Sur les fonctions entières à double pas récurrent

Nicolas Brisebarre et Laurent Habsieger[1]
Laboratoire A2X
CNRS UPRESA 5465
Université Bordeaux I
351, Cours de la Libération
33405 Talence Cedex France
Tél. : 05 56 84 60 49
Fax : 05 56 84 69 50

E-mail : brisebar@math.u-bordeaux.fr
habsiege@math.u-bordeaux.fr

Résumé : Nous proposons une nouvelle approche et une généralisation d'un problème résolu par J.-P. Bézivin et F. Gramain, problème dont l'objet est de caractériser les fonctions entières solutions de systèmes de deux équations aux différences finies. De plus, nous donnons un algorithme qui permet de trouver la forme explicite des solutions.

Abstract : We propose a new approach and a generalization of a problem solved by J.-P. Bézivin and F. Gramain, problem whose object is to characterize the entire solutions of systems of two finite difference equations. Moreover, we give an algorithm which allows to find the explicit shape of the solutions.

Titre courant : Fonctions entières à double pas récurrent.

Mots-clés : Équations aux différences – Polynômes exponentiels – Équations différentielles linéaires – Fonctions P-récursives.

Key-words : Difference equations – Exponential polynomials – Linear differential equations – P-recursive functions.

Classification (A.M.S.) par sujets : principaux : 39A10, 39A70; secondaires : 39B32, 30D05.

Title : On entire functions with two recurrence steps.

[1]financés partiellement par le PRC Maths-Info

1. Introduction

Lors de l'exposé de son article [Gra1] à Oberwolfach, D.W. Masser [Mas] posait à F. Gramain la question suivante : les solutions entières f du système d'équations aux différences

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z)f(z+m\alpha)=0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z)f(z+n\beta)=0, \end{cases}$$

(où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites finies de $\mathbb{C}[z]$ avec $P_M Q_N \neq 0$, α et β étant des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$) sont-elles nécessairement des polynômes exponentiels, i.e. des fonctions de la forme $\sum_{k=1}^{K} H_k(z)e^{\delta_k z}$ avec H_k dans $\mathbb{C}[z]$ et δ_k dans $\mathbb{C}$ pour tout k?

Dans un premier article [BéGra1], J.-P. Bézivin et F. Gramain donnaient une réponse négative à cette question en considérant l'exemple de la fonction $f(z) = (e^z - 1)/z$, et montraient que si α/β appartient à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et si les coefficients de l'une des deux équations sont constants, alors f est un polynôme exponentiel. De plus, ils prouvaient, en supposant toujours α/β appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, une série de résultats partiels qui leur permettait de conjecturer que toute solution entière d'un système à coefficients polynomiaux quelconques est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme. Cette conjecture a été démontrée ainsi que d'autres résultats dans un deuxième article [BéGra2] :

Théorème 1.1. [J.-P. Bézivin– F. Gramain]
Soit f une fonction entière solution du système (1) *alors f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.*

En fait, on peut remplacer les deux membres de droite de (1) par des polynômes exponentiels. Il suffit de remarquer, comme dans le Lemme 2.5 de [BéGra1], que pour tout nombre complexe α et pour tout polynôme exponentiel Φ, il existe une relation finie de dépendance linéaire sur $\mathbb{C}(z)$ entre les translatées de Φ par α (on dit alors que α est un pas récurrent pour la fonction entière Φ, selon la terminologie due à Masser).

Dans la section 2 de ce travail, nous prolongeons le résultat de [Gra2] concernant les équations à coefficients constants au cas α/β appartenant à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Cela permet d'étendre tous les énoncés de [BéGra2] au cas α/β appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$. La preuve donnée dans cette deuxième section permet de généraliser aussi le résultat donné par le Théorème 1.1 au cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ayant deux pas récurrents α et β linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Ensuite, nous proposons une nouvelle manière d'aborder la question de David Masser. Cela nous permet de prouver un critère impliquant la réponse attendue et de retrouver une partie des résultats de [BéGra2]. Cela sera fait dans les sections 3 et 4. Enfin, la dernière partie sera consacrée à la détermination algorithmique des solutions entières du système (1). Si nous remplaçons, dans la deuxième équation de (1), les translatées de f par β par des dérivées de f, l'algorithme, légèrement modifié, permet encore de déterminer les solutions entières de ce système.

Nous souhaitons vivement remercier J.-P. Bézivin et F. Gramain : le premier pour avoir exhibé un contre-exemple à ce que nous avions imaginé initialement, le deuxième pour les commentaires détaillés qu'il a faits sur notre travail et qui nous été ont fort utiles dans la rédaction de cet article.

2. Cas où les deux équations sont à coefficients constants

Soient α, β des nombres complexes non nuls, soit f une fonction entière solution du système d'équations aux différences suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0\leq m\leq M} a_m f(z+m\alpha) = \Phi(z), \\ \sum_{0\leq n\leq N} b_n f(z+n\beta) = \Psi(z), \end{array} \right. \tag{2}$$

où $(a_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(b_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites de nombres complexes (avec $a_M b_N \neq 0$), les fonctions Φ et Ψ étant deux polynômes exponentiels. Dans [Gra2], on prouve que si α/β appartient à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors f est un polynôme exponentiel. Nous allons montrer dans le lemme suivant que l'on peut étendre ce résultat au cas $\alpha/\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Lemme 2.1. *Si $\alpha/\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, alors toute solution entière de* (2) *est un polynôme exponentiel.*

