N° d'ordre : 145
N° bibliothèque : 00ENSL0145

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LYON
Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme

THESE

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole normale supérieure de Lyon
Spécialité : Informatique
au titre de l'école doctorale de mathématiques et informatique fondamentale

présentée et soutenue publiquement le 21 janvier 2000

par M. Nicolas SCHABANEL

Algorithmes d'approximation pour les télécommunications sans fil : Ordonnancement pour la dissémination de données et Allocation statique de fréquences

Après avis de : Monsieur Michel HABIB
Monsieur Phillipe JACQUET
Monsieur Sanjeev KHANNA

Devant la commission d'examen formée de :
Monsieur Michel HABIB
Monsieur Phillipe JACQUET
Madame Claire KENYON (directrice de thèse)
Monsieur Sanjeev KHANNA
Monsieur Yves ROBERT (président du jury)
Monsieur Stéphane UBÉDA (co-directeur de thèse)

Thèse préparée à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, au sein du Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme.

Remerciements

Yves Robert, je souhaite te remercier pour avoir bien voulu présider le jury de ma thèse, et surtout pour m'avoir accueilli lors du départ de Claire, au sein de ton équipe, dans laquelle j'ai eu la chance de trouver le dynamisme, les encouragements (parfois acerbes ;-)) et les moyens qui ont permis la réalisation de mes travaux.

Un grand merci également à mes trois rapporteurs **Michel** Habib, **Philippe** Jacquet, et **Sanjeev** Khanna d'avoir accepté de lire et rapporter sur ce lourd document, riche de nombreuses remarques et résultats collatéraux qui, je l'espère, rendent ce document aussi pédagogique que possible.

Claire Kenyon, mes raisons de te remercier, sont difficilement énumérables. Je tiens tout d'abord à te remercier d'avoir bien voulu diriger ma thèse et surtout de m'avoir encadré avec un souci scientifique permanent ; ensuite pour m'avoir mis en contact avec de nombreuses personnes (dont Neal Young) qui m'ont permis de réaliser des progrès significatifs tant sur le plan des connaissances et des résultats que sur l'apprentissage du métier de chercheur. Je tiens aussi à te dire combien ton approche de l'organisation et de l'administration a été rafraîchissante et bénéfique pour m'aider à établir les véritables priorités du métier.

Stéphane Ubéda, je souhaite te remercier pour avoir pris la codirection de ma thèse au départ de Claire. Ton dynamisme et tes conseils m'ont été fort utiles. Je tiens tout particulièrement à te remercier de m'avoir démontré que les relations avec les industriels ne sont pas toujours unidirectionnelles mais qu'elles peuvent consister en un réel échange pour peu que l'on trouve des collaborateurs ouverts.

Neal Young, I'd like to thank you very much for your very kind invitation to Dartmouth College, where I have learnt a lot about approximation algorithms and randomization and more generally about the research process. I am also very grateful for your precious comments on my lectures at Dartmouth College ; they have really allowed me to improve my teaching techniques. I'd also like to thank you and **Jessica** again for your very nice welcome and help in Hanover.

André Elisseeff, de très nombreux mercis à toi et à ta charmante épouse **Stéphanie**, pour ces sympatiques moments de détentes sur nos planches à voile à Miribel (par baston et malheureusement aussi par pétole...), mais aussi pour ces autres moments de réflexion sur la recherche et sur notre futur métier de chercheur.

Ioan Todinca, je te remercie d'avoir assuré le "soutient psychologique" (;-)) lors de nos nombreuses discussions pendant l'épreuve douloureuse de la rédaction de ma thèse.

Merci également à **Fabien** Feschet pour son extrême serviabilité, à **Afonso** Ferreira, **Lata** Narayanan, et **Janez** Žerovnik pour leurs collaborations fructueuses, à mon beau-père **Michel** Derrey pour avoir relu sans vaciller l'introduction et le premier chapitre de ma thèse, to **Joan** and **Harold** Kaplan for your very nice welcome in Annapolis during summer 1995, et à **Luc** Bougé pour m'avoir encadré en stage de D.E.A., ainsi qu'à ceux que j'aurais pu oublier.

