$

Enfin, pour $a \in \mathbb{C}$, Rés ($z \mapsto e^{a\left(z+\frac{1}{z}\right)}$, $0) = I_1(2a)$ où $I_1(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(z/2)^{2\nu+1}}{\nu!(\nu+1)!}$: fonction de Bessel de premier ordre avec argument imaginaire pur.

$$Q_1(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{N} \frac{S(n,-1;k)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right) + O_\varepsilon(e^{2\pi n N^{-2}} n^{1/2} N^{-1/2+\varepsilon}).$$

On a

$$
\begin{aligned}
Q(n) = {} & \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh' = -1 \bmod k \\ 0 \le h < k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \int_{-\frac{1}{k(k_1+k)}}^{-\frac{1}{k(N+k)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi}_{Q_0(n)} \\
& + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh' = -1 \bmod k \\ 0 \le h < k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \int_{-\frac{1}{k(N+k)}}^{\frac{1}{k(N+k)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi}_{Q_1(n)} \\
& + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh' = -1 \bmod k \\ 0 \le h < k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \int_{\frac{1}{k(N+k)}}^{\frac{1}{k(k_2+k)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi}_{Q_2(n)} .
\end{aligned}
$$

$$Q_0(n) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh'=-1 \bmod k \\ 0\le h<k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \int_{-\frac{1}{k(k_1+k)}}^{-\frac{1}{k(N+k)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi$$

$$Q_0(n) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{hh'=-1 \bmod k \\ 0\le h<k}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \sum_{j=k_1+k}^{N+k-1} \int_{-\frac{1}{kj}}^{-\frac{1}{k(j+1)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi.$$

qui se transforme en

$$Q_0(n) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=N+1}^{N+k-1} \int_{-\frac{1}{kj}}^{-\frac{1}{k(j+1)}} e^{\frac{2\pi}{k^2\omega}+2\pi n\omega} \mathrm{d}\phi \underbrace{\sum_{\substack{hh'=-1 \bmod k \\ 0\le h<k \text{ and } N<k_1+k\le j}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(nh+h')}}_{L_1}$$

La restriction sur k_1 signifie une restriction sur h' : la somme L_1 est une somme de Kloosterman incomplète. On a $L_1 = O_\varepsilon(k^{1/2+\varepsilon}(n,k)^{1/2})$.

Pour $\phi \in \left[-\frac{1}{k(N+1)}, -\frac{1}{k(N+k)}\right]$, on a

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2\pi}{k^2\omega} + 2\pi n\omega\right) \leq 8\pi + 2\pi n N^{-2}.$$

On obtient donc

$$Q_0(n) = O_\varepsilon\left(e^{2\pi n N^{-2}} n^{1/2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=N+1}^{N+k-1} \left(\frac{1}{kj} - \frac{1}{k(j+1)}\right) k^{1/2+\varepsilon}\right)$$

$$= O_\varepsilon\left(e^{2\pi n N^{-2}} n^{1/2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{1/2-\varepsilon} N}\right) = O_\varepsilon\left(e^{2\pi n N^{-2}} n^{1/2} N^{-1/2+\varepsilon}\right).$$

De même, $Q_2(n) = O_\varepsilon(e^{2\pi n N^{-2}} n^{1/2} N^{-1/2+\varepsilon})$.

$$Q(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{N} \frac{S(n,-1;k)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right) + O_\varepsilon(e^{2\pi n N^{-2}} n^{1/2} N^{-1/2+\varepsilon}).$$

On a

$$R(n) = O_\varepsilon(e^{2\pi n N^{-2}} n^{1/2} N^{-1/2+\varepsilon}).$$

Il vient, pour tout $n \geq 1$,

$$c(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{S(n,-1;k)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right)\right) + O_\varepsilon(e^{2\pi n N^{-2}} n^{1/2} N^{-1/2+\varepsilon}).$$

On fixe n et $N \to +\infty$.

Théorème . [Rademacher, 1938] *Pour tout* $n \geq 1$,

$$c(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S(n,-1;k)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right)$$

avec $S(n,-1;k) = \sum_{\substack{1 \leq u,v \leq k \\ uv=1\ \mathit{mod}\, k}} e^{2i\pi\left(\frac{nu-v}{k}\right)}$.