Preuve. Nous pouvons nous restreindre au cas $\Phi = \Psi = 0$. Cela vient du fait que, comme le Lemme 2.5 de [BéGra1] nous le dit, les translatées d'un polynôme exponentiel par tout nombre complexe γ non nul sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{C}$. Si la combinaison linéaire $\sum_{m=0}^{M} a_m f(\cdot + m\alpha) = 0$ est non triviale (i.e. $\mathrm{card}\{a_m \neq 0\} \geq 2$), alors $\mathrm{vect}\{f(\cdot+m\alpha), m\in\mathbb{Z}\} = \mathrm{vect}\{f(\cdot+m\alpha), m \in \{0,\dots,M-1\}\}$, où $\mathrm{vect}\{f(\cdot+m\alpha), m\in\mathbb{Z}\}$ désigne l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ par la famille de fonctions $(f(\cdot+m\alpha))_{m\in\mathbb{Z}}$. De même, si $\sum_{n=0}^{N} b_n f(\cdot+n\beta) = 0$ est non triviale, $\mathrm{vect}\{f(\cdot+n\beta), n\in\mathbb{Z}\} = \mathrm{vect}\{f(\cdot+n\beta), n \in \{0,\dots,N-1\}\}$. Si l'une des deux équations est triviale, nous avons nécessairement $f \equiv 0$. En écartant ce cas, nous avons alors

$$\begin{array}{rcl} V & := & \mathrm{vect}\{f(\cdot+m\alpha+n\beta), m,n\in\mathbb{Z}\} \\ & = & \mathrm{vect}\{f(\cdot+m\alpha+n\beta), 0\leq m\leq M-1, 0\leq n\leq N-1\}, \end{array}$$

ce qui montre que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est de dimension finie. Comme α/β appartient à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, le sous-groupe additif $\mathbb{Z}(\alpha/\beta)+\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En particulier, il existe une suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}\alpha+\mathbb{Z}\beta$ qui tend vers 0. Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de V définie par

$$g_k = \frac{f(\cdot+h_k)-f}{h_k}$$

pour tout $k\in\mathbb{N}$. Nous savons (nous pouvons le déduire du théorème de Taylor) que la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f' pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$. L'espace V étant de dimension finie sur $\mathbb{C}$, toutes les normes définies sur V sont équivalentes : la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers la fonction f' dans V. Une récurrence évidente donne l'appartenance de $f^{(i)}$ à V pour tout $i \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons que la famille $(f, f', \dots, f^{(\dim_{\mathbb{C}} V)})$ est liée sur $\mathbb{C}$. La fonction f vérifie donc une équation différentielle à coefficients constants : la solution entière f est un polynôme exponentiel. $\square$

Remarque 2.2. Comme l'a noté J.-J. Loeb [Loe], cette preuve s'adapte aisément au cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: la convergence simple est en fait suffisante dans la preuve qui précède comme l'indique l'adaptation suivante du Lemme 1 de [Loe] :

Lemme 2.3. *Soit X un ensemble, soit $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fonctions de X à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On munit $\mathcal{F}(X)$ de la topologie de la convergence simple. Alors tout sous-espace vectoriel E de $\mathcal{F}(X)$ de dimension finie est fermé pour cette topologie.*

Un argument de régularisation par convolution permet ensuite à J.-J. Loeb de montrer que le résultat du Lemme 2.1 reste valable si l'on suppose seulement que la fonction f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.4. Tous les énoncés de [BéGra2] peuvent se prolonger au cas α/β appartenant à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. En effet, les preuves consistent en des manipulations algébriques permettant de se ramener, à partir du cas général, au cas des systèmes à coefficients constants. Ces opérations exigent seulement l'irrationalité du quotient α/β et n'imposent aucune condition sur la nature de la fonction f solution. Pour cette raison, les résultats de [BéGra2] sont aussi vérifiés lorsque l'on suppose $\alpha/\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et f seulement continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous pouvons regrouper la Proposition 1 de [Gra2], le Lemme 2.1 et la Remarque 2.2 dans l'énoncé suivant.

Corollaire 2.5. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, et f une fonction entière solution du système*

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{0\leq m\leq M} a_m f(z+m\alpha) = \Phi(z), \\ \sum_{0\leq n\leq N} b_n f(z+n\beta) = \Psi(z), \end{array} \right. \tag{3}$$

où $(a_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(b_n)_{0\leq n\leq N}$ sont deux suites finies d'éléments de $\mathbb{C}$ telles que $a_M b_N \neq 0$, et où Φ et Ψ sont deux polynômes exponentiels. Alors f est un polynôme exponentiel.

De même, si l'on considère $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ et f une fonction de la variable réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ satisfaisant le système (3) avec $(a_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(b_n)_{0\leq n\leq N}$ deux suites finies d'éléments de $\mathbb{R}$ telles que $a_M b_N \neq 0$, alors f est un polynôme exponentiel.

Remarque 2.6. Nous nous sommes aperçus que le résultat donné par le Corollaire 2.5 dans le cas des fonctions entières est en fait une conséquence directe d'un résultat de Gel'fond [Gel] qui est en remarque p. 367 (à la suite de la preuve du Théorème VI p. 365). Cela dit, la preuve du théorème de Gel'fond requiert l'analyticité de la fonction f alors qu'une adaptation de notre preuve permet de traiter le cas des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (cf Remarque 2.2). Nous pouvons énoncer le résultat comme suit.

Théorème 2.7. [Gel'fond] *Soit f une fonction entière solution des deux équations $L(f) = 0, L_1(f) = 0$, où L et L_1 sont des opérateurs normaux dont les fonctions caractéristiques respectives ϕ et ϕ_1 n'ont qu'un nombre fini de zéros communs, alors f est un polynôme exponentiel.*

Précisons la Remarque 2.6. Nous désignons par D l'opérateur de dérivation. Soit $T = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n D^n$ un opérateur différentiel d'ordre éventuellement infini, la fonction caractéristique de l'opérateur T est la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Nous dirons que l'opérateur est normal si sa fonction caractéristique est entière. Comme dans [BéGra1], nous notons $e^{\alpha D}$ et $e^{\beta D}$ les opérateurs différentiels d'ordre infini de translation par α et par β . Nous avons alors ici $L = P(e^{\alpha D})$ et $L_1 = Q(e^{\beta D})$, où $P(X) = \sum_{0 \leq m \leq M} a_m X^m$ et $Q(Y) = \sum_{0 \leq n \leq N} b_n Y^n$ sont les polynômes non nuls dont les coefficients complexes proviennent du système (3). Pour avoir le résultat énoncé, il suffit de remarquer que si nous avons $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, alors les fonctions caractéristiques $\phi(z) = P(e^{\alpha z})$ et $\phi_1(z) = Q(e^{\beta z})$ n'ont qu'un nombre fini de zéros communs.

