N^{O} d'ordre : 1903.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

PAR **Nicolas BRISEBARRE**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

Une étude de deux problèmes diophantiens

Soutenue le 25 septembre 1998.

Après avis de :

F. AMOROSO, Professeur	Università degli Studi di Torino	Rapporteurs
F. GRAMAIN, Professeur	Université Jean Monnet, Saint-Étienne	

Devant la commission d'examen formée de :

J.-M. DESHOUILLERS, Professeur	Université Victor Segalen Bordeaux II	Président
A. YGER, Professeur	Université Bordeaux I	Rapporteur
F. AMOROSO, Professeur	Università degli Studi di Torino	Examinateurs
F. GRAMAIN, Professeur	Université Jean Monnet, Saint-Étienne	
L. HABSIEGER, Chargé de Recherche	A2X (UPRESA CNRS 5465)	
M. HATA, Professeur	Université de Kyoto	
M. LANGEVIN, Professeur	Université Bordeaux I	

– 1998 –

Remerciements

Laurent Habsieger a guidé mes premiers pas dans la recherche lors d'un stage de T.E.R. effectué à la fin de ma maîtrise. Je voulais alors, et c'est toujours le cas, faire des mathématiques associant algèbre et analyse. Les sujets qu'il m'a proposé d'étudier m'ont toujours permis de travailler dans cette perspective. Je lui suis très reconnaissant de la manière dont il a dirigé mes recherches.

Francesco Amoroso et François Gramain m'ont fait l'honneur d'accepter d'examiner ma thèse. Je les remercie pour le sérieux avec lequel ils se sont acquittés de cette tâche, ainsi que pour leur participation au jury. Cela fait maintenant deux ans que je dérange régulièrement François Gramain avec des sollicitations diverses et je n'ai eu qu'à me réjouir des réponses qu'il y a apportées.

Alain Yger m'a encadré lors de mon stage de D.E.A. et m'avait alors proposé d'étudier un article de Jean-Paul Bézivin et François Gramain qui a été le point de départ du premier chapitre de cette thèse. J'ai toujours apprécié la vision des mathématiques qu'il exprimait au cours des discussions que nous avons pu avoir. Je le remercie d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Je suis heureux et honoré que Jean-Marc Deshouillers ait accepté de présider ce jury. Je le remercie grandement de la façon dont il anime la communauté bordelaise (que je salue au passage) et française de théorie analytique des nombres.

Je remercie Michel Langevin d'avoir bien voulu faire partie de ce jury. Je garde un agréable souvenir des conversations que nous avons eues pendant mes séances de rédaction et je lui suis très reconnaissant de la lecture attentive qu'il a faite de ce mémoire.

Les travaux de Masayoshi Hata ont beaucoup inspiré le deuxième chapitre de ce mémoire. Je suis content et honoré de sa présence au sein de ce jury.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Jean-Marc Couveignes, Roger Gay et Bernard de Mathan pour le temps et l'attention qu'ils m'ont accordés ainsi que pour leurs précieux conseils et leur soutien amical.

Je souhaite remercier Jacques Martinet, Véronique Saint-Martin et Christian Labesse qui, chacun dans leur fonction, contribuent quotidiennement à faire du laboratoire A2X un endroit où il fait bon faire des mathématiques.

Je remercie Philippe Depouilly, Qing Liu et, par leur intermédiaire, le laboratoire de Mathématiques Pures pour le support informatique qu'ils m'ont offert

tout au long des deux dernières années.

Merci à mes compagnons de travail Alain, David, Guillaume, Jean-Marc, Jean-Yves, Karim, Richard, Stanislas et Yuri. Je n'oublie pas que j'ai toujours pu compter sur leur aide morale, intellectuelle et matérielle au cours de cette thèse.

J'ai plaisir à penser en cet instant à mes amis Éric, Jean-François, Pierre, Stéphane et Xavier.

Enfin, j'embrasse mes parents, mes soeurs Eve et Marie et mes deux grand-mères.

Table des matières

Table des matières **5**

Introduction **7**

1 Sur les fonctions entières à double pas récurrent **9**
1.1 Introduction 9
1.2 Cas où les deux équations sont à coefficients constants 13
1.3 Une autre approche de la question de D. Masser 16
1.3.1 Un lemme technique 16
1.3.2 Énoncé et étude du Critère 19
1.3.3 Résultats partiels obtenus 22
1.4 Détermination algorithmique des solutions entières 26
1.4.1 Cas des deux équations aux différences 26
1.4.1.1 Énoncé de l'algorithme Pasrec 31
1.4.1.2 Un exemple de fonctionnement de l'algorithme . 33
1.4.2 Cas où l'une des deux équations est une équation différentielle 35
1.4.2.1 Énoncé de l'algorithme Pasrecd 36
1.4.3 Implantation des algorithmes 37

Bibliographie du chapitre 1 **37**

2 Mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$ **41**
2.1 Introduction 41
2.2 Calculs de mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$ à l'aide d'une généralisation d'une étude de Hata 52
2.2.1 Lemmes techniques 52
2.2.1.1 Un lemme arithmétique 53
2.2.1.2 Un algorithme de calcul de l'intégrale $e(\lambda, \lambda')$ . . 56
2.2.1.3 Relations entre les contenus des polynômes utilisés par Dubitskas, Hata, Rukhadze et Chudnovsky 58
2.2.2 Calculs de mesures d'irrationalité de $\log 2$ 62

2.2.2.1 Liens entre les mesures d'irrationalité de $\log 2$ données par les polynômes de Rukhadze, Dubitskas, Hata et Chudnovsky 65
2.2.2.2 Figures et résultats 67
2.2.3 Calculs de mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ 70
2.2.3.1 Liens entre les mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ données par les polynômes de Rukhadze, Dubitskas, Hata et Chudnovsky 72
2.2.3.2 Figures et résultats 73
2.3 Tentative d'amélioration analytique 78
2.3.1 Introduction 78
2.3.2 Un lemme arithmétique 79
2.3.3 Un algorithme de calcul de $f(\lambda, \lambda')$ 82
2.3.4 Calculs de mesures d'irrationalité de $\log 2$ 84

Bibliographie du chapitre 2 **86**

Appendices **92**

A Présentation des algorithmes d'Abramov et de Petkovšek **93**
A.1 L'algorithme d'Abramov 93
A.1.1 Objectif de l'algorithme 93
A.1.2 Énoncé de l'algorithme 94
A.1.3 Justification théorique de l'algorithme 94
A.2 L'algorithme Poly 97
A.2.1 Objectif de l'algorithme 97
A.2.2 Énoncé de l'algorithme 97
A.2.3 Justification théorique de l'algorithme 98
A.3 Un exemple 99

B Le module Pasrec **103**
B.1 Cas des deux équations aux différences 103
B.2 Cas où l'une des deux équations est une équation différentielle . . 105
B.3 Télécharger le module Pasrec 107

Introduction

Cette thèse est composée de deux chapitres indépendants traitant de problèmes reliés à l'approximation diophantienne[1].

La première partie est un travail effectué en collaboration avec Laurent Habsieger. Nous nous intéressons aux solutions entières, i.e. holomorphes sur tout le plan complexe, d'un système d'équations aux différences finies. J.-P. Bézivin et F. Gramain ont montré en 1996 que toute fonction f entière solution du système

$$\begin{cases} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{cases}$$

où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites finies de $\mathbb{C}[z]$ et α et β des nombres complexes tels que $\alpha/\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme $\sum_{s=1}^{S} a_s(z)e^{\delta_s z}$ avec $a_s \in \mathbb{C}(z)$ et $\delta_s \in \mathbb{C}$. Nous donnons une généralisation de ce résultat au cas $\alpha/\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$. Puis nous proposons une nouvelle approche de ce problème qui permet de retrouver partiellement les résultats de J.-P. Bézivin et F. Gramain. Enfin, nous fournissons un algorithme qui donne la forme explicite des solutions. Cet algorithme a été implanté dans un module écrit en Maple présenté dans l'appendice B.

La seconde partie de cette thèse traite d'approximations rationnelles des nombres transcendants $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$. La qualité d'approximation d'un nombre réel x irrationnel par des nombres rationnels est mesurée à l'aide d'une constante réelle appelée mesure d'irrationalité de x. Nous étudions une classe de polynômes qui généralise les polynômes de Legendre. Cela nous permet d'unifier des travaux antérieurs d'E. A. Rukhadze, A. Dubitskas et M. Hata et d'infirmer une annonce faite par D. V. et G. V. Chudnovsky. De plus, nous introduisons une deuxième classe de polynômes dérivée de la première à l'aide de laquelle nous décrivons une tentative d'amélioration de la meilleure mesure d'irrationalité de $\log 2$ connue à ce jour.

[1] Diophante d'Alexandrie (200(?)-284(?)) est connu principalement pour son deuxième ouvrage "Arithmetica", recueil de problèmes conduisant notamment à la recherche de solutions rationnelles d'équations à coefficients entiers relatifs à une ou plusieurs inconnues.

Chapitre 1

Sur les fonctions entières à double pas récurrent

1.1 Introduction

L'origine du problème traité dans ce chapitre se trouve dans l'étude des fonctions entières arithmétiques. Nous la faisons débuter avec le théorème suivant dû à Pólya [Pól]. Rappelons au préalable qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite entière si elle est holomorphe sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

Théorème (G. Pólya, 1915) .
Soit f une fonction entière telle que

$$f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z} \quad et \quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log |f|_r}{r} < \log 2$$

où $|f|_r = \sup_{|z|\leq r} |f(z)|$. Alors f est un polynôme.

Remarque 1.1. La constante $\log 2$ est optimale : il suffit de considérer la fonction $z \mapsto 2^z$.

On peut trouver de multiples travaux de Pólya, Hardy, Landau, Carlson et Pisot sur les fonctions entières telles que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ ou $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

En 1926, S. Fukasawa [Fuk] étudia les fonctions entières laissant stable l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$. Ses travaux ont été complétés par A. O. Gel'fond [Gel1] pour établir en 1929 le résultat suivant.

Théorème (S. Fukasawa, 1926 - A. O. Gel'fond, 1929) .
Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que si f est une fonction entière vérifiant

$$f(\mathbb{Z}[i]) \subset \mathbb{Z}[i] \quad et \quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log |f|_r}{r^2} < \alpha,$$

alors, f est un polynôme.

En 1929, A. O. Gel'fond montrait le théorème avec $\alpha = \pi(1+e^{164/\pi})^{-2}/2 < 10^{-45}$. C'est seulement en 1979 que L. Gruman [Gru] améliore cette constante en prouvant que le résultat reste vrai avec $\alpha = 0,0396$. D. Masser [Mas1], en 1980, établit de son côté la condition nécessaire $\alpha \leq \pi/(2e)$. Finalement, F. Gramain démontre en 1981 dans [Gra1] que la meilleure constante α possible vérifiant le théorème précédent vaut effectivement $\pi/(2e) = 0.57786....$ En fait, ce résultat est un cas particulier du théorème que nous énonçons à présent.

Théorème (F. Gramain, 1981) . *Soit K le corps quadratique imaginaire de discriminant $-\Delta$, et $a = \sqrt{\Delta}/2$ l'aire d'un parallélogramme fondamental du réseau $\mathcal{O}_K$ des entiers de K.*
i) Si f est une fonction entière vérifiant

$$f(\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K \text{ et } \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log|f|_r}{r^2} < \frac{\pi}{2ea},$$

alors f est un polynôme.
ii) Il existe une fonction entière f telle que

$$f(\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K, \quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log|f|_r}{r^2} = \frac{\pi}{2ea},$$

et f n'est pas un polynôme.

Pour montrer son théorème, F. Gramain utilise en particulier le lemme suivant.

Lemme (F. Gramain, 1981) . *Soient α et β deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction, bornée sur tout compact, vérifiant les deux équations fonctionnelles*

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) f(z+m\alpha) = \sum_{n=0}^{N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0 \tag{1.1}$$

où les P_m (resp. Q_n) sont des éléments non tous nuls de $\mathbb{C}[z]$ de degré majoré par D (resp. D'). Alors la croissance de f est limitée par

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log|f|_r}{r\log r} \leq \frac{D+D'}{2r_0}$$

où r_0 est le rayon du plus grand disque contenu dans le parallélogramme de sommets $0, \alpha, \beta$ et $\alpha+\beta$

On peut retrouver ce type de lemme dans d'autres travaux traitant de fonctions entières envoyant des réseaux dans des réseaux (voir par exemple [GraMi]) ; l'utilisation des relations fonctionnelles (1.1) satisfaites par f est toujours la même : elles permettent de majorer la croissance de f.

Nous introduisons maintenant deux définitions reliées aux équations (1.1).

Définition 1.2. *Soit f une fonction entière, soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on dit que α est un pas récurrent pour la fonction f s'il existe $P_0 \neq 0, P_1, \ldots, P_M \in \mathbb{C}[z]$ tels que*

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) f(z + m\alpha) = 0$$

(autrement dit, la fonction f vérifie une équation aux différences finies à coefficients polynomiaux dans la direction α).

Remarque 1.3. Le terme de pas récurrent est dû à D. Masser.

Définition 1.4. *Un polynôme exponentiel est une fonction entière de la forme $\sum_{k=1}^{K} H_k(z) e^{\delta_k z}$ avec $H_k \in \mathbb{C}[z]$ et $\delta_k \in \mathbb{C}$ pour tout k. On appelle fréquences les nombres complexes δ_k.*

Remarque 1.5. Le lemme 2.5 de [BéGra1] nous dit qu'un polynôme exponentiel admet tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ comme pas récurrent (avec $P_m \in \mathbb{C}$ pour tout $m, 0 \leq m \leq M$).

Lors de l'exposé de son article [Gra1] à Oberwolfach, D.W. Masser posa à F. Gramain la question suivante (on peut en lire une formulation précise dans [Mas2]).

Question (D. Masser) : Soient f une fonction entière et α et β deux pas récurrents pour la fonction f linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$, la fonction f est-elle nécessairement un polynôme exponentiel?

Autrement dit, D. Masser demandait si les fonctions entières f solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0 \leq m \leq M} P_m(z) f(z + m\alpha) = 0, \\ \sum_{0 \leq n \leq N} Q_n(z) f(z + n\beta) = 0, \end{array} \right. \tag{1.2}$$

où $(P_m)_{0 \leq m \leq M}$ et $(Q_n)_{0 \leq n \leq N}$ sont des suites finies non nulles de $\mathbb{C}[z]$ et α et β des nombres complexes tels que $\alpha/\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sont nécessairement des polynômes exponentiels.

Masser renforçait même l'hypothèse en demandant si les seules fonctions entières admettant tout nombre complexe non nul comme pas récurrent sont les polynômes exponentiels.

La réponse à sa question est négative comme le montre le contre-exemple (exhibé dans [BéGra1]) de la fonction entière

$$f_0 : z \mapsto \frac{e^z - 1}{z}.$$

La fonction f_0 n'est pas un polynôme exponentiel (comme le montre son comportement à l'infini) et vérifie pour tout α,

$$(z + 2\alpha) f_0(z + 2\alpha) - (1 + e^{\alpha})(z + \alpha) f_0(z + \alpha) + e^{\alpha} z f_0(z) = 0.$$

Cependant, nous constatons que la fonction f_0, si elle n'est pas un polynôme exponentiel, n'en est toutefois pas éloignée puisqu'elle est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme. La question naturelle qui se pose alors est de voir si les contre-exemples à la question de D. Masser s'arrêtent à ce niveau d'obstruction. La réponse est oui comme J.-P. Bézivin et F. Gramain l'ont montré en plusieurs étapes dans [Gra2], [BéGra1] et [BéGra2]. La première pierre a été posée par F. Gramain qui, en 1991, a traité le cas où les coefficients du système sont constants.

Théorème (F. Gramain, 1991) . *Soit f une fonction entière solution du système* (1.2) *avec $P_m, Q_n \in \mathbb{C}$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N$. Alors, f est un polynôme exponentiel.*

La preuve se fait en deux temps. Tout d'abord, il montre, en utilisant le fait que les nombres complexes α et β forment une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$ (puisque $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$) que si f vérifie les deux équations aux différences finies du système (1.2), alors elle est de type exponentiel. Rappelons qu'une fonction entière f est dite de type exponentiel s'il existe deux réels A, B strictement positifs tels que

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|} \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

F. Gramain établit donc un résultat sur la croissance de f et montre ensuite qu'une fonction entière de type exponentiel vérifiant une équation aux différences finies à coefficients constants est nécessairement un polynôme exponentiel.

Dans un premier article en commun [BéGra1], J.-P. Bézivin et F. Gramain donnent deux nouvelles preuves du résultat précédent. Ils montrent aussi que si α/β appartient à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et si les coefficients de l'une des deux équations sont constants, alors f est un polynôme exponentiel . De plus, ils prouvent, en supposant toujours α/β appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, une série de résultats partiels. En particulier, s'inspirant d'un procédé dû à D. Zeilberger [Zei] qui consiste à créer des relations redondantes à partir de relations existant déjà, ils obtenaient une condition déterminantale sur les coefficients $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$. Cette condition, lorsqu'elle est vérifiée, entraîne que la fonction f est un polynôme exponentiel. Elle est notamment satisfaite lorsque les coefficients P_0 et Q_0 du système (1.2) sont premiers entre eux. Énonçons ce dernier résultat.

Théorème (J.-P. Bézivin - F. Gramain, 1993) . *Soit f une solution entière solution du système* (1.2). *$(P_0, Q_0) = 1$, alors f est un polynôme exponentiel.*

Enfin, dans [BéGra2], ils résolvent complètement le problème en construisant un polynôme H tel que la fonction entière Hf satisfait un système du type (1.2) avec d'autres coefficients polynomiaux $(P^1_m)_{0\leq m\leq M_1}$ et $(Q^1_n)_{0\leq n\leq N_1}$ tels que $(P^1_0, Q^1_0) = 1$. Ils ont donc obtenu le résultat suivant.

Théorème (J.-P. Bézivin - F. Gramain, 1996) .
Soit f une fonction entière solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{array} \right. \tag{1.3}$$

où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites finies non nulles de $\mathbb{C}[z]$ et α et β deux nombres complexes tels que $\alpha/\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Alors f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.

Il faut noter que, du fait de la Remarque 1.5, le résultat reste vrai si l'on remplace les deux membres de droite de (1.3) par des polynômes exponentiels.

Le plan de ce premier chapitre est le suivant. Dans 1.2, nous prolongeons le résultat de [Gra2] concernant les équations à coefficients constants au cas α/β appartenant à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Nous pouvons alors étendre tous les énoncés de [BéGra2] au cas α/β appartenant à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$. La preuve donnée dans cette section permet de généraliser aussi ces mêmes énoncés au cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ayant deux pas récurrents α et β linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Ensuite, nous proposons dans 1.3 une nouvelle manière d'aborder la question de David Masser. Cela nous permet de prouver un critère impliquant la réponse attendue et de retrouver une partie des résultats de [BéGra2]. Enfin, la dernière partie 1.4 sera consacrée à la détermination algorithmique des solutions entières du système (1.3). Si l'on remplace, dans la deuxième équation de (1.3), les translatées de f par β par des dérivées de f, le Théorème 1.3 de [BéGra2] nous dit que la fonction entière f est encore le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme. L'algorithme légèrement modifié donne encore la forme explicite des solutions entières de ce système.

1.2 Cas où les deux équations sont à coefficients constants

Soient α, β des nombres complexes non nuls, soit f une fonction entière solution du système d'équations aux différences suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0\leq m\leq M} a_m f(z+m\alpha) = \Phi(z), \\ \sum_{0\leq n\leq N} b_n f(z+n\beta) = \Psi(z), \end{array} \right. \tag{1.4}$$

où $(a_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(b_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites de nombres complexes (avec $a_M b_N \neq 0$), les fonctions Φ et Ψ étant deux polynômes exponentiels. Dans [Gra2], on prouve que si α/β appartient à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, alors f est un polynôme exponentiel. Nous allons montrer dans le lemme suivant que l'on peut étendre ce résultat au cas $\alpha/\beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Lemme 1.6. *Si $\alpha/\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, alors toute solution entière de* (1.4) *est un polynôme exponentiel.*

Preuve. Nous pouvons nous restreindre au cas $\Phi = \Psi = 0$ puisque les nombres complexes α et β sont des pas récurrents pour tout polynôme exponentiel (cf. Remarque 1.5). Si la combinaison linéaire $\sum_{m=0}^{M} a_m f(\cdot + m\alpha) = 0$ est non triviale (i.e. $\mathrm{card}\{a_m \neq 0\} \geq 2$), alors

$$\mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\big\{f(\cdot + m\alpha), m \in \mathbb{Z}\big\} = \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{f(\cdot + m\alpha), 0 \leq m \leq M-1\big\},$$

où $\mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\big\{f(\cdot + m\alpha), m \in \mathbb{Z}\big\}$ désigne l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ par la famille de fonctions $(f(\cdot + m\alpha))_{m\in\mathbb{Z}}$. De même, si $\sum_{n=0}^{N} b_n f(\cdot + n\beta) = 0$ est non triviale, nous avons

$$\mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\big\{f(\cdot + n\beta), n \in \mathbb{Z}\big\} = \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\big\{f(\cdot + n\beta), 0 \leq n \leq N-1\big\}.$$

Si l'une des deux équations est triviale, nous avons nécessairement $f \equiv 0$. En écartant ce cas, nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} V &:= \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{f(\cdot + m\alpha + n\beta), m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{f(\cdot + m\alpha + n\beta), 0 \leq m \leq M-1, 0 \leq n \leq N-1\}, \end{aligned}$$

ce qui montre que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est de dimension finie. Comme α/β appartient à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, le sous-groupe additif $\mathbb{Z}(\alpha/\beta) + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En particulier, il existe une suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$ qui tend vers 0. Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de V définie par

$$g_k = \frac{f(\cdot + h_k) - f}{h_k}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous savons (cela peut se déduire du théorème de Taylor) que la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f' pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$. L'espace V étant de dimension finie sur $\mathbb{C}$, toutes les normes définies sur V sont équivalentes : la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers la fonction f' dans V. Une récurrence évidente donne l'appartenance de $f^{(i)}$ à V pour tout $i \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons que la famille $(f, f', \ldots, f^{(\dim_{\mathbb{C}} V)})$ est liée sur $\mathbb{C}$. La fonction f vérifie donc une équation différentielle à coefficients constants : la solution entière f est un polynôme exponentiel. □

Remarque 1.7. Comme l'a noté J.-J. Loeb [Loe], cette démonstration s'adapte aisément au cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: la convergence simple est en fait suffisante dans la preuve qui précède comme l'indique le résultat suivant (qui constitue le Lemme 1 de [Loe]) :

Lemme 1.8. *Soit X un ensemble. Soit $\mathcal{F}(X)$ l'espace des fonctions de l'ensemble X à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Nous munissons $\mathcal{F}(X)$ de la topologie de la convergence simple. Alors tout sous-espace vectoriel E de dimension finie de $\mathcal{F}(X)$ est fermé pour cette topologie.*

Preuve. Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E convergeant vers une fonction g dans $\mathcal{F}(X)$. Désignons par l la dimension de E sur $\mathbb{K}$. Soit $\{e_1,\dots,e_l\}$ une base de E sur $\mathbb{K}$ et soit h un élément de E. On peut écrire h sous la forme $h=\sum_{1\le j\le l} a_j e_j$ où $(a_j)_{1\le j\le l}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbb{K}$. Il existe $z_1,\dots,z_l$ dans $\mathbb{K}$ tels que $\det(e_j(z_i))_{1\le i,j\le l}\neq 0$ (on prouve ce résultat par récurrence sur l). On a donc, pour tout $j\in\mathbb{N}, 1\le j\le l$, les égalités

$$a_j=\sum_{i=1}^{l}\lambda_{i,j}h(z_i) \text{ avec } \lambda_{i,j}\in\mathbb{K}, 1\le i,j\le l. \tag{1.5}$$

Les termes des suites finies $(\lambda_{i,j})_{1\le i,j\le l}$ ne dépendent que des nombres $e_j(z_i)$ et sont donc indépendants de h. Pour $k\in\mathbb{N}$, on désigne par $a_{k,j}$ le $j^{\text{ième}}$ coefficient de g_k dans la base $\{e_1,\dots,e_l\}$. On sait que $g_k(z_i)$ converge vers $g(z_i)$ pour tout $i\in\mathbb{N}, 1\le i\le l$. Les égalités (1.5) nous permettent d'affirmer alors la convergence dans $\mathbb{K}$ de chaque suite $(a_{k,j})_{k\in\mathbb{N}}$. La suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers la fonction g dans E. □

Un argument de régularisation par convolution permet ensuite à J.-J. Loeb de montrer que le résultat du Lemme 1.6 reste vrai si l'on suppose seulement que la fonction f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.9. Tous les énoncés de [BéGra2] se prolongent au cas α/β appartenant à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. En effet, les preuves consistent en des manipulations algébriques permettant de se ramener, à partir du cas général, au cas des systèmes à coefficients constants. Ces opérations exigent seulement l'irrationalité du quotient α/β et n'imposent aucune condition sur la nature de la fonction f solution. Pour cette raison, les résultats de [BéGra2] sont aussi vérifiés lorsque l'on suppose $\alpha/\beta\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et f seulement continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous pouvons regrouper la Proposition 1 de [Gra2], le Lemme 1.6 et la Remarque 1.7 dans l'énoncé suivant.

Corollaire 1.10. *Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ avec $\alpha/\beta\notin\mathbb{Q}$, et f une fonction entière solution du système*

$$\begin{cases}\sum_{0\le m\le M} a_m f(z+m\alpha)=\Phi(z),\\ \sum_{0\le n\le N} b_n f(z+n\beta)=\Psi(z),\end{cases} \tag{1.6}$$

où $(a_m)_{0\le m\le M}$ et $(b_n)_{0\le n\le N}$ sont deux suites finies d'éléments de $\mathbb{C}$ avec $a_M b_N\neq 0$, et Φ et Ψ sont deux polynômes exponentiels. Alors f est un polynôme exponentiel.

De même, si l'on considère $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ et f une fonction de la variable réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ satisfaisant le système (1.6) avec $(a_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(b_n)_{0\leq n\leq N}$ deux suites finies d'éléments de $\mathbb{R}$ telles que $a_M b_N \neq 0$, alors f est un polynôme exponentiel.

Remarque 1.11. Nous nous sommes aperçus que le Corollaire 1.10 est en fait une conséquence directe d'un résultat de Gel'fond [Gel2] qui est en remarque p. 367 (à la suite de la preuve du Théorème VI p. 365). Cela dit, la preuve du théorème de Gel'fond requiert l'analyticité de la fonction f alors qu'une adaptation de notre preuve permet de traiter le cas des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (cf. Remarque 1.7). Nous pouvons énoncer le résultat comme suit.

Théorème 1.12. [A. O. Gel'fond] *Soit f une fonction entière solution des deux équations $L(f) = 0, L_1(f) = 0$, où L et L_1 sont des opérateurs normaux dont les fonctions caractéristiques respectives ϕ et ϕ_1 n'ont qu'un nombre fini de zéros communs, alors f est un polynôme exponentiel.*

Précisons la Remarque 1.11 et l'énoncé du Théorème 1.12. Nous désignons par D l'opérateur de dérivation. Soit $T = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n D^n$ un opérateur différentiel d'ordre éventuellement infini, la fonction caractéristique de l'opérateur T est la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On dit que l'opérateur est normal si sa fonction caractéristique est entière. Comme dans [BéGra1], nous notons $e^{\alpha D}$ et $e^{\beta D}$ les opérateurs différentiels d'ordre infini de translation par α et par β . Nous avons alors ici $L = P(e^{\alpha D})$ et $L_1 = P_1(e^{\beta D})$, où $P(X) = \sum_{0\leq m\leq M} a_m X^m$ et $P_1(Y) = \sum_{0\leq n\leq N} b_n Y^n$ sont les polynômes non nuls dont les coefficients complexes proviennent du système (1.6). Pour obtenir le résultat énoncé, il suffit de remarquer que, si l'on a $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, alors les fonctions caractéristiques $\phi(z) = P(e^{\alpha z})$ et $\phi_1(z) = P_1(e^{\beta z})$ n'ont qu'un nombre fini de zéros communs.

1.3 Une autre approche de la question de D. Masser

Dans cette section, nous développons une nouvelle manière d'aborder le problème soulevé par D. Masser. Cette approche différente nous a amené à établir un critère qui permet notamment de traiter certains cas particuliers du problème.

1.3.1 Un lemme technique

Lemme 1.13. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, soient $A, B \in \mathbb{C}(z)\setminus\{0\}$ telles que*

$$\frac{A(z+\beta)}{A(z)} = \frac{B(z+\alpha)}{B(z)}\,. \tag{1.7}$$

Alors il existe $a, b \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{C}(z)$ *tels que*

$$A(z) = a\frac{R(z+\alpha)}{R(z)}\,,\ B(z) = b\frac{R(z+\beta)}{R(z)}\,. \tag{1.8}$$

De plus, a *et* b *sont uniques et* R *est unique à multiplication par un nombre complexe près.*

De même, si l'on suppose $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *avec* $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ *et* $A, B \in \mathbb{R}(z) \setminus \{0\}$ *vérifiant la condition* (1.7) *alors il existe deux nombres réels* a *et* b *uniques et une fraction rationnelle* $R \in \mathbb{R}(z)$ *unique à multiplication par un nombre réel près tels que* A *et* B *s'écrivent sous la forme* (1.8).