Théorème . [Rademacher] *Pour tous* $m,\ n \geq 1$,

$$c_m(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{m} c_m(-l)\sqrt{l} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S(n,-l;k)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{nl}}{k}\right)$$

avec $S(n,-l;k) = \sum_{\substack{1 \leq u,v \leq k \\ uv = 1 \,\mathit{mod}\, k}} e^{2i\pi\left(\frac{nu-lv}{k}\right)}$.

Théorème . [Rademacher, 1938] *Pour tout* $n \geq 1$,

$$c(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S(n,-1;k)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right)$$

avec $S(n,-1;k) = \sum_{\substack{1\leq u,v\leq k \\ uv=1 \, mod\, k}} e^{2i\pi\left(\frac{nu-v}{k}\right)}$.

Une estimation des coefficients de Fourier de j avec un reste arbitrairement petit

Pour $n \geq 1$, $N \geq 1$, on pose

$$R_N(n) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{S(n,-1;k)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right).$$

Lemme . *Pour* $l,\, n,\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$|S(n,-l;k)| \leq 9(n,l,k)^{1/2}\, k^{3/4}.$$

Pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
|R_N(n)| &= \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{S(n,-1;k)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right) \right| \\
&\leq 9 \sum_{k=N+1}^{+\infty} k^{-1/4} \left| I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right) \right| \\
&= 9 \sum_{k=N+1}^{+\infty} k^{-1/4} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(2\pi\sqrt{n}/k)^{2\nu+1}}{\nu!(\nu+1)!} \\
&< 9 \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(2\pi\sqrt{n})^{2\nu+1}}{\nu!(\nu+1)!} \int_N^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{k^{2\nu+5/4}} \\
&= 9 \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(2\pi\sqrt{n})^{2\nu+1}}{\nu!(\nu+1)!(2\nu+1/4)} \frac{1}{N^{2\nu+1/4}} \\
&\leq 36 N^{3/4} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{N}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous n, $N \geq 1$, on a

$$c(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{S(n,-1;k)}{k} I_1 \left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k} \right) + R_N(n) \right)$$

avec $|R_N(n)| \leq 36 N^{3/4} I_1 \left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{N} \right)$.

Pour $n \geq 1$, on fixe $N = 2$. On obtient

$$c(n) = 2\pi \frac{1}{\sqrt{n}} \left(I_1\left(4\pi\sqrt{n}\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{2} I_1\left(2\pi\sqrt{n}\right) + R_2(n) \right)$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \left(I_1\left(4\pi\sqrt{n}\right) + R(n) \right)$$

avec

$$|R(n)| \leq 62 I_1\left(2\pi\sqrt{n}\right).$$

G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*.

Si

$$(1,k)=\frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}{k!\Gamma\left(-k+\frac{3}{2}\right)}=\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(4-(2j+1)^2)}{4^k k!},$$

on a, pour tous $x>0$ et $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$I_1(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k(1,k)}{(2x)^k}+\frac{r_{I_1,p}}{x^p}\right)$$

avec $|r_{I_1,p}|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}|(1,p)|$.

On a

$$c(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \left(I_1\left(4\pi\sqrt{n}\right) + R(n) \right)$$

avec

$$|R(n)| \leq 62 I_1\left(2\pi\sqrt{n}\right).$$

Il vient

$$c(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{n^{3/4}} \left(1 - \frac{3}{32\pi} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\rho_n \right)$$

avec $|\rho_n| \leq \frac{15\sqrt{2}}{1024\pi^2} + S' \leq 0.0021$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 15$.

Théorème . *Pour tout* $n \geq 1$*, nous avons*

$$c(n) = \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}n^{3/4}}\left(1 - \frac{3}{32\pi}\frac{1}{\sqrt{n}} + \varepsilon_n\right)$$

avec $|\varepsilon_n| \leq \dfrac{0.0021}{n}$.