3. Un lemme technique

Nous allons avoir besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, soient $A, B \in \mathbb{C}(z) \setminus \{0\}$ telles que*

$$\frac{A(z+\beta)}{A(z)} = \frac{B(z+\alpha)}{B(z)}. \tag{4}$$

Alors il existe $a, b \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{C}(z)$ tels que

$$A(z) = a\frac{R(z+\alpha)}{R(z)}, \; B(z) = b\frac{R(z+\beta)}{R(z)}. \tag{5}$$

De plus, a et b sont uniques et R est unique à multiplication par un nombre complexe près.

Si l'on suppose $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ et $A, B \in \mathbb{R}(z) \setminus \{0\}$ vérifiant la condition (4) alors il existe deux nombres réels a et b uniques et une fraction rationnelle $R \in \mathbb{R}(z)$ unique à multiplication par un nombre réel près tels que A et B s'écrivent sous la forme (5).

Preuve. Quitte à normaliser, nous pouvons supposer $\alpha = 1$ et β irrationnel. Toutes les fractions rationnelles considérées dans la preuve de la première partie du lemme sont à coefficients complexes. Pour toute fraction rationnelle U et toute classe c de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, nous posons

$$N(c, U) = \text{Card}\{z \in c \,|\, z \text{ zéro ou pôle de } U \text{ compté sans multiplicité}\}.$$

Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe deux fractions rationnelles R et S telles que

$$A(z) = S(z)\frac{R(z+1)}{R(z)} \text{ et } \forall c \in \mathbb{C}/\mathbb{Z},\ N(c,S) \leq 1. \tag{6}$$

Soit Λ un système de représentants des classes de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Il est clair que nous pouvons écrire A sous la forme

$$A(z) = a\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda(z), \tag{7}$$

où $a \in \mathbb{C}$ et $A_\lambda(z) = \prod_{m\in\mathbb{Z}}(z-\lambda-m)^{r_m^\lambda}$ avec les $r_m^\lambda \in \mathbb{Z}$ presque tous nuls. Pour l'étude de chacun des A_λ, nous nous ramenons par translation de la variable au cas où $\lambda = 0$. Nous pouvons donc nous restreindre à l'étude des fractions de la forme

$$\mathcal{A}(z) = \prod_{m\in\mathbb{Z}}(z-m)^{r_m}$$

avec les r_m presque tous nuls. Soit α l'entier relatif $\sum_{m\in\mathbb{Z}} r_m$. Il existe une fraction $\mathcal{R}$ telle que

$$\mathcal{A}(z) = z^\alpha \prod_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{z-m}{z}\right)^{r_m} = z^\alpha\frac{\mathcal{R}(z+1)}{\mathcal{R}(z)}.$$

En effet, pour tout m de $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, nous avons

$$\frac{z-m}{z} = \frac{(z-1)(z-2)\cdots(z-m)}{z(z-1)\cdots(z-m+1)} \text{ si } m \geq 1$$

$$\text{et}\quad \frac{z-m}{z} = \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z-m)}{z(z+1)\cdots(z-m-1)} \text{ si } m \leq -1.$$

Il existe donc une famille $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de fractions rationnelles presque toutes égales à 1 telle que

$$A(z) = a\prod_{\lambda\in\Lambda}(z-\lambda)^{\alpha_\lambda}\prod_{\lambda\in\Lambda}\frac{R_\lambda(z+1)}{R_\lambda(z)}.$$

Posons

$$S(z) = a\prod_{\lambda\in\Lambda}(z-\lambda)^{\alpha_\lambda} \quad\text{et}\quad R(z) = \prod_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda(z).$$

Nous avons bien la forme (6) désirée puisque, par construction de S, nous avons $N(c,S) \leq 1$ pour toute classe c de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

Soit $V(z) = B(z)R(z)/R(z+\beta)$. L'égalité (4) entraîne la relation

$$\frac{S(z+\beta)}{S(z)} = \frac{V(z+1)}{V(z)}. \tag{8}$$

Supposons S non constante, i.e. non périodique, la fraction V ne peut pas alors être constante, en vertu de l'égalité précédente. Soit z_0 un zéro ou un pôle de V.

L'ensemble des entiers relatifs h tels que z_0+h soit un zéro ou un pôle de $V(z+1)/V(z)$ est une partie finie non vide de $\mathbb{Z}$, qui admet un minimum et un maximum distincts. Ceci montre que $N(\overline{z_0}, V(z+1)/V(z)) \geq 2$. Nous avons donc, en utilisant (8),

$$N(\overline{z_0}, S(z+\beta)/S(z)) \geq 2. \tag{9}$$

Rappelons que $N(c,S) \leq 1$ pour toute classe c de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Nous voyons facilement que

$$N(\overline{z_0}, S(z+\beta)) = N\left(\overline{z_0-\beta}, S(z)\right). \tag{10}$$

Si $N(\overline{z_0}, S(z))=0$, la relation (9) implique $N(\overline{z_0}, S(z+\beta)) \geq 2$, ce qui est absurde puisque $N(\overline{z_0}, S(z+\beta)) = N\left(\overline{z_0-\beta}, S(z)\right) \leq 1$. De même, il n'est pas possible d'avoir $N\left(\overline{z_0}, S(z+\beta)\right)=0$. Nous avons montré que

$$N(\overline{z_0}, S(z)) = N\left(\overline{z_0}, S(z+\beta)\right) = 1. \tag{11}$$