Preuve. Quitte à normaliser, nous pouvons supposer $\alpha = 1$ et β irrationnel. Toutes les fractions rationnelles considérées dans la preuve de la première partie du lemme sont à coefficients complexes. Pour toute fraction rationnelle U et toute classe c de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, on pose

$$N(c, U) = \mathrm{Card}\{z \in c \,|\, z \text{ zéro ou pôle de } U\}.$$

Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe deux fractions rationnelles R et S telles que

$$A(z) = S(z)\frac{R(z+1)}{R(z)} \text{ et } N(c, S) \leq 1 \text{ pour tout } c \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}. \tag{1.9}$$

Soit Λ un système de représentants des classes de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Il est clair que nous pouvons écrire A sous la forme

$$A(z) = a\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda(z), \tag{1.10}$$

où $a \in \mathbb{C}$ et $A_\lambda(z) = \prod_{m\in\mathbb{Z}}(z-\lambda-m)^{r_{m,\lambda}}$ avec les $r_{m,\lambda} \in \mathbb{Z}$ presque tous nuls. Pour l'étude de chaque A_λ, nous nous ramenons par translation de la variable au cas où $\lambda = 0$. Nous pouvons donc nous restreindre à l'étude des fractions de la forme

$$\mathcal{A}(z) = \prod_{m\in\mathbb{Z}}(z-m)^{r_m}$$

avec les r_m non tous nuls. Soit α l'entier relatif $\sum_{m\in\mathbb{Z}} r_m$. Il existe une fraction $\mathcal{R}$ telle que

$$\mathcal{A}(z) = z^\alpha \prod_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{z-m}{z}\right)^{r_m} = z^\alpha\frac{\mathcal{R}(z+1)}{\mathcal{R}(z)}.$$

En effet, pour tout m de $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, nous avons

$$\frac{z-m}{z}=\frac{(z-1)(z-2)\cdots(z-m)}{z(z-1)\cdots(z-m+1)} \text{ si } m\geq 1$$
$$\text{et}\quad \frac{z-m}{z}=\frac{(z+1)(z+2)\cdots(z-m)}{z(z+1)\cdots(z-m-1)} \text{ si } m\leq -1.$$

Il existe donc une famille $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de fractions rationnelles presque toutes égales à 1 telle que

$$A(z)=a\prod_{\lambda\in\Lambda}(z-\lambda)^{\alpha_\lambda}\prod_{\lambda\in\Lambda}\frac{R_\lambda(z+1)}{R_\lambda(z)}.$$

Soient S et R les fractions rationnelles définies par

$$S(z)=a\prod_{\lambda\in\Lambda}(z-\lambda)^{\alpha_\lambda}\quad\text{et}\quad R(z)=\prod_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda(z).$$

Nous avons bien la forme (1.9) désirée puisque, par construction de S, nous avons $N(c,S)\leq 1$ pour toute classe c de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

Soit $V(z)=B(z)R(z)/R(z+\beta)$. L'égalité (1.7) entraîne la relation

$$\frac{S(z+\beta)}{S(z)}=\frac{V(z+1)}{V(z)}. \tag{1.11}$$

Supposons S non constante, i.e. non périodique, la fraction V ne peut pas alors être constante, en vertu de l'égalité précédente. Soit z_0 un zéro ou un pôle de V. L'ensemble des entiers relatifs h tels que z_0+h soit un zéro ou un pôle de $V(z+1)/V(z)$ est une partie finie non vide de $\mathbb{Z}$, qui admet un minimum et un maximum distincts. Ceci montre que $N(\overline{z_0},V(z+1)/V(z))\geq 2$. Nous avons donc, en utilisant (1.11),

$$N(\overline{z_0},S(z+\beta)/S(z))\geq 2. \tag{1.12}$$

Rappelons que $N(c,S)\leq 1$ pour toute classe c de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Nous voyons facilement que

$$N(\overline{z_0},S(z+\beta))=N\left(\overline{z_0-\beta},S(z)\right). \tag{1.13}$$

Si $N(\overline{z_0},S(z))=0$, la relation (1.12) implique $N(\overline{z_0},S(z+\beta))\geq 2$, ce qui est absurde puisque $N(\overline{z_0},S(z+\beta))=N\left(\overline{z_0-\beta},S(z)\right)\leq 1$. De même, nous ne pouvons pas avoir $N\left(\overline{z_0},S(z+\beta)\right)=0$. Nous avons montré que

$$N(\overline{z_0},S(z))=N\left(\overline{z_0},S(z+\beta)\right)=1. \tag{1.14}$$

Les relations (1.13) et (1.14) entraînent l'égalité $N\left(\overline{z_0-k\beta},S(z)\right)=1$ pour tout entier naturel k. Les classes $\left(\overline{z_0-k\beta}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ étant disjointes (puisque β est irrationnel), la fraction S, non constante, admet donc une infinité de zéros ou de

pôles. C'est impossible et nous en déduisons que S est égale à la constante a introduite dans (1.10). Nous avons alors la forme voulue pour A. L'égalité (1.11) nous dit que la fraction V est périodique de période 1 : elle ne peut être qu'une constante complexe b. L'unicité de a provient du fait que $a = \lim_{|z|\to\infty} A(z)$. Le même argument donne l'unicité de b. Quant à la fraction R, si nous supposons l'existence d'une autre fraction U convenable, nous obtenons en particulier l'égalité :

$$\frac{R(z+1)}{U(z+1)} = \frac{R(z)}{U(z)}.$$

Les seules fractions rationnelles périodiques étant les constantes, nous en déduisons qu'il existe μ dans $\mathbb{C}$ tel que $U = \mu R$.

Montrons maintenant la deuxième partie du lemme. Nous supposons donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ et $A, B \in \mathbb{R}(z) \setminus \{0\}$. Nous venons de prouver qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ uniques et $R \in \mathbb{C}(z)$ unique à multiplication par un nombre complexe près tels que

$$A(z) = a\frac{R(z+\alpha)}{R(z)},\ B(z) = b\frac{R(z+\beta)}{R(z)}. \tag{1.15}$$

Les constantes a et b sont en fait des nombres réels puisque $a = \lim_{|z|\to\infty} A(z)$ et $b = \lim_{|z|\to\infty} B(z)$. La fraction rationnelle A étant à coefficients réels, si nous notons $\overline{R}$ la fraction rationnelle conjuguée de R, nous avons, en vertu de (1.15),

$$A(z) = a\frac{\overline{R}(z+\alpha)}{\overline{R}(z)}, \tag{1.16}$$

puisque $a, z \in \mathbb{R}$ et $A(z) \in \mathbb{R}(z)$. Nous déduisons de (1.15) et (1.16) que la fraction rationnelle $R/\overline{R}$ est périodique donc constante. Cette constante étant nécessairement de module 1, nous pouvons, quitte à multiplier R par un nombre complexe convenable, supposer que $R = \overline{R}$. La fraction rationnelle R peut donc être choisie à coefficients réels. Les mêmes arguments que ceux utilisés dans le cas complexe nous donnent l'unicité de a et b et l'unicité de R à multiplication par un nombre réel près. □

1.3.2 Énoncé et étude du Critère

Nous considérons un système de la forme

$$\begin{cases} \sum_{0\le m\le M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\le n\le N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

où f est une fonction entière (resp. une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$), α et β sont deux nombres complexes (resp. réels) linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et $(P_m)_{0\le m\le M}$

et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ (resp. $\mathbb{R}[z]$) avec $P_M Q_N \neq 0$.

Les deux équations du système (1.17) nous permettent d'exprimer la quantité $f(z+M\alpha+N\beta)$ de deux façons différentes. En effet, nous avons

$$f(z+N\beta+M\alpha)=\sum_{0\leq m\leq M-1} A_m(z+N\beta)f(z+m\alpha+N\beta)$$

et

$$f(z+M\alpha+N\beta)=\sum_{0\leq n\leq N-1} B_n(z+M\alpha)f(z+M\alpha+n\beta).$$

où $A_m=-P_m/P_M, 0\leq m\leq M-1$ et $B_n=-Q_n/Q_N, 0\leq n\leq N-1$. En utilisant à nouveau les données du système (1.17), nous obtenons la relation

$$\sum_{\substack{0\leq m\leq M-1\\ 0\leq n\leq N-1}} \Big(A_m(z+N\beta)B_n(z+m\alpha) - A_m(z+n\beta)B_n(z+M\alpha)\Big) f(z+m\alpha+n\beta)=0.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le critère :

Critère 1.14. *Soit f une fonction entière (resp. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) solution du système*

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z)f(z+m\alpha)=0,\\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z)f(z+n\beta)=0,\end{array}\right. \tag{1.18}$$

où α et β sont deux nombres complexes (resp. réels) linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ des suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ (resp. $\mathbb{R}[z]$) avec $P_M Q_N\neq 0$.

Posons $A_m=-P_m/P_M, 0\leq m\leq M-1$ et $B_n=-Q_n/Q_N, 0\leq n\leq N-1$.

Si, pour tout couple d'entiers naturels (m,n) tel que $0\leq m\leq M-1$, $0\leq n\leq N-1$, les fractions rationnelles

$$C_{m,n}(z)=A_m(z+N\beta)B_n(z+m\alpha)-A_m(z+n\beta)B_n(z+M\alpha)$$

sont nulles, alors, f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.

Preuve. Si les hypothèses du critère sont vérifiées, nous avons les relations

$$A_m(z+N\beta)B_n(z+m\alpha)=A_m(z+n\beta)B_n(z+M\alpha)$$

pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$. Si f est entière (resp. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$), le Lemme 1.13 nous dit que, pour tout couple d'entiers $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$, tel que $A_m B_n \neq 0$, il existe deux nombres complexes (resp. réels) $a_{m,n}, b_{m,n}$ et une fraction rationnelle $R_{m,n}$ dans $\mathbb{C}(z)$ (resp. $\mathbb{R}(z)$) tels que

$$A_m(z) = a_{m,n}\frac{R_{m,n}(z+M\alpha)}{R_{m,n}(z+m\alpha)} \text{ et } B_n(z) = b_{m,n}\frac{R_{m,n}(z+N\beta)}{R_{m,n}(z+n\beta)}.$$

Ces égalités et l'argument d'unicité de la preuve du Lemme 1.13 permettent d'affirmer l'existence de deux suites finies $(a_m)_{0\leq m\leq M-1}$ et $(b_n)_{0\leq n\leq N-1}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) et d'une fraction rationnelle non nulle R de $\mathbb{C}(z)$ (resp. $\mathbb{R}(z)$) telles que

$$A_m(z) = a_m\frac{R(z+M\alpha)}{R(z+m\alpha)} \text{ et } B_n(z) = b_n\frac{R(z+N\beta)}{R(z+n\beta)}.$$

Nous avons donc transformé le système (1.17) de départ en le système suivant

$$\begin{cases} f(z+M\alpha) &= \sum_{0\leq m\leq M-1} a_m \dfrac{R(z+M\alpha)}{R(z+m\alpha)} f(z+m\alpha), \\ f(z+N\beta) &= \sum_{0\leq n\leq N-1} b_n \dfrac{R(z+N\beta)}{R(z+n\beta)} f(z+n\beta), \end{cases}$$

où R appartient à $\mathbb{C}(z)\backslash\{0\}$ (resp. $\mathbb{R}(z)\backslash\{0\}$). Posons $g = f/R$. Nous obtenons alors le système

$$\begin{cases} g(z+M\alpha) &= \sum_{0\leq m\leq M-1} a_m g(z+m\alpha), \\ g(z+N\beta) &= \sum_{0\leq n\leq N-1} b_n g(z+n\beta). \end{cases} \tag{1.19}$$

Nous allons montrer que g est entière lorsque f l'est. En effet, la fonction $g = f/R$ est clairement méromorphe avec un nombre fini de pôles. Si l'ensemble des pôles de g n'est pas vide, il existe un pôle z_1 de $g(\cdot + M\alpha)$ qui n'est pôle d'aucun élément de la suite de fonctions $(g(\cdot + m\alpha))_{0\leq m\leq M-1}$: il suffit en effet de considérer un nombre complexe z_1 réalisant le minimum de $Re(z/\alpha)$ parmi les pôles de $g(. + M\alpha)$. La contradiction vient alors du fait que z_1 est une singularité pour le premier membre de la première équation du système (1.19) et n'en est pas une pour le second. La fonction g est donc entière et elle est solution d'un système d'équations aux différences à coefficients constants. Supposons maintenant que f est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Nous voyons, en remarquant que toutes les dérivées de g satisfont le système (1.19), que le raisonnement ci-dessus montre que nous pouvons prolonger la fonction g par une fonction $\tilde{g}$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ elle aussi solution d'un système d'équations aux différences à coefficients constants. Le Corollaire 1.10 entraîne alors, dans tous les cas, que g est un polynôme exponentiel et l'égalité $f = Rg$ nous permet de conclure. □

Remarque 1.15. Comme le montre la preuve, le Critère 1.14 reste valable si l'on suppose seulement f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il faut alors utiliser la Remarque 1.7).

Remarque 1.16. En fait, ce critère s'applique pour toute fonction f qui s'exprime comme quotient d'un polynôme exponentiel g par un polynôme P : les coefficients d'un système quelconque dont f est solution ne vérifient pas en général les hypothèses du critère mais on est sûr en revanche qu'il existe un système non trivial satisfait par f dont les coefficients vérifient les hypothèses du Critère. En effet, le nombre complexe α étant un pas récurrent pour g, il existe $a_0, a_1, \ldots, a_M$ dans $\mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{m=0}^{M} a_m g(z+m\alpha) = 0.$$

Nous posons alors $P_m(z) = a_m P(z+m\alpha)$ pour $m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq M$. Nous avons donc la relation

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0.$$

De même, il existe $b_0, b_1, \ldots, b_N$ dans $\mathbb{C}$ tels que, si nous posons $Q_n(z) = b_n P(z+n\beta)$ pour $n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq N$, nous ayons

$$\sum_{n=0}^{N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0.$$

Nous voyons alors facilement que les fractions rationnelles $C_{m,n}$ sont identiquement nulles. Les hypothèses du critère sont évidemment satisfaites dans le cas où les deux équations sont à coefficients constants et elles le sont aussi lorsque M ou N vaut 1 (cf. la preuve du théorème 1.17). Initialement, nous pensions que, lorsque M et N étaient minimaux, les fractions rationnelles $C_{m,n}$ étaient toutes nulles mais J.-P. Bézivin et F. Gramain nous ont fourni les contre-exemples $f(z) = (e^z - 1)/z + 1$ et $f(z) = e^z + z$.

1.3.3 Résultats partiels obtenus

Nous étudions quelques cas particuliers dans lesquels le critère s'applique.

Théorème 1.17. *Soient α, β deux nombres complexes (resp. réels) non nuls tels que α/β appartient à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$, et f une fonction entière (resp. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) solution du système*

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_1(z)f(z+\alpha) + P_0(z)f(z) & = \Phi, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z) f(z+n\beta) & = \Psi, \end{array} \right. \tag{1.20}$$

où $P_0, P_1, Q_0, \dots, Q_N$ sont dans $\mathbb{C}[z]$ (resp. $\mathbb{R}[z]$) avec $P_0P_1Q_0Q_N \neq 0$, Φ et Ψ désignant comme précédemment deux polynômes exponentiels. Alors,

i) si Φ est nul, f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme ;

ii) si P_0 ou P_1 est constant, alors f est un polynôme exponentiel.

Preuve. Supposons f entière et non identiquement nulle. Les mêmes calculs que ceux faits au début de cette section permettent de déduire du système (1.20) la relation

(1.21)
$$H(z)\sum_{0\leq n\leq N-1}(A(z+N\beta)B_n(z)-A(z+n\beta)B_n(z+\alpha))f(z+n\beta)=\Phi_1(z).$$

où H est un polynôme non nul et Φ_1 un polynôme exponentiel.

Supposons Φ nul. Il est toujours possible de supposer au départ Ψ nul car β est un pas récurrent pour le polynôme exponentiel Ψ (cf. Remarque 1.5) puis N minimal, i.e.

$$N=\min\left\{N_1\in\mathbb{N}\,|\,\exists H_0,\dots,H_{N_1}\in\mathbb{C}[z],\right.$$
$$\left.H_{N_1}\neq 0\quad\text{et}\quad\sum_{0\leq n_1\leq N_1}H_{n_1}(z)f(z+n_1\beta)=0\right\}.$$

La fonction Φ_1 qui est une combinaison linéaire sur $\mathbb{C}[z]$ de translatées de Φ et de Ψ est par conséquent nulle. La minimalité de N entraîne la nullité des coefficients des fonctions $\big(f(\cdot+n\beta)\big)_{0\leq n\leq N-1}$ dans la relation (1.21). Le Critère 1.14 s'applique et donne le résultat *i)*.

Nous traitons maintenant le deuxième point. Nous supposons N minimal :

$$N=\min\left\{N_1\in\mathbb{N}\,|\,\exists\, H_0,\dots,H_{N_1}\in\mathbb{C}[z],\exists\,\Theta\text{ un polynôme exponentiel},\right.$$
$$\left.H_{N_1}\neq 0\quad\text{et}\quad\sum_{0\leq n_1\leq N_1}H_{n_1}(z)f(z+n_1\beta)=\Theta(z)\right\}.$$

La relation (1.21) et la minimalité de N impliquent que les fractions rationnelles A et $(B_n)_{0\leq n\leq N-1}$ ont la forme donnée dans le Lemme 1.13 : il existe un nombre complexe a, une suite finie $(b_n)_{0\leq n\leq N-1}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ et une fraction rationnelle non nulle R de $\mathbb{C}(z)$ tels que

$$A(z)=a\frac{R(z+\alpha)}{R(z)}\ \text{ et }\ B_n(z)=b_n\frac{R(z+N\beta)}{R(z+n\beta)}\,.$$

Nous en déduisons en particulier que $\lim_{z\to\infty} A(z) = a$. La fraction A étant égale au rapport $-P_0/P_1$, les polynômes P_0 et P_1 ont même degré et sont donc simultanément constants : nous pouvons poser $R = 1$. Nous tirons alors de (1.20) le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(z+\alpha) - af(z) & = & \lambda\Phi(z), \\ f(z+N\beta) - \sum_{0\le n\le N-1} b_n f(z+n\beta) & = & \dfrac{\Psi(z)}{Q_N(z)}, \end{array}\right. \tag{1.22}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous voulons montrer que la fonction $\Psi(z)/Q_N(z)$ est en fait un polynôme exponentiel, ce qui entraînera le résultat escompté d'après le Corollaire 1.10. Pour cela, nous allons utiliser à nouveau le procédé initial : nous translatons les variables des deux équations du système et nous transformons les expressions ainsi obtenues, ce qui donne la relation suivante

$$\lambda\Phi(z+N\beta) - \sum_{0\le n\le N-1} b_n \lambda\Phi(z+n\beta) = \frac{\Psi(z+\alpha)}{Q_N(z+\alpha)} - a\frac{\Psi(z)}{Q_N(z)}. \tag{1.23}$$

Soit γ un nombre complexe et soient F, G les coefficients polynomiaux (éventuellement nuls) respectifs de $e^{\gamma\cdot}$ dans $\lambda\Phi$ et Ψ. La famille de fonctions $(e^{\delta\cdot})_{\delta\in\mathbb{C}}$ étant libre sur $\mathbb{C}(z)$ (cf. [Wal]), la relation (1.23) nous donne

$$F(z+N\beta)e^{\gamma N\beta} - \sum_{0\le n\le N-1} b_n F(z+n\beta)e^{\gamma n\beta} = \frac{G(z+\alpha)}{Q_N(z+\alpha)}e^{\gamma\alpha} - a\frac{G(z)}{Q_N(z)}. \tag{1.24}$$

Posons $T = G/Q_N$. Nous allons montrer que la fraction rationnelle T est nécessairement un polynôme. En effet, s'il n'en est pas ainsi, la fraction T admet au moins un pôle z_0 qui n'est pas un pôle de $T(z+\alpha)$. Cela est absurde puisque le membre de gauche de l'équation (1.24) est une fonction entière. Nous avons donc prouvé que, pour tout $\gamma \in \mathbb{C}$, le polynôme Q_N divise le coefficient polynomial de $e^{\gamma\cdot}$ dans Ψ, c'est-à-dire que Ψ/Q_N est bien un polynôme exponentiel. Les deux seconds membres du système (1.22) sont donc des polynômes exponentiels. Le Corollaire 1.10 nous dit alors que la fonction entière f solution de ce système est bien un polynôme exponentiel. Une adaptation immédiate de cette démonstration permet de traiter le cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. □

Nous déduisons de ce théorème une nouvelle preuve du Théorème 5.1 de [BéGra1].

Corollaire 1.18. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, et f une fonction entière solution du système*

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{0\le m\le M} a_m f(z+m\alpha) = \Phi(z), \\ \sum_{0\le n\le N} b_n(z) f(z+n\beta) = \Psi(z), \end{array}\right. \tag{1.25}$$

où $(a_m)_{0\leq m\leq M}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbb{C}$ et $(b_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite finie d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ avec $a_M b_N \neq 0$, les fonctions Φ et Ψ étant deux polynômes exponentiels. Alors f est un polynôme exponentiel.

Preuve. Nous pouvons là encore nous placer dans le cas où $a_M b_N a_0 b_0 \neq 0$ et $\Phi = \Psi = 0$. Si $M = 1$, le Théorème 1.17 donne alors le résultat. Nous supposons donc $M \geq 2$ et la propriété vraie jusqu'au rang $M-1$. Nous notons X l'opérateur de translation par α, Y l'opérateur de translation par β et Z l'opérateur de multiplication par z :

$$\begin{aligned} Xf &: z \mapsto f(z+\alpha), \\ Yf &: z \mapsto f(z+\beta), \\ Zf &: z \mapsto zf(z). \end{aligned}$$

Le fait que α/β soit irrationnel entraîne que X et Y sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}(Z)$ (cf. [BéGra1]). Nous écrivons le système (1.25) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} P_M(X)f = 0, \\ R(Z,Y)f = 0, \end{array} \right. \tag{1.26}$$

avec $P_M \in \mathbb{C}[X]$ ($\deg P_M = M$) et $R(Z,Y) \in \mathbb{C}(Z)[Y]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P_M et P_{M-1} le polynôme en X de degré $M-1$ défini par $P_M(X) = (X-\lambda)P_{M-1}(X)$. Introduisons la fonction entière

$$g = (X-\lambda)f = f(\cdot+\alpha) - \lambda f.$$

Comme l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}(z)$ par la famille de fonctions $(f(\cdot + m\alpha + n\beta))_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est de dimension finie (grâce au système (1.26)), il existe un polynôme non nul $R_1(Z,Y)$ tel que g soit solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{M-1}(X)g = 0, \\ R_1(Z,Y)g = 0. \end{array} \right.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors que $g = f(\cdot+\alpha) - \lambda f$ est un polynôme exponentiel, ce qui permet d'écrire un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(z+\alpha) - \lambda f(z) & = & \Phi_1(z), \\ \sum_{0\leq n\leq N} b_n(z) f(z+n\beta) & = & \Psi(z), \end{array} \right.$$

où Φ_1 est un polynôme exponentiel. Il ne reste plus qu'à appliquer le Théorème 1.17 pour conclure. □

1.4 Détermination algorithmique des solutions entières

1.4.1 Cas des deux équations aux différences

Nous allons développer dans ce paragraphe un algorithme donnant la forme explicite des fonctions entières f solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{array} \right. \tag{1.27}$$

où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont deux suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ avec $P_M Q_N \neq 0$ et $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$. L'implantation en machine de cet algorithme n'est possible que pour le cas $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$ (nous verrons dans ce qui suit l'obstruction au traitement du cas $\alpha/\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Quitte à normaliser, nous pouvons supposer $\alpha = 1$ et $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Nous cherchons donc f sous la forme

$$z \mapsto \sum_{s=1}^{S} x_s(z) e^{\delta_s z} \text{ avec } \delta_s \neq \delta_t \text{ si } s \neq t, \text{ et } x_s \in \mathbb{C}(z). \tag{1.28}$$

Notre première idée a été d'essayer d'utiliser l'algorithme Hyper de M. Petkovšek dont l'exposition constitue le chapitre 8 de [PWZ]. Nous expliquons sommairement son principe.

Soit F un corps de caractéristique nulle et K une extension de F. Nous supposons qu'il existe des algorithmes pour trouver des racines exactes de polynômes à coefficients dans K et pour factoriser des polynômes à coefficients dans K sous forme de produits de facteurs irréductibles sur K.

Considérons l'équation aux différences

$$\sum_{0\leq j\leq J} P_j(n) f(n+j) = 0 \tag{1.29}$$

où les P_j sont des polynômes à coefficients dans F. L'algorithme Hyper permet de savoir si f peut s'écrire ou non sous la forme d'une combinaison linéaire sur K de termes $g(n)$ hypergéométriques sur K, i.e. de termes tels que

$$g(n+1)/g(n) \in K(n).$$

Or, si nous regardons la solution entière f écrite sous la forme (1.28), nous constatons que f est une somme de termes hypergéométriques sur $\mathbb{C}$. En effet, pour tout $s, 1 \leq s \leq S$, nous avons

$$\frac{x_s(z+1)e^{\delta_s(z+1)}}{x_s(z)e^{\delta_s z}} = \frac{x_s(z+1)}{x_s(z)} e^{\delta_s} \in \mathbb{C}(z).$$

Bien entendu, nous n'avons pas d'algorithme pour trouver les racines exactes de polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Nous avons donc examiné Hyper en cherchant comment nous pourrions l'adapter à notre situation. Nous avons procédé comme suit.

Nous injectons f sous la forme (1.28) dans la première équation du système (1.27). Nous obtenons alors

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) \left[\sum_{s=1}^{S} x_s(z+m) e^{\delta_s m} e^{\delta_s z} \right] = 0.$$

La famille de fonctions $\left(e^{\delta \cdot}\right)_{\delta \in \mathbb{C}}$ est libre sur $\mathbb{C}(z)$. Nous avons donc, pour tout $s \in \{1, \ldots, S\}$,

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) x_s(z+m) e^{\delta_s m} = 0. \tag{1.30}$$

De même, nous obtenons pour tout $s \in \{1, \ldots, S\}$,

$$\sum_{n=0}^{N} Q_n(z) x_s(z+n\beta) e^{\delta_s n\beta} = 0. \tag{1.31}$$

Comparons maintenant les équations (1.29) et (1.30). Elles sont toutes deux à coefficients polynomiaux. La première ne comporte qu'une inconnue mais il s'agit d'une fonction hypergéométrique. La deuxième, quant à elle, comporte certes deux inconnues mais les objets recherchés, à savoir une fraction rationnelle x_s et une fréquence δ_s, sont moins généraux qu'une fonction hypergéométrique. Cela va nous permettre d'utiliser des algorithmes spécifiques qui seront plus efficaces qu'Hyper dans notre contexte. Nous allons tout d'abord exhiber les fréquences δ_s possibles. Puis, dans un deuxième temps, connaissant ces fréquences, nous chercherons les solution rationnelles x_s de l'équation (1.30). Enfin, une fois obtenues des solutions convenables sous la forme $z \mapsto x_s e^{\delta_s z}$, nous chercherons comment combiner ces solutions sur $\mathbb{C}$ pour obtenir une solution entière. Nous donnons maintenant le détail de ces trois étapes.

Étape 1 : Détermination des fréquences δ_s des exponentielles.

Posons

$$d_1 = \max_{0 \le m \le M} \deg(P_m) \text{ et } d_2 = \max_{0 \le n \le N} \deg(Q_n).$$

Soit $s \in \{1, \ldots, S\}$, la relation (1.30) est équivalente à l'équation

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{P_m(z)}{z^{d_1}} \frac{x_s(z+m)}{x_s(z)} e^{\delta_s m} = 0.$$

En notant a_m le coefficient de z^{d_1} dans $P_m(z)$ et en faisant tendre z vers l'infini, nous obtenons

$$\sum_{m=0}^{M} a_m e^{\delta_s m} = 0$$

qui est une équation polynomiale en e^{δ_s}. De même, en notant b_n le coefficient de z^{d_2} dans $Q_n(z)$ et en faisant tendre z vers l'infini dans (1.31), nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{N} b_n e^{\delta_s n\beta} = 0$$

qui est une équation polynomiale en $e^{\delta_s \beta}$. Nous résolvons donc les équations polynomiales en $X = e^{\delta_s}$ et $Y = e^{\delta_s \beta}$

$$\sum_{m=0}^{M} a_m X^m = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{N} b_n Y^n = 0.$$

Nous obtenons J ($\leq M$) classes distinctes de solutions dans $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ pour la première équation qu'il faut comparer aux L ($\leq N$) classes distinctes de solutions dans $\mathbb{C}/2i\pi\beta^{-1}\mathbb{Z}$ pour la deuxième équation. La comparaison s'opère comme suit. Soient x_1 une racine du polynôme $P(X) = \sum_{m=0}^{M} a_m X^m$ et y_1 une racine du polynôme $Q(Y) = \sum_{n=0}^{N} b_n Y^n$. Nous associons à x_1 une fréquence δ_1 de la forme $\log x_1 + 2i\pi k_1$ et à y_1 une fréquence $\delta_1^{'}$ de la forme $(\log y_1 + 2i\pi k_1^{'})/\beta$ où log désigne la détermination principale du logarithme complexe et où $k_1, k_1^{'}$ sont dans $\mathbb{Z}$. Nous sommes donc ramenés à résoudre les équations en k et $k' \in \mathbb{Z}$

$$\log x + 2i\pi k = \frac{\log y + 2i\pi k'}{\beta},$$

x décrivant l'ensemble des racines de P et y l'ensemble des racines de Q. Ces équations sont équivalentes aux équations

$$k - \frac{k'}{\beta} = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{\log y}{\beta} - \log x\right). \tag{1.32}$$

Du fait de l'irrationalité de β, nous sommes assurés de trouver un nombre fini S_1 de fréquences complexes δ convenables. La résolution des équations (1.32) (donc la comparaison des classes) ne peut être faite avec un ordinateur que dans le cas où β n'est pas réel. En effet, si elle est facile dans le cas où β n'est pas dans $\mathbb{R}$ (il suffit d'utiliser (1.32) et sa conjuguée), elle n'est pas possible si β est réel irrationnel : le sous-groupe $\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est alors dense dans $\mathbb{R}$ et il faudrait avoir une idée de la taille de k et k' pour pouvoir les déterminer, en utilisant l'algorithme LLL par exemple. Or, nous ne pouvons pas avoir un tel renseignement dans la situation étudiée ici.

La résolution des équations (1.32) nous permet d'exhiber, en cas d'existence de couples $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ solutions, un nombre fini de fréquences $\delta_1, \ldots, \delta_{S_1}$ de formes respectives $\log x_1 + 2i\pi k_1, \ldots, \log x_{S_1} + 2i\pi k_{S_1}$ et dans le cas contraire d'assurer que 0 est la seule solution entière.

Étape 2 : Détermination des fractions rationnelles $x_s(z)$.

À ce stade, nous avons déterminé un nombre fini de fréquences $\delta_1, \ldots, \delta_{S_1}$ possibles. Nous utilisons tout d'abord un algorithme de S. A. Abramov [Abr] pour trouver un polynôme D que divise le dénominateur de chaque fraction x_s. L'algorithme original décrit dans [Abr] appliqué à notre contexte utilise des calculs de p.g.c.d. de polynômes à coefficients complexes ce qui, dans l'objectif d'une implantation en machine, n'a que peu de sens puisque les nombres ne sont représentés que par une approximation (considérer p.g.c.d.$(X+\zeta(2), X+\pi^2/6)$ par exemple). Nous avons donc été obligés d'adapter convenablement l'algorithme et c'est cette adaptation que nous donnons maintenant. Le lecteur trouvera dans l'appendice A une preuve que l'algorithme donne bien le résultat souhaité.