Je voudrais également remercier les membres de l'équipe **MC2** du LIP (tout particulièrement Marianne Delorme et Jacques Mazoyer) pour les discussions constructives et enrichissantes que nous avons eues sur la recherche et l'enseignement durant ces années passées à l'ENS Lyon.

Je souhaite aussi remercier les membres de l'équipe **Algo** du LRI (tout particulièrement Jérémy Barbay, Stéphane Boucheron, David Gross, et Sophie Laplante) qui m'ont accueilli avec le sourire à chacune de mes visites au LRI, si bien que je m'y suis toujours senti intégré.

Je voudrais aussi remercier **mes parents**, **François** et **Monique**, pour m'avoir laissé libre de poursuivre les études que je souhaitais, tout en me soutenant dès que j'en avais besoin.

Anne, je t'adresse un ordinal de tendres mercis pour avoir supporté sans (trop) broncher et contre vents et marées les contraintes et aléas de ce métier, tout particulièrement pour avoir si courageusement fabriqué notre petite Juliette pendant que j'étais à l'étranger ou que la rédaction de ma thèse puis celles des divers dossiers m'occupaient très largement au-delà du plein temps.

Un doux merci à ma toute petite **Juliette** d'avoir bien voulu attendre la fin de ma thèse, mon retour à Lyon et la complète installation de sa chambre avant de pointer le bout de son petit nez hors du ventre de sa maman.

A Anne,
A Juliette

Table des matières

Table des Algorithmes

Introduction

Les télécommunications sans fil sont de nos jours au centre des moyens de communication et sont appelées à se développer dans les années à venir. Le développement des réseaux sans fil a, bien entendu, permis la prolifération des téléphones mobiles avec la "liberté"[1] qu'ils procurent. Mais ces réseaux ont également révolutionné la façon de diffuser l'information, tout simplement car ils sont capables de servir la même information, en masse, à un nombre arbitraire[2] d'utilisateurs, sans surcoût. Le développement des réseaux satellite par exemple offre à présent une capacité et une couverture inégalées. Depuis le début des années 1980, nous avons vu apparaître les systèmes d'information "à chaud" : systèmes informatisés d'informations trafic et touristiques (*e.g.* ATIS, Advance Traveller Information System [IVH94, SL96]) qui permettent aux voitures spécialement équipées de choisir le meilleur itinéraire en fonction des conditions de trafic ; systèmes radio de flashs d'informations boursières, météo ou sportives ; ou encore les systèmes vidéo de films à la demande sur les chaînes de télévision câblées, ou de formations à l'intérieur même d'une entreprise. Ces systèmes doivent pouvoir servir en même temps un très grand nombre d'utilisateurs : par exemple, ATIS est amené à servir jusqu'à 100 000 clients en même temps aux heures de pointes dans les grandes villes. Ces nouveaux systèmes ont pu être réalisés efficacement par des moyens de diffusion de masse des informations : par voie hertzienne, ou encore par des réseaux "naturellement diffusants" comme Ethernet. A cause de leur caractère de diffusion de masse, la particularité de tels réseaux est la faible capacité d'interaction avec l'utilisateur. En effet, si la diffusion de l'information du serveur vers les clients dispose d'une large bande passante, celle des clients vers le serveur est souvent faible, voir nulle : pour les connexions à Internet via satellite, par exemple avec DirecPC [Dir97], les connexions *montantes* (de l'utilisateur vers les serveurs) se font par téléphone à 56 Kbps (au mieux !) contre 400 Kbps pour les communications *descendantes* ; un terrain extrême d'ap-

[1] Liberté proclamée par les différents opérateurs à grand renfort de bonshommes qui volent...