Les relations (10) et (11) entraînent l'égalité $N\left(\overline{z_0-k\beta}, S(z)\right) = 1$ pour tout entier naturel k. Les classes $\left(\overline{z_0-k\beta}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ étant disjointes (puisque β est irrationnel), la fraction S, qui n'est pas constante, admet donc une infinité de zéros ou de pôles. C'est impossible et nous en déduisons que S est égale à la constante a introduite dans (7). Nous avons alors la forme voulue pour A. L'égalité (8) nous dit que la fraction V est périodique de période 1 : elle ne peut être qu'une constante complexe b. L'unicité de a provient du fait que $a = \lim_{|z|\to\infty} A(z)$. Le même argument donne l'unicité de b. Quant à la fraction R, si nous supposons l'existence d'une autre fraction U convenable, nous obtenons en particulier l'égalité :

$$\frac{R(z+1)}{U(z+1)} = \frac{R(z)}{U(z)}.$$

Les seules fractions rationnelles périodiques étant les constantes, nous en déduisons qu'il existe μ dans $\mathbb{C}$ tel que $U=\mu R$.

Montrons maintenant la deuxième partie du lemme. Nous supposons donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ et $A, B \in \mathbb{R}(z)\setminus\{0\}$. Nous venons de prouver qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ uniques et $R \in \mathbb{C}(z)$ unique à multiplication par un nombre complexe près tels que

$$A(z) = a\frac{R(z+\alpha)}{R(z)}, \ B(z) = b\frac{R(z+\beta)}{R(z)}. \tag{12}$$

Les nombres a et b sont en fait réels puisque $a = \lim_{|z|\to\infty} A(z)$ et $b = \lim_{|z|\to\infty} B(z)$. La fraction rationnelle A étant à coefficients réels, si nous notons $\overline{R}$ la fraction rationnelle conjuguée de R, nous avons, en vertu de (12),

$$A(z) = a\frac{\overline{R}(z+\alpha)}{\overline{R}(z)}, \tag{13}$$

puisque $a, z \in \mathbb{R}$ et $A(z) \in \mathbb{R}(z)$. Nous déduisons de (12) et (13) que la fraction rationnelle $R/\overline{R}$ est périodique donc constante. Cette constante étant nécessairement de module 1, nous pouvons, quitte à multiplier R par un nombre complexe convenable, supposer que $R = \overline{R}$. La fraction rationnelle R peut donc être choisie à coefficients réels. Les mêmes arguments que ceux utilisés dans le cas complexe nous donnent l'unicité de a et b et l'unicité de R à multiplication par un nombre réel près. □

4. Étude du Critère

Nous considérons un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{array} \right. \tag{14}$$

où f est une fonction entière (resp. une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$), α et β sont deux nombres complexes (resp. réels) linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ (resp. $\mathbb{R}[z]$) avec $P_M Q_N \neq 0$.

Les deux équations du système (14) nous permettent d'exprimer la quantité $f(z+M\alpha+N\beta)$ de deux façons différentes. En effet, nous avons

$$f(z+N\beta+M\alpha) = \sum_{0\leq m\leq M-1} A_m(z+N\beta) f(z+m\alpha+N\beta)$$

et

$$f(z+M\alpha+N\beta) = \sum_{0\leq n\leq N-1} B_n(z+M\alpha) f(z+M\alpha+n\beta).$$

où $A_m = -P_m/P_M, 0 \leq m \leq M-1$ et $B_n = -Q_n/Q_N, 0 \leq n \leq N-1$. En utilisant à nouveau les données du système (14), nous obtenons la relation

$$\sum_{\substack{0\leq m\leq M-1 \\ 0\leq n\leq N-1}} \Big(A_m(z+N\beta) B_n(z+m\alpha) - A_m(z+n\beta) B_n(z+M\alpha) \Big) f(z+m\alpha+n\beta) = 0.$$

4.1. Énoncé et preuve du Critère.

Nous avons le résultat suivant :

Critère 4.1. *Soit f une fonction entière (resp. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) solution du système*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{array} \right. \tag{15}$$

où α et β sont deux nombres complexes (resp. réels) linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ des suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ (resp. $\mathbb{R}[z]$) avec $P_M Q_N \neq 0$.

Posons $A_m = -P_m/P_M, 0 \leq m \leq M-1$ *et* $B_n = -Q_n/Q_N, 0 \leq n \leq N-1$.

Si, pour tout couple d'entiers naturels (m,n) *tel que* $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$, *les fractions rationnelles*

$$C_{m,n}(z) = A_m(z+N\beta)B_n(z+m\alpha) - A_m(z+n\beta)B_n(z+M\alpha)$$

sont nulles, alors, f *est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.*

Preuve. Si les hypothèses du critère sont vérifiées, nous avons les relations

$$A_m(z+N\beta)B_n(z+m\alpha) = A_m(z+n\beta)B_n(z+M\alpha)$$

pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$. Si f est entière (resp. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$), le Lemme 3.1 nous dit que, pour tout couple d'entiers $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$, tel que $A_mB_n \neq 0$, il existe deux nombres complexes (resp. réels) $a_{m,n}, b_{m,n}$ et une fraction rationnelle $R_{m,n}$ dans $\mathbb{C}(z)$ (resp. $\mathbb{R}(z)$) tels que

$$A_m(z) = a_{m,n}\frac{R_{m,n}(z+M\alpha)}{R_{m,n}(z+m\alpha)} \text{ et } B_n(z) = b_{m,n}\frac{R_{m,n}(z+N\beta)}{R_{m,n}(z+n\beta)}.$$