Algorithme d'Abramov

1. [Initialisation] $D \leftarrow 1, Z \leftarrow \emptyset, A_1 \leftarrow P_M(z - M), A_2 \leftarrow P_0$.

2. $Z_1 \leftarrow$ liste des racines de A_1 comptées avec multiplicité,
   $n_1 \leftarrow$ nombre d'éléments de Z_1,
   $Z_2 \leftarrow$ liste des racines de A_2 comptées avec multiplicité,
   $n_2 \leftarrow$ nombre d'éléments de Z_2.

3. Pour $i = 1, ..., n_1$,
   $N_1 \leftarrow 0$,
   $t \leftarrow 0$,
   pour $j = 1, ..., n_2$,
   $N_2 \leftarrow Z_2[j] - Z_1[i]$ ($Z_2[j]$ désignant le j-ième élément de Z_2 et $Z_1[i]$ le i-ième élément de Z_1),
   si $N_2 \in \mathbb{N}$ alors
   si $t = 0$ ou $N_2 < N_1$ alors
   $t \leftarrow j$,
   $N_1 \leftarrow N_2$.
   si $t > 0$ alors
   $D \leftarrow D \prod_{k=0...N_1}(z - k - Z_1[i])$,
   $Z \leftarrow Z$ augmentée de $\{Z_1[i] + k\}_{0 \le k \le N_1}$,
   $Z_2 \leftarrow Z_2$ privée de $Z_2[t]$,
   $n_2 \leftarrow n_2 - 1$.

4. [Sortie] D (le polynôme recherché),
   Z (liste des racines de D comptées avec multiplicité).

Ensuite, nous déterminons, grâce à l'algorithme Poly de M. Petkovšek [PWZ], toutes les solutions polynomiales $y_s(z)$ de l'équation

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{P_m(z)}{D(z+m)} y(z+m) e^{\delta_s m} = 0. \tag{1.33}$$

Avant de donner l'algorithme Poly, nous disons comment se termine cette étape. Soit $y_s(z)$ un polynôme solution de l'équation (1.33), posons $x_s(z) = y_s(z)/D(z)$. Nous vérifions alors si $x_s(z)e^{\delta_s z}$ est solution de la deuxième équation de (1.27).

Nous présentons maintenant brièvement Poly.

Soit F un corps de caractéristique nulle et K une extension de F. Poly fournit toutes les solutions polynomiales $y \in K[z]$ de l'équation

$$\sum_{0 \le m \le M} G_m(z) y(z+m) = 0 \tag{1.34}$$

où $(G_m)_{0 \le m \le M}$ est une suite finie d'éléments de $F[z]$. Soient G un polynôme à coefficients dans F et $\mathrm{cd}(G)$ son coefficient dominant. La notation $z^{\underline{j}}$ désignera le produit $z(z-1)\dots(z-j+1)$.

Nous énonçons maintenant l'algorithme (le lecteur en trouvera un justificatif théorique dans l'appendice A).

Algorithme Poly

1. Pour $j = 0, ..., M$, $H_j \leftarrow \sum_{m=j}^{M} \binom{m}{j} G_m$.
2. $b \leftarrow \max_{0 \le j \le M}(\deg H_j - j)$

   $$\alpha(z) \leftarrow \sum_{\substack{0 \le j \le M \\ \deg H_j - j = b}} \mathrm{cd}(H_j) z^{\underline{j}}$$

   $d_1 \leftarrow \max\{z \in \mathbb{N}, \alpha(z) = 0\}$
   $d \leftarrow \max\{-b-1, d_1\}$
3. Injecter $y(z) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$ dans l'équation (1.34).
   Résoudre le système linéaire en les a_i.
4. [Sortie] Une famille génératrice de l'ensemble des solutions.

Étape 3 : Étant données $x_1(z)e^{\delta_1 z}, \dots, x_S(z)e^{\delta_S z}$ les S solutions méromorphes déterminées à l'aide des deux étapes précédentes, nous devons trouver les coefficients complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_S$ tels que la fonction

$$z \mapsto f_{\lambda_1,\dots,\lambda_S}(z) = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s x_s(z) e^{\delta_s z}$$

soit entière.

Nous disposons depuis l'étape 2 d'un dénominateur D commun aux $x_s(z)$. Cela signifie que l'ensemble des pôles de $f_{\lambda_1,\dots,\lambda_S}$ comptés avec multiplicité est inclus dans l'ensemble des racines de D comptées avec multiplicité. Nous connaissons, par construction de D, ses racines et leurs ordres de multiplicité.

Il s'agit à cet endroit de trouver les λ_s pour lesquels les racines de D sont aussi racines (comptées avec multiplicité) du polynôme exponentiel

$$g_{\lambda_1,\dots,\lambda_S}(z) = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s D(z) x_s(z) e^{\delta_s z}.$$

Si nous notons $z_1, z_2, \dots, z_r$ les racines de D d'ordres respectifs $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$, les coefficients λ_s seront les solutions du système linéaire formé par les équations

$$g^{(l_j)}_{\lambda_1,\dots,\lambda_S}(z_j) = 0,\ 1 \le j \le r,\ 0 \le l_j \le \mu_j - 1.$$

Maintenant que nous avons détaillé les trois différentes étapes, nous pouvons donner l'algorithme sous une forme synthétique.

1.4.1.1 Énoncé de l'algorithme Pasrec

Nous supposons que β appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ et nous donnerons en remarque l'amélioration (indispensable à l'implantation en machine) que nous avons quand β appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

1. [Détermination des fréquences]

   (a) $s \leftarrow 0, s_1 \leftarrow 0, d_1 \leftarrow \max_{0\le m\le M} \deg P_m, d_2 \leftarrow \max_{0\le n\le N} \deg Q_n,$
   $a_m \leftarrow$ coefficient de z^{d_1} dans $P_m(z)$,
   $b_n \leftarrow$ coefficient de z^{d_2} dans $Q_n(z)$.

   (b) Résoudre $\sum_{0\le m\le M} a_m X^m = 0 \Rightarrow J$ racines distinctes $x_1, \dots, x_J$.
   Résoudre $\sum_{0\le n\le N} b_n Y^n = 0 \Rightarrow L$ racines distinctes $y_1, \dots, y_L$.
   Pour $j = 1, \dots, J$, pour $l = 1, \dots, L$,
   Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$

   $$k_{j,l} - k'_{l,j}/\beta = (\log y_l/\beta - \log x_j)/(2i\pi).$$

   S'il existe $(k_{j,l}, k'_{l,j}) \in \mathbb{Z}^2$ solution, alors
   $s_1 \leftarrow s_1 + 1$,
   $\delta_{s_1} \leftarrow \log x_j + 2ik_{j,l}\pi$.
   $S_1 \leftarrow s_1$.
   Si $S_1 = 0$, alors il n'y pas de solution entière autre que 0
   sinon la liste des fréquences admissibles est $[\delta_1, \dots, \delta_{S_1}]$.

2. [Détermination des fractions rationnelles]

   (a) $D \leftarrow$ dénominateur commun donné par l'algorithme d'Abramov,
   $Z \leftarrow$ liste des racines de D comptées avec multiplicité.

   (b) Pour $j = 1, \ldots, S_1$,
   $Y_j \leftarrow$ liste (fournie par Poly) des polynômes solutions de l'équation

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{P_m(z)e^{\delta_j m}}{D(z+m)} y(z+m) = 0.$$

   Pour $y \in Y_j$,
   si $y \neq 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{Q_n(z)e^{\delta_j n\beta}}{D(z+n\beta)} y(z+n\beta) = 0$ alors
   $s \leftarrow s+1, \quad x_s \leftarrow y/D.$
   $S \leftarrow s.$
   Si $S = 0$ alors il n'y pas de solution entière autre que 0
   sinon la liste des "monômes" admissibles est $\left[x_1(z)e^{\delta_1 z}, \ldots, x_S(z)e^{\delta_S z}\right]$.

3. [Détermination de la combinaison linéaire rendant la fonction entière]
   Résoudre le système linéaire en les inconnues $\lambda_s \in \mathbb{C}$ d'équations

$$\left(z \mapsto \sum_{s=1}^{S} \lambda_s D(z) x_s(z) e^{\delta_s z}\right)^{(l_j)} (z_j) = 0,\ 1 \leq j \leq r,\ 0 \leq l_j \leq \mu_j - 1,$$

   avec $z_1, z_2, \ldots, z_r$ racines de D d'ordres respectifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$.

4. [Sortie] Une famille génératrice de l'ensemble des solutions entières.

Remarque 1.19. Lorsque β appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, nous pouvons remplacer dans l'étape 1 de détermination des fréquences le passage

Pour $j = 1, \ldots, J$, pour $l = 1, \ldots, L$,
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$

$$k_{j,l} - k'_{l,j}/\beta = (\log y_l/\beta - \log x_j)/(2i\pi).$$

S'il existe $(k_{j,l}, k'_{l,j}) \in \mathbb{Z}^2$ solution, alors
$s_1 \leftarrow s_1 + 1,$
$\delta_{s_1} \leftarrow \log x_j + 2ik_{j,l}\pi.$

par

Pour $j = 1, \ldots, J$, pour $l = 1, \ldots, L$,
$k_{j,l} \leftarrow \mathrm{Re}(\beta \log x_j - \log y_l)/\big(2\pi \mathrm{Im}(\beta)\big),$
$k'_{l,j} \leftarrow \mathrm{Re}(\log y_l/\beta - \log x_j)/\big(2\pi \mathrm{Im}(1/\beta)\big),$

si $(k_{j,l}, k'_{l,j}) \in \mathbb{Z}^2$, alors
$s_1 \leftarrow s_1 + 1$,
$\delta_{s_1} \leftarrow \log x_j + 2ik_{j,l}\pi$.

1.4.1.2 Un exemple de fonctionnement de l'algorithme

Nous nous proposons de faire "tourner" notre algorithme sur l'exemple ad hoc suivant.

Soit f une fonction entière solution du système

$$\left\{\begin{array}{l} \left(z^2+\left(2+\sqrt{2}\right)z+2\sqrt{2}\right)f(z+2) \\ \qquad -(1+e)\left(z^2+\left(1+\sqrt{2}\right)z+\sqrt{2}\right)f(z+1) \\ \qquad\qquad +e\left(z^2+\sqrt{2}z\right)f(z)=0, \\ \\ 3(z+3i)f(z+3i)-\left(2+3e^{i-4\pi}\right)(z+2i)f(z+2i) \\ \qquad +\left(2e^{i-4\pi}-1\right)(z+i)f(z+i)+e^{i-4\pi}zf(z)=0. \end{array}\right. \tag{1.35}$$

La fonction f admet 1 et i comme pas récurrents. Nous commençons par déterminer les fréquences des solutions potentielles. Nous reprenons les notations de l'algorithme Pasrec. Nous avons

$$d_1 = \max_{0\le m\le 2} \deg P_m = 2 \quad \text{et} \quad d_2 = \max_{0\le n\le 3} \deg Q_n = 1.$$

Nous devons donc résoudre les équations

$$X^2-(1+e)X+e=0 \tag{1.36}$$

et

$$3Y^3-(2+3e^{i-4\pi})Y^2+(2e^{i-4\pi}-1)Y+e^{i-4\pi}=0. \tag{1.37}$$

Les racines de l'équation (1.36) sont $x_1 = 1$ et $x_2 = e$, celles de (1.37) étant $y_1 = 1, y_2 = -1/3$ et $y_3 = e^{i-4\pi}$. Nous faisons figurer dans le tableau 1.1 les valeurs des couples $(k_{j,l}, k'_{l,j})_{\substack{1\le j\le 2\\ 1\le l\le 3}}$ définis par

$$k_{j,l} = \mathrm{Re}(i\log x_j - \log y_l)/2\pi,$$

et

$$k'_{l,j} = \mathrm{Re}(i\log y_l + \log x_j)/2\pi$$

pour $1 \le j \le 2, 1 \le l \le 3$, log désignant la détermination principale du logarithme.

$(k_{j,l}, k'_{l,j})$	1	2	3
1	$(0,0)$	$\left(\frac{\log 3}{2\pi}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(2, -\frac{1}{2\pi}\right)$
2	$\left(0, \frac{1}{2\pi}\right)$	$\left(\frac{\log 3}{2\pi}, -\frac{\pi-1}{2\pi}\right)$	$(2,0)$

Tableau 1.1.

Les seuls couples de $\mathbb{Z}^2$ sont $(k_{1,1}, k'_{1,1}) = (0,0)$ associé à la fréquence $\delta_1 = \log x_1 + 2ik_{1,1}\pi = 0$ et $(k_{2,3}, k'_{3,2}) = (2,0)$ associé à la fréquence $\delta_2 = \log x_2 + 2ik_{2,3}\pi = 1 + 4i\pi$.

Maintenant, nous allons déterminer grâce à l'algorithme d'Abramov un dénominateur commun aux fractions rationnelles solutions de la première équation du système (1.35). Nous avons ici $P_0(z) = e(z^2 + \sqrt{2}z)$ et $P_2(z-2) = z^2 + (\sqrt{2}-2)z$. Les racines de $P_0(z)$ sont 0 et $-\sqrt{2}$, celles de $P_2(z-2)$ valant 0 et $2-\sqrt{2}$. Nous calculons donc les différences entre les racines de $P_0(z)$ et celles de $P_2(z-2)$ et ne gardons que celles qui donnent une différence entière positive. La seule contribution est apportée par 0, la racine commune aux deux polynômes. L'entier N de l'algorithme vaut donc 0 et le polynôme $D(z)$ est égal à z.

Pour déterminer les fractions rationnelles x_s coefficients des fonctions $e^{\delta_s z}$ (avec $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = 1 + 4i\pi$), il nous faut donc résoudre les équations

$$\frac{(z^2 + (2+\sqrt{2})z + 2\sqrt{2})}{z+2} e^{2\delta_s} f(z+2) - \frac{(1+e)(z^2 + (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2})}{z+1} e^{\delta_s} f(z+1) + \frac{e(z^2 + \sqrt{2}z)}{z} f(z) = 0.$$

Après simplification, nous obtenons les équations

$$f(z+2) - (1+e)f(z+1) + ef(z) = 0, \tag{1.38}$$

et

$$e^2 f(z+2) - (1+e)ef(z+1) + ef(z) = 0. \tag{1.39}$$

Nous utilisons Poly pour déterminer les solutions polynomiales de la première équation. Nous calculons les polynômes H_j :

$$H_0 = 0, H_1 = 1 - e \text{ et } H_2 = 1.$$

Nous avons donc $b = \max_{0\leq j\leq 2}(\deg H_j - j) = -1$. De plus, nous voyons que

$$\alpha(z) = \sum_{\substack{0\leq j\leq M \\ \deg H_j - j = b}} \mathrm{cd}(H_j) z^{\underline{j}} = (1-e)z.$$

Le degré du polynôme solution est donc borné par d avec

$$d = \max\big\{-b-1, \max\{z\in\mathbb{N}, \alpha(z)=0\}\big\} = \max\{-1,0\} = 0.$$

Les seules solutions polynomiales possibles de l'équation (1.38) sont donc les constantes. Nous voyons facilement que $y_1(z) = 1$ est bien solution de l'équation (1.38). Il ne nous reste plus qu'à vérifier que $x_1(z)e^{\delta_1 z} = y_1(z)/D(z) = 1/z$ est bien solution de la deuxième équation du système (1.35), ce qui est le cas. De la même façon, nous trouvons, en utilisant Poly, que $y_1(z) = 1$ est solution de (1.39). Nous montrons facilement que la fonction $x_2(z)e^{\delta_2 z} = y_2(z)e^{\delta_2 z}/D(z) = e^{(1+4i\pi)z}/z$ est bien solution de la deuxième équation aux différences du système (1.35).

Pour finir, nous devons déterminer les nombres complexes λ_1 et λ_2 qui font de la combinaison linéaire $z \mapsto \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 e^{(1+4i\pi)z}}{z}$ une fonction entière. Il suffit de résoudre l'équation

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{(1+4i\pi)0} = 0,$$

d'où $\lambda_1 = -\lambda_2$. Nous avons donc montré que toute solution entière du système (1.35) est de la forme

$$z \mapsto \lambda \frac{e^{(1+4i\pi)z} - 1}{z} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}.$$

1.4.2 Cas où l'une des deux équations est une équation différentielle

Nous pouvons adapter facilement cet algorithme au cas où la fonction entière f est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z) f^{(n)}(z) = 0, \end{array} \right. \tag{1.40}$$

où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont deux suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ avec $P_M Q_N \neq 0$ et α un nombre complexe non nul. Nous savons alors, par le théorème 1.3 de [BéGra2] que f est encore le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme. Nous injectons f sous la forme (1.28) dans la deuxième équation du système (1.40). La formule de Leibniz donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\big(x_s(z)e^{\delta_s z}\big)^{(n)} = e^{\delta_s z} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {\delta_s}^{n-k} x_s^{(k)}(z).$$

Nous avons donc, toujours grâce à l'indépendance, sur $\mathbb{C}(z)$ de la famille de fonctions $\left(e^{\delta\cdot}\right)_{\delta\in\mathbb{C}}$, les relations

$$\sum_{n=0}^{N} Q_n(z)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{\delta_s}^{n-k}x_s^{(k)}(z)\right)^{(n)} e^{\delta_s z}=0. \tag{1.41}$$

pour tout $s\in\{1,\dots,S\}$. Les égalités (1.41) entraînent

$$\sum_{n=0}^{N} Q_n(z)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{\delta_s}^{n-k}\frac{x_s^{(k)}(z)}{x_s(z)}\right)=0$$

pour tout $s\in\{1,\dots,S\}$. En notant toujours b_n le coefficient de z^{d_2} dans $Q_n(z)$ et en faisant tendre z vers l'infini, nous obtenons l'équation $\sum_{n=0}^{N} b_n {\delta_s}^n = 0$. Il nous faut alors modifier légérement la première étape de l'algorithme. Cette dernière devient

Étape 1' : Détermination des fréquences δ_s

Nous devons résoudre les équations polynomiales en $X=e^{\alpha\delta}$ et $Y=\delta$

$$\sum_{m=0}^{M} a_m X^m = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{N} b_n Y^n = 0.$$

Nous trouvons ainsi J ($\leq M$) classes distinctes de solutions dans $\mathbb{C}/(2i\pi\alpha^{-1}\mathbb{Z})$ pour la première équation que nous comparons aux L ($\leq N$) solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ de la deuxième équation. Cela nous permet de trouver encore un nombre fini de fréquences complexes δ convenables.

1.4.2.1 Énoncé de l'algorithme Pasrecd

Nous rappelons que le pas récurrent α est un nombre complexe non nul quelconque. Le seul changement par rapport à l'algorithme Pasrec est le point 1 qui devient

1. [Détermination des fréquences]

   (a) $s_1 \leftarrow 0$, $d_1 \leftarrow \max_{0\leq m\leq M}\deg P_m$, $d_2 \leftarrow \max_{0\leq n\leq N}\deg Q_n$,
   $a_m \leftarrow$ coefficient de z^{d_1} dans $P_m(z)$,
   $b_n \leftarrow$ coefficient de z^{d_2} dans $Q_n(z)$.

   (b) Résoudre $\sum_{0\leq m\leq M} a_m X^m = 0 \Rightarrow J$ racines distinctes $x_1,\dots,x_J$.
   Résoudre $\sum_{0\leq n\leq N} b_n Y^n = 0 \Rightarrow L$ racines distinctes $y_1,\dots,y_L$.
   Pour $j=1,\dots,J$, pour $l=1,\dots,L$,
   $k_{j,l} \leftarrow (\alpha y_l - \log x_j)/(2i\pi)$
   si $k_{j,l}\in\mathbb{Z}$, alors

$s_1 \leftarrow s_1 + 1$,
$\delta_{s_1} \leftarrow y_l$.
$S_1 \leftarrow s_1$.
Si $S_1 = 0$, alors il n'y pas de solution entière autre que 0
sinon la liste des fréquences admissibles est $[\delta_1, \ldots, \delta_{S_1}]$.

1.4.3 Implantation des algorithmes

Nous avons implanté ces deux algorihmes dans un module écrit en Maple que nous avons nommé Pasrec. Le module et la façon de l'utiliser sont présentés dans l'appendice B.

Il est important de préciser que, si les algorithmes présentés dans le paragraphe précédent permettent de faire en théorie des calculs exacts, il y a plusieurs opérations requises qui ne peuvent être faites qu'avec des approximations. Nous avons donc choisi d'implanter les algorithmes sous une forme numérique en faisant les calculs à une précision près donnée par l'utilisateur. Ainsi, nous devons, dans les étapes 1 et 2 de l'algorithme, tester si certaines valeurs sont bien des éléments de $\mathbb{Z}$. Dans notre implantation, nous demandons à ces valeurs d'être entières modulo la précision donnée. De même, l'algorithme Poly et la troisième étape de l'algorithme nécessitent des résolutions de systèmes linéaires. Nous avons alors écarté tout recours à l'algorithme de Gauss, bien trop instable numériquement, pour lui préférer une méthode numérique, à savoir la méthode QR [LaTh], qui est actuellement la plus stable et la moins coûteuse pour les résolutions de problèmes aux moindres carrés et pour le calcul de valeurs propres et de vecteurs propres. L'utilisateur obtient ainsi des solutions entières approchées dont il peut vérifier la consistance en augmentant la précision qu'il indique à la machine.

Bibliographie

[Abr] S. A. Abramov, *Rational solutions of linear difference and q-difference equations with polynomial coefficients*, Proc. ISSAC '95, T. Levelt ed., ACM Press, New-York (1995), 285-289.

[BéGra1] J.-P. Bézivin et F. Gramain, *Solutions entières d'un système d'équations aux différences*, Ann. Inst. Fourier **43**-3 (1993), 791-814.

[BéGra2] J.-P. Bézivin et F. Gramain, *Solutions entières d'un système d'équations aux différences II*, Ann. Inst. Fourier **46**-2 (1996), 465-491.

[BriHab] N. Brisebarre et L. Habsieger, *Sur les fonctions entières à double pas récurrent*, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[Fuk] S. Fukasawa, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Tôhoku Math. J., **27** (1926), 41–52.

[Gel1] A. O. Gel'fond, *Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières*, Tôhoku Math. J., **30** (1929), 280–285.

[Gel2] A. O. Guelfond, Calculs des différences finies, Dunod, Paris, 1963.

[Gra1] F. Gramain, *Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond*, Inv. Math., **63** (1981), 495-506.

[Gra2] F. Gramain, *Équations aux différences et polynômes exponentiels*, C. R. Acad. Sciences Paris, **313** (1991), 131-134.

[GraMi] F. Gramain et M. Mignotte, *Fonctions entières arithmétiques* ; Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1982, D. Bertrand et M. Waldschmidt eds, Progress in Math. **31**, 1983, 99-124. Birkhäuser, Boston.

[Gru] L. Gruman, *Propriétés arithmétiques des fonctions entières*, Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 421–440.

[LaTh] P. Lascaux et R. Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tomes 1 et 2, Masson, 1986 et 1987.

[Loe] J.-J. Loeb, *Sur certaines équations aux différences associées à des groupes*, prépublication.

[Mas1] D. Masser, *Sur les fonctions entières à valeurs entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **291**, 1980, série A (1980), 1–4.

[Mas2] D. Masser, *On certain functional equations in several variables* ; Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1982, D. Bertrand et M. Waldschmidt eds, Progress in Math. **31**, 1983, 173-190. Birkhäuser, Boston.

[Pól] G. Pólya, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Rend. Circ. Mat. Palermo **40** (1915), 1–16.

[PWZ] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, A=B, A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996.

[Wal] M. Waldschmidt, Nombres transcendants, Lecture Notes in Math. **402**, Springer Verlag, Berlin, 1974.

[Zei] D. Zeilberger, *A holonomic systems approach to special functions identities*, J. Comp. Appl. Math. **32** (1990), 321-368.

19 références bibliographiques.

Chapitre 2

Mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$

2.1 Introduction

Une façon usuelle de mesurer la qualité d'approximation d'un nombre réel x par un nombre rationnel p/q est de comparer la quantité $|x - p/q|$ à des puissances négatives du dénominateur q. On peut formaliser cette notion de la façon suivante :

Définition 2.1. *Soit x un nombre réel, on dit que*
i) le nombre réel μ est une mesure d'irrationalité de x si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, q_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ : \quad \forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2\,, \tag{2.1}$$
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}} \quad si \quad q > q_0(\varepsilon)\,,$$

ou, ce qui est équivalent, si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, C(\varepsilon) > 0 : \quad \forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}\,, \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(\varepsilon)}{q^{\mu+\varepsilon}}\,. \tag{2.2}$$

ii) le nombre réel μ est une mesure effective d'irrationalité de x si

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, q_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ *effectivement calculable tel que* (2.1) *soit vraie,*

ou, toujours de façon équivalente, si

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, C(\varepsilon) > 0$ *effectivement calculable tel que* (2.2) *soit vraie.*

Remarquons tout d'abord que seuls les nombres irrationnels peuvent admettre une mesure d'irrationalité.

Une mesure d'irrationalité μ est nécessairement supérieure ou égale à 2, cela en vertu du Théorème de Lagrange [Lag1, Lag2] qui dit que, si le nombre réel x est irrationnel, l'inéquation

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

admet une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ solutions.

D'autre part, un résultat dû à Khinchin [Khi] stipule que presque tout (au sens de Lebesgue) nombre réel admet une mesure d'irrationalité égale à 2. Parmi ces nombres réels, nous trouvons les nombres algébriques : ce résultat constitue le Théorème de Roth [Ro] dont la publication date de 1955. Le Théorème suivant dû à Liouville [Liou1, Liou2, Liou3] et qui, contrairement au précédent, se démontre très simplement, nous donne des résultats effectifs sur les nombres algébriques.

Théorème (J. Liouville, 1851) . *Soit x un nombre algébrique réel de degré $d \geq 2$. Alors il existe une constante effectivement calculable $C(x) > 0$ telle que, pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(x)}{q^d} .$$

En particulier, les nombres algébriques quadratiques ont une mesure effective d'irrationalité égale à 2 ce qui est le résultat optimal recherché. Ce théorème nous dit donc qu'un nombre algébrique ne peut pas être trop bien approché par un nombre rationnel ; il a permis à J. Liouville d'exhiber ainsi les premiers exemples de nombres transcendants. Il s'agit des nombres réels de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^{-n!}$ avec $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$, dont il prouve qu'ils ne peuvent pas satisfaire la conclusion de son théorème : ces nombres irrationnels n'ont pas de mesure d'irrationalité finie. On appelle plus généralement nombre de Liouville un nombre réel qui n'a pas de mesure d'irrationalité finie.

Notons $\mu_{abs}(x)$ la mesure d'irrationalité absolue de x qui est égale à la borne inférieure de l'ensemble des mesures d'irrationalité de x si cet ensemble est non vide, et qui vaut $+\infty$ sinon. Les nombres de Liouville sont donc les nombres réels x tels que $\mu_{abs}(x) = +\infty$. Il faut noter qu'à tout nombre réel $b \geq 1$, nous pouvons associer un nombre réel x tel que $\mu_{abs}(x) = 1+b$. En effet, considérons un nombre réel a strictement supérieur à 1. Si l'on désigne par $[c]$ la partie entière du nombre réel c, soit x le nombre réel dont le développement en fraction continue a pour suite de quotients partiels la suite $\left(\left[a^{b^n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e.

$$x = [a] + \cfrac{1}{[a^b] + \cfrac{1}{[a^{b^2}] + \cfrac{1}{[a^{b^3}] + \cdots}}} ,$$

nous savons alors [Las] que $\mu_{abs}(x) = 1 + b$.

On ne connaît rien de général sur les mesures d'irrationalité de nombres transcendants. On a des résultats, effectifs alors, sur certaines constantes particulières. Dans le tableau suivant, nous donnons les meilleures mesures d'irrationalité connues à ce jour de quelques nombres transcendants (ou supposés tels comme $\zeta(3)$ dont on ne connait que l'irrationalité [Ap]) remarquables.

$\log 2$	π	$\pi/\sqrt{3}$	$\zeta(2)$	$\zeta(3)$
3.8913998	8.016046	4.601580	5.441243	7.3779564
Rukhadze (1987)	Hata(1993)	Hata(1993)	Rhin-Viola (1996)	Hata (1998)

Pour calculer des mesures d'irrationalité d'un nombre réel x, il va nous falloir utiliser des bonnes approximations de x. Plus précisément, considérons un nombre complexe x, un nombre réel ρ, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{Z} + i\rho\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\varepsilon_n = q_n x - p_n$. De plus, nous noterons κ_ρ la constante définie par

$$\kappa_\rho = \min\left\{|z|; z \in \mathbb{Z} + i\rho\mathbb{Z}, z \neq 0\right\} = \begin{cases} |\rho| & \text{si } 0 < |\rho| < 1, \\ 1 & \text{si } \rho = 0 \text{ ou } |\rho| \geq 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

L'étude du comportement asymptotique de q_n et ε_n va nous permettre d'obtenir une mesure d'irrationalité de x. Ce phénomène est décrit dans deux lemmes dont le premier découle de la proposition suivante.

Proposition 2.2. *Supposons qu'il existe six constantes $C_1, C_2, C_2', \sigma, \tau, \tau' > 0$ telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |q_n| \leq C_1 e^{\sigma n} \quad et \quad C_2' e^{-\tau' n} \leq |\varepsilon_n| \leq C_2 e^{-\tau n}\,. \tag{2.4}$$

Alors, nous avons, pour tout couple (p, q) de $\mathbb{Z}^2$,

$$q \neq 0 \Rightarrow \left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{|q|^{\frac{\tau'}{\tau}\left(1+\frac{\sigma}{\tau}\right)}}\,,$$

avec

$$C = \min\Big(e^{-\sigma}|\varepsilon_0|^{\frac{\sigma}{\tau}}(1+|\varepsilon_0|)^{-1-\frac{\sigma}{\tau}}\kappa_\rho^{1+\frac{\sigma}{\tau}}C_1^{-1}C_2^{-\frac{\sigma}{\tau}}\,,$$
$$e^{-\tau'(1+\frac{\sigma}{\tau})}(\kappa_\rho|\varepsilon_0|)^{\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}(1+|\varepsilon_0|)^{-\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}C_1^{-1}C_2^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}C_2'^{\,1+\frac{\sigma}{\tau}}\Big) > 0\,.$$

Preuve. Remarquons que, du fait de la condition (2.4), nous avons $\varepsilon_0 \neq 0$.