$c(n)$	$\frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}n^{3/4}}\left(1-\frac{3}{32\pi}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
$c(1) = 196884$	196713
$c(2) = 21493760$	21504457
$c(3) = 864299970$	864516016
$c(4) = 20245856256$	20249858789
$c(5) = 333202640600$	333254233544
$c(6) = 4252023300096$	4252572249800
$c(7) = 44656994071935$	44661912677773
$c(8) = 401490886656000$	401529501533432
$c(9) = 3176440229784420$	3176711166241017
$c(10) = 22567393309593600$	22569122769030494

Encadrement des coefficients de Fourier de j

Théorème . *Pour tout* $k \geq 0$, *on pose*

$$(1,k) = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(4-(2j+1)^2)}{4^k k!}.$$

Pour tout $n \geq 1$, $p \geq 1$, *on a*

$$c(n) = \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}n^{3/4}} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \left(-\frac{1}{8\pi}\right)^k \frac{(1,k)}{n^{k/2}} + \frac{r_p(n)}{n^{p/2}} \right)$$

avec

$$|r_p(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|(1,p)|}{(4\pi)^p} + 62\sqrt{2}e^{-2\pi\sqrt{n}} n^{p/2}.$$

Majoration des coefficients de Fourier de j^m

Théorème . *Pour tout* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, *on a*

- *si* $-m+1 \leq n \leq -m\frac{e^{2\pi}}{1728}$,

$$c_m(n) \leq (1728 - e^{2\pi})^{m+n} \left(\frac{-n}{m+n}\right)^n \left(\frac{m}{m+n}\right)^m ;$$

- *si* $-m\frac{e^{2\pi}}{1728} \leq n \leq \alpha m$, $c_m(n) \leq e^{2\pi n} 1728^m$;
- *si* $\alpha m \leq n \leq \max\left(\frac{1000}{m}, 4m \ln^2 m\right)$, $c_m(n) \leq e^{4\pi\sqrt{m(m+n)}}$;
- *si* $n \geq \max\left(\frac{1000}{m}, 4m \ln^2 m\right)$,

$$c_m(n) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m^{1/4}}{n^{3/4}} e^{4\pi\sqrt{nm}} \left(1 - \frac{3}{32\pi}\frac{1}{\sqrt{nm}} + \frac{0.055}{nm}\right).$$

Coefficients de Fourier de la fonction Discriminant

Si $q = e^{2i\pi z}$,

$$\frac{1}{(2\pi)^{12}}\Delta(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}\right)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n.$$

Δ forme parabolique de poids 12 ; τ : fonction de Ramanujan.

Proposition . $\tau(n) = O(n^6)$.

Conjecture (Ramanujan-Petersson) :

$\tau(n) = O(n^{11/2+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Plus précisément, $|\tau(n)| \leq n^{11/2}d(n)$.

Preuve par P. Deligne (1973).

On a donc $\tau(n) = O\left(n^{11/2}\exp\left(\frac{c\log n}{\log\log n}\right)\right)$ pour une constante $c > \log 2$.

Définition . *On dit que*

- $f(n) = \Omega_+(g(n))$ *si* $\limsup_{n\to\infty} f(n)/g(n) > 0$.
- $f(n) = \Omega_-(g(n))$ *si* $\liminf_{n\to\infty} f(n)/g(n) < 0$.

Théorème (Ram Murty) :

$$\tau(n) = \Omega_\pm\left(n^{11/2}\exp\left(\frac{c\log n}{\log\log n}\right)\right)$$

pour une constante $c > 0$.

Conjecture (Atkin-Serre) : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$p^{9/2-\varepsilon} = O_\varepsilon(\tau(p)).$$

Question (D. H. Lehmer, 1947) : Est-il vrai que $\tau(n) \neq 0$ pour tout $n \geq 1$?

$$
\begin{array}{ll}
\tau(1) = 1 & \tau(11) = 534612 \\
\tau(2) = -24 & \tau(12) = -370944 \\
\tau(3) = 252 & \tau(13) = -577738 \\
\tau(4) = -1472 & \tau(14) = 401856 \\
\tau(5) = 4830 & \tau(15) = 1217160 \\
\tau(6) = -6048 & \tau(16) = 987136 \\
\tau(7) = -16744 & \tau(17) = -6905934 \\
\tau(8) = 84480 & \tau(18) = 2727432 \\
\tau(9) = -113643 & \tau(19) = 10661420 \\
\tau(10) = -115920 & \tau(20) = -7109760
\end{array}
$$