Ces égalités et l'argument d'unicité de la preuve du Lemme 3.1 permettent d'affirmer l'existence de deux suites finies $(a_m)_{0\leq m\leq M-1}$ et $(b_n)_{0\leq n\leq N-1}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) et d'une fraction rationnelle non nulle R de $\mathbb{C}(z)$ (resp. $\mathbb{R}(z)$) telles que

$$A_m(z) = a_m\frac{R(z+M\alpha)}{R(z+m\alpha)} \text{ et } B_n(z) = b_n\frac{R(z+N\beta)}{R(z+n\beta)}.$$

Nous avons donc transformé le système (14) de départ en le système suivant

$$\begin{cases} f(z+M\alpha) &= \sum_{0\leq m\leq M-1} a_m\dfrac{R(z+M\alpha)}{R(z+m\alpha)}f(z+m\alpha), \\ f(z+N\beta) &= \sum_{0\leq n\leq N-1} b_n\dfrac{R(z+N\beta)}{R(z+n\beta)}f(z+n\beta), \end{cases}$$

où R appartient à $\mathbb{C}(z)\backslash\{0\}$ (resp. $\mathbb{R}(z)\backslash\{0\}$). Posons $g = f/R$. Nous obtenons alors le système

$$\begin{cases} g(z+M\alpha) &= \sum_{0\leq m\leq M-1} a_m g(z+m\alpha), \\ g(z+N\beta) &= \sum_{0\leq n\leq N-1} b_n g(z+n\beta). \end{cases} \tag{16}$$

Nous allons montrer que g est entière lorsque f l'est. En effet, la fonction $g = f/R$ est clairement méromorphe avec un nombre fini de pôles. Si l'ensemble des pôles de g n'est pas vide, il existe un pôle z_1 de $g(\cdot + M\alpha)$ qui n'est pôle d'aucun élément de la suite de fonctions $(g(\cdot + m\alpha))_{0\leq m\leq M-1}$: il suffit de considérer un nombre complexe z_1 qui réalise le minimum de $Re(z/\alpha)$ parmi les pôles de $g(. + M\alpha)$. La contradiction vient alors du fait que z_1 est une singularité pour le premier membre de la première équation du système (16) et n'en est pas une pour le second membre. La fonction g est donc entière et elle est solution d'un système d'équations aux différences à coefficients constants. Supposons maintenant que f est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Nous voyons, en remarquant que toutes les dérivées de g satisfont le système (16), que le raisonnement ci-dessus permet de montrer que nous pouvons prolonger la fonction g par une fonction $\tilde{g}$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ elle aussi solution d'un système d'équations aux différences à coefficients constants. Le Corollaire 2.5 entraîne alors, dans tous les cas, que g est un polynôme exponentiel et l'égalité $f = Rg$ nous permet de conclure. □

Remarque 4.2. Comme le montre la preuve, le Critère 4.1 reste valable si l'on suppose seulement f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il faut alors utiliser la Remarque 2.2).

Remarque 4.3. En fait, ce critère s'applique pour toute fonction f qui s'exprime comme quotient d'un polynôme exponentiel g par un polynôme P : les coefficients d'un système quelconque dont f est solution ne vérifient pas en général les hypothèses du critère mais on est sûr en revanche qu'il existe un système non trivial satisfait par f dont les coefficients vérifient les hypothèses du Critère. En effet, le nombre complexe α étant un pas récurrent pour g, il existe $a_0, a_1, \ldots, a_M$ dans $\mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{m=0}^{M} a_m g(z + m\alpha) = 0.$$

Nous posons alors $P_m(z) = a_m P(z + m\alpha)$ pour $m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq M$. Nous avons donc la relation

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) f(z + m\alpha) = 0.$$

De même, il existe $b_0, b_1, \ldots, b_N$ dans $\mathbb{C}$ tels que, si nous posons $Q_n(z) = b_n P(z + n\beta)$ pour $n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq N$, nous ayons

$$\sum_{n=0}^{N} Q_n(z) f(z + n\beta) = 0.$$

Nous voyons alors facilement que les fractions rationnelles $C_{m,n}$ sont identiquement nulles. Les hypothèses du critère sont évidemment satisfaites dans le cas où les deux équations sont à coefficients constants et elles le sont aussi lorsque M ou N vaut 1 (cf. la preuve du Théorème 4.4). Initialement, nous pensions que, lorsque M et N étaient minimaux, les fractions rationnelles $C_{m,n}$ étaient toutes nulles. J.-P. Bézivin et F. Gramain nous ont fourni les contre-exemples $f(z) = (e^z - 1)/z + 1$ et $f(z) = e^z + z$.

4.2. **Résultats partiels obtenus.**

Nous étudions quelques cas particuliers dans lesquels le critère s'applique.

Théorème 4.4. *Soient α, β deux nombres complexes (resp. réels) non nuls tels que $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, et soit f une fonction entière (resp. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) solution du système*

$$\left\{ \begin{array}{rl} P_1(z)f(z+\alpha) + P_0(z)f(z) & = \Phi, \\ \sum_{0\le n\le N} Q_n(z)f(z+n\beta) & = \Psi, \end{array} \right. \tag{17}$$

où $P_0, P_1, Q_0, \ldots, Q_N$ sont dans $\mathbb{C}[z]$ (resp. $\mathbb{R}[z]$) avec $P_0P_1Q_0Q_N \neq 0$ et où Φ et Ψ sont deux polynômes exponentiels. Alors

i) si Φ est nul, f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme ;

ii) si P_0 ou P_1 est constant, alors f est un polynôme exponentiel.

Preuve. Supposons f entière et non identiquement nulle. Les mêmes calculs que ceux faits au début de cette section nous permettent de déduire du système (17) la relation

$$H(z) \sum_{0\le n\le N-1} (A(z+N\beta)B_n(z) - A(z+n\beta)B_n(z+\alpha))f(z+n\beta) = \Phi_1(z). \tag{18}$$

où H est un polynôme non nul et Φ_1 un polynôme exponentiel.