Soient $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, avec $q \neq 0$. Posons

$$n = \inf\left\{k \in \mathbb{N} : |q\varepsilon_k| \leq \frac{\kappa_\rho|\varepsilon_0|}{1+|\varepsilon_0|}\right\}\,.$$

Comme $\varepsilon_0 \neq 0$, le nombre réel $\frac{\kappa_\rho|\varepsilon_0|}{1+|\varepsilon_0|}$ est strictement positif. Cela nous assure de l'existence de n, qui est nécessairement strictement positif puisque $\kappa_\rho \leq 1$ et $q \neq 0$. Nous avons par conséquent

$$\frac{\kappa_\rho|\varepsilon_0|}{1+|\varepsilon_0|} < |q\varepsilon_{n-1}| \leq C_2|q|e^{-\tau(n-1)},$$

d'où

$$e^{n-1} < \left(C_2\frac{1+|\varepsilon_0|}{\kappa_\rho|\varepsilon_0|}|q|\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

Nous obtenons donc la majoration suivante de $|q_n|$:

$$|q_n| \leq C_1e^{\sigma n} < C_1e^{\sigma}\left(C_2\frac{1+|\varepsilon_0|}{\kappa_\rho|\varepsilon_0|}|q|\right)^{\frac{\sigma}{\tau}}.$$

La fin de la preuve se fait en distinguant deux cas.

– Si $pq_n - p_nq \neq 0$, comme $pq_n - p_nq \in (\mathbb{Z}+i\rho\mathbb{Z})\setminus\{0\}$, nous avons, en vertu de la définition (2.3),

$$|q_n(qx-p)| \geq |p_nq-pq_n| - |q(q_nx-p_n)| \geq \kappa_\rho - |q\varepsilon_n| \geq \kappa_\rho - \frac{\kappa_\rho|\varepsilon_0|}{1+|\varepsilon_0|} = \frac{\kappa_\rho}{1+|\varepsilon_0|},$$

ce qui nous donne

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| > \frac{C_3}{|q|^{1+\frac{\sigma}{\tau}}}$$

avec $C_3 = e^{-\sigma}|\varepsilon_0|^{\frac{\sigma}{\tau}}(1+|\varepsilon_0|)^{-1-\frac{\sigma}{\tau}}\kappa_\rho^{1+\frac{\sigma}{\tau}}C_1^{-1}C_2^{-\frac{\sigma}{\tau}}$.

– Si $pq_n - p_nq = 0$, nous trouvons

$$q_n(qx-p) = q(q_nx-p_n) = q\varepsilon_n.$$

Comme nous avons

$$|q_n| \leq C_1e^{\sigma n} \leq C_1\left(\frac{C_2}{|\varepsilon_n|}\right)^{\frac{\sigma}{\tau}}$$

et

$$|\varepsilon_n| \geq C_2'e^{-\tau' n} \geq C_2'e^{-\tau'}\left(\frac{|\varepsilon_{n-1}|}{C_2}\right)^{\frac{\tau'}{\tau}} > C_2'e^{-\tau'}\left(\frac{\kappa_\rho|\varepsilon_0|}{(1+|\varepsilon_0|)C_2|q|}\right)^{\frac{\tau'}{\tau}},$$

nous obtenons

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| = \left|\frac{\varepsilon_n}{q_n}\right| \geq C_1^{-1}C_2^{-\frac{\sigma}{\tau}}|\varepsilon_n|^{1+\frac{\sigma}{\tau}} > C_4|q|^{-\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}$$

avec $C_4 = e^{-\tau'(1+\frac{\sigma}{\tau})}(\kappa_\rho|\varepsilon_0|)^{\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}(1+|\varepsilon_0|)^{-\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}C_1^{-1}C_2^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}{C_2'}^{1+\frac{\sigma}{\tau}}$. Ainsi, nous trouvons bien

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| > \frac{C}{|q|^{\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}},$$

avec $C = \min(C_3, C_4)$. □

Le premier lemme, qui est classique (voir par exemple [Chu1]), sera utilisé pour calculer une mesure d'irrationalité de $\log 2$.

Lemme 2.3. *Supposons que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|q_n| \leq \sigma, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|\varepsilon_n| = -\tau$$

où σ et τ sont des nombres réels strictement positifs. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $q_0(\varepsilon) \geq 0$ effectivement calculable tel que, pour tout couple (p, q) de $\mathbb{Z}^2$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-\mu-\varepsilon} \text{ si } |q| > q_0(\varepsilon)$$

avec $\mu = 1 + \sigma/\tau$.

Preuve. Pour tout $\delta \in]0, \tau[$, il existe trois constantes $C_1, C_2, C_2' > 0$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |q_n| \leq C_1 e^{(\sigma+\delta)n} \quad \text{et} \quad C_2' e^{-(\tau+\delta)n} \leq |\varepsilon_n| \leq C_2 e^{-(\tau-\delta)n}$$

car, quitte à décaler les suites, nous pouvons supposer $\varepsilon_n \neq 0$ pour tout entier naturel n. D'après la Proposition 2.2, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{C_\delta}{|q|^{\frac{\tau+\delta}{\tau-\delta}(1+\frac{\sigma+\delta}{\tau-\delta})}}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta > 0$ de sorte que $\frac{\tau+\delta}{\tau-\delta}(1 + \frac{\sigma+\delta}{\tau-\delta}) \leq 1 + \frac{\sigma}{\tau} + \frac{\varepsilon}{2}$, et prenons $q_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ tel que $q_0(\varepsilon)^{\frac{\varepsilon}{2}} \geq C_\delta^{-1}$. Alors, pour tout couple (p, q) de $\mathbb{Z}^2$,

$$|q| > q_0(\varepsilon) \text{ entraîne } \left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{|q|^{1+\frac{\sigma}{\tau}+\varepsilon}}.$$

□

Le lemme qui suit provient de [Hat1]. Il nous servira à établir une mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$. Dans ce dernier cas, nous avons des renseignements un peu moins bons sur le comportement asymptotique de ε_n et il nous faut en conséquence ajouter des hypothèses sur la suite $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemme 2.4. (M. Hata) *Supposons $q_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$ et*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|q_n| \leq \sigma, \quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|\varepsilon_n| \leq -\tau$$

où σ et τ sont des nombres réels strictement positifs. Soit M un entier strictement positif fixé, soit $n \in \mathbb{N}$, soit $V_n \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes

$$\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \ldots, \frac{p_{n+M-1}}{q_{n+M-1}}.$$

Supposons que, pour tout entier $n \geq 0$,
soit
i) V_n contient au moins deux points distincts,
soit
ii) V_n est réduit à un point z_0 irrationnel.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $q_0(\varepsilon) \geq 0$ effectivement calculable tel que, pour tout couple (p, q) de $\mathbb{Z}^2$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-\mu-\varepsilon} \text{ si } |q| > q_0(\varepsilon)$$

avec $\mu = 1 + \sigma/\tau$.

Preuve. Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, considérons la fonction $\Omega(p, q) = qx - p$. Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Omega(p, q) = \frac{1}{q_n} \left((qp_n - pq_n) + q\varepsilon_n \right).$$

Posons

$$S_n = qp_n - pq_n \text{ et } \theta_n = q\varepsilon_n.$$

La condition sur l'ensemble V_n énoncée dans le lemme entraîne que, pour tout $n \geq 0$, il existe un entier naturel $l_n \in [n, n+M[$ satisfaisant $S_{l_n} \neq 0$. Remarquons que $|S_{l_n}| \geq \kappa_\rho$, κ_ρ étant la constante définie par (2.3), puisque $S_{l_n} \in (\mathbb{Z}+i\rho\mathbb{Z})\backslash\{0\}$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0, \tau[$ tel que $\frac{\sigma+\delta}{\tau-\delta} \leq \frac{\sigma}{\tau} + \frac{\varepsilon}{2}$. Nous savons alors qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$|q_n| \leq e^{(\sigma+\delta)n} \text{ et } |\varepsilon_n| \leq e^{-(\tau-\delta)n} \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Soit q_0 le plus petit entier satisfaisant

$$q_0 \geq \frac{1}{2}\kappa_\rho e^{(\tau-\delta)n_0} \text{ et } (q_0)^{\frac{\varepsilon}{2}} \geq \left(\frac{2}{\kappa_\rho}\right)^{\frac{\sigma+\tau}{\tau-\delta}} e^{(\sigma+\delta)M}.$$

Si l'entier q satisfait $q \geq q_0$, soit $n_1 = n_1(q)$ le plus petit entier naturel tel que

$$q \leq \frac{1}{2}\kappa_\rho e^{(\tau-\delta)n_1},$$

(remarquons que $n_1 \geq n_0$). Nous avons alors

$$\begin{aligned} |\Omega(p, q)| &\geq \frac{|S_{l_{n_1}}| - |\theta_{l_{n_1}}|}{|q_{l_{n_1}}|} \geq \frac{1}{2}\kappa_\rho e^{-(\sigma+\delta)(n_1+M-1)} \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\kappa_\rho\right)^{\frac{\sigma+\tau}{\tau-\delta}} e^{-(\sigma+\delta)M} q^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\geq q^{-\frac{\sigma}{\tau}-\varepsilon}, \end{aligned}$$

ce qui était le résultat attendu. □

Remarque 2.5. Les mesures d'irrationalité données par la Proposition 2.2 et les Lemmes 2.3 et 2.4 sont toutes effectivement calculables.

Nous rappelons maintenant brièvement deux résultats classiques qui interviendront systématiquement dans les calculs des constantes σ et τ.

Tout d'abord, notons d_n le p.p.c.m. de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $\Theta(x)$ la somme $\sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq x}} \log p$. Le théorème des nombres premiers (cf. [EllMF] par exemple) nous donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log d_n}{n} = 1 \tag{2.5}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Theta(x)}{x} = 1. \tag{2.6}$$

Enfin, nous rappelons un résultat de la théorie de l'intégration [Rud] : pour toute fonction complexe f intégrable sur un espace mesurable X, relativement à une mesure positive μ, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\left(\int_X |f(x)|^n \mathrm{d}\mu(x)\right) = \log \|f\|_{\infty,X}. \tag{2.7}$$

où $\|f\|_{\infty,X}$ désigne la borne supérieure essentielle de f sur X.

La démarche pour trouver des relations de la forme $\varepsilon_n = q_n x - p_n$ consiste à établir des relations plus générales de la forme

$$E_n(z) = Q_n(z)f(z) - P_n(z) \tag{2.8}$$

où $E_n(z) \in \mathbb{C}[[z]], P_n(z)$ et $Q_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ et $f(z)$ est une fonction qui vaut x si on la spécialise en un nombre complexe convenable. L'approche classique pour établir des relations du type de (2.8) est celle des approximants de Padé que nous présentons en suivant [Rh].

Définition 2.6. *Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions analytiques en 0 (ou des séries formelles). On appelle*

i) système d'approximants de Padé de type I de $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ d'ordre N un n-uplet $(A_1, \ldots, A_n)$ de polynômes non tous nuls vérifiant

$$1) \deg A_i \leq N \text{ pour tout } i, 1 \leq i \leq n,$$
$$2) 1 + \mathrm{ord}_0\left(\sum_{i=1}^{n} A_i f_i\right) \geq n(N+1).$$

La fonction $R = \sum_{i=1}^{n} A_i f_i$ s'appelle le reste de l'approximation.

ii) système d'approximants de Padé de type II de $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ *d'ordre* N *un* n*-uplet* $(B_1, \dots, B_n)$ *de polynômes non tous nuls vérifiant*

$$1)\, \deg B_i \leq (n-1)N \text{ pour tout } i, 1 \leq i \leq n,$$
$$2)\, \mathrm{ord}_0\,(B_l f_k - B_k f_l) \geq nN + 1.$$

En 1909, Padé construisit les approximants de la fonction hypergéométrique

$$ {}_2F_1(1, b; c; x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(b)_n}{(c)_n} x^n$$

où $c > 0$ et $(b)_n = b(b+1)\dots(b+n-1)$. Le recours à plusieurs systèmes d'approximants de Padé des fonctions $1, \log(1+z), \dots, \log(1+z)^m, m \in \mathbb{N}$, a permis en 1964 à A. Baker [Ba] (qui développait alors des idées de K. Mahler [Mah]) de trouver une mesure d'irrationalité de $\log 2$ égale à 12.5. Ici, nous allons nous intéresser au cas particulier $n = 2$ (les définitions i) et ii) coïncidant alors) avec $f_1(z) = \log(1-z)$ et $f_2(z) = 1$. En effet, la substitution $z = -1$ dans $\log(1-z)$ donne $\log 2$, celle $z = e^{-i\pi/3}$ donne $\pi/\sqrt{3}$ et de plus $\log(1-z) = z\ {}_2F_1(1, 1; 2; z)$.

En 1980, K. Alladi et M. L. Robinson [AlRob] utilisent des approximants de Padé de 1 et $\log(1-z)$ pour établir des mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$. Ils traitent dans leur article l'analogue à une dimension du travail de F. Beukers [Beu] dans lequel ce dernier retrouvait, à l'aide de formules intégrales bi et tri-dimensionnelles utilisant les polynômes de "type Legendre" suivants

$$L_n(z) = \frac{1}{n!} \left(z^n (1-z)^n\right)^{(n)}, \tag{2.9}$$

les mesures d'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ établies par Apéry [Ap]. Précisément, Alladi et Robinson considèrent l'intégrale

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(z) &= d_n z^{2n+1} \int_0^1 \frac{t^n (1-t)^n}{(1-zt)^{n+1}} \mathrm{d}t \\ &= Q_n(z) \log(1-z) - P_n(z) \end{aligned}$$

qui fournit les approximants de Padé de la fonction $\log(1-z)$. Remarquons que pour $z \notin [1, \infty[$ et $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, nous avons

$$\int_0^1 \frac{t^m}{1-zt} \mathrm{d}t = \frac{-1}{z^{m+1}} \left[\log(1-z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{z^k}{k} \right].$$

Nous pouvons donc écrire

$$\int_0^1 \frac{L_n(t)}{1-zt} \mathrm{d}t = \frac{-1}{z} L_n\left(\frac{1}{z}\right) \log(1-z) + H_n\left(\frac{1}{z}\right) d_n^{-1}$$

où $H_n(z) \in z\mathbb{Z}[z]$.
En intégrant n fois par parties le membre de gauche de l'équation précédente, nous obtenons

$$\int_0^1 \frac{L_n(t)}{1-zt}\mathrm{d}t = (-z)^n \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{(1-zt)^{n+1}}\mathrm{d}t.$$

Il ne reste plus qu'à poser

$$\begin{aligned} P_n(z) &= (-z)^{n+1} H_n\left(\frac{1}{z}\right), \\ Q_n(z) &= -d_n(-z)^n L_n\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Il faut maintenant spécialiser les relations obtenues en $z = -1$ et $z = e^{-i\pi/3}$. Remplaçons donc z par -1 dans $\varepsilon_n(z)$ et $Q_n(z)$. Nous obtenons alors

$$Q_n(-1) = -d_n L_n(-1) \ \text{ et } \ \varepsilon_n(-1) = -d_n \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\mathrm{d}t.$$

Étudions tout d'abord le comportement asymptotique de $Q_n(-1)$. Soit r un nombre réel strictement positif, nous notons C_r le cercle de centre -1 et de rayon r. La formule de Cauchy donne

$$Q_n(-1) = -d_n \oint_{C_r} \frac{z^n(1-z)^n}{(z+1)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2i\pi}.$$

Nous avons donc, pour tout $r > 0$,

$$|Q_n(-1)| \leq d_n \left(\frac{(1+r)(2+r)}{r}\right)^n,$$

et, par conséquent, en se rappelant (2.5),

$$\begin{aligned} \sigma(-1) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|Q_n(-1)| \\ &\leq 1 + \min_{r>0} \log \frac{(1+r)(2+r)}{r} \\ &= 1 + \log(3+2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

D'autre part, comme nous avons posé

$$\varepsilon_n(-1) = d_n \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{(1+t)^n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t},$$

nous avons facilement par (2.5) et (2.7)

$$\begin{aligned} -\tau(-1) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|\varepsilon_n(-1)| \\ &= 1 + \max_{0\le t\le 1} \log \frac{t(1-t)}{1+t} \\ &= 1 + \log(3-2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Ces calculs permirent à Alladi et Robinson d'obtenir

$$\mu(\log 2) = 4\log(\sqrt{2}+1)/(2\log(\sqrt{2}+1)-1) = 4.62210083....$$

Ils explicitaient ainsi les résultats (annoncés indépendamment) d'Apéry [Ap] et Danilov [Da] qui, en 1978, donnaient une mesure d'irrationalité de $\log 2$ égale à 4.622. De la même façon, Alladi et Robinson établissent une mesure d'irrationalité égale à 8.310 pour $\pi/\sqrt{3}$.

Il faut noter la présence d'extrema de fonctions dans les expressions de σ et τ. Il en sera ainsi dans tous les calculs des constantes σ et τ que nous ferons par la suite. Nous appellerons ces extrema respectifs composantes analytiques de σ et de τ.

En 1987, G. Rhin [Rh] généralise l'approche d'Alladi et Robinson. Son objectif est d'augmenter le nombre réel τ et donc de diminuer $-\tau$. L'idée est donc de diminuer la composante analytique de τ, i.e. le maximum de la fonction $t \to t(1-t)/(1+t)$ en remplaçant cette fonction par une autre qui va donner une meilleure composante analytique. Cela revient à remplacer dans $\varepsilon_n(z)$ le polynôme $t^n(1-t)^n$ par d'autres polynômes ayant donc un meilleur comportement analytique. Cette approche lui permet tout d'abord d'expliciter l'annonce de $\mu(\log 2) = 4.26517429$ faite par D. V. et G. V. Chudnovsky dans [Chu2] puis celle faite dans [Chu3] par G. V. Chudnovsky qui était $\mu(\log 2) = 4.134400029$. Et surtout, en considérant les polynômes $\prod_{1\le i\le 6} 2P_i(t)^{[a_i n]}$, où les P_i et les a_i sont donnés par le tableau 2.1 ci-dessous, G. Rhin obtient une mesure d'irrationalité de $\log 2$ égale à 4.0765.

i	$P_i(t)$	a_i
1	$t(1-t)$	$0,84943$
2	t^2+2t-1	$0,02401$
3	$6t^2-5t+1$	$0,091$
4	$7t^2-6t+1$	$0,02068$
5	$13t^2-11t+2$	$0,0113$
6	$2t^4+3t^3+3t^2-5t+1$	$0,00179$

Tableau 2.1.

Il annonce aussi, toujours dans [Rh], une mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ valant 4.97.

Une nouvelle étape va être franchie en 1987 par E. A. Rukhadze [Ruk]. Elle va utiliser la classe de polynômes

$$\begin{aligned} R_{n,m,m'}(z) &= \frac{1}{(n-m')!}\left(z^{n+m-m'}(1-z)^n\right)^{(n-m')} \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n+m-m'+j}{n-m'}z^{m+j}, \end{aligned}$$

où n, m et $m' \in \mathbb{N}$ et $n \geq m'$, pour obtenir une mesure d'irrationalité de $\log 2$ égale à 3.893. Toujours en 1987, A. K. Dubitskas [Dub1] va se servir des polynômes $R_{n,m,m'}$ pour calculer une mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ égale à 5.52 qui était la meilleure connue alors, l'annonce de G. Rhin d'une mesure d'irrationalité égale à 4.97 ayant été faite sans preuve explicite.

En 1990, M. Hata [Hat1], à l'aide d'une autre classe d'approximants, obtient, parmi d'autres résultats,

$$\mu(\log 2) = 3.8913997... \text{ et } \mu(\pi/\sqrt{3}) = 5.0874626....$$

Pour cela, il considère les polynômes

$$\begin{aligned} H_{n,m,m'}(z) &= \frac{1}{(n+m-m')!}(z^{n-m'}(1-z)^{n+m})^{(n+m-m')} \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{m+j}\binom{n+m}{m+j}\binom{n+m-m'+j}{n+m-m'}z^j \end{aligned}$$

avec $n, m, m' \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq m'$.

Enfin, D. V. et G. V. Chudnovsky annoncent (sans démonstration) dans [Chu4] avoir établi

$$\mu(\log 2) = 3.87 \text{ et } \mu(\pi/\sqrt{3}) = 4.96$$

à l'aide de la classe de polynômes

$$C_{n,m}(z) = \frac{1}{m!}(L_n(z))^{(m)},$$

la notation L_n désignant encore le n-ième polynôme de "type Legendre" donné par (2.9).

En fait, les classes $R_{n,m,m'}, H_{n,m,m'}, C_{n,m}$ sont des sous-familles d'une classe plus générale de polynômes que nous définissons comme suit

$$\begin{aligned} P_{n,m,m'}(z) &= \frac{1}{(n+m+m')!}(z^{n+m'}(1-z)^{n+m})^{(n+m+m')} \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{m+j}\binom{n+m}{m+j}\binom{n+m+m'+j}{n+m+m'}z^j \end{aligned} \tag{2.10}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $m, m' \in \mathbb{Z}$ tels que $n \geq -\min(m, m', m+m')$. Nous appellerons cette famille d'approximants polynômes de Legendre généralisés, la substitution $m = m' = 0$ permettant de retrouver les polynômes L_n. Si nous supposons que m et m' appartiennent à $\mathbb{N}$, nous constatons alors que

$$R_{n,m,m'} = P_{n+m,-m,-m'}, H_{n,m,m'} = P_{n,m,-m'} \text{ et } C_{n,m} = \binom{n+m}{m} P_{n-m,m,m}.$$

L'intérêt de ces polynômes est qu'ils ont un contenu important (rappelons que le contenu d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ est le p.g.c.d. de ses coefficients). Les composantes analytiques qui vont apparaître lors des calculs de σ et τ vont être moins bonnes que celles intervenant dans l'approche de base d'Alladi et Robinson et par conséquent sensiblement moins bonnes que celles trouvées dans l'approche développée par Rhin mais cette perte va être largement compensée par l'apparition d'une nouvelle composante que nous appellerons composante arithmétique. Cette composante arithmétique est directement reliée au contenu de ces polynômes comme nous allons le voir par la suite.

Rukhadze, Dubitskas et Hata n'ayant étudié leurs classes de polynômes que dans le cas où $|m| = |m'|$, nous nous proposons dans un premier temps d'établir des résultats permettant de procéder à une étude exhaustive des mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$ que l'on peut calculer à l'aide des polynômes $P_{n,m,m'}$. Nous généralisons donc les travaux de Rukhadze, Dubitskas et Hata et nous profiterons de cette étude pour examiner l'annonce faite par D. V. et G. V. Chudnovsky. Dans un second temps, nous ajouterons des facteurs supplémentaires à la classe des polynômes de Legendre généralisés et observerons les effets de cette perturbation.

2.2 Calculs de mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$ à l'aide d'une généralisation d'une étude de Hata

Nous allons tout d'abord généraliser les outils techniques développés dans [Hat1] puis nous établirons des formules qui donnent des mesures d'irrationalité. Nous exhiberons des figures permettant de cerner le domaine où l'on peut trouver des bonnes valeurs. Puis nous calculerons effectivement ces valeurs dont les figures indiquent qu'elles sont les meilleures que nous pouvons obtenir à l'aide de nos outils (et qui sont celles obtenues dans [Ruk] et [Hat1] pour $\log 2$ et [Hat1] pour $\pi/\sqrt{3}$).

2.2.1 Lemmes techniques

Rappelons que l'on appelle partie entière d'un nombre réel x l'entier relatif noté $[x]$ tel que $[x] \leq x < [x] + 1$. La partie fractionnaire de x est le nombre réel noté

$\{x\}$ égal à $x - [x]$.

2.2.1.1 Un lemme arithmétique

Nous allons maintenant faire une étude du contenu des polynômes (2.10). Pour cela, nous allons en fait généraliser le Lemme 2.5 de [Hat1].

Lemme 2.7. *Soient λ, λ' deux nombres réels tels que $\min(\lambda, \lambda', \lambda + \lambda') > -1$, soient M et M' deux suites d'entiers relatifs telles que*

$$n \geq -\min(M(n), M'(n)) \text{ et } \max\{|\lambda n - M(n)|, |\lambda' n - M'(n)|\} \leq C_{\lambda,\lambda'}$$

où $C_{\lambda,\lambda'}$ est une constante positive indépendante de n. Alors, il existe un diviseur commun $d_{\lambda,\lambda'}(n)$ des coefficients de $P_{n,M(n),M'(n)}$ tel que

$$e(\lambda, \lambda') := \int_{E(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log d_{\lambda,\lambda'}(n),$$

où $E(\lambda, \lambda')$ est la réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints définie par

$$E(\lambda, \lambda') = \Big\{ x > 0,\, 0 < \{x\} + \{\lambda' x\} - 1 < 1 - \{\lambda x\} < \{x\} \Big\}.$$

Preuve. Posons $\delta_n = \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{\sqrt{(2+\lambda+\lambda')n+1}}$. Pour n assez grand, nous avons $\delta_n < \frac{1}{6}$. Posons encore

$$E_n(\lambda, \lambda') = \Big\{ x > 0, 1 - \min(\{\lambda' x\}, \{\lambda x\}) + \delta_n \\ < \{x\} < 2 - 2\delta_n - \max(\{\lambda' x\} + \{\lambda x\}, 1) \Big\}.$$

Nous considérons les trois suites $\left(\frac{k}{\lambda}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(\frac{l}{\lambda'}\right)_{l\in\mathbb{N}}, (q)_{q\in\mathbb{N}}$. Rangeons les éléments de ces trois suites dans un ordre croissant : nous obtenons une suite croissante $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de nombres réels. Nous constatons alors que sur $]a_m, a_{m+1}[$, les fonctions

$$x \mapsto 1 - \min(\{\lambda' x\}, \{\lambda x\}) + \delta_n - \{x\}$$

et

$$x \mapsto 2 - 2\delta_n - \max(\{\lambda' x\} + \{\lambda x\}, 1) - \{x\}$$

sont affines donc continues ce qui montre que $I_{n,m,\lambda,\lambda'} = E_n(\lambda, \lambda') \cap]a_m, a_{m+1}[$ est ouvert. Cela entraîne que $E_n(\lambda, \lambda')$ est ouvert puisqu'il ne contient aucun des éléments de la suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$. De plus, il est clair que la suite $(E_n(\lambda, \lambda'))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n(\lambda, \lambda') = E(\lambda, \lambda')$.

Nous définissons l'ensemble H_n comme suit

$$H_n = \left\{ p \text{ premiers tels que } p \geq \sqrt{(2+\lambda+\lambda')n+1} \text{ et } \frac{n}{p} \in E_n(\lambda,\lambda') \right\}.$$

Posons

$$d_{\lambda,\lambda'}(n) = \prod_{p \in H_n} p.$$

Nous allons montrer que tout élément p de H_n divise les coefficients du polynôme $P_{n,M(n),M'(n)}$, i.e. pour tout entier j appartenant à l'intervalle $[0,n]$, le nombre premier p divise $\binom{n+M(n)}{M(n)+j}\binom{n+M(n)+M'(n)+j}{n+M(n)+M'(n)}$. Soit j un entier de $[0,n]$, notons

$$\alpha = \left\{\frac{n}{p}\right\}, \beta = \left\{\frac{M(n)}{p}\right\}, \gamma = \left\{\frac{M'(n)}{p}\right\}, \theta = \left\{\frac{j}{p}\right\}$$

de sorte que l'exposant de p dans $\binom{n+M(n)}{M(n)+j}\binom{n+M(n)+M'(n)+j}{n+M(n)+M'(n)}$ vaut

$$v_p(\theta) = [\alpha+\beta] - [\beta+\theta] - [\alpha-\theta] + [\alpha+\beta+\gamma+\theta] - [\alpha+\beta+\gamma]. \tag{2.11}$$

Comme $\frac{n}{p}$ appartient à $E_n(\lambda,\lambda')$, les nombres $\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\}$ et $\left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\}$ sont dans l'intervalle $]3\delta_n, 1-3\delta_n[$. Nous avons aussi

$$\max\left(\left|\frac{\lambda n}{p} - \frac{M(n)}{p}\right|, \left|\frac{\lambda' n}{p} - \frac{M'(n)}{p}\right|\right) \leq \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{p} \leq \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{\sqrt{(2+\lambda+\lambda')n+1}} = \delta_n.$$

Nous en déduisons les inégalités

$$\left|\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\} - \beta\right| \leq \delta_n \text{ et } \left|\left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\} - \gamma\right| \leq \delta_n.$$

Nous savons alors que

$$\alpha+\beta \geq \left\{\frac{n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda n}{p}\right\} - \delta_n > 1,$$
$$\alpha+\beta+\gamma \leq \left\{\frac{n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\} + 2\delta_n < 2,$$
$$\text{et} \quad \alpha+\gamma \geq \left\{\frac{n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\} - \delta_n > 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}[\alpha+\beta] - [\beta+\theta] - [\alpha-\theta] + [\alpha+\beta+\gamma+\theta] - [\alpha+\beta+\gamma] \\ = -[\alpha-\theta] + [\alpha+\beta+\gamma+\theta] - [\beta+\theta] \\ \geq 1,\end{aligned}$$

puisque $[\alpha - \theta] \leq 0$ et $\alpha + \gamma > 1$. Étudions maintenant le comportement asymptotique de $d_{\lambda,\lambda',n}$. Soit l un entier fixé arbitrairement grand et $I =]a, b[$ une composante connexe non vide quelconque de $E_l(\lambda, \lambda')$. L'intervalle I sera alors un sous-ensemble de $E_n(\lambda, \lambda')$ pour tout entier $n \geq l$. Si $n \geq (3 + \lambda + \lambda')b^2$, tout nombre premier p de l'intervalle $J_n =]\frac{n}{b}, \frac{n}{a}[$ appartiendra à H_n : en effet, nous aurons $p^2 > \frac{n^2}{b^2} \geq (2 + \lambda + \lambda')n + 1$ et $\frac{n}{p} \in]a, b[$. Nous obtenons ainsi la minoration

$$\sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \in J_n}} \log p \geq \left(\Theta\left(\frac{n}{a}\right) - \Theta\left(\frac{n}{b}\right) - \log\left(\frac{n}{a}\right)\right).$$

Nous avons donc, grâce à (2.6),

$$\liminf_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \in J_n}} \log p\right) \geq \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \int_I \frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$

ce qui entraîne

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\log d_{\lambda,\lambda'}(n)}{n} \geq \int_{E_l(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

En faisant tendre l vers l'infini, nous obtenons

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\log d_{\lambda,\lambda'}(n)}{n} \geq \int_{E(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

La majoration

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log d_{\lambda,\lambda'}(n)}{n} \leq \int_{E(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

s'obtient de manière similaire, en considérant l'ensemble

$$H_n^{'} = \left\{p \text{ premiers tels que } p \geq \sqrt{(2 + \lambda + \lambda')n + 1} \text{ et } \frac{n}{p} \in E(\lambda, \lambda')\right\}.$$

□

Remarque 2.8. Il est assez facile de montrer que le gain arithmétique procuré par ce lemme est optimal. En effet, la condition $v_p(\theta) \geq 1$, v_p étant la fonction donnée par (2.11), examinée en $\theta = 0$ et $\theta = 1 - \beta$ rend nécessaires les inégalités définissant l'ensemble $E(\lambda, \lambda')$.