[2] A modérer sans doute par des résultats de physique qui doivent interdire la trop grande prolifération d'antennes, mais dans une bien moindre mesure que pour les circuits câblés.

plication est celui du champ de bataille militaire où les soldats sur le terrain ne peuvent pas émettre vers le serveur, de peur de révéler leur position. On parle alors de systèmes de communications *asymétriques*. Pour de tels systèmes, l'approche traditionnelle *interactive* [en anglais, *pull-based*], par émission de requêtes de l'utilisateur au serveur est inefficace : en effet les temps de transmission sont trop longs et surtout le très grand nombre de clients rend irréalisable la gestion des requêtes individuelles. Aussi au début des années 1980, pour les réalisations du Teletext et du Videotext en Europe, et pour le projet du Boston Community Information System (BCIS, 1982) aux Etats-Unis, une nouvelle approche a été développée, dite *pseudo-interactive* [en anglais, *push-based*]. Le serveur émet les différentes informations *indépendamment* des requêtes effectives des clients, qui se connectent sur les canaux d'émission et attendent que les informations qui les intéressent soient diffusées. L'utilisateur a seulement l'illusion d'interagir, en choisissant quel message attendre. Ce protocole pseudo-interactif est appelé *Dissémination de données* [en anglais, *Data Broadcast* ou *Dissemination Based Information System*]. Pour le cas très courant où la majorité des clients demande la plupart du temps le même petit nombre de données, ce protocole est extrêmement efficace, aussi bien en termes de charge réseau, que de charge serveur, ou de temps de réponse aux clients : le serveur réserve alors des canaux spéciaux pour la dissémination de ce petit nombre de données et consacre ainsi le reste de la bande passante afin de servir individuellement les requêtes pour les données “atypiques”. On parle alors d'approche mixte, pseudo-interactive pour les données les plus populaires, et interactive pour les autres.

Du fait des caractéristiques de diffusion de masse, un “effet de bord” de l'émission sans fil est la présence d'*interférences*. Une étape importante lors de la conception des réseaux sans fil est donc la configuration des émetteurs. Cette étape est notamment cruciale pour la téléphonie mobile, où l'on compte près d'un émetteur par pâté de maisons dans les grandes villes (*e.g.* plusieurs centaines d'émetteurs sur Paris en 1997). Chaque émetteur doit pouvoir émettre et recevoir dans sa zone de couverture, sur un certain nombre de fréquences, sans interférer avec les autres. Le nombre de fréquences d'un émetteur correspond directement au nombre maximal d'utilisateurs en simultané dans sa zone de couverture. Maximiser le nombre de fréquences disponibles par émetteur dans une plage de fréquences donnée, ou encore minimiser la plage de fréquences utilisée pour un nombre donné de fréquences à chaque émetteur, est donc une motivation essentielle des opérateurs de téléphonie mobile, et plus généralement de tout système hertzien. Il s'agit donc de placer judicieusement les émetteurs afin d'une part d'obtenir une bonne couverture à moindres frais, et d'autre part de garantir la qualité de service en évitant les interférences, tout en minimisant la taille de la plage de fréquences utilisée. Les graphes de couverture et d'interférence sont souvent très différents. Les zones de couverture, où le signal est suffisamment élevé pour assurer une bonne transmission, sont en général plus petites que les zones d'interférence, délimitées par la frontière où le signal devient négligeable. La planification des réseaux est au centre des préoccupations des opérateurs de téléphonie mobile afin de faire face à la demande sans cesse croissante, et plus généralement, de tout utilisateur de systèmes hertziens de communications.

Dans cette thèse, nous étudions chacun de ces deux thèmes et plus particulièrement : l'*ordonnancement pour la dissémination de données*, et l'*allocation statique de fréquences*.

Dissémination de données en environnements asymétriques

Un petit historique

L'approche pseudo-interactive de la diffusion des données est née au début des années 1980. Après quelques années, cette approche a pris un essor considérable à la suite du développement des téléphones mobiles et de l'extension des réseaux satellites et câblés. Nous trouvons à présent différentes offres commerciales, comme : des systèmes de dissémination de l'information, tels Pointcast Inc. [Poi97] sur Internet (nouvellement renommé EntryPoint Inc. [Ent99], suite à sa fusion avec le service de portefeuille électronique eWallet Inc.), Airmedia Inc. [Air97] par émetteurs radio ; ou encore des solutions réseau "dédiées", telles Marimba Inc. [Mar97].