Supposons Φ nul. Il est toujours possible de supposer au départ Ψ nul car β est un pas récurrent pour le polynôme exponentiel Ψ (cf. introduction) puis N minimal. La fonction Φ_1 qui est une combinaison linéaire sur $\mathbb{C}[z]$ de translatées de Φ et de Ψ est par conséquent nulle. La minimalité de N entraîne la nullité des coefficients des fonctions $\big(f(\cdot + n\beta)\big)_{0\le n\le N-1}$ dans la relation (18). Le Critère 4.1 s'applique et donne le résultat annoncé.

Nous traitons maintenant le deuxième point. Nous supposons N minimal. La relation (18) et la minimalité de N impliquent que les fractions A et $(B_n)_{0\le n\le N-1}$ ont la forme donnée dans le Lemme 3.1 : il existe un nombre complexe a, une suite finie $(b_n)_{0\le n\le N-1}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ et une fraction rationnelle non nulle R de $\mathbb{C}(z)$ tels que $A(z) = aR(z+\alpha)/R(z)$ et $B_n(z) = b_nR(z+N\beta)/R(z+n\beta)$. Nous en déduisons en particulier que $\lim_{z\to\infty} A(z) = a$. La fraction A étant égale au rapport $-P_0/P_1$, les polynômes P_0 et P_1 ont même degré et sont donc simultanément constants : nous pouvons poser $R = 1$. Nous tirons alors de (17) le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(z+\alpha) - af(z) & = & \lambda\Phi(z), \\ f(z+N\beta) - \sum_{0\le n\le N-1} b_nf(z+n\beta) & = & \dfrac{\Psi(z)}{Q_N(z)}, \end{array} \right. \tag{19}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous voulons montrer que la fonction $\Psi(z)/Q_N(z)$ est en fait un polynôme exponentiel, ce qui entraînera le résultat escompté d'après le Corollaire 2.5. Pour cela, nous allons utiliser à nouveau le procédé initial : nous translatons les variables des deux équations du système et nous transformons les expressions ainsi obtenues, ce qui donne la relation suivante

$$\lambda\Phi(z+N\beta)-\sum_{0\le n\le N-1} b_n\lambda\Phi(z+n\beta)=\frac{\Psi(z+\alpha)}{Q_N(z+\alpha)}-a\frac{\Psi(z)}{Q_N(z)}. \tag{20}$$

Soit γ un nombre complexe et soient F, G les coefficients polynomiaux (éventuellement nuls) respectifs de $e^{\gamma\cdot}$ dans $\lambda\Phi$ et Ψ. La famille de fonctions $(e^{\delta\cdot})_{\delta\in\mathbb{C}}$ étant libre sur $\mathbb{C}(z)$ (cf [Wal]), la relation (20) nous donne

$$F(z+N\beta)e^{\gamma N\beta}-\sum_{0\le n\le N-1} b_nF(z+n\beta)e^{\gamma n\beta}=\frac{G(z+\alpha)}{Q_N(z+\alpha)}e^{\gamma\alpha}-a\frac{G(z)}{Q_N(z)}. \tag{21}$$

Posons $T=G/Q_N$. Nous allons montrer que la fraction rationnelle T est nécessairement un polynôme. En effet, s'il n'en est pas ainsi, la fraction T admet au moins un pôle z_0 qui n'est pas un pôle de $T(z+\alpha)$. Cela est absurde puisque le membre de gauche de l'équation (21) est une fonction entière. Nous avons donc prouvé que Q_N divise le coefficient polynomial de $e^{\gamma\cdot}$ dans Ψ, c'est-à-dire que Ψ/Q_N est bien un polynôme exponentiel. Les deux seconds membres du système (19) sont donc des polynômes exponentiels. Le Corollaire 2.5 nous dit alors que la fonction entière f solution de ce système est bien un polynôme exponentiel. Une adaptation immédiate de cette démonstration permet de traiter le cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. $\square$

Nous déduisons de ce théorème une nouvelle preuve du Théorème 5.1 de [BéGra1].

Corollaire 4.5. *Soient α,β deux nombres complexes non nuls tels que α/β appartient à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$, et f une fonction entière solution du système*

$$\begin{cases} \sum_{0\le m\le M} a_mf(z+m\alpha)=\Phi(z),\\ \sum_{0\le n\le N} b_n(z)f(z+n\beta)=\Psi(z),\end{cases} \tag{22}$$

où $(a_m)_{0\le m\le M}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbb{C}$ et $(b_n)_{0\le n\le N}$ une suite finie d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ avec $a_Mb_N\neq 0$, les fonctions Φ et Ψ étant deux polynômes exponentiels. Alors f est un polynôme exponentiel.

Preuve. Nous pouvons comme précédemment supposer $a_Mb_Na_0b_0\neq 0$ et $\Phi=\Psi=0$. Si $M=1$, le Théorème 4.4 donne alors le résultat. Nous supposons donc $M\geq 2$ et la propriété vraie jusqu'au rang $M-1$. Notons X l'opérateur de translation par α, Y l'opérateur de translation par β et Z l'opérateur de multiplication par z. Le fait que α/β soit irrationnel entraîne que X et Y sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}(Z)$ (cf [BéGra1]). Nous écrivons le système (22) sous la forme

$$\begin{cases} P_M(X)f=0,\\ R(Z,Y)f=0,\end{cases} \tag{23}$$

avec $P_M\in\mathbb{C}[X]$ ($\deg P_M=M$), et $R(Z,Y)\in\mathbb{C}(Z)[Y]$. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ une racine de P_M et P_{M-1} le polynôme en X de degré $M-1$ défini par $P_M(X)=(X-$