Nous allons maintenant donner une formule explicite pour le calcul de l'intégrale considérée dans le lemme précédent.

2.2.1.2 Un algorithme de calcul de l'intégrale $e(\lambda, \lambda')$

Dans ce paragraphe, nous décrivons un algorithme permettant de calculer $\int_{E(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ lorsque λ et λ' sont des nombres rationnels soumis aux hypothèses du Lemme 2.7. Soient $\lambda = b/a$ et $\lambda' = c/a$ avec a un entier naturel et b, c deux entiers relatifs tels que $a > -\min(b, c, b+c)$ et $abc \neq 0$. Rappelons

$$E\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) = \left\{x > 0,\, 0 < \{x\} + \left\{\frac{c}{a}x\right\} - 1 < 1 - \left\{\frac{b}{a}x\right\} < \{x\}\right\}.$$

Considérons les trois suites finies

$$\left(\frac{j}{a}\right)_{j\in\mathbb{N}} \cap [0,1], \left(\frac{k}{|b|}\right)_{k\in\mathbb{N}} \cap [0,1] \text{ et } \left(\frac{l}{|c|}\right)_{l\in\mathbb{N}} \cap [0,1].$$

Le rangement des éléments de ces trois suites dans un ordre croissant nous donne une suite croissante finie $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}, 0\leq m\leq M(a,b,c)}$ de nombres réels telle que $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{M(a,b,c)} = 1$. Nous allons construire à partir de cette suite un recouvrement de $\mathbb{R}_{>0}$ par une suite d'intervalles ouverts disjoints. L'intérêt de cette construction est que l'intersection de $E\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ avec chacun des intervalles du recouvrement est un intervalle, sur lequel l'intégration de la fonction $x \to 1/x^2$ va être bien évidemment très aisée.

Écrivons

$$e\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) = \int_{E\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \sum_{q\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{M(a,b,c)-1} \int_{E\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)\cap\,]a(q+\alpha_m), a(q+\alpha_{m+1})[} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

D'après la forme de la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}, 0\leq m\leq M(a,b,c)}$, nous savons qu'il existe trois entiers j, k et l tels que

$$]a\alpha_m, a\alpha_{m+1}[=]j, j+1[\cap \left]\frac{ak}{|b|}, \frac{a(k+1)}{|b|}\right[\cap \left]\frac{al}{|c|}, \frac{a(l+1)}{|c|}\right[.$$

Si nous considérons un nombre réel $x \in]a\alpha_m, a\alpha_{m+1}[$, nous savons qu'alors

$$x \in]j, j+1[, \frac{|b|}{a}x \in]k, k+1[\text{ et } \frac{|c|}{a}x \in]l, l+1[.$$

Nous en déduisons que

$$\{x\} = x - [x] = x - [a\alpha_m],$$

$$\left\{\frac{b}{a}x\right\} = \frac{b}{a}x - \left[\frac{b}{a}x\right] = \frac{b}{a}x - \inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}])$$

et

$$\left\{\frac{c}{a}x\right\} = \frac{c}{a}x - \left[\frac{c}{a}x\right] = \frac{c}{a}x - \inf([c\alpha_m], [c\alpha_{m+1}]).$$

Dire que $x \in E\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ signifie que

$$0 < \{x\} + \left\{\frac{c}{a}x\right\} - 1 < 1 - \left\{\frac{b}{a}x\right\} < \{x\}.$$

Nous avons alors les inégalités équivalentes

$$0 < \left(1 + \frac{c}{a}\right)x - ([a\alpha_m] + \inf([c\alpha_m], [c\alpha_{m+1}])) - 1 \\ < 1 - \frac{b}{a}x + \inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}]) < x - [a\alpha_m].$$

Le nombre réel x vérifie donc les trois conditions

$$x > \frac{1 + \inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}]) + [a\alpha_m]}{1 + \frac{b}{a}} := x_1(m),$$

$$x < \frac{2 + [a\alpha_m] + \inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}]) + \inf([c\alpha_m], [c\alpha_{m+1}])}{1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} := x_2(m),$$

$$x > \frac{1 + [a\alpha_m] + \inf([c\alpha_m], [c\alpha_{m+1}])}{1 + \frac{c}{a}} := x_3(m).$$

Posons alors

$$y_1(m) = \max\left(\frac{x_1(m)}{a}, \frac{x_3(m)}{a}, \alpha_m\right) \quad \text{et} \quad y_2(m) = \min\left(\alpha_{m+1}, \frac{x_2(m)}{a}\right).$$

Il est clair, d'après ce que nous venons d'écrire et le fait que les fonctions considérées dans l'ensemble $E\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ sont a-périodiques, que

$$E\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) \cap]a(q+\alpha_m), a(q+\alpha_{m+1})[=]a(q+y_1(m)), a(q+y_2(m))[$$

pour tout couple $(m, q) \in \mathbb{N}, 0 \le m \le M(a,b,c) - 1$.

Effectuons alors le calcul

$$\sum_{q\in\mathbb{N}} \int_{E\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)\cap]a(q+\alpha_m),a(q+\alpha_{m+1})[} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \sum_{q\in\mathbb{N}} \int_{a(q+y_1(m))}^{a(q+y_2(m))} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ = \sum_{q\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{a(q+y_1(m))} - \frac{1}{a(q+y_2(m))}\right) \\ = \frac{1}{a}\sum_{q\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{q+y_1(m)} - \frac{1}{q+y_2(m)}\right).$$

Si nous désignons par ψ la fonction digamma Γ'/Γ, nous savons (voir [Er], p. 15) que pour tous nombres réels α, β, tels que $0 < \alpha < \beta < 1$, nous avons

$$\sum_{q\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{q+\alpha} - \frac{1}{q+\beta}\right) = \psi(\beta) - \psi(\alpha). \tag{2.12}$$

Nous avons donc obtenu la formule explicite

$$e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)=\frac{1}{a}\sum_{m=0}^{M(a,b,c)-1}\big(\psi\left(y_2(m)\right)-\psi\left(y_1(m)\right)\big).$$

Dans le cas où $|b|=|c|=1$, nous pouvons obtenir, comme indiqué dans [Hat1], une formule plus pratique encore. En particulier, nous avons (le lecteur pourra se référer à [Hab] pour les calculs détaillés)

$$e\left(\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)=\log\left(\frac{a+1}{(a+2)^{\frac{a+2}{2(a+1)}}a^{\frac{a}{2(a+1)}}}\right)+\frac{\pi}{2(a+1)}(\chi(a+2)-\chi(a))$$

et

$$e\left(\frac{1}{a},\frac{-1}{a}\right)=\log\left(\frac{(a+1)^{\frac{a+1}{2a}}(a-1)^{\frac{a-1}{2a}}}{a}\right)+\frac{\pi}{2a}(\chi(a+1)-\chi(a-1))$$

en ayant posé

$$\chi(a)=\sum_{r=1}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\operatorname{cotan}\left(r\frac{\pi}{a}\right)\ .$$

Comme expliqué dans [Hat1], nous pouvons calculer $\chi(a)$ pour des petites valeurs de a. Ainsi, nous avons

$$\chi(1)=\chi(2)=0\,,\ \chi(3)=\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \chi(4)=1\,,$$
$$\chi(5)=\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}},\ \chi(6)=\frac{4}{\sqrt{3}}\,,\ \chi(8)=1+2\sqrt{2}\,,$$
$$\chi(10)=4\sqrt{1+2\sqrt{5}}\ \text{ et }\ \chi(12)=5+\frac{4}{\sqrt{3}}\,.$$

2.2.1.3 Relations entre les contenus des polynômes utilisés par Dubitskas, Hata, Rukhadze et Chudnovsky

Soient $a\in\mathbb{N}\setminus\{0\},b,c\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $a>-\min(b,c,b+c)$, nous noterons $I(a,b,c)$ l'intégrale $a\,e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)$. Nous définissons deux transformations ω_1 et ω_2 de $\mathbb{Z}^3$ par

$$\omega_1(a,b,c)=(a+b,-b,c) \tag{2.13}$$

et

$$\omega_2(a,b,c)=(a+c,b,-c). \tag{2.14}$$

Les fonctions ω_1 et ω_2 engendrent un groupe isomorphe au groupe diédral D_4. Nous montrons maintenant le

Lemme 2.9. *Soient $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $a > -\min(b, c, b+c)$, nous avons*

$$I(a,b,c) - I(\omega_i(a,b,c)) = \log\left(\frac{(a+b)^{a+b}(a+c)^{a+c}}{a^a(a+b+c)^{a+b+c}}\right) \text{ pour } i = 1, 2.$$

En composant ω_1 et ω_2, nous avons

$$a\, e\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) = (a+b+c)\, e\left(-\frac{b}{a+b+c}, -\frac{c}{a+b+c}\right).$$

Cette dernière relation signifie que le gain arithmétique obtenu à l'aide des polynômes proposés par D. V. et G. V. Chudnovsky peut être obtenu à l'aide de ceux considérés par Rukhadze et Dubitskas.

Preuve. Nous avons, par définition,

$$I(a,b,c) = a \int_{E\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Nous faisons le changement de variable $x = ay$. La relation précédente devient

$$I(a,b,c) = \int_{F(a,b,c)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2}$$

avec

$$F(a,b,c) = \Big\{y > 0,\ 0 < \{ay\} + \{cy\} - 1 < 1 - \{by\} < \{ay\}\Big\}.$$

Nous allons d'abord étudier la quantité

$$I(a,b,c) - I(\omega_1(a,b,c)) = \int_{F(a,b,c)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} - \int_{F(\omega_1(a,b,c))} \frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Rappelons que

$$F(a,b,c) = \Big\{y > 0,\ 1 < \{ay\} + \{by\},\ 1 < \{ay\} + \{cy\},\ 1 < \{ay\} + \{by\} + \{cy\} < 2\Big\}. \tag{2.15}$$

Soit $y \in F(\omega_1(a,b,c))$, nous avons donc

$$1 < \{(a+b)y\} + \{-by\},\quad 1 < \{(a+b)y\} + \{cy\}, \tag{2.16}$$

$$1 < \{(a+b)y\} + \{-by\} + \{cy\} < 2. \tag{2.17}$$

Nous savons que $\{-by\} \neq 0$ grâce à l'inégalité (2.16). Nous pouvons donc écrire $\{-by\} = 1 - \{by\}$. Les inégalités (2.16) et (2.17) deviennent alors respectivement

$$\{by\} < \{(a+b)y\} \tag{2.18}$$

et

$$\{(a+b)y\} - \{by\} + \{cy\} < 1.$$

Examinons $\{(a+b)y\}$. Nous avons soit $\{(a+b)y\} = \{ay\} + \{by\} - 1$, soit $\{(a+b)y\} = \{ay\} + \{by\}$. La première possibilité étant exclue du fait de (2.18), nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} F(\omega_1(a,b,c)) =& F(a+b,-b,c) \\ =& \Big\{ y>0,\ \{ay\}+\{by\}<1,\ \{ay\}+\{cy\}<1, \\ & \qquad 1<\{ay\}+\{by\}+\{cy\}<2 \Big\}. \end{aligned}$$

Il est commode d'introduire à ce moment les notations

$$\begin{aligned} g_1(y) &= \{ay\} + \{by\}, \\ g_2(y) &= \{ay\} + \{cy\}, \\ g_3(y) &= \{ay\} + \{by\} + \{cy\}. \end{aligned}$$

Notons que les ensembles $\{g_i = j\}$ pour $i = 1,2,3$ et $j = 0,1,2$ sont de mesure nulle. Soit E un ensemble. Désignons par χ_E la fonction caractéristique de E. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \int_{F(a,b,c)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{1<g_2\}}\chi_{\{1<g_3<2\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}} - \chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{F(\omega_1(a,b,c))} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{g_1<1\}}\chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}} - \chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$I(a,b,c) - I(\omega_1(a,b,c)) = \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}} - \chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Or, nous avons

$$\chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}} = \chi_{\{1<g_1\}} - \chi_{\{2\leq g_3\}},$$

et, de même,

$$\begin{aligned}\chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}} &= \chi_{\{1<g_3<2\}} - \chi_{\{1\leq g_2\}}\chi_{\{1<g_3<2\}}\\ &= \chi_{\{1<g_3<2\}} - \chi_{\{1\leq g_2\}} + \chi_{\{2\leq g_3\}}.\end{aligned}$$

Nous remarquons à cet endroit que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$ privé d'un ensemble de mesure nulle, nous avons

$$\begin{aligned}\chi_{\{1<g_1\}}(y) &= \{ay\} + \{by\} - \{(a+b)y\},\\ \chi_{\{1\leq g_2\}}(y) &= \{ay\} + \{cy\} - \{(a+c)y\},\\ \chi_{\{1<g_3<2\}}(y) + 2\chi_{\{2\leq g_3\}}(y) &= \{ay\} + \{by\} + \{cy\} - \{(a+b+c)y\}.\end{aligned}$$

Ces trois relations nous permettent d'écrire $I(a,b,c) - I(\omega_1(a,b,c))$ sous la forme

$$\begin{aligned}&I(a,b,c) - I(\omega_1(a,b,c))\\ &= \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{1<g_1\}} + \chi_{\{1\leq g_2\}} - \chi_{\{1<g_3<2\}} - 2\chi_{\{2\leq g_3\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\{(a+b)y\} + \{(a+c)y\} - \{ay\} - \{(a+b+c)y\}}{y^2}\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\{(a+b)y\} - (a+b)\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y + \int_0^{+\infty} \frac{\{(a+c)y\} - (a+c)\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y\\ &\quad - \int_0^{+\infty} \frac{\{ay\} - a\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y - \int_0^{+\infty} \frac{\{(a+b+c)y\} - (a+b+c)\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Soit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, nous allons calculer l'intégrale $J_k = \int_0^{+\infty} \frac{\{ky\}-k\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y$. Nous procédons comme suit

$$J_k = \sum_{q\in\mathbb{N}}\sum_{j=0}^{k-1} \int_{q+\frac{j}{k}}^{q+\frac{j+1}{k}} \frac{\{ky\} - k\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y.$$

Nous faisons alors le changement de variable $y = q + (j+\theta)/k$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}J_k &= \sum_{q\in\mathbb{N}}\sum_{j=0}^{k-1} \int_0^1 \frac{-j}{\left(q+\frac{j+\theta}{k}\right)^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{k}\\ &= \sum_{q\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{j}{q+\frac{j+1}{k}} - \frac{j}{q+\frac{j}{k}}\right)\\ &= -\sum_{j=1}^{k-1} j\left(\psi\left(\frac{j+1}{k}\right) - \psi\left(\frac{j}{k}\right)\right),\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la relation (2.12). Nous avons donc, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$J_k = \sum_{j=1}^{k-1} \psi\left(\frac{j}{k}\right) - (k-1)\psi(1).$$

Nous rappelons maintenant une formule qui découle de la formule de multiplication de Gauss et Legendre et que l'on peut trouver énoncée à la page 16 de [Er]. Soit $z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}z > 0$, soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous avons

$$\psi(kz) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \psi\left(z + \frac{j}{k}\right) + \log k.$$

Si nous donnons à z la valeur $1/k$, nous obtenons $J_k = k \log k$. Reprenons la relation (2.19). Elle devient maintenant

$$(2.20) \quad I(a,b,c) - I(\omega_1(a,b,c)) = (a+b)\log(a+b) + (a+c)\log(a+c) \\ - a\log a - (a+b+c)\log(a+b+c),$$

ce qui était le résultat annoncé pour ω_1.

Il nous reste maintenant à prouver que cette relation est aussi satisfaite si nous remplaçons ω_1 par ω_2. D'après son expression sous la forme (2.15), si a_1, b_1 et c_1 sont trois éléments de $\mathbb{Z}$ soumis aux hypothèses du lemme, nous avons $F(a_1,b_1,c_1) = F(a_1,c_1,b_1)$ ce qui entraîne $I(a_1,b_1,c_1) = I(a_1,c_1,b_1)$. Nous avons donc

$$I(a,b,c) - I(\omega_2(a,b,c)) = I(a,c,b) - I(\omega_1(a,c,b)).$$

Nous terminons la preuve en remarquant que la relation (2.20) est symétrique en b et c. □

2.2.2 Calculs de mesures d'irrationalité de $\log 2$

Nous donnons maintenant les formules nécessaires au calcul d'une mesure d'irrationalité de $\log 2$. Rappelons que, pour $n \in \mathbb{N}$, la notation $\mathbb{Z}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de degré inférieur ou égal à n.

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme

$$F_{a,b,c,n}(X) = \frac{1}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} P_{an,bn,cn}(X) \in \mathbb{Z}_{an}[X]$$

où a est un entier naturel et b, c deux entiers relatifs tels que $a > -\min(b, c, b+c)$ et $abc \neq 0$. Par la suite, nous le noterons plus simplement $F_n(X)$.

Rappelons que d_{an} désigne le p.p.c.m. de $\{1, \ldots, an\}$. Nous avons

$$J_n = \int_0^1 \frac{F_n(x) - F_n(-1)}{1+x} \mathrm{d}x \in \frac{\mathbb{Z}}{d_{an}},$$

$$J_n + F_n(-1)\log 2 = \int_0^1 \frac{F_n(x)}{1+x}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 Q_n(x)F_n(x)\mathrm{d}x + \frac{(-1)^{\beta n}}{2^{\gamma n}}\int_0^1 \frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n}F_n(x)}{1+x}\mathrm{d}x\,,$$

où $\beta = \max(0,b), \gamma = \max(0,c)$ et

$$Q_n(X) = \frac{1-2^{-\gamma n}(-X)^{\beta n}(1-X)^{\gamma n}}{1+X} \in \frac{1}{2^{\gamma n}}\mathbb{Z}_{(\beta+\gamma)n-1}[X] \text{ si } \max(b,c)\geq 1,$$
$$= 0 \text{ sinon.}$$

En posant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n = 2^{\gamma n} d_{(a+\beta+\gamma)n} F_n(-1)\,,$$
$$p_n = 2^{\gamma n} d_{(a+\beta+\gamma)n}\int_0^1 Q_n(x)F_n(x)\mathrm{d}x - 2^{\gamma n} d_{(a+\beta+\gamma)n} J_n$$
$$\text{et } \varepsilon_n = (-1)^{\beta n} d_{(a+\beta+\gamma)n}\int_0^1 \frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n}F_n(x)}{1+x}\mathrm{d}x\,,$$

nous obtenons $\varepsilon_n = q_n\log 2 - p_n$ avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$.

Étudions le comportement asymptotique de la suite (q_n). Soit C_r le cercle de rayon r centré en -1. La formule de Cauchy donne, pour tout $r>0$,

$$q_n = \frac{d_{(a+\beta+\gamma)n}2^{\gamma n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)}\oint_{C_r}\frac{z^{(a+c)n}(1-z)^{(a+b)n}}{(z+1)^{(a+b+c)n+1}}\frac{\mathrm{d}z}{2i\pi}$$
$$= \frac{d_{(a+\beta+\gamma)n}2^{\gamma n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)}\int_0^1 \frac{\left(-1+re^{2i\pi\theta}\right)^{(a+c)n}\left(2-re^{2i\pi\theta}\right)^{(a+b)n}}{\left(re^{2i\pi\theta}\right)^{(a+b+c)n}}\mathrm{d}\theta\,.$$

Nous avons donc

$$|q_n| \leq \frac{d_{(a+\beta+\gamma)n}2^{\gamma n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} r^{-(a+b+c)n}(1+r)^{(a+c)n}(2+r)^{(a+b)n} \quad \text{pour tout } r>0.$$

Nous en déduisons, grâce à l'égalité (2.5) et au Lemme 2.7,

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{\log|q_n|}{n} \leq a+\beta+\gamma(1+\log 2) - ae\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)$$
$$+\min_{r>0}\log(r^{-(a+b+c)}(1+r)^{a+c}(2+r)^{a+b})$$
$$= \sigma_{a,b,c}(\log 2)\,.$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2\}$ par

$$u_{a,b,c}(r) = \log\left(\frac{|1+r|^{a+c}|2+r|^{a+b}}{|r|^{a+b+c}}\right)$$

atteint son minimum en $r_0(a,b,c) = \left(2b+c+\sqrt{(c+2b)^2+8a(a+b+c)}\right)/2a$. Nous avons

$$(2.21)\quad u_{a,b,c}(r_0(a,b,c)) = -a\log(2a) + (a+c)\log\left[2(a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right] + (a+b)\log\left[2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right] - (a+b+c)\log\left[2b+c+\sqrt{\Delta}\right]$$

avec $\Delta = (c+2b)^2 + 8a(a+b+c)$.

Il reste à étudier le comportement de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En intégrant par parties $(a+b+c)n$ fois, nous trouvons

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{(-1)^{\beta n} d_{(a+\beta+\gamma)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)((a+b+c)n)!}\int_0^1 x^{(a+c)n}(1-x)^{(a+b)n}\left(\frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n}}{1+x}\right)^{((a+b+c)n)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{2^{\gamma n} d_{(a+\beta+\gamma)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)}\int_0^1 \frac{x^{(a+c)n}(1-x)^{(a+b)n}}{(1+x)^{(a+b+c)n+1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{x^{\beta n}}{1+x}(1-x)^{\gamma n} = \frac{(-1)^{\beta n}2^{\gamma n}}{1+x} - (-1)^{\beta n}2^{\gamma n}Q_n(x).$$

Les égalités (2.5) et (2.7) et le Lemme 2.7 nous donnent

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|\varepsilon_n| &= a+\beta+\gamma(1+\log 2) - ae\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) + \max_{0\le x\le 1}\log\left(\frac{x^{a+c}(1-x)^{a+b}}{(1+x)^{a+b+c}}\right)\\ &= -\tau_{a,b,c}(\log 2)\,.\end{aligned}$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$ par

$$v_{a,b,c}(x) = \log\left(\frac{|x|^{a+c}|1-x|^{a+b}}{|1+x|^{a+b+c}}\right) = u_{a,b,c}(-1-x)$$

atteint son maximum en $x_0(a,b,c) = \frac{\sqrt{(2a+2b+c)^2+4a(a+c)}-2(a+b)-c}{2a}$ et vaut en ce point

$$v(x_0(a,b,c)) = -a\log(2a) + (a+c)\log\left[-c-2(a+b)+\sqrt{\Delta}\right] + (a+b)\log\left[2(2a+b)+c-\sqrt{\Delta}\right] - (a+b+c)\log\left[-c-2b+\sqrt{\Delta}\right]$$

avec toujours $\Delta = (2b+c)^2 + 8a(a+b+c)$. Nous savons, grâce au Lemme 2.3, que le nombre $1+\sigma_{a,b,c}(\log 2)/\tau_{a,b,c}(\log 2)$ est une mesure d'irrationalité de $\log 2$.

Remarque 2.10. La méthode du col, que l'on peut voir exposée dans [Di], nous permet de montrer que la composante analytique intervenant dans la majoration de $\limsup_{n\to\infty}\log|q_n|/n$ par $\sigma_{a,b,c}(\log 2)$ est la meilleure possible.

Remarque 2.11. Les calculs que nous venons de faire s'adaptent bien aux nombres de la forme $\log(1+s/t)$ avec $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $s/t \in]-1,1]$. Cela permet en particulier de retrouver le Théorème 2 de [HMAV]. Nous obtenons en fait

$$\begin{aligned}\sigma_{a,b,c}(\log(1+s/t)) = &a(1+\log|s|)+\beta(1+\log|t|)+\gamma(1+\log|s+t|)\\ &-a\,e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)+\min_{r>0}\log\left(\frac{\left(r+\left|\frac{t}{s}\right|\right)^{a+c}\left(r+\left|1+\frac{t}{s}\right|\right)^{a+b}}{r^{a+b+c}}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tau_{a,b,c}(\log(1+s/t)) = &a(1+\log|s|)+\beta(1+\log|t|)+\gamma(1+\log|s+t|)\\ &-a\,e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)+\max_{0\le x\le 1}\log\left(\frac{x^{a+c}(1-x)^{a+b}}{\left(x+\frac{t}{s}\right)^{a+b+c}}\right).\end{aligned}$$

2.2.2.1 Liens entre les mesures d'irrationalité de $\log 2$ données par les polynômes de Rukhadze, Dubitskas, Hata et Chudnovsky

Soient ω_1 et ω_2 les fonctions données par les formules (2.13) et (2.14). Nous établissons maintenant un résultat qui signifie notamment que toute mesure d'irrationalité de $\log 2$ obtenue à l'aide des polynômes de D. V. et G. V. Chudnovsky peut l'être aussi à l'aide de ceux utilisés par Rukhadze ou de ceux considérés par Hata.

Lemme 2.12. *Soient $a \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, b$ et $c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $a > -\min(b,c,b+c)$, nous avons*

$$\mu_{\omega_i(a,b,c)}(\log 2) = \mu_{(a,b,c)}(\log 2) \ \textit{pour}\ i = 1,2.$$

Preuve. Nous allons tout d'abord montrer que $\sigma_{\omega_1(a,b,c)}(\log 2) = \sigma_{a,b,c}(\log 2)$. Nous savons par le Lemme 2.9 que nous avons

$$\begin{aligned}I(a,b,c) - I(\omega_1(a,b,c)) = &(a+b)\log(a+b)+(a+c)\log(a+c)\\ &-a\log a-(a+b+c)\log(a+b+c)\end{aligned}$$

où $I(a,b,c)$ désigne la quantité $a\,e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)$. Nous utilisons la formule (2.21) pour calculer $\min_{r>0} u_{a,b,c}(r) - \min_{r>0} u_{\omega_1(a,b,c)}(r)$ (rappelons que Δ désigne la quantité

$(c+2b)^2+8a(a+b+c)$, qui est invariante sous l'action de ω_1) :

$$\begin{aligned}
&u_{a,b,c}(r_0(a,b,c)) - u_{\omega_1(a,b,c)}(r_0(\omega_1(a,b,c)))\\
&= -a\log(2a) + (a+b)\log(2(a+b)) + (a+b)\log\left(2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right)\\
&\quad - a\log\left(2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right) + (a+c)\log\left(2(a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right)\\
&\quad + (a+c)\log\left(-2b+c+\sqrt{\Delta}\right) - (a+b+c)\log\left(2b+c+\sqrt{\Delta}\right)\\
&\quad - (a+b+c)\log\left(2a+c+\sqrt{\Delta}\right)\\
&= b\log 2 - a\log a + (a+b)\log(a+b) + b\log\left(2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right)\\
&\quad - (a+b+c)\log\left(2(a+b+c)\left(2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right)\right)\\
&\quad + (a+c)\log\left(2(a+c)\left(2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right)\right)\\
&= -a\log a + (a+b)\log(a+b) - (a+b+c)\log(a+b+c) + (a+c)\log(a+c).
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$u_{a,b,c}(r_0(a,b,c)) - I(a,b,c) = u_{\omega_1(a,b,c)}(r_0(\omega_1(a,b,c))) - I(\omega_1(a,b,c)).$$

Rappelons que, pour tout triplet (a,b,c) soumis aux conditions du lemme, nous avons

$$\sigma_{a,b,c}(\log 2) = a + \max(0,b) + \max(0,c)(1+\log 2) - I(a,b,c) + u_{a,b,c}(r_0(a,b,c)).$$

Il s'ensuit donc maintenant facilement que

$$\sigma_{a,b,c}(\log 2) = \sigma_{\omega_1(a,b,c)}(\log 2).$$

Nous pouvons montrer à l'aide de calculs semblables que

$$\tau_{a,b,c}(\log 2) = \tau_{\omega_1(a,b,c)}(\log 2).$$

De la même façon, nous prouverions

$$\mu_{\omega_2(a,b,c)}(\log 2) = \mu_{(a,b,c)}(\log 2).$$

□

Remarque 2.13. Là encore, les calculs précédents s'adaptent bien aux nombres de la forme $\log(1+s/t)$ avec $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $s/t \in]-1,1]$. Nous obtenons donc

$$\mu_{\omega_i(a,b,c)}(\log(1+s/t)) = \mu_{(a,b,c)}(\log(1+s/t)) \text{ pour } i=1,2$$

avec $a \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, b et $c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $a > -\min(b,c,b+c)$.

2.2.2.2 Figures et résultats

Nous avons établi dans le paragraphe précédent les formules

$$\begin{aligned}(2.22)\quad \sigma_{a,b,c}(\log 2) &= a+\beta+\gamma(1+\log 2)-ae\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)-a\log(2a)\\ &+(a+c)\log\left[2(a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right]+(a+b)\log\left[2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right]\\ &-(a+b+c)\log\left[2b+c+\sqrt{\Delta}\right]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(2.23)\quad \tau_{a,b,c}(\log 2) &= a\,e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)-a-\beta-\gamma(1+\log 2)+a\log(2a)\\ &-(a+c)\log\left[-c-2(a+b)+\sqrt{\Delta}\right]\\ &-(a+b)\log\left[2(2a+b)+c-\sqrt{\Delta}\right]+(a+b+c)\log\left[-c-2b+\sqrt{\Delta}\right]\end{aligned}$$

avec $a\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, b, c\in\mathbb{Z}$ tels que $a>-\min(b,c,b+c)$, $\beta=\max(0,b), \gamma=\max(0,c)$, et enfin $\Delta=(c+2b)^2+8a(a+b+c)$.

Grâce à l'algorithme de calcul de l'intégrale que l'on trouve en 2.2.1.2, nous pouvons donc calculer explicitement la mesure d'irrationalité de $\log 2$ associée au choix de paramètres (a,b,c) (choix qui détermine la classe d'approximants du type (2.10) qui va être utilisée). Nous avons donc écrit un programme qui fonctionne sous GP, la calculette du système PARI [Pari]. Il associe à un triplet (a,b,c) convenable une mesure d'irrationalité de $\log 2$ calculée sous forme numérique à la précision souhaitée. D'autre part, en considérant les formules (2.22) et (2.23), il est facile de remarquer que nous avons $\mu_{(ka,kb,kc)}(\log 2)=\mu_{(a,b,c)}(\log 2)$ pour tous $a,k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $b,c\in\mathbb{Z}$ tels que $a>-\min(b,c,b+c)$. Cela nous autorise à faire le paramétrage non plus sur des triplets d'entiers (a,b,c) mais sur des couples de nombres rationnels qui peuvent toujours s'écrire sous la forme $(a/b,a/c)$ avec a,b et c trois entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Nous noterons dorénavant indifféremment $\mu_{(a,b,c)}(\log 2)$ ou $\mu_{a/b,a/c}(\log 2)$ la mesure d'irrationalité de $\log 2$ associée au triplet (a,b,c).