L'une des toutes premières études des systèmes de dissémination d'information a été le Boston Community Information System (BCIS, 1982), développé par le Massachusetts Institute of Technology (MIT) : il s'agissait d'un système d'information "à chaud" destiné à des utilisateurs du métro Bostonien, spécialement équipés de récepteurs radio. A la même époque (début 1980) les systèmes de Teletext et de Videotext [Sig80], utilisant la télévision comme moyen de réception, ont connu un succès à grande échelle en Europe (en Allemagne en particulier) [Gif90]. L'application au domaine des bases de données a été l'objet du projet Datacycle [HGLW87, BGH$^+$92] à Bellcore au début des années 1990 : dans ce projet, la base de données circule toute entière sur un bus de très large bande passante (140Mbps) ; et les utilisateurs obtiennent les informations en filtrant les données diffusées avec un appareil dédié de réception, massivement parallèle, capable de trier jusqu'à 200 millions de prédicats par seconde ; il est également possible pour l'utilisateur d'adresser des requêtes au serveur. Depuis quelques années, le système d'informations trafic et touristiques ATIS (Advanced Traveller Information System, 1997 [IVH94, SL96]) est un exemple d'application typique, par le nombre de clients servis simultanément (plus de 100 000) : ce système permet aux conducteurs spécialement équipés, de choisir le meilleur itinéraire en fonction des conditions de trafic, ou bien de découvrir les sites touristiques, de rechercher un hôtel, une station service, *etc.*...

L'un des sujets de développement très prometteurs actuels est l'application à Internet de ces techniques : en effet l'explosion d'Internet, due à la baisse du prix d'achat des ordinateurs, (*e.g.* le nombre de machines connectées à Internet a augmenté de 70% entre janvier 1996 et janvier 1997), pose le problème de la surcharge serveur des sites les plus populaires, comme les sites des grands tournois de tennis (*e.g.* www.wimbledon.org) ou les sites olympiques. Comme le souligne Bestavros [Bes96], si les serveurs web proposent plusieurs milliers de pages, un très petit nombre réunit la très grande majorité des requêtes : il cite, par exemple, le cas du serveur `cs-www.bu.edu` qui propose plus de 2000 pages, mais dont seulement 0,5% des pages sont demandées par 69% des requêtes, et 10% des pages concentrent 91% des requêtes. Disposer de moyens de communications de masse (sans fil ou de type bus Ethernet) permettrait d'une part de soulager les serveurs de la charge du traitement des requêtes pour les pages les plus populaires, et d'autre part de libérer de la bande passante, en confinant la dissémination des pages les plus demandées sur un petit nombre de canaux réservés. Lors de simulations, Acharya, Franklin et Zdonik [AFZ97, FZ97, FZ98], ont démontré que pour les systèmes de communication asymétriques, les stratégies de dissémination pseudo-interactive permettent d'améliorer considérablement les performances pour un nombre élevé d'utilisateurs. La figure 1 présente l'un de leurs résultats : un même serveur diffuse un lot de données sur un bus à des clients de profil identique suivant deux stratégies ; la première, pseudo-interactive, suit un ordonnancement cyclique fixé, et la seconde traite les requêtes des utilisateurs en FIFO.

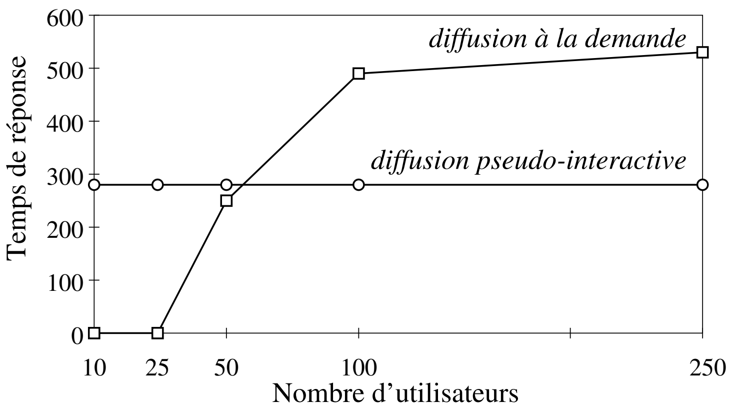


FIG. 1 : *Evolution du temps de réponse en fonction du nombre de clients lors de simulations (source: [FZ97]).*