$\lambda)P_{M-1}(X)$. Introduisons la fonction entière $g = (X-\lambda)f = f(\cdot+\alpha) - \lambda f$. Comme l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}(z)$ par la famille de fonctions $(f(\cdot + m\alpha + n\beta))_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est de dimension finie (grâce au système (23)), il existe un polynôme non nul $R_1(Z,Y)$ tel que g soit solution du système

$$\left\{\begin{array}{l} P_{M-1}(X)g = 0, \\ R_1(Z,Y)g = 0. \end{array}\right.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors que $g = f(\cdot+\alpha) - \lambda f$ est un polynôme exponentiel, ce qui permet d'écrire un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(z+\alpha) - \lambda f(z) & = & \Phi_1(z), \\ \sum_{0\le n\le N} b_n(z) f(z+n\beta) & = & \Psi(z), \end{array}\right.$$

où Φ_1 est un polynôme exponentiel. Il ne reste plus qu'à appliquer le Théorème 4.4 pour conclure. $\square$

5. Détermination algorithmique des solutions entières

Nous supposons que la fonction entière f est solution du système

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{0\le m\le M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\le n\le N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{array}\right. \tag{24}$$

où $(P_m)_{0\le m\le M}$ et $(Q_n)_{0\le n\le N}$ sont deux suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ avec $P_M Q_N \neq 0$ et toujours $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$. Quitte à normaliser, nous pouvons supposer $\alpha = 1$ et β irrationnel. Nous allons développer dans cette section, inspirée du chapitre 8 de [PWZ], un algorithme donnant la forme explicite des solutions entières f du système (24).

Posons $d_1 = \max_{0\le m\le M}\deg(P_m)$ et $d_2 = \max_{0\le n\le N}\deg(Q_n)$. Nous cherchons f sous la forme

$$z \mapsto \sum_{s=1}^{S} x_s(z) e^{\delta_s z} \text{ avec } \delta_i \neq \delta_j \text{ si } i \neq j, \text{ et } x_s \in \mathbb{C}(z). \tag{25}$$

Étape 1 : Détermination des fréquences δ_s des exponentielles.

La famille de fonctions $\left(e^{\delta\cdot}\right)_{\delta\in\mathbb{C}}$ est libre sur $\mathbb{C}(z)$. Nous avons donc, en injectant f sous la forme (25) dans la première équation du système (24),

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) x_s(z+m) e^{\delta_s m} = 0, \tag{26}$$

pour tout $s \in \{1,\dots,S\}$. Ceci implique

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{P_m(z)}{z^{d_1}} \frac{x_s(z+m)}{x_s(z)} e^{\delta_s m} = 0.$$

En notant a_m le coefficient de z^{d_1} dans $P_m(z)$ et en faisant tendre z vers l'infini, nous obtenons $\sum_{m=0}^{M} a_m e^{\delta_s m} = 0$, qui est une équation polynomiale en e^{δ_s}. De même, en notant b_n le coefficient de z^{d_2} dans $Q_n(z)$ et en faisant tendre z vers l'infini, nous obtenons $\sum_{n=0}^{N} b_n e^{\delta_s n\beta} = 0$ qui est une équation polynomiale en $e^{\delta_s\beta}$. Nous résolvons donc les équations polynomiales en $X = e^{\delta}$ et $Y = e^{\delta\beta}$

$$\sum_{m=0}^{M} a_m X^m = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{N} b_n Y^n = 0.$$

Nous obtenons I ($\leq M$) classes distinctes de solutions dans $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ pour la première équation qu'il faut comparer aux J ($\leq N$) classes distinctes de solutions dans $\mathbb{C}/2i\pi\beta^{-1}\mathbb{Z}$ pour la deuxième équation. La comparaison s'opère comme suit. Soient x_1 une racine du polynôme $P(X) = \sum_{m=0}^{M} a_m X^m$ et y_1 une racine du polynôme $Q(Y) = \sum_{n=0}^{N} b_n Y^n$. Nous associons à x_1 une fréquence δ_1 de la forme $\log x_1 + 2i\pi k_1$ et à y_1 une fréquence $\delta_1^{'}$ de la forme $(\log y_1 + 2i\pi k_1^{'})/\beta$ où log désigne la détermination principale du logarithme complexe et où $k_1, k_1^{'}$ sont dans $\mathbb{Z}$. On est donc ramené à résoudre les équations en k et $k' \in \mathbb{Z}$

$$\log x + 2i\pi k = (\log y + 2i\pi k')/\beta \tag{27}$$

où x décrit l'ensemble des racines de P et y l'ensemble des racines de Q. Du fait de l'irrationalité de β, nous sommes assurés de trouver un nombre fini S_1 de fréquences complexes δ convenables. La résolution des équations (donc la comparaison des classes) ne peut être faite avec un ordinateur que dans le cas où β n'est pas réel. En effet, si elle est facile dans le cas où β n'est pas dans $\mathbb{R}$ (il faut utiliser (27) et sa conjuguée), elle n'est pas possible si β est réel irrationnel : le sous-groupe $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\beta$ est alors dense dans $\mathbb{R}$ et il faudrait avoir une idée de la taille de k et k' pour pouvoir les déterminer, en utilisant l'algorithme LLL par exemple. Or, nous ne pouvons pas avoir un tel renseignement dans la situation étudiée ici. La résolution des équations (27) nous permet d'exhiber, en cas d'existence de couples (k, k') solutions, un nombre fini de fréquences $\delta_1, \ldots, \delta_{S_1}$ de formes respectives $\log x_1 + 2i\pi k_1, \ldots, \log x_{S_1} + 2i\pi k_{S_1}$ et dans le cas contraire d'assurer que 0 est seule solution entière.

Étape 2 : Détermination des fractions rationnelles $x_s(z)$.

Nous utilisons un algorithme de S. Abramov [Abr] pour trouver un polynôme D que divise le dénominateur de chaque fraction rationnelle x_s solution de l'équation (26). Ensuite, nous déterminons, grâce à l'algorithme Poly de M. Petkovšek [PWZ], toutes les solutions polynomiales $y_s(z)$ de l'équation

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{P_m(z)}{D(z+m)} y(z+m) e^{\delta_s m} = 0.$$

Soit $y_s(z)$ un polynôme solution de cette équation, posons $x_s(z) = y_s(z)/D(z)$. Nous vérifions alors si $x_s(z)e^{\delta_s z}$ est solution de la deuxième équation de (24).