De plus, grâce au Lemme 2.12, nous savons que nous pouvons restreindre notre étude aux points rationnels $(a/b,a/c)$ avec a,b et $c\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. En parcourant ce quart de plan, nous nous sommes aperçus que la zone la plus intéressante se trouvait autour du point $(6,6)$. Nous avons donc procédé à une étude plus fine des mesures d'irrationalité obtenues au voisinage de ce point. Nous avons en fait calculé les mesures d'irrationalité en tous les points d'un maillage autour de $(6,6)$ formé par les points de coordonnées

$$\mathcal{M}_{6,6}=\left(6+\frac{j}{25}+\frac{k}{50},6+\frac{j}{25}-\frac{k}{50}\right)_{j,k\in\mathbb{Z},-25\le j\le 25,-50\le k\le 50}.$$

Nous obtenons ainsi la figure 2.1. C'est une figure à trois dimensions dans laquelle l'abscisse est le rapport a/b, l'ordonnée vaut a/c et la hauteur est égale à l'opposée (pour donner une meilleure visibilité) de la mesure d'irrationalité associée. La figure 2.1 représente une surface d'interpolation des points

$$(x, y, -\mu_{x,y}(\log 2))_{(x,y)\in\mathcal{M}_{6,6}}.$$

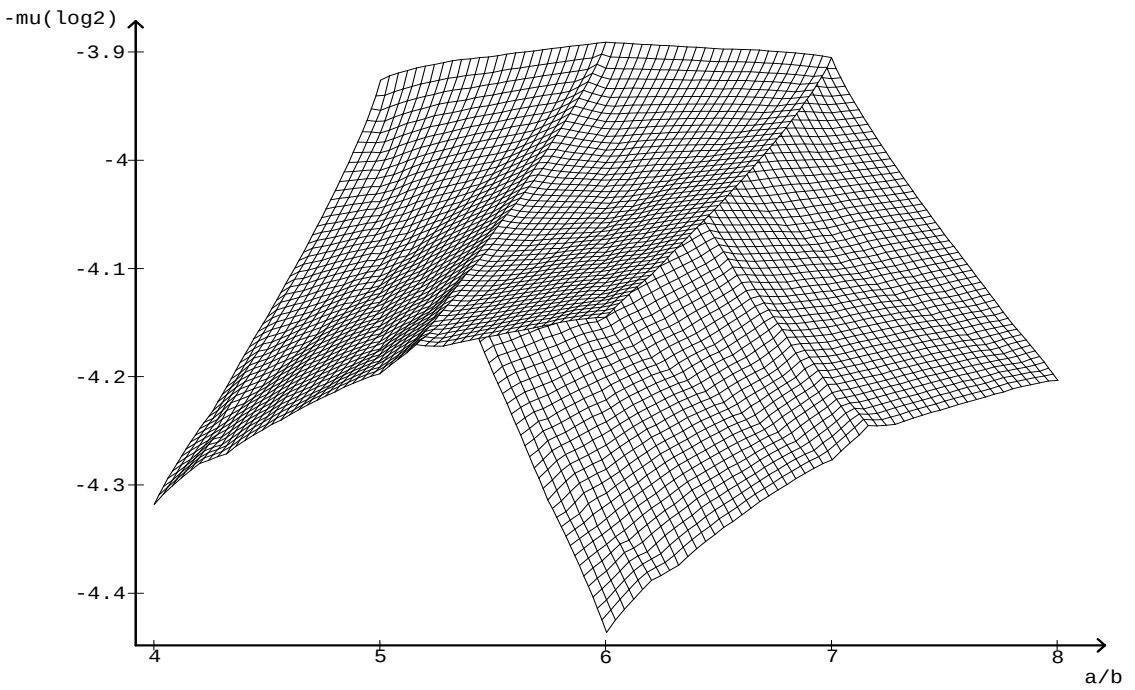

Figure 2.1. Mesures d'irrationalité de $\log 2$ autour du triplet (6,1,1).

On voit se dégager nettement sur cette surface une ligne de crête qui correspond aux valeurs obtenues en des points de la demi-droite d'équation $\{y = x, x > 0\}$. Nous restreignons maintenant l'étude à celle des points de la forme $(a/b, a/b)$ avec $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $j \in \mathbb{N}$, posons $x_j = 2 + j/14000$. Observons maintenant la figure 2.2. C'est une figure à deux dimensions sur laquelle le nombre rationnel a/b est en abscisse et la mesure d'irrationalité $\mu_{a/b,a/b}(\log 2)$ se trouve en ordonnée. Elle représente une courbe d'interpolation des points de coordonnées $(x_j, \mu_{x_j,x_j}(\log 2))_{0\leq j\leq 14000}$. Le minimum visible sur cette courbe est atteint au point $(6, 6)$.

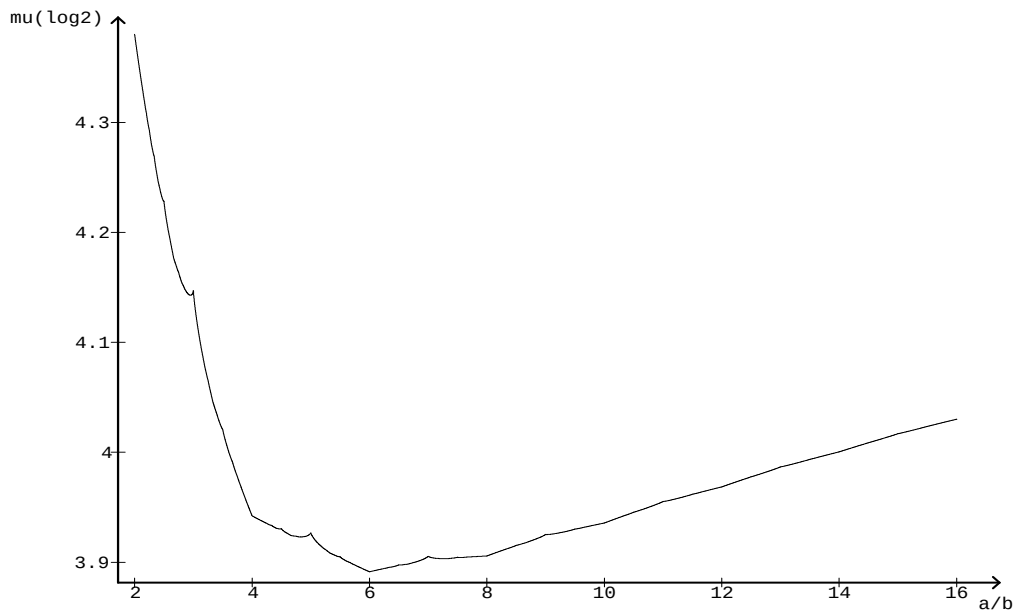

Figure 2.2. Mesures d'irrationalité de $\log 2$ obtenues aux points $(\nu, \nu), \nu \in \mathbb{Q} \cap [2, 16]$.

Finalement, les meilleures mesures d'irrationalité trouvées correspondent aux choix de paramètres $(8, -1, -1), (7, 1, -1), (6, 1, 1)$ et $(7, -1, 1)$. Le premier triplet correspond au choix de paramètres fait par E. A. Rukhadze [Ruk], nous avons alors

$$\mu_{8,-1,-1}(\log 2) = 1 + \frac{\log(2\alpha) + \beta}{\log \alpha - \beta}$$

avec

$$\alpha = 2^{-11}(153333125 + 7734633\sqrt{393})$$

et

$$\beta = 8 - \pi\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Numériquement, $\mu_{8,-1,-1}(\log 2) = 3,8913997...$. Le triplet $(7, 1, -1)$ considéré par Hata dans [Hat1] donne la même mesure d'irrationalité et nous retrouvons aussi cette valeur en faisant les choix $(6, 1, 1)$ et $(7, -1, 1)$ (ce qui est normal d'après le Lemme 2.12). Le polynôme $P_{6n,n,n}$ associé au premier de ces deux derniers choix correspond au polynôme

$$C_{6n,n}(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}L_{6n}(z),$$

où L_n désigne le n-ième polynôme de Legendre, exhibé par D. V. et G. V. Chudnovsky dans [Chu4] : en fait, nous avons $C_{6n,n} = \binom{7n}{n} P_{6n,n,n}$. Ils annoncent dans [Chu4] que l'utilisation d'un simple paramétrage à une dimension et le calcul du contenu de ces polynômes leur permettent de trouver une mesure d'irrationalité égale à $3,87...$ alors que nous n'avons pu, en utilisant de façon optimale (cf. les Remarques 2.8 et 2.10) les mêmes méthodes, que retrouver le résultat de Rukhadze et Hata. Le Lemme 2.12 indique d'ailleurs que nous ne pouvons pas nous attendre à mieux.

2.2.3 Calculs de mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$

Nous utilisons de nouveau la classe de polynômes

$$F_n(X) = \frac{1}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} P_{an,bn,cn}(X) \in \mathbb{Z}_{an}[X]$$

avec $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $a > -\min(b, c, b+c)$.

Alors, nous avons

$$J_n = \int_0^1 \frac{F_n(x) - F_n\big(e^{\frac{i\pi}{3}}\big)}{x - e^{\frac{i\pi}{3}}} \mathrm{d}x \in \frac{1}{d_{an}} (\mathbb{Z} + j\mathbb{Z})$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et

$$\begin{aligned} J_n + F_n\big(e^{\frac{i\pi}{3}}\big)\frac{i\pi}{3} &= \int_0^1 \frac{F_n(x)}{x - e^{\frac{i\pi}{3}}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 Q_n(x) F_n(x) \mathrm{d}x + \underbrace{\frac{(e^{-\frac{i\pi}{3}})^{\beta n}}{(1 - e^{\frac{i\pi}{3}})^{\gamma n}} \int_0^1 \frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n} F_n(x)}{x - e^{\frac{i\pi}{3}}} \mathrm{d}x}_{v_n} \end{aligned}$$

avec $\beta = \max(0, b), \gamma = \max(0, c)$ et

$$\begin{aligned} Q_n(X) &= \frac{1 - (-j)^{(\beta-\gamma)n} X^{\beta n}(1-X)^{\gamma n}}{X - e^{\frac{i\pi}{3}}} \in (\mathbb{Z} + j\mathbb{Z})_{(\beta+\gamma)n-1}[X] \text{ si } \max(b, c) \geq 1, \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

En posant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n = i\sqrt{3}\, d_{(a+\beta+\gamma)n} F_n\big(e^{\frac{i\pi}{3}}\big),$$

$$p_n = 3\, d_{(a+\beta+\gamma)n} \left(\int_0^1 Q_n(x) F_n(x) \mathrm{d}x - J_n \right)$$

$$\text{et } \varepsilon_n = 3\, d_{(a+\beta+\gamma)n} v_n,$$

nous obtenons $\varepsilon_n = q_n \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - p_n$, avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$.

Examinons le comportement asymptotique de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La formule de Cauchy nous donne

$$q_n = i\sqrt{3} \frac{d_{(a+\beta+\gamma)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \oint_C \frac{z^{(a+c)n}(1-z)^{(a+b)n}}{(z - e^{\frac{i\pi}{3}})^{(a+b+c)n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2i\pi}$$

où C est le cercle unité centré en $e^{\frac{i\pi}{3}}$. En posant $z = e^{\frac{i\pi}{3}}(1 - e^{2i\theta})$, nous avons donc

$$|q_n| \leq \sqrt{3}\, \frac{d_{(a+\beta+\gamma)n} 2^{(2a+b+c)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \max_{0\leq\theta\leq\pi} \left(\sin\theta^{(a+c)n} \left| \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right|^{(a+b)n} \right) .$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|q_n|}{n} &\leq a+\beta+\gamma+(2a+b+c)\log 2 - a\, e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) + \max_{0\leq\theta\leq\pi} g_{a,b,c}(\theta) \\ &= \sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right) , \end{aligned}$$

la fonction $g_{a,b,c}$ étant définie par la relation

$$g_{a,b,c}(\theta) = (a+c)\log|(\sin\theta)| + (a+b)\log\left|\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right| .$$

Sur l'intervalle $[0,\pi]$, elle ne peut atteindre ses extrema qu'aux points

$$\theta_0(a,b,c) = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{c-b}{2(2a+b+c)}\right)$$

et

$$\theta_1(a,b,c) = \frac{7\pi}{12} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{c-b}{2(2a+b+c)}\right) .$$

En effet, comme $a > -\min(b, c, b+c)$, nous voyons facilement que la fraction $(c-b)/2(2a+b+c)$ appartient à l'intervalle $]-1/2, 1/2[$. Par conséquent, le nombre réel $\arcsin((c-b)/(2a+b+c))$ se trouve dans l'intervalle $]-\pi/6, \pi/6[$. Nous en déduisons que $\theta_0(a,b,c)$ appartient à $]0,\pi/6[$ et que $\theta_1(a,b,c)$ est un élément de $]\pi/2, 2\pi/3[$.

Il reste à étudier le comportement de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous intégrons ε_n par parties $(a+b+c)n$ fois. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{3 d_{(a+\beta+\gamma)n} (e^{-\frac{i\pi}{3}})^{\beta n}}{(1-e^{\frac{i\pi}{3}})^{\gamma n} d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \int_0^1 \frac{x^{(a+c)n}(1-x)^{(a+b)n}}{((a+b+c)n)!} \left(\frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n}}{x - e^{\frac{i\pi}{3}}}\right)^{((a+b+c)n)} \mathrm{d}x \\ &= \frac{3\, d_{(a+\beta+\gamma)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \int_0^1 \frac{x^{(a+c)n}(1-x)^{(a+b)n}}{(x - e^{\frac{i\pi}{3}})^{(a+b+c)n+1}} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

puisque le polynôme $Q_n(x)$ est de degré $(\beta+\gamma)n-1$ et que $\beta+\gamma \leq a+b+c$ (rappellons que $a > -\min(b,c,b+c)$). Nous en déduisons, après avoir remplacé le contour d'intégration initial par le plus petit arc de cercle de centre $e^{\frac{i\pi}{3}}$ joignant 0 à 1,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|\varepsilon_n| \leq a+\beta+\gamma+(2a+b+c)\log 2 - ae\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) + \max_{0\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}} g_{a,b,c}(\theta)$$
$$= -\tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right) .$$

Le maximum de $g_{a,b,c}$ sur l'intervalle $[0,\pi/6]$ est atteint en $\theta_0(a,b,c)$.

Nous montrons exactement de la même façon que dans la fin de la preuve du Théorème 4.2 de [Hat1] que nous pouvons bien appliquer le Lemme 2.4. Nous savons alors que le nombre $1+\sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)/\tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ est une mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$.

Remarque 2.14. La méthode du col [Di] montre que les composantes analytiques intervenant dans les majorations des quantités $\limsup_{n\to\infty}\log|q_n|/n$ et $\limsup_{n\to\infty}\log|\varepsilon_n|/n$ par $\sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ et $-\tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ respectivement sont optimales.

2.2.3.1 Liens entre les mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ données par les polynômes de Rukhadze, Dubitskas, Hata et Chudnovsky

Nous allons maintenant montrer un résultat qui va nous permettre de restreindre le champ de paramètres (a,b,c) à étudier.

Lemme 2.15. *Soient $a \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, b$ et $c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $a > -\min(b,c,b+c)$, nous avons*

$$\mu_{(a,b,c)}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \mu_{\omega_1\omega_2(a,b,c)}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \mu_{(a+b+c,-b,-c)}\left(\pi/\sqrt{3}\right) .$$

En particulier, toute mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ trouvée à l'aide des polynômes de D. V. et G. V. Chudnovsky peut être retrouvée à l'aide de ceux utilisés par Dubitskas.

Preuve. Nous avons clairement les égalités

$$\theta_0(a+b+c,-b,-c) = \frac{\pi}{6} - \theta_0(a,b,c)$$

et

$$\theta_1(a+b+c,-b,-c) = \pi + \frac{\pi}{6} - \theta_1(a,b,c).$$

Nous en déduisons que

$$g_{a+b+c,-b,-c}(\theta_i(a+b+c,-b,-c)) = g_{a,b,c}(\theta_i(a,b,c)) \text{ pour } i=0,1.$$

Les formules

$$\sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = a+\beta+\gamma+(2a+b+c)\log 2 - a\,e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) + \max_{0\leq\theta\leq\pi} g_{a,b,c}(\theta),$$
$$\tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = a\,e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) - a-\beta-\gamma-(2a+b+c)\log 2 - \max_{0\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}} g_{a,b,c}(\theta)$$

et le Lemme 2.9 nous donnent alors les égalités

$$\sigma_{a+b+c,-b,-c}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$$

et

$$\tau_{a+b+c,-b,-c}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right).$$

□

2.2.3.2 Figures et résultats

Nous pouvons calculer explicitement la mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ associée au choix de paramètres (a,b,c). Nous devons procéder à une simple adaptation du programme GP écrit pour $\log 2$. Le point un peu délicat qui est celui du calcul de l'intégrale $e(b/a, c/a)$ étant déjà implanté, il nous faut juste entrer les formules donnant les maxima de $g_{a,b,c}(\theta)$ sur $[0,\pi]$ et sur $[0,\pi/6]$. Ce programme donne donc une mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ calculée sous forme numérique à la précision souhaitée à partir des paramètres (a,b,c).

Nous constatons, en regardant les expressions de $\sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ et $\tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ que $\mu_{(ka,kb,kc)}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \mu_{(a,b,c)}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ pour tous $a,k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $b,c \in \mathbb{Z}$ tels que $a > -\min(b,c,b+c)$. Ce fait, ajouté au résultat donné par le Lemme 2.15, nous permet d'effectuer un paramétrage non plus sur des triplets d'entiers (a,b,c) mais sur des couples de nombres rationnels qui peuvent toujours s'écrire sous la forme $(a/b, a/c)$ avec $a,b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $a > -c$ et a,b,c premiers entre eux dans leur ensemble. Là encore, nous noterons dorénavant indifféremment $\mu_{(a,b,c)}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ ou $\mu_{a/b,a/c}(\pi/\sqrt{3})$ la mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ associée au triplet (a,b,c).

Le parcours de ces deux quarts de plan nous permet de constater que les zones les plus intéressantes se trouvent autour des points $(4,4)$ et $(5,-5)$. Nous avons donc procédé à une étude plus fine des mesures d'irrationalité obtenues au voisinage de ces points. Nous avons calculé les mesures d'irrationalité en tous les points d'un maillage autour de $(4,4)$ formé par les points de coordonnées

$$\mathcal{M}_{4,4} = \left(4+\frac{j}{25}+\frac{k}{50}, 4+\frac{j}{25}-\frac{k}{50}\right)_{j,k\in\mathbb{Z},-25\leq j\leq 25,-50\leq k\leq 50}$$

et d'un autre maillage autour de $(5,-5)$ formé par les points de coordonnées

$$\mathcal{M}_{5,-5} = \left(5+\frac{j}{50}+\frac{k}{25}, -5+\frac{j}{50}-\frac{k}{25}\right)_{j,k\in\mathbb{Z},-50\leq j\leq 50,-25\leq k\leq 25}.$$

Nous obtenons ainsi les figures 2.3 et 2.4. Ce sont des figures à trois dimensions dans lesquelles l'abscisse est le rapport a/b, l'ordonnée vaut a/c et la hauteur est égale à l'opposée (pour donner une meilleure visibilité) de la mesure d'irrationalité associée. La figure 2.3 (respectivement la figure 2.4) représente une surface d'interpolation des points $\left(x,y,-\mu_{x,y}\left(\pi/\sqrt{3}\right)\right)_{(x,y)\in\mathcal{M}_{4,4}}$ (respectivement
$\left(x,y,-\mu_{x,y}\left(\pi/\sqrt{3}\right)\right)_{(x,y)\in\mathcal{M}_{5,-5}}$).

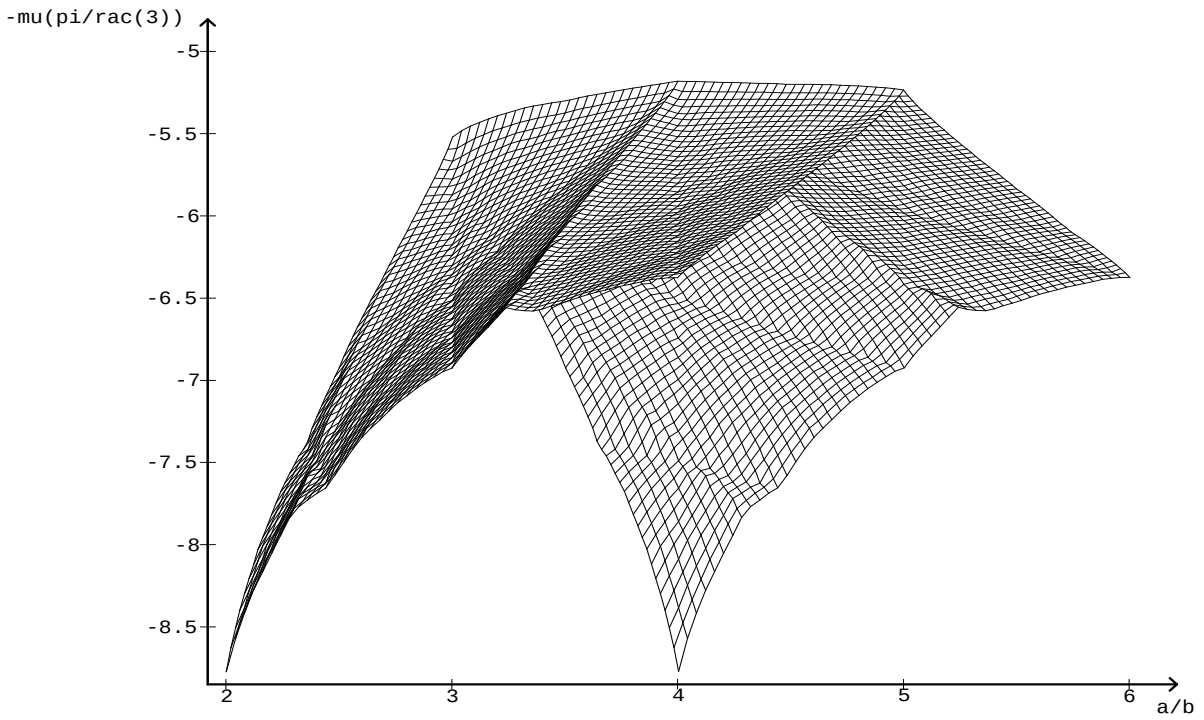

Figure 2.3. Mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ autour du triplet (4,1,1).

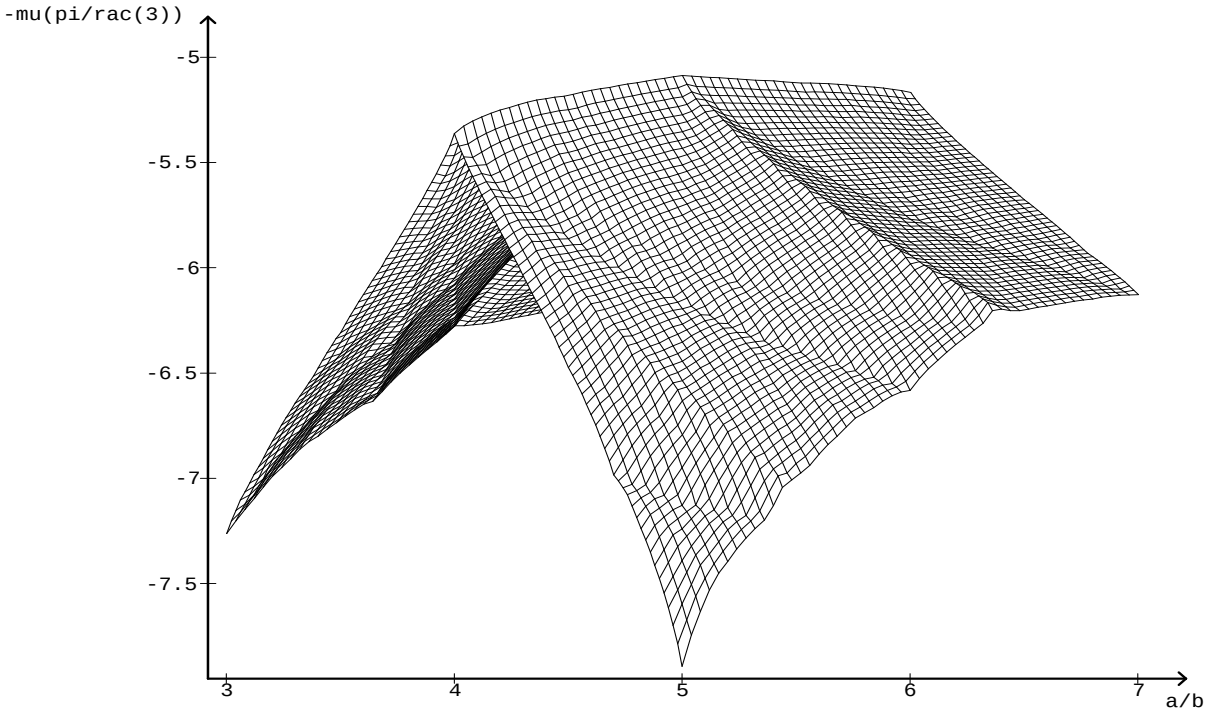

Figure 2.4. Mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ autour du triplet (5,1,-1).

Ici aussi, les meilleures valeurs correspondent apparemment à celles obtenues aux points rationnels des demi-droites d'équation $\{y = x, x > 0\}$ et $\{y = -x, x > 0\}$. Nous restreignons maintenant notre étude à celle des points de la forme $(a/b, a/c)$ avec $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $c = \pm b$ tels que $a > -c$. Soit $j \in \mathbb{N}$, posons $x_j = 2 + j/14000$. Observons maintenant les figures 2.5 et 2.6. Ce sont des figures à deux dimensions sur lesquelles le nombre rationnel a/b est en abscisse et la mesure d'irrationalité $\mu_{a/b,a/b}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ se trouve en ordonnée pour la première, le nombre réel $\mu_{a/b,-a/b}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ se trouvant en ordonnée pour la seconde. Elles représentent les courbes d'interpolation des points de coordonnées

$$\left(x_j, \mu_{x_j,x_j}\left(\pi/\sqrt{3}\right)\right)_{0\leq j\leq 14000}$$

pour la figure 2.5 et

$$\left(x_j, \mu_{x_j,-x_j}\left(\pi/\sqrt{3}\right)\right)_{1000\leq j\leq 14000}$$

pour la figure 2.6. Les minima visibles sur ces courbes sont atteints aux points $(4, 4)$ et $(5, -5)$.

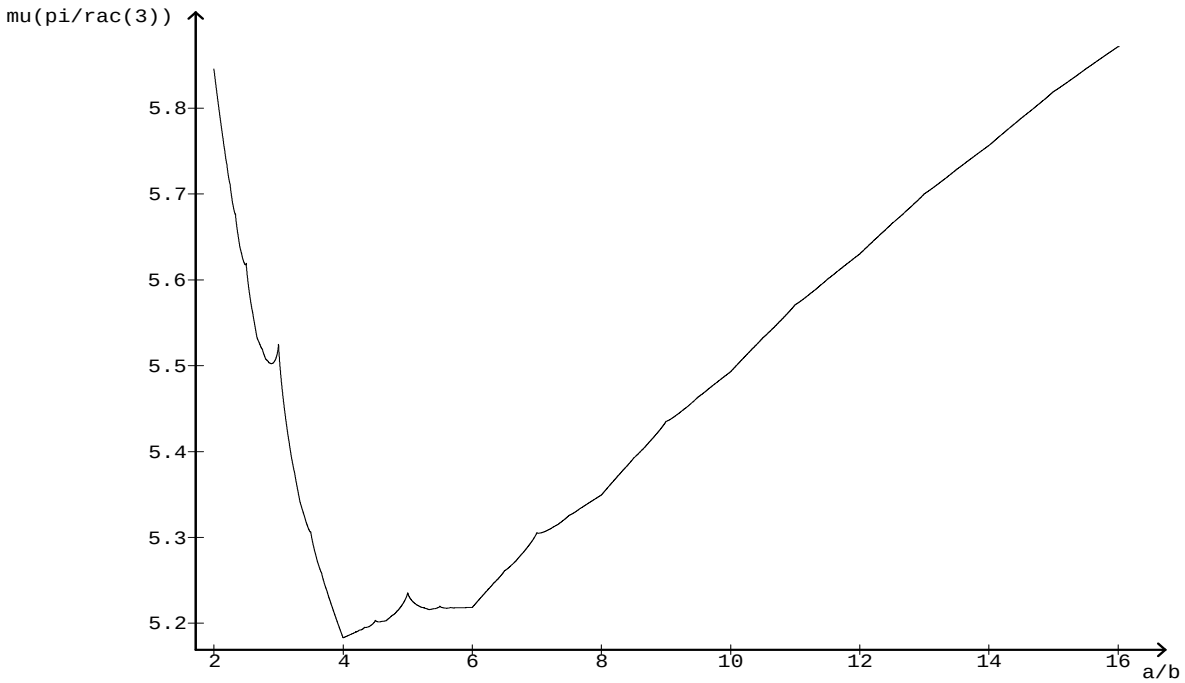

Figure 2.5. Mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ obtenues aux points $(\nu, \nu), \nu \in \mathbb{Q} \cap [2, 16]$.