Alors que le temps d'attente est constant pour le serveur pseudo-interactif, le serveur à la demande est débordé à partir d'un certain nombre d'utilisateurs et l'attente augmente dramatiquement, pour se stabiliser à une valeur bien plus élevée que pour le serveur pseudo-interactif. La stabilisation finale, qui donne cette forme en "S", s'explique par le fait que la file d'attente des requêtes adressées au serveur à la demande contient finalement tous les messages dans un ordre cyclique donné.

Comme le soulignent Franklin et Zdonik dans leur état de l'art de l'approche pseudo-interactive [FZ98], les technologies utilisées sur Internet ne permettent pas toujours de tels moyens de dissémination. Aussi l'approche pseudo-interactive proposée est réalisée pour l'instant par mise à jour des caches des serveurs locaux, ce qui impose de tenir compte de la topologie du réseau et des dépendances géographiques des requêtes [Bes96, BC96]. Un exemple d'application est le système PointCast [Poi97] de diffusion de journaux électroniques personnalisés sur Internet.

L'enjeu principal de l'introduction des protocoles de dissémination de données est donc de réduire l'attente des utilisateurs, en réduisant la bande passante occupée par les données les plus populaires sans augmenter leur attente pour ces informations. Il s'agit donc, pour le serveur, de trouver un bon ordonnancement de ces données sur les canaux réservés, afin de minimiser l'attente des clients qui se connectent de temps à autre et attendent l'émission des données qui les intéressent.

Domaines d'étude

Un serveur de dissémination d'informations est chargé de diffuser sur des canaux spécialement réservés, un certain nombre de *messages* (typiquement les pages les plus populaires d'un site web, les différents flashs d'un programme d'information, *etc*...), à des clients, qui se connectent de temps à autre sur ces canaux, et attendent que les messages qu'ils demandent, soient diffusés. Dans cette thèse, nous emploierons indifféremment les termes de messages, *données*, *informations*, *pages*, pour désigner les données diffusées. Etant donné que les requêtes des utilisateurs ne sont pas transmises au serveur, ce dernier se base sur un *profil* de l'utilisateur moyen, pour calculer l'ordonnancement des messages. Le profil est déterminé par les *popularités* des différents messages, c'est-à-dire la *distribution* des requêtes sur les messages. Ces probabilités sont calculées, par exemple, en étudiant la trace des requêtes sur le serveur, ou bien en demandant tout simplement aux utilisateurs de soumettre leurs centres d'intérêt (*e.g.* PointCast [Poi97]). Dans [Vis94], Viswanathan présente quelques méthodes pour déterminer le profil pour un ensemble de données. A partir de ce profil et des caractéristiques des messages, le serveur cherche à déterminer un *ordonnancement* sur les différents canaux, qui minimise, d'une part le *temps de réponse moyen* du système (que l'on appellera aussi le temps de *service*), c'est-à-dire l'attente moyenne des clients — qualité de service, et d'autre part le *coût d'émission* — coût du service. Ces deux fonctions caractérisent la fonction de *coût* de l'ordonnancement.

Avec la prolifération des portables (*e.g.* téléphones mobiles, Palm-pilot, *etc*...), d'autres axes de recherche ont été étudiés à partir du milieu des années 1990, qui cherchent à minimiser la *consommation d'énergie* des appareils de réception : en effet, l'écoute des canaux consomme de l'énergie et donc en émettant de temps à autre un *index* des prochains messages diffusés, le serveur peut permettre aux appareils à l'écoute de se déconnecter pour se reconnecter au moment exact de la dissémination du message qui les intéresse, économisant ainsi substantiellement les batteries.

La miniaturisation aidant, les appareils de