Étape 3 : Étant donné $x_1(z)e^{\delta_1 z}, \dots, x_S(z)e^{\delta_S z}$ les S solutions méromorphes déterminées à l'aide des étapes précédentes, trouver les coefficients complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_S$ tels que la fonction $z \mapsto f(z) = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s x_s(z) e^{\delta_s z}$ est entière.

Nous disposons depuis l'étape 2 d'un dénominateur D commun aux $x_s(z)$ et dont nous connaissons, par sa construction, les racines et leurs ordres de multiplicité. Il s'agit à cet endroit de trouver les λ_s pour lesquels les racines de D sont aussi racines (comptées avec multiplicité) du polynôme exponentiel $g_{\lambda_1,\dots,\lambda_S}(z) = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s D(z) x_s(z) e^{\delta_s z}$. Si nous notons $z_1, z_2, \dots, z_r$ les racines de D d'ordres respectifs $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$, les coefficients λ_s seront les solutions du système formé par les équations $\left\{ g^{(l_j)}_{\lambda_1,\dots,\lambda_S}(z_j) = 0 \right\}_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 0 \leq l_j \leq \mu_j - 1}}$.

Nous pouvons adapter facilement cet algorithme au cas où la fonction entière f est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{0 \leq m \leq M} P_m(z) f(z + m\alpha) = 0, \\ \sum_{0 \leq n \leq N} Q_n(z) f^{(n)}(z) = 0, \end{array} \right. \tag{28}$$

où $(P_m)_{0 \leq m \leq M}$ et $(Q_n)_{0 \leq n \leq N}$ sont deux suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ avec $P_M Q_N \neq 0$ et α un nombre complexe non nul. Nous savons alors, par le Théorème 1.3 de [BéGra2] que f est encore le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme. Nous normalisons en supposant $\alpha = 1$. Nous injectons f sous la forme (25) dans la deuxième équation du système (28). Nous obtenons, toujours grâce à la liberté sur $\mathbb{C}(z)$ de la famille de fonctions $\left(e^{\delta \cdot}\right)_{\delta \in \mathbb{C}}$, les relations

$$\sum_{n=0}^{N} Q_n(z) \left(x_s(z) e^{\delta_s z} \right)^{(n)} = 0, \tag{29}$$

pour tout $s \in \{1, \dots, S\}$. La formule de Leibniz donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(x_s(z) e^{\delta_s z} \right)^{(n)} = e^{\delta_s z} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {\delta_s}^{n-k} x_s^{(k)}(z).$$

Les relations (29) entraînent

$$\sum_{n=0}^{N} Q_n(z) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {\delta_s}^{n-k} \frac{x_s^{(k)}(z)}{x_s(z)} \right) = 0,$$

pour tout $s \in \{1, \dots, S\}$. En notant toujours b_n le coefficient de z^{d_2} dans $Q_n(z)$ et en faisant tendre z vers l'infini, nous obtenons l'équation $\sum_{n=0}^{N} b_n {\delta_s}^n = 0$. Il nous faut alors modifier légérement la première étape de l'algorithme. L'étape 1 devient

Étape 1' : Nous résolvons les équations polynomiales en $X = e^{\delta}$ et $Y = \delta$

$$\sum_{m=0}^{M} a_m X^m = 0 \;\text{ et }\; \sum_{n=0}^{N} b_n Y^n = 0.$$

Nous trouvons ainsi I $(\leq M)$ classes distinctes de solutions dans $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ pour la première équation que nous comparons aux J $(\leq N)$ solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ de la deuxième équation. Cela nous permet de trouver encore un nombre fini de fréquences complexes δ convenables.

L'implantation de ces deux algorithmes, qui est discutée dans [Bri], a été réalisée en MAPLE. Les programmes sont disponibles à l'adresse www `http://www.math.u-bordeaux.fr/~brisebar/Pasrec/pasrec.html`.

Références

[Abr] S.A. Abramov, *Rational solutions of linear difference and q-difference equations with polynomial coefficients*, Proc. ISSAC '95, T. Levelt ed., 1995, 285-289. ACM Press, New-York.

[BéGra1] J.-P. Bézivin et F. Gramain, *Solutions entières d'un système d'équations aux différences*, Ann. Inst. Fourier **43**-3 (1993), 791-814.

[BéGra2] J.-P. Bézivin et F. Gramain, *Solutions entières d'un système d'équations aux différences II*, Ann. Inst. Fourier **46**-2 (1996), 465-491.

[Bri] N. Brisebarre, *An algorithm for finding integer solutions of systems of difference equations*, prépublication.

[Gel] A.O. Guelfond, *Calculs des différences finies*, Dunod, Paris, 1963.

[Gra1] F. Gramain, *Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond*, Inv. Math., **63** (1981), 495-506.

[Gra2] F. Gramain, *Équations aux différences et polynômes exponentiels*, C. R. Acad. Sciences Paris, **313** (1991), 131-134.

[GraMi] F. Gramain et M. Mignotte, *Fonctions entières arithmétiques*; Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1982, D. Bertrand et M. Waldschmidt eds, Progress in Math. **31**, 1983, 99-124. Birkhäuser, Boston.

[Loe] J.-J. Loeb, *Sur certaines équations aux différences associées à des groupes*, prépublication.

[Mas] D. Masser, *On certain functional equations in several variables*; Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1982, D. Bertrand et M. Waldschmidt eds, Progress in Math. **31**, 1983, 173-190. Birkhäuser, Boston.

[PWZ] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, *A=B*, A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996.

[Wal] M. Waldschmidt, *Nombres transcendants*, Springer Lecture Notes in Math. **402**, Berlin, 1974.

[Zei] D. Zeilberger, *A holonomic systems approach to special functions identities*, J. Comp. Appl. Math. **32**, 1990, 321-368.