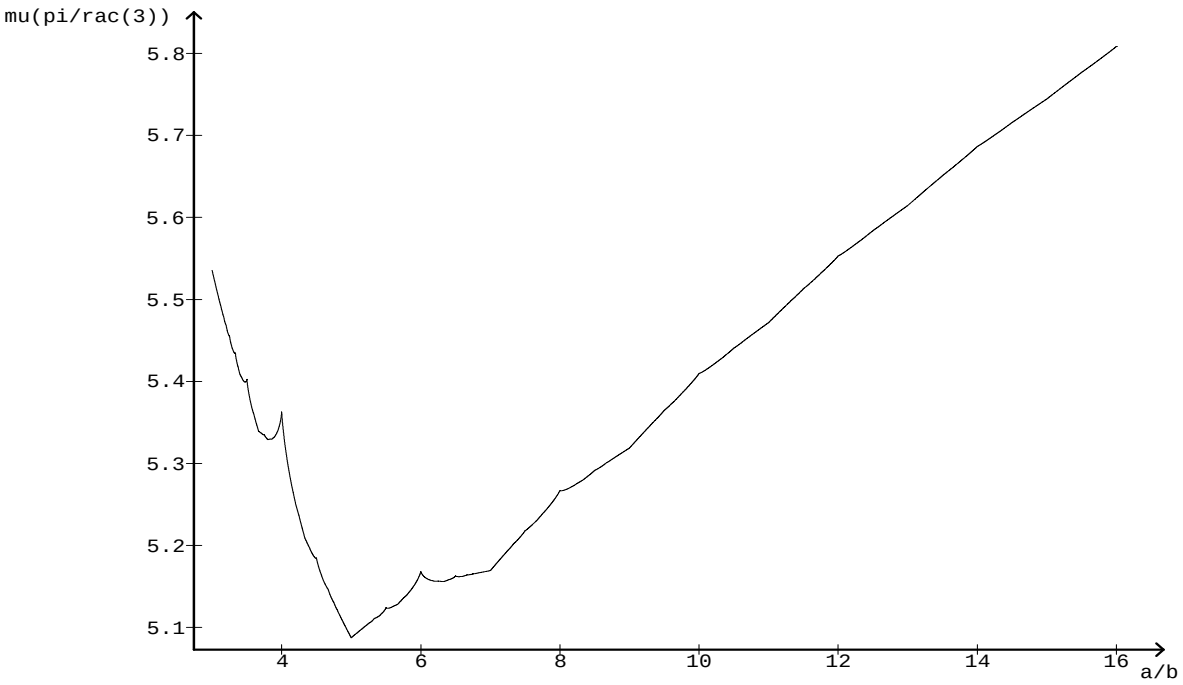

Figure 2.6. Mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ obtenues aux points $(\nu, -\nu), \nu \in \mathbb{Q} \cap [3, 16]$.

Les meilleures mesures d'irrationalité que nous avons trouvées sont celles associées aux choix de paramètres $(5, 1, -1)$ et $(5, -1, 1)$, le premier ayant été fait par Hata dans [Hat1]. Il obtient alors la valeur

$$\mu_{5,1,-1}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = 1 + \frac{\log \alpha_1 + \beta_1}{\log \alpha_1 - \beta_1}$$

avec

$$\alpha_1 = 2^{-2}(1327 + 231\sqrt{33})$$

et

$$\beta_1 = 6 - \pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right).$$

Nous avons numériquement $\mu_{5,1,-1} = 5.0874625...$.

A. K. Dubitskas obtenait 5.516 dans [Dub1] puis 5.2 dans [Dub2] à l'aide du choix de paramètres $(6, -1, -1)$. En fait, la meilleure valeur que l'on peut obtenir à l'aide de ce triplet est

$$\mu_{6,-1,-1} = 1 + \frac{\log \alpha_2 + \beta_2}{\log \alpha_2 - \beta_2} = 5.18300789...$$

avec

$$\alpha_2 = 362 + 209\sqrt{3}$$

et

$$\beta_2 = 6 - \pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) - \log(2^{-7}3^{-3}5^5).$$

D. V. et G. V. Chudnovsky annoncent dans [Chu4] avoir obtenu la valeur 4.96, toujours en considérant un simple paramétrage à une dimension des polynômes $P_{n,m,m}$ (avec m positif) et le calcul du contenu de ces polynômes. Dans ce cas-là, la meilleure valeur que nous ayons pu trouver est celle associée au triplet (4,1,1) et, en vertu du Lemme 2.15, elle donne la même valeur que celle correspondant au choix de paramètres de Dubitskas. Rappelons que, d'après les Remarques 2.8 et 2.14, les méthodes utilisées ici le sont de façon optimale.

Bien sûr, il nous faut mentionner que Hata [Hat2] a obtenu depuis, par d'autres techniques, 4.6016 qui est la meilleure mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ calculée à ce jour.

2.3 Tentative d'amélioration analytique

2.3.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons introduire une classe de polynômes dérivée de la classe (2.10) afin d'essayer d'améliorer la meilleure mesure d'irrationalité de $\log 2$. Nous ne travaillerons pas sur $\pi/\sqrt{3}$ car, comme nous venons de le dire, la meilleure valeure obtenue à ce jour, à savoir 4.6016, est trop loin de celle obtenue à l'aide des polynômes (2.10), à savoir 5.0874, pour espérer être atteinte à l'aide des légères améliorations que notre tentative pourrait apporter.

Dans la première partie, nous avons utilisé des suites de polynômes avec un contenu élevé. Nous n'avons alors procédé qu'à des améliorations d'ordre arithmétique. Ici, nous allons essayer d'introduire des améliorations analytiques en faisant intervenir des facteurs polynomiaux correcteurs. Le rôle de ces facteurs est de faire diminuer la taille du minimum de la fonction intervenant dans le calcul du dénominateur τ afin de faire croître ce dernier. Pour cela, nous allons considérer la classe de polynômes

(2.24)
$$U_{n,m,m',s,t}(X) = \frac{1}{(2n+2m+m')!}\left[(X(1-X))^{2n+m}(s-tX)^{m'}\right]^{(2n+2m+m')}$$

avec n et m' dans $\mathbb{N}$ et m, s et t dans $\mathbb{Z}$ tels que $2n \geq -\min(m, 2m+m')$. Clairement, le polynôme $U_{n,m,m',s,t}(X)$ appartient à $\mathbb{Z}_{2n}[X]$. Si m' vaut 0, nous

retrouvons les polynômes $P_{2n,m,m}$ de la première partie. Nous avons

$$U_{n,m,m',s,t}(X) = \sum_{k_1=0}^{2n} \sum_{k_2=-\min(k_1,m')}^{0} (-1)^{k_1+k_2+m+m'} t^{k_2+m'} s^{-k_2} C_{n,m,m',k_1,k_2} X^{k_1+k_2}$$

où

$$C_{n,m,m',k_1,k_2} = \binom{2n+m}{k_1+m}\binom{m'}{k_2+m'}\binom{2n+2m+m'+k_1+k_2}{2n+2m+m'}.$$

Comme dans la première partie, nous allons d'abord procéder à une étude du contenu de ces polynômes.

2.3.2 Un lemme arithmétique

Lemme 2.16. *Soient λ, λ' deux nombres réels tels que $\lambda \geq -2, \lambda' \geq -2\min(0, \lambda+1)$, soient M et M' deux suites d'entiers positifs telles que*

$$\max\{|\lambda n - M(n)|, |\lambda' n - M'(n)|\} \leq C_{\lambda,\lambda'}$$

où $C_{\lambda,\lambda'}$ est une constante positive indépendante de n. Alors il existe un diviseur commun $d'_{\lambda,\lambda'}(n)$ des coefficients de $U_{n,M(n),M'(n),s,t}$ tel que

$$f(\lambda,\lambda') := \int_{F(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d'_{\lambda,\lambda'}(n),$$

où $F(\lambda,\lambda')$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts définie par

$$F(\lambda,\lambda') = F_1(\lambda,\lambda') \cup F_2(\lambda,\lambda')$$

avec

$$F_1(\lambda,\lambda') = \left\{ x>0, \{x\} < \frac{1}{2} \text{ et } 1+\{\lambda x\} < 2\{x\} + 2\{\lambda x\} < 2 - \{\lambda' x\} \right\}$$

et

$$F_2(\lambda,\lambda') = \left\{ x>0,\ 2+\{\lambda x\} < 2\{x\} + 2\{\lambda x\} < 3 - \{\lambda' x\} \right\}.$$

Preuve. Le schéma de la preuve est identique à celui de la preuve du Lemme 2.7. Posons $\delta_n = \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{\sqrt{(4+2\lambda+\lambda')n+1}}$. Pour n assez grand, nous avons $\delta_n < \frac{1}{6}$. Posons aussi

$$F_{1,n}(\lambda,\lambda') = \Big\{ x>0, 1-\{\lambda x\} + \delta_n < 2\{x\} \\ < \min(2(1-\{\lambda x\}) - \{\lambda' x\}, 1) - 3\delta_n \text{ et } \{\lambda' x\} > 2\delta_n \Big\},$$

$$F_{2,n}(\lambda,\lambda') = \Big\{ x>0, 2-\{\lambda x\}+2\delta_n < 2\{x\} \\ < 3-2\{\lambda x\}-\{\lambda' x\}-3\delta_n \text{ et } \{\lambda' x\} > 2\delta_n \Big\}$$

et

$$F_n(\lambda,\lambda') = F_{1,n}(\lambda,\lambda') \cup F_{2,n}(\lambda,\lambda').$$

Considérons les trois suites $\left(\frac{k}{\lambda}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(\frac{l}{\lambda'}\right)_{l\in\mathbb{N}}, (q)_{q\in\mathbb{N}}$ dont nous rangeons les éléments dans un ordre croissant. Nous obtenons alors une suite croissante $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de nombres réels. Il est alors clair que, sur $]a_m, a_{m+1}[$, les fonctions $x \mapsto 1-\{\lambda x\}-2\{x\}+\delta_n$, $x \mapsto \min(2(1-\{\lambda x\})+\{\lambda' x\}, 1)-2\{x\}-\delta_n$, $x \mapsto 2-\{\lambda x\}-2\{x\}+\delta_n$ et $x \mapsto 3-2\{\lambda x\})-\{\lambda' x\}-\delta_n$ sont affines donc a fortiori continues ce qui montre que $I_{n,m,\lambda,\lambda'} = F_n(\lambda,\lambda') \cap]a_m, a_{m+1}[$ est ouvert. Cela entraîne que $F_n(\lambda,\lambda')$ est ouvert puisqu'il ne contient aucun des éléments de la suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$. De plus, nous voyons facilement que la suite $(F_n(\lambda,\lambda'))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n(\lambda,\lambda') = F(\lambda,\lambda')$. Posons

$$H_n = \left\{ p \text{ premiers tels que } p \geq \sqrt{(4+2\lambda+\lambda')n+1} \text{ et } \frac{n}{p} \in F_n(\lambda,\lambda') \right\}$$

et

$$d'_{\lambda,\lambda'}(n) = \prod_{p\in H_n} p.$$

Nous allons montrer que tout élément p de H_n divise les coefficients du polynôme $U_{n,M(n),M'(n),s,t}$, i.e. pour tout entier k_1 appartenant à l'intervalle $[0,2n]$ et pour tout entier k_2 appartenant à l'intervalle $[-\min(k_1,m'),0]$, le nombre premier p divise C_{n,m,m',k_1,k_2}. Soient k_1 un entier de $[-m,2n]$ et k_2 un entier de $[-m',0]$, nous notons

$$\alpha = \left\{\frac{n}{p}\right\}, \beta = \left\{\frac{M(n)}{p}\right\}, \gamma = \left\{\frac{M'(n)}{p}\right\}, \theta_1 = \left\{\frac{k_1}{p}\right\} \text{ et } \theta_2 = \left\{\frac{k_2}{p}\right\}.$$

L'exposant de p dans C_{n,m,m',k_1,k_2} que l'on notera v_p dans la suite de la preuve vaut

$$[2\alpha+\beta]-[\beta+\theta_1]-[2\alpha-\theta_1]-[\gamma+\theta_2]-[-\theta_2] \\ +[2\alpha+2\beta+\gamma+\theta_1+\theta_2]-[2\alpha+2\beta+\gamma]-[\theta_1+\theta_2].$$

Comme $\frac{n}{p}$ appartient à $F_n(\lambda,\lambda')$, les nombres $\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\}$ et $\left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\}$ sont dans l'intervalle $]2\delta_n, 1-2\delta_n[$. Nous avons aussi

$$\max\left\{\left|\frac{\lambda n}{p}-\frac{M(n)}{p}\right|, \left|\frac{\lambda' n}{p}-\frac{M'(n)}{p}\right|\right\} \leq \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{p} \leq \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{\sqrt{(4+2\lambda+\lambda')n+1}} = \delta_n.$$

Nous en déduisons les inégalités

$$\left|\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\}-\beta\right|\leq\delta_n \text{ et } \left|\left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\}-\gamma\right|\leq\delta_n.$$

Si le nombre n/p est dans l'ensemble $F_{1,n}(\lambda,\lambda')$, nous savons alors que

$$\begin{aligned} &2\alpha+\beta\geq 2\left\{\frac{n}{p}\right\}+\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\}-\delta_n>1, \qquad 2\alpha<1\\ \text{et}\quad &2\alpha+2\beta+\gamma\leq 2\left\{\frac{n}{p}\right\}+2\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\}+\left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\}+3\delta_n<2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} v_p = &-[\beta+\theta_1]-[2\alpha-\theta_1]-[\gamma+\theta_2]-[-\theta_2]\\ &+[2\alpha+2\beta+\gamma+\theta_1+\theta_2]-[\theta_1+\theta_2]\\ \geq\ &1-[2\alpha-\theta_1]-[-\theta_2]-[\theta_1+\theta_2]\\ \geq\ &1 \end{aligned}$$

puisque $2\alpha<1$. De même, si n/p appartient à $F_{2,n}(\lambda,\lambda')$, nous avons

$$\begin{aligned} &2\alpha+\beta\geq 2\left\{\frac{n}{p}\right\}+\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\}-\delta_n>2, \qquad 2\alpha>1\\ \text{et}\quad &2\alpha+2\beta+\gamma\leq 2\left\{\frac{n}{p}\right\}+2\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\}+\left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\}+3\delta_n<3. \end{aligned}$$

Donc, comme précédemment, nous obtenons la minoration

$$\begin{aligned} v_p = &-[\beta+\theta_1]-[2\alpha-\theta_1]-[\gamma+\theta_2]-[-\theta_2]\\ &+[2\alpha+2\beta+\gamma+\theta_1+\theta_2]-[\theta_1+\theta_2]\\ \geq\ &2-[2\alpha-\theta_1]-[-\theta_2]-[\theta_1+\theta_2]\\ \geq\ &1. \end{aligned}$$

Examinons le comportement asymptotique de $d'_{\lambda,\lambda'}(n)$. Soit l un entier fixé arbitrairement grand et $I=]a,b[$ une composante connexe quelconque de $F_l(\lambda,\lambda')$. Nous aurons alors $I\subset F_n(\lambda,\lambda')$ pour tout entier $n\geq l$. Si $n\geq(2+\lambda+\lambda')b^2$, tout nombre premier p de l'intervalle $J=]\frac{n}{b},\frac{n}{a}[$ appartiendra à H_n puisque $p>\frac{n}{b}\geq\sqrt{(4+2\lambda+\lambda')n+1}$ et $\frac{n}{p}\in]a,b[$. Nous montrons ensuite de la même façon que dans la preuve du Lemme 2.7 que

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log d'_{\lambda,\lambda'}(n)}{n}\geq\int_{F_l(\lambda,\lambda')}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

En faisant tendre l vers l'infini, nous obtenons

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log d'_{\lambda,\lambda'}(n)}{n} \geq \int_{F(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

La majoration

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log d'_{\lambda,\lambda'}(n)}{n} \leq \int_{F(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

s'obtient de manière similaire, en considérant l'ensemble

$$H_n = \left\{ p \text{ premiers tels que } p \geq \sqrt{(4+2\lambda+\lambda')n+1} \text{ et } \frac{n}{p} \in F(\lambda,\lambda') \right\}.$$

□

Nous allons maintenant donner un algorithme de calcul de l'intégrale considérée dans le lemme ci-dessus.

2.3.3 Un algorithme de calcul de $f(\lambda,\lambda')$

Nous supposons maintenant que λ et λ' sont deux nombres rationnels b/a et c/a vérifiant les hypothèses du Lemme 2.16. Nous avons

$$F_1\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) = \left\{ x>0, \{x\} < \frac{1}{2} \text{ et } 1+\left\{\frac{b}{a}x\right\} \leq 2\{x\} + 2\left\{\frac{b}{a}x\right\} \leq 2 - \left\{\frac{c}{a}x\right\} \right\}.$$

et

$$F_2\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) = \left\{ x>0,\ 2+\left\{\frac{b}{a}x\right\} \leq 2\{x\} + 2\left\{\frac{b}{a}x\right\} \leq 3 - \left\{\frac{c}{a}x\right\} \right\}.$$

Les ensembles $F_1(\frac{b}{a},\frac{c}{a})$ et $F_2(\frac{b}{a},\frac{c}{a})$ étant disjoints, nous pouvons écrire

$$\int_{F\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \underbrace{\int_{F_1\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}}_{I_1} + \underbrace{\int_{F_2\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}}_{I_2}$$

Calculons maintenant les intégrales I_1 et I_2. Pour cela, nous devons considérer les trois suites finies

$$\left(\frac{j}{a}\right)_{j\in\mathbb{N}} \cap [0,1], \left(\frac{k}{|b|}\right)_{k\in\mathbb{N}} \cap [0,1] \text{ et } \left(\frac{l}{c}\right)_{l\in\mathbb{N}} \cap [0,1]$$

dont nous rangeons les éléments dans un ordre croissant. Nous obtenons ainsi une suite croissante finie $\alpha = (\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}, 0\leq m\leq M(a,b,c)-1}$ de nombres réels telle que $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{M(a,b,c)} = 1$. Nous pouvons donc écrire I_1 sous la forme

$$\int_{F_1\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \sum_{q\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{M(a,b,c)-1} \int_{F_1\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)\cap\,]a(q+\alpha_m),a(q+\alpha_{m+1})[} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Par les mêmes arguments que ceux invoqués dans la section 2.2.1.2, nous pouvons dire que $x \in F_1\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ si et seulement si x vérifie les trois conditions

$$\begin{aligned} x &< \frac{1}{2} + [a\alpha_m] := x_1(m), \\ x &> \frac{1 + \inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}]) + 2[a\alpha_m]}{2 + \frac{b}{a}} := x_2(m), \\ x &< \frac{2 + 2[a\alpha_m] + 2\inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}]) + [c\alpha_m]}{2 + 2\frac{b}{a} + \frac{c}{a}} := x_3(m). \end{aligned}$$

Posons alors

$$y_{1,1}(m) = \max\left(\alpha_m, \frac{x_2(m)}{a}\right) \quad \text{et} \quad y_{1,2}(m) = \min\left(\frac{x_1(m)}{a}, \frac{x_3(m)}{a}, \alpha_{m+1}\right).$$

Il est clair, d'après ce que nous venons d'écrire et le fait que les fonctions considérées dans l'ensemble $F_1\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ sont a-périodiques, que

$$F_1\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) \cap]a(q+\alpha_m), a(q+\alpha_{m+1})[=]a(q+y_{1,1}(m)), a(q+y_{1,2}(m))[$$

pour tous $m, q \in \mathbb{N}^2, m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq M(a,b,c) - 1$. Enfin, grâce à (2.12), nous obtenons

$$\sum_{q\in\mathbb{N}} \int_{F_1\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)\cap]a(q+\alpha_m),a(q+\alpha_{m+1})[} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{a}\big(\psi\left(y_{1,2}(m)\right) - \psi\left(y_{1,1}(m)\right)\big).$$

Le calcul de I_2 se déroule de la même façon. Soit $m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq M(a,b,c) - 1$, nous avons les deux conditions

$$\begin{aligned} x &> \frac{2 + \inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}]) + 2[a\alpha_m]}{2 + \frac{b}{a}} := x_4(m), \\ x &< \frac{3 + 2[a\alpha_m] + 2\inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}]) + [c\alpha_m]}{2 + 2\frac{b}{a} + \frac{c}{a}} := x_5(m). \end{aligned}$$

Posons

$$y_{2,1}(m) = \max\left(\alpha_m, \frac{x_4(m)}{a}\right) \quad \text{et} \quad y_{2,2}(m) = \min\left(\frac{x_5(m)}{a}, \alpha_{m+1}\right)$$

et nous obtenons encore

$$\sum_{q\in\mathbb{N}} \int_{F_2\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)\cap]a(q+\alpha_m),a(q+\alpha_{m+1})[} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{a}\big(\psi\left(y_{2,2}(m)\right) - \psi\left(y_{2,1}(m)\right)\big).$$

Nous avons donc la formule de calcul de l'intégrale

$$f\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) = \frac{1}{a} \sum_{m=0}^{M(a,b,c)-1} \big[\psi\left(y_{1,2}(m)\right) + \psi\left(y_{2,2}(m)\right) - \psi\left(y_{1,1}(m)\right) - \psi\left(y_{2,1}(m)\right)\big].$$

2.3.4 Calculs de mesures d'irrationalité de $\log 2$

Nous établissons maintenant les formules qui vont nous permettre de calculer une mesure d'irrationalité de $\log 2$. Notre outil sera la famille de polynômes

$$G_{a,b,c,s,t,n}(X) = \frac{1}{d'_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} U_{an,bn,cn,s,t}(X) \in \mathbb{Z}_{2an}[X],$$

pour $n \in \mathbb{N}$, où a et c sont deux entiers naturels non nuls et b un entier relatif, tels que $2a > -\min(b, 2b+c)$. Dans cette sous-section, ces polynômes seront notés $G_n(X)$.

Nous avons

$$J_n = \int_0^1 \frac{G_n(x) - G_n(-1)}{1+x} \mathrm{d}x \in \frac{\mathbb{Z}}{d_{2an}}$$

et

$$\begin{aligned} J_n + G_n(-1)\log 2 &= \int_0^1 \frac{G_n(x)}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 Q_n(x)G_n(x)\mathrm{d}x \\ &\quad + (-2)^{-(\beta+c)n} \int_0^1 \frac{(x(1-x))^{(\beta+c)n} G_n(x)}{1+x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

où $\beta = \max(0, b)$ et

$$Q_n(x) = \frac{1 - (-x(1-x)/2)^{(\beta+c)n}}{1+x} \in \frac{1}{2^{(\beta+c)n}} \mathbb{Z}_{2(\beta+c)n-1}[x].$$

En posant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n = 2^{(\beta+c)n} d_{2(a+\beta+c)n} G_n(-1)\,,$$

$$p_n = 2^{(\beta+c)n} d_{2(a+\beta+c)n} \int_0^1 Q_n(x)G_n(x)\mathrm{d}x - 2^{(\beta+c)n} d_{2(a+\beta+c)n} J_n$$

$$\text{et } \varepsilon_n = (-1)^{(\beta+c)n} d_{2(a+\beta+c)n} \int_0^1 \frac{(x(1-x))^{\beta n} G_n(x)}{1+x}\mathrm{d}x\,,$$

nous obtenons $\varepsilon_n = q_n \log 2 - p_n$, avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$.

Étudions le comportement asymptotique de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si nous désignons encore par C_r le cercle de centre -1 et de rayon r, nous savons par la formule de Cauchy que, pour tout $r > 0$,

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{d_{2(a+\beta+c)n} 2^{(\beta+c)n}}{d'_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \oint_{C_r} \frac{(z(1-z))^{(2a+b)n}(s-tz)^{cn}}{(z+1)^{(2a+2b+c)n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2i\pi} \\ &= \frac{d_{2(a+\beta+c)n} 2^{(\beta+c)n}}{d'_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \int_0^1 \frac{\left[\left(-1+re^{2i\pi\theta}\right)\left(2-re^{2i\pi\theta}\right)\right]^{(2a+b)n} \left(s+t-tre^{2i\pi\theta}\right)^{cn}}{\left(re^{2i\pi\theta}\right)^{(2a+2b+c)n}} \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$|q_n| \leq \frac{d_{2(a+\beta+c)n}\, 2^{(\beta+c)n}}{d'_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} r^{-(2a+2b+c)n} \left[(1+r)(2+r)\right]^{(2a+b)n} \left(|s+t|+|t|r\right)^{cn},$$

quel que soit $r > 0$. Nous en tirons

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|q_n|}{n} &\leq 2a + (\beta+\gamma)(2+\log 2) - a\, f\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) \\ &\quad + \min_{r>0} u_{a,b,c,s,t}(r) \\ &= \sigma_{a,b,c,s,t}(\log 2)\,.\end{aligned}$$

où $u_{a,b,c,s,t}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,-|s+t|/|t|\}$ par

$$u_{a,b,c,s,t}(r) = \log\left(\frac{\left|(1+r)(2+r)\right|^{2a+b}\left|\left(|s+t|+|t|r\right)\right|^{c}}{|r|^{2a+2b+c}}\right).$$

Le numérateur de sa dérivée est égal à

$$\begin{aligned}&2a|t|r^3 + (-3b|t| + (2a-c)|s+t|)r^2 \\ &\qquad - (4(a+b)|t| + 3(b+c)|s+t|)r - 2(2a+2b+c)|s+t|.\end{aligned}$$

Il reste à étudier le comportement de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En intégrant par parties $(2(a+b)+c)n$ fois, nous trouvons

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{d_{2(a+\beta+c)n}}{d'_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \int_0^1 \frac{(x(1-x))^{(2a+b)n}(s-tx)^{cn}}{((2a+2b+c)n)!} \left(\frac{(x(x-1))^{(\beta+c)n}}{1+x}\right)^{((2(a+b)+c)n)} \mathrm{d}x \\ &= \frac{2^{(\beta+c)n} d_{2(a+\beta+c)n}}{d'_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \int_0^1 \frac{(x(1-x))^{(2a+b)n}(s-tx)^{cn}}{(1+x)^{(2(a+b)+c)n+1}} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

puisque le polynôme $Q_n(x)$ est de degré $2(\beta+\gamma)n-1$ et que $2(\beta+\gamma) \leq 2(a+b)+c$ (rappelons que $2a > \min(0, b, 2b+c)$). Nous trouvons alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|\varepsilon_n| &= 2a + \beta(2+\log 2) + c(2+\log 2) - af\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) \\ &\quad + \max_{0\leq x\leq 1} v_{a,b,c,s,t}(x) \\ &= -\tau_{a,b,c,s,t}(\log 2)\end{aligned}$$

où $v_{a,b,c,s,t}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1, s/t\}$ par

$$v_{a,b,c,s,t}(x) = \log\left(\frac{|x(1-x)|^{2a+b}\,|s-tx|^c}{|1+x|^{2(a+b)+c}}\right).$$

Le numérateur de la dérivée de $v_{a,b,c,s,t}$ vaut

$$2atx^3 + ((4a+3b+c)t - (2a-c)s)x^2 - ((2a+b+c)t + (4a+3b+c)s)x + s(2a+b).$$

Nous cherchons à agir sur la composante analytique de $\tau_{a,b,c,s,t}(\log 2)$ à savoir le maximum de $v_{a,b,c,s,t}$ sur l'intervalle $[0,1]$. L'idée est d'écraser la fonction $v_{a,b,0,s,t}$ au point $x_0(a,b)$ de l'intervalle $[0,1]$ où elle atteint son maximum. À cette fin, nous avons introduit des facteurs correcteurs $(s-tx)^c$ petits au voisinage du point $x_0(a,b)$. Les couples d'entiers (s,t) candidats naturels sont donc les réduites $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du nombre réel $x_0(a,b)$. Les gains analytiques sont alors nets pour certains couples (s,t) mais ils sont malheureusement très largement compensés par la perte dans l'asymptotique arithmétique, les polynômes utilisés ayant un contenu nettement plus faible. Pour illustrer ce phénomène, nous considérons la classe de polynômes $U_{3an,an,cn,s,t}(X)$ avec $a, c, n \in \mathbb{N}$ et $s, t \in \mathbb{Z}$. Lorsque $c = 0$, nous retrouvons les polynômes $P_{6n,n,n}$ de la première partie qui permettaient d'établir une mesure d'irrationalité numériquement égale à $3,8913997....$ Sous ces conditions, nous savons que le point $x_0(3,1)$ vaut $\frac{\sqrt{393}-15}{12} = 0.4020189....$ Les premières réduites de x_0 sont $(1,2), (2,5), (39,97), (80,199), (199,495), (478,1189)$ et elles vont constituer les couples (s,t) que nous allons considérer. Dans le tableau 2.2, nous regroupons des mesures d'irrationalité obtenues à l'aide des polynômes $U_{3an,an,cn,s,t}(X)$, l'indice des lignes étant le couple de réduites (s,t) et celui des colonnes c/a. Le tableau 2.3 qui est indexé de la même manière que le précédent contient les composantes analytiques de $\tau_{3a,a,c,s,t}(\log 2)$ correspondantes, à savoir les nombres réels $\max_{0\le x\le 1} v_{3a,a,c,s,t}(x)/a$ tandis que le tableau 2.4 contient les valeurs $f(1/3, c/a)/a$ qui sont les composantes arithmétiques de $\tau_{3a,a,c,s,t}(\log 2)$.

c/a (s,t)	1/10	1/100	1/1000	1/10000	1/100000
$(1,2)$	4.4945	3.9656	3.9008	3.8925	3.891536
$(2,5)$	4.5214	3.9556	3.8985	3.8922	3.891501
$(39,97)$	5.3634	4.0117	3.9037	3.8926	3.891534
$(80,199)$	5.6156	4.0258	3.9050	3.8928	3.891547
$(199,495)$	5.9720	4.0438	3.9067	3.8929	3.891563
$(478,1189)$	6.3601	4.0613	3.9083	3.8931	3.891756

Tableau 2.2. Valeurs de $\mu_{3a,a,c,s,t}(\log 2)$.

c/a	1/10	1/100	1/1000	1/10000	1/100000
(s,t)					
$(1,2)$	-4.4030	-4.2465	-4.2291	-4.2273	-4.2271
$(2,5)$	-4.4152	-4.2582	-4.2316	-4.2278	-4.2272
$(39,97)$	-4.1157	-4.2276	-4.2283	-4.2273	-4.2271
$(80,199)$	-4.0439	-4.2204	-4.2276	-4.2273	-4.2271
$(199,495)$	-3.9527	-4.0158	-4.2267	-4.2272	-4.2271
$(478,1189)$	-3.8651	-4.2025	-4.2258	-4.2271	-4.2271

Tableau 2.3. Valeurs de la composante analytique de $\tau_{3a,a,c,s,t}(\log 2)$.

c/a	1	1/10	1/100	1/1000	1/10000	1/100000
$f\left(1/3, c/a\right)/a$	0.2043	0.3251	0.3739	0.3839	0.3855	0.3857

Tableau 2.4. Valeurs de la composante arithmétique de $\tau_{3a,a,c,s,t}(\log 2)$.

Bibliographie

[AlRob] K. Alladi et M. L. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. reine angew. Math. **318** (1980), 137-155.

[Ap] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Journées Arithmétiques de Luminy, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[Ba] A. Baker, *Approximations to the logarithms of certain rational numbers*, Acta. Arith. **10** (1964), 376–383.

[Beu] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268–272.

[Chu1] G. V. Chudnovsky, *Hermite–Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π*, Lecture Notes in Math. **925** (1982), 299–322.

[Chu2] D. V. Chudnovsky et G. V. Chudnovsky, *Padé and rational approximations to systems of functions and their arithmetic applications*, Lecture Notes in Math. **1052** (1982), 37–84.

[Chu3] G. V. Chudnovsky, *Number theoretic applications of polynomials with rational coefficients defined by extremaly conditions*, Arithmetic and Geometry, Birkäuser 1983, 61–105.

[Chu4] D. V. Chudnovsky et G. V. Chudnovsky, *Hypergeometric and modular function identities, and new rational approximations to and continued fraction expansions of classical constants and functions*, Marvin Knopp (ed.) et al., A tribute to Emil Grosswald: number theory and related analysis. American Mathematical Society, Contemp. Math. **143**, 117-162, 1993.

[Da] V. Danilov, *Rational approximations of some functions at rational points*, Math. Zametki **24** 1978 n°4 et Math. Notes USSR **24** (1979), 741–744.

[Di] J. Dieudonné, Calcul infinitésimal, Hermann, Paris 1968.

[Dub1] A. K. Dubitskas, *Approximation of $\pi/\sqrt{3}$ by rational fractions (en russe)*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Math. Mekh., n°6 (1987), 73–76.

[Dub2] A. K. Dubitskas, *On improving the approximation of $\pi/\sqrt{3}$ by rational fractions (en russe)*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Math. Mekh., n°6 (1993), 76–77; traduction dans le Moscow Univ. Math. Bull. **48** n°6 (1993), 44–45.

[EllMF] W. Ellison et M. Mendès France, Les nombres premiers, Actualités scientifiques et industrielles, **1366**, Hermann, 1975.

[Er] A. Erdélyi et al., Higher transcendental functions, vol. 1, New York 1953.

[Hab] L. Habsieger, Introduction à l'approximation diophantienne, cours de 3ème cycle, Publications de l'école doctorale Mathématiques-Informatique de Bordeaux, 1996.

[Hat1] M. Hata, *Legendre type polynomials and irrationality measures*, J. reine angew. Math. **407** (1990), 99-125.

[Hat2] M. Hata, *Rational approximations to π and some other numbers*, Acta Arith. **63** (1993), n°4, 335-349.

[HMAV] A. Heimonen, T. Matala-Aho and K. Väänänen, *On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function*, Manuscripta Math. **81** (1993), n°1-2, 183-202.

[HMAV2] A. Heimonen, T. Matala-Aho and K. Väänänen, *An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures*, Bull. Austral. Math. Soc. **50** (1994), n°2, 225-243.

[Khi] A. Ya. Khinchin, Continued fractions, Chicago Univ. Press, 1964.

[Lag1] J.-L. Lagrange, *Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques*, Oeuvres, Vol. II, Gauthiers-Villars, Paris, 1867.

[Lag2] J.-L. Lagrange, *Additions aux éléments d'algèbre d'Euler*, Oeuvres, Vol. VII, Gauthiers-Villars, Paris, 1867.

[Las] A. Lasjaunias, Communication personnelle.

[Liou1] J. Liouville, *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **18** (1844), 883-885.

[Liou2] J. Liouville, *Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques inséré dans le Compte Rendu de la dernière séance*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **18** (1844), 910-911.

[Liou3] J. Liouville, *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, J. Math. Pures Appl. **16** (1851), 133-142.

[Mah] K. Mahler, *On the approximation of logarithms of algebraic numbers*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **A 245** (1953), 371–398.

[Pari] C. Batut, K. Belabas, D. Bernardi, H. Cohen, M. Olivier, *User's Guide to PARI-GP*, disponible par `ftp` anonyme depuis `ftp://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/pari`.

[Rh] G. Rhin, *Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité*, Prog. in Math. **71** (1987), 155-164. Birkhäuser, Boston.

[RhVi] G. Rhin et C. Viola, *On a permutation group related to* $\zeta(2)$, Acta Arith. **77** n°1, (1996), 23–56.

[Ro] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1955), 1–20; corrigendum, 168.

[Rud] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1987.

[Ruk] E. A. Rukhadze, *A lower bound for the rational approximation of* $\ln 2$ *by rational numbers (en russe)*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Math. Mekh., n°6 (1987), 25–29.

33 références bibliographiques

Appendice A

Présentation des algorithmes d'Abramov et de Petkovšek

Nous donnons maintenant les justificatifs théoriques des algorithmes utilisés dans la section 4 du chapitre 1, à savoir l'algorithme de S. A. Abramov et l'algorithme Poly de M. Petkovšek. Pour un plus grand confort de lecture, nous expliquons à nouveau (mais avec plus de détails) ce que font les algorithmes et redonnons leurs énoncés.

A.1 L'algorithme d'Abramov

A.1.1 Objectif de l'algorithme

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0, nous considérons l'équation d'inconnue $S \in \mathbb{K}(z)$

$$P_M(z)S(z+M) + \ldots + P_0(z)S(z) = H(z) \tag{A.1}$$

avec $P_0, \ldots, P_M, H \in \mathbb{K}[z]$. Il est utile de reformuler l'équation en termes d'opérateurs aux différences. Nous noterons N l'opérateur de décalage qui à toute fraction $S(z) \in \mathbb{K}(z)$ associe la fraction $NS(z) = S(z+1)$. Soit L l'opérateur aux différences défini par

$$L = P_M N^M + \ldots + P_1 N + P_0, \tag{A.2}$$

l'équation (A.1) peut donc s'écrire $LS = H$.

L'algorithme de S. A. Abramov [Abr] fournit un polynôme D de $\mathbb{K}[z]$ divisible par le dénominateur de toute solution rationnelle de l'équation (A.1). L'intérêt de cette construction est qu'elle permet de se ramener à un cadre plus simple de résolution. En effet, une fois connu le polynôme D, on pose $S = P/D$ où P est un polynôme à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ et on injecte S sous cette forme

dans l'équation (A.1). On obtient alors une équation à coefficients polynomiaux mais avec, à présent, une inconnue P qui est aussi un polynôme. Cette deuxième partie de la résolution est assurée par l'algorithme Poly.

A.1.2 Énoncé de l'algorithme

Nous donnons maintenant l'algorithme tel qu'il est énoncé dans [Abr]. Sa formulation est équivalente à celle donnée dans le chapitre 1. Nous l'utilisons ici car sa preuve est alors plus lisible mais les calculs de résultants et de p.g.c.d. de polynômes à coefficients complexes, tout à fait inadaptés à notre cadre d'étude, qu'elle comporte, nous ont obligé à écrire et utiliser l'algorithme sous la forme que l'on trouve dans le chapitre 1.

1. [Initialisation] $D(z) \leftarrow 1, A(z) \leftarrow P_M(z-M), B(z) \leftarrow P_0(z)$.

2. $R(m) \leftarrow$ résultant par rapport à z de $A(z)$ et $B(z+m)$.

3. Si $R(m)$ a une racine positive ou nulle alors
   $N \leftarrow$ la plus grande racine positive ou nulle de $R(m)$.
   Pour $i = 0, 1, ..., N$,
   $u(z) \leftarrow$ p.g.c.d.$(A(z), B(z+i))$,
   $A(z) \leftarrow A(z)/u(z)$,
   $B(z) \leftarrow B(z)/u(z-i)$,
   $D(z) \leftarrow D(z)u(z)u(z-1)\cdots u(z-i)$.

4. [Sortie] D le dénominateur recherché.

A.1.3 Justification théorique de l'algorithme

Nous devons tout d'abord introduire quelques termes

Définitions A.1.
i) On dit qu'un polynôme de $\mathbb{K}(z)$ est spécial si sa factorisation sur $\mathbb{K}$ est de la forme

$$p^{\gamma_0}(z)p^{\gamma_1}(z+1)\dots p^{\gamma_h}(z+h) \tag{A.3}$$

où p est irréductible et $h, \gamma_0, \dots, \gamma_h \in \mathbb{N}$.

ii) On dit que deux polynômes spéciaux sont reliés si leur produit est lui aussi spécial.

iii) Soit g un polynôme spécial de la forme (A.3)*, on dit qu'un diviseur $p^{\sigma}(z+l)$ de $g(z)$ est critique de première espèce si la relation*

$$p^{\sigma_1}(z+l_1)|g(z) \tag{A.4}$$

implique $\sigma_1 < \sigma$ lorsque $l_1 > l$, et si elle entraîne $l_1 > l$ lorsque $\sigma_1 > \sigma$. Cela signifie qu'il est impossible d'augmenter σ sans diminuer l et d'augmenter l sans diminuer σ.

iv) Soit g un polynôme spécial de la forme (A.3)*, on dit qu'un diviseur $p^{\sigma}(z+l)$ de $g(z)$ est critique de deuxième espèce si la relation* (A.4) *implique $\sigma_1 < \sigma$ lorsque $l_1 < l$ et si elle entraîne $l_1 > l$ lorsque $\sigma_1 > \sigma$. Cela veut dire qu'il est impossible d'augmenter σ sans augmenter l et de diminuer l sans diminuer σ.*

Soient $p^{\alpha_1}(z+M_1), \ldots, p^{\alpha_s}(z+M_s)$ les diviseurs de g critiques de première espèce et $p^{\beta_1}(z+m_1), \ldots, p^{\beta_t}(z+m_t)$ les diviseurs de g critiques de deuxième espèce. Quitte à renommer ces diviseurs, nous pouvons supposer $M_1 > \cdots > M_s$ et $m_1 < \cdots < m_t$. Nous déduisons des définitions précédentes que, nécessairement, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_s$ et $\beta_1 < \cdots < \beta_t$. Enfin, nous posons $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Nous pouvons maintenant donner la dernière définition dont nous aurons besoin.

Définition A.2.
Soit $A, B \in \mathbb{K}[z]$. On dit qu'un polynôme spécial de la forme (A.3) *est borné par la paire (A, B) si*

$$p^{\alpha_i-\alpha_{i-1}}(z+M_i)|\,A(z), i = 1, \ldots, s, \tag{A.5}$$

$$p^{\beta_j-\beta_{j-1}}(z+m_j)|\,B(z), j = 1, \ldots, t. \tag{A.6}$$

Nous montrons maintenant un premier résultat.

Théorème 1 (S. A. Abramov, 1995) . *Soit S un élément de $\mathbb{K}(z)$ dont le dénominateur est spécial. Si la fraction LS (où L est l'opérateur défini par la relation* (A.2)*) est un polynôme alors le dénominateur de S est borné par la paire $(P_M(z-M), P_0(z))$.*

Preuve. Le dénominateur de S est donc un polynôme g ayant la forme (A.3). Nous allons prouver que nous avons les relations (A.5). Écrivons $P_M(z-M)$ sous la forme

$$P_M(z-M) = p^{\delta_1}(z+M_1)\ldots p^{\delta_s}(z+M_s)f(z)$$

où $\delta_1, \ldots, \delta_s$ sont des entiers positifs ou nuls et f un polynôme qui n'est divisible par aucun des $p(z+M_i)$. Remarquons qu'il est possible de décomposer S en éléments simples sous la forme de la somme d'un polynôme et de fractions du type

$$\frac{w(z)}{p^{\gamma}(z+l)} \text{ avec } \deg w(z) < \deg p^{\gamma}(z+l),$$

les valeurs de l étant deux à deux distinctes. Cette décomposition comprend des fractions ayant pour dénominateur

$$p^{\alpha_1}(z+M_1),\ldots,p^{\alpha_s}(z+M_s).$$

Nous appliquons maintenant l'opérateur L à chaque élément de la décomposition et nous regroupons les termes ayant même dénominateur. Nous obtenons ainsi la décomposition en éléments simples de $LS(z)$. Nous concluons en remarquant que, s'il existe un entier $i_0, 1 \leq i_0 \leq s$, tel que $\alpha_{i_0} - \delta_{i_0} > \alpha_{i_0-1}$, alors la décomposition de $LS(z)$ comprend un élément ayant pour dénominateur $p^{\alpha_{i_0}-\alpha_{i_0-1}}(z+M_{i_0})$. Or, la fraction S satisfaisant l'équation (A.1), nous savons que LS est un polynôme de $\mathbb{K}[z]$, d'où la contradiction. Nous prouvons de la même manière que les relations (A.6) sont vérifiées. □

Théorème 2 (S. A. Abramov, 1995) . *Soit g un polynôme borné par la paire (A,B), soit $R(m)$ le résultant par rapport à la variable z des polynômes $A(z)$ et $B(z+m)$. Supposons que $R(m)$ a des racines appartenant à $\mathbb{N}$ et appelons v la plus petite d'entre elles. Posons*

$$\begin{aligned} d(z) &= \text{p.g.c.d.}(A(z), B(z+v)),\\ c(z) &= d(z)d(z-1)\cdots d(z-v),\\ \tilde{g}(z) &= g(z)/\text{p.g.c.d.}(g(z), c(z)),\\ \tilde{A}(z) &= A(z)/d(z),\\ \tilde{B}(z) &= B(z)/d(z-v). \end{aligned}$$

Alors, $\tilde{g}(z)$ est borné par $(\tilde{A}(z), \tilde{B}(z))$ et $g(z)|c(z)\tilde{g}(z)$.

Preuve. Nous remarquons que les diviseurs critiques de $\tilde{g}(z)$ sont aussi des diviseurs critiques de $g(z)$. Si $g(z)$ est changé en $\tilde{g}(z)$, alors les différences

$$\alpha_i - \alpha_{i-1}, i = 0,\ldots,s \text{ et } \beta_j - \beta_{j-1}, j = 0,\ldots,t,$$

sont transformées sans augmenter. La différence entre $A(z)$ et $\tilde{A}(z)$ et celle entre $B(z)$ et $\tilde{B}(z)$ respectivement, soit ne concerne pas les facteurs

$$p(z+M_i), i = 1,\ldots,s,\ \ p(z+m_j), j = 1,\ldots,t$$

soit ne concerne que les exposants de $p(z+M_s)$, $p(z+m_t)$ (ou même seulement l'un des deux). Mais, dans le dernier cas, les exposants de $p(z+M_s)$, $p(z+m_t)$ dans $g(z)$ subissent le même changement que les exposants dans $A(z)$ et $B(z)$. Enfin, notons que, si $R(m)$ n'a pas racine dans $\mathbb{N}$, alors 1 est le seul polynôme borné par $(A(z), B(z))$.

La deuxième partie de la conclusion est évidente. □

Le dernier théorème montre que l'algorithme permet de calculer un polynôme D divisible par tout polynôme spécial borné par la paire (A, B). Toute fraction rationnelle S qui n'est pas un polynôme peut s'écrire sous la forme $S_1 + \cdots + S_k$ où $S_1, \ldots, S_k$ sont des fractions rationnelles ayant pour dénominateurs des polynômes spéciaux non reliés. Le produit de ces dénominateurs est le dénominateur de S. Soit L l'opérateur défini par (A.2), soit $i, 1 \leq i \leq k$, la fraction LS_i est soit un polynôme, soit la somme d'un polynôme et d'une fraction dont le dénominateur est spécial et relié au dénominateur de S_i. Nous en déduisons que si S est est solution de l'équation (A.1), chaque fraction S_i, pour $i = 1, \cdots, k$, a son dénominateur borné par la paire $(P_M(z - M), P_0(z))$. Nous obtenons ainsi le "dénominateur universel" désiré en utilisant $A(z) = P_M(z - M)$ et $B(z) = P_0(z)$.

Remarque A.3. Nous avons supposé seulement que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Cela dit, nous avons besoin de savoir trouver des racines entières de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si nous voulons être assurés de mener des calculs exacts, il faut donc qu'il existe un algorithme pour trouver des racines entières d'équations algébriques sur $\mathbb{K}$. Si nous disposons d'un tel corps $\mathbb{K}$, il est clair que toute extension algébrique ou transcendante $\mathbb{K}(\gamma)$ sera elle aussi convenable.

A.2 L'algorithme Poly

A.2.1 Objectif de l'algorithme

Soit F un corps de caractéristique nulle et $\mathbb{K}$ une extension de F. Poly permet d'obtenir toutes les solutions polynomiales $T \in \mathbb{K}[z]$ de l'équation

$$\sum_{0 \leq m \leq M} P_m(z) T(z + m) = H(z) \tag{A.7}$$

où $P_0, \ldots, P_M, H \in F[z]$.

Soit P un polynôme à coefficients dans F, nous noterons $\mathrm{cd}(P)$ son coefficient dominant et la notation $z^{\underline{j}}$ désignera le produit $z(z-1)\ldots(z-j+1)$.

A.2.2 Énoncé de l'algorithme

1. Pour $j = 0, ..., M$, $Q_j \leftarrow \sum_{m=j}^{M} \binom{m}{j} P_m$.
2. $e \leftarrow \max_{0 \leq j \leq M}(\deg Q_j - j)$

$$\alpha(z) \leftarrow \sum_{\substack{0\le j\le M\\ \deg Q_j - j = e}} \mathrm{cd}(Q_j) z^{\underline{j}}$$

$d_1 \leftarrow \max\{z \in \mathbb{N}, \alpha(z) = 0\}$
$d \leftarrow \max\{\deg H - e, -e-1, d_1\}$

3. Injecter $P(z) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$ dans l'équation (A.7).
   Résoudre le système linéaire en les a_i.

4. [Sortie] Une famille génératrice de l'ensemble des solutions.

A.2.3 Justification théorique de l'algorithme

La première étape consiste à trouver une borne d pour le degré des solutions. Nous réécrivons l'opérateur L à l'aide de l'opérateur aux différences $\Delta = N - 1$ où N est l'opérateur de décalage présenté dans la section précédente. Nous avons donc

$$L = \sum_{m=0}^{M} P_m(z) N^m = \sum_{m=0}^{M} P_m(z)(\Delta+1)^m = \sum_{m=0}^{M} P_m(z) \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \Delta^j = \sum_{j=0}^{M} Q_j(z) \Delta^j$$

avec $Q_j = \sum_{m=j}^{M} \binom{m}{j} P_m$. Soit $T(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k \in \mathbb{K}[z]$ tel que $a_d \neq 0$. Comme nous avons

$$\Delta^j z^k = k^{\underline{j}} z^{k-j} + O(z^{k-j-1}),$$

le coefficient dominant de $Q_j(z)\Delta^j T(z)$ est égal à $\mathrm{cd}(Q_j) a_d d^{\underline{j}}$. Posons

$$e = \max_{0\le j\le M} (\deg Q_j - j). \tag{A.8}$$

Nous avons clairement l'inégalité $\deg LT(z) \le d+e$. Si $d+e < 0$ alors $d \le -e-1$ est la borne désirée (remarquons que e peut-être négatif). Dans le cas contraire, le coefficient de z^{d+e} dans $LT(z)$ vaut

$$a_d \sum_{\substack{0\le j\le M\\ \deg Q_j - j = e}} \mathrm{cd}(Q_j) d^{\underline{j}}.$$

Nous distinguons maintenant deux cas.
– Soit $\deg LT(z) = d + e$, nous avons alors $d + e = \deg H(z)$.
– Soit $\deg LT(z) < d+e$, ce qui implique que le coefficient de z^{d+e} dans $LT(z)$ s'annule. Cela signifie que d est une racine du polynôme

$$\alpha(z) = \sum_{\substack{0\le j\le M\\ \deg Q_j - j = e}} \mathrm{cd}(Q_j) z^{\underline{j}} \tag{A.9}$$

Si nous posons

$$d_1 = \max\{z \in \mathbb{N}, \alpha(z) = 0\},$$

nous voyons donc que le degré de n'importe quel polynôme T solution de (A.7) est borné par

$$d = \max\{\deg H - e, -e - 1, d_1\}.$$

Une fois cette borne d obtenue, il est facile de trouver les coefficients des solutions polynomiales de (A.7). Nous utilisons pour cela la méthode des coefficients indéterminés. Nous injectons T écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ dans l'équation (A.7). Nous regroupons les coefficients de mêmes puissances de z. Cela permet de former un système linéaire d'équations algébriques en les $d+1$ inconnues $a_0, \ldots, a_d$ qu'il ne reste plus qu'à résoudre.

Remarque A.4. Tout comme pour l'algorithme d'Abramov, si nous voulons être assurés de mener des calculs exacts, il faut qu'il existe un algorithme pour trouver des racines entières d'équations algébriques sur $\mathbb{K}$. Nous pouvons alors aussi travailler sur toute extension algébrique ou transcendante $\mathbb{K}(\gamma)$.

Remarque A.5. Il existe un algorithme plus sophistiqué décrit dans [ABP] qui mène à la résolution d'un système linéaire à M inconnues. Cette méthode est beaucoup plus efficace que Poly lorsque le degré des polynômes solutions est grand (comme c'est souvent le cas) par rapport à l'ordre M de l'équation aux différences finies.

A.3 Un exemple

Afin de manipuler les deux algorithmes, nous nous proposons de traiter un exemple simple proposé dans [Abr]. Il s'agit de trouver les solutions S appartenant à $\mathbb{Q}(z)$ de l'équation

$$\begin{aligned}(\text{A.10}) \quad & (2z^3+13z^2+22z+8)S(z+3) - (2z^3+11z^2+18z+9)S(z+2) \\ & + (2z^3+z^2-6z)S(z+1) - (2z^3-z^2-2z+1)S(z) = 0\end{aligned}$$

Nous utilisons d'abord l'algorithme d'Abramov pour trouver un dénominateur $D \in \mathbb{Q}[z]$ commun à toutes les solutions rationnelles de (A.10). Nous avons

$$\begin{aligned} A(z) &= 2(z-3)^3 + 13(z-3)^2 + 22(z-3) + 8 \\ &= (z-1)(z+1)(2z-5) \\ B(z) &= -(z-1)(z+1)(2z-1) \end{aligned}$$

Le calcul de $R(m) = \text{Rés}_z(A(z), B(z+m))$ donne

$$R(m) := -4m^2(m-2)(2m+7)(2m+3)(2m+1)(2m-3)(m+2)^2.$$

Nous obtenons donc $N = 2$. Nous entamons la boucle qui permet de déterminer le dénominateur D. Pour $i = 0$, nous obtenons $u(z) = z^2 - 1$ et pour $i = 1, 2$, nous obtenons $u(z) = 1$. Nous avons donc trouvé que $D(z) = z^2 - 1$. Nous remplaçons donc $S(z)$ par $T(z)/(z^2 - 1)$, où $T \in \mathbb{Q}(z)$ dans l'équation (A.10). Nous allons donc nous servir de Poly pour résoudre l'équation

$$(\text{A.11}) \quad (2z+1)T(z+3) - (2z+3)T(z+2) + (2z-3)T(z+1) - (2z-1)T(z) = 0.$$

Nous avons

$$Q_0(z) = -4,\ Q_1(z) = 2(2z-3),\ Q_2(z) = 4z,\ Q_3(z) = 2z+1.$$

Nous en déduisons que $e = \max_{0 \le j \le M}(\deg Q_j - j) = 0$. Le polynôme $\alpha(z)$ vaut donc

$$\alpha(z) = \sum_{\substack{0 \le j \le M \\ \deg Q_j - j = e}} \operatorname{cd}(Q_j) z^{\underline{j}} = 4z - 4.$$

Soit d_1 le maximum de ses racines appartenant à $\mathbb{N}$, nous avons immédiatement $d_1 = 1$. Finalement, la borne d des degrés des polynômes solutions est égale à

$$d = \max\{\deg H - e, -e - 1, d_1\} = 1.$$

Il ne reste plus qu'à injecter $T(z)$ dans (A.11) sous la forme $a_1 z + a_0$. Nous obtenons alors une seule équation $3a_1 + 2a_0 = 0$ qui a pour solutions $(a_1, a_0) = \lambda(2, -3)$ avec $\lambda \in \mathbb{Q}$. La forme générale de la fraction rationnelle solution de l'équation (A.10) est donc :

$$S(z) = \lambda \frac{2z-3}{z^2-1}, \quad \lambda \in \mathbb{Q}.$$

Bibliographie

[Abr] S. A. Abramov, *Rational solutions of linear difference and q-difference equations with polynomial coefficients*, Proc. ISSAC '95, T. Levelt ed., ACM Press, New-York (1995), 285-289.

[ABP] S. A. Abramov, M. Bronstein, M. Petkovšek, *On polynomial solutions of linear operator equations*, Proc. ISSAC '95, T. Levelt ed., ACM Press, New-York (1995), 290-296.

[PWZ] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, A=B, A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996.

3 références bibliographiques

Appendice B

Le module Pasrec

Pasrec est le nom d'un module écrit en Maple. C'est un ensemble de procédures dont l'objectif est de donner des fonctions entières candidates pour satisfaire les systèmes d'équations que nous avons considérés dans le chapitre 1. Pour l'utiliser, lancez votre session Maple et entrez la commande : "`read(Pasrec):`".

B.1 Cas des deux équations aux différences

Nous cherchons la forme explicite des solutions entières f du système

$$\text{(B.1)} \qquad \begin{cases} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{cases}$$

où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites finies de $\mathbb{C}[z]$ et α et β des nombres complexes non nuls tels que $\alpha/\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. La procédure `pasrec` a pour objet la détermination d'une telle forme.

Entrez la commande "`pasrec():`". Il vous sera alors demandé d'entrer le membre de gauche de la première équation, l'ordre de cette équation (M ici), puis un pas récurrent (α ici) associé à cette équation. De même, il vous sera demandé d'entrer le membre de gauche de la deuxième équation, l'ordre de cette équation (N ici), puis un pas récurrent (β ici) associé à cette équation. Vous devrez enfin donner l'expression de la fonction inconnue (ici, $f(z)$) puis entrer une précision qui sera utilisée dans les calculs. **Attention!** Vous devez ajouter ";" ou ":" à toutes les réponses que vous donnez au programme. En cas d'oubli, le programme vous reposera la même question à laquelle il faudra répondre seulement par ";" ou ":" (ne répétez pas votre réponse). Le programme vous donne en réponse une fonction entière candidate. Vous pouvez alors lancer à nouveau le programme en demandant une précision plus fine (i.e. en entrant une constante de précision plus petite) afin de voir si la solution reste inchangée ou s'il y a des termes qui s'ajoutent ou qui disparaissent.

Nous donnons maintenant un exemple de fonctionnement de la procédure `pasrec` sous xmaple.

```
>read(Pasrec):
```

```
>pasrec();
```

```
>Entrez le membre de gauche de votre premiere equation :
((E-1)*z-1)*f(z+2)+((1-E^2)*z+2)*f(z+1)+E*((E-1)*z+E-2)*f(z);
```

```
>Entrez l'ordre de cette equation : 2;
```

```
>Entrez un pas recurrent associe a cette equation : 1;
```

```
>Entrez le membre de gauche de votre deuxieme equation :
((E^I-1)*z-1)*f(z+2)+((1-E^(2*I))*z+2)*f(z+1)
+(E^I)*((E^I-1)*z+E^I-2)*f(z);
```

```
>Entrez l'ordre de cette equation : 2;
```

```
>Entrez un pas recurrent associe a cette equation : I;
```

```
>Entrez l'inconnue : f(z);
```

```
>Entrez la precision souhaitee : 10^(-50);
```

On cherche donc les solutions entieres f du système

$$((E-1)z-1)f(z+2)+((1-E^2)z+2)f(z+1) \\ +E((E-1)z+E-2)f(z)=0$$

$$((E^I-1)z-1)f(z+2I)+((1-E^{2I})z+2)f(z+I) \\ +E^I((E^I-1)z+E^I-2)f(z)=0$$

Toute solution entiere est une combinaison lineaire sur C des fonctions

$$E^z, \quad z$$

Temps CPU, 4.917

```
>Voulez vous refaire le calcul avec une precision differente
(o;/n;)? n;
```

Au revoir!

B.2 Cas où l'une des deux équations est une équation différentielle

L'objectif de la procédure `pasrecd` est de nous donner la forme explicite des solutions entières f du système

$$\text{(B.2)} \qquad \begin{cases} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z) f^{(n)}(z) = 0, \end{cases}$$

où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites finies de $\mathbb{C}[z]$ et α un nombre complexe non nul.

Entrez la commande "`pasrecd():`". Il vous sera alors demandé d'entrer le membre de gauche de l'équation aux différences, l'ordre de cette équation (M ici), puis un pas récurrent (α ici) associé à cette équation. De même, il vous sera demandé d'entrer le membre de gauche de l'équation différentielle et l'ordre de cette équation (N ici). La machine vous demandera enfin de donner l'expression de la fonction inconnue (ici, $f(z)$) puis d'entrer une précision qui sera utilisée dans les calculs. **Attention!** Vous devez ajouter ";" ou ":" à toutes les réponses que vous donnez au programme. En cas d'oubli, le programme vous reposera la même question à laquelle il faudra répondre par ";" ou ":". Le programme vous donne en réponse une fonction entière candidate. Là encore, vous pouvez alors lancer à nouveau le programme en demandant une précision plus fine afin de voir si la solution reste inchangée ou s'il y a des termes qui s'ajoutent ou qui disparaissent.

Nous donnons maintenant un exemple de fonctionnement de la procédure `pasrecd` sous xmaple.

```
>read(Pasrec):
```

```
>pasrecd();
```

```
>Entrez le membre de gauche de votre premiere equation :
(z+2)*f(z+2)+(1+E)*(z+1)*f(z+1)+E*z*f(z);
```

```
>Entrez l'ordre de cette equation : 2;
```

```
>Entrez un pas recurrent associe a cette equation : 1;
```

```
>Entrez le membre de gauche de votre deuxieme equation :
z*D[2](f(z))+(2-z)*D[1](f(z))-f(z);
```

```
>Entrez l'ordre de cette equation : 2;
```

```
>Entrez un pas recurrent associe a cette equation : I;
```

```
>Entrez l'inconnue : f(z);
```

```
>Entrez la precision souhaitee : 10^(-10);
```

On cherche donc les solutions entieres f du système

$$(z+2)f(z+2)-(1+E)(z+1)f(z+1)+Ezf(z)=0$$

$$zD[2](f(z))+(2-z)D[1](f(z))-f(z)=0$$

Toute solution entiere est un multiple complexe de la fonction

$$(1.0000000000E^z-1.0000000000)/z$$

Temps CPU, 5.683

```
>Voulez vous refaire le calcul avec une precision differente
(o;/n;)? n;
```

Au revoir!

B.3 Télécharger le module Pasrec

Pasrec est disponible sur le World Wide Web. Il peut être téléchargé depuis une page web dont l'U.R.L. est
`http://www.math.u-bordeaux.fr/~brisebar/Pasrec/pasrec.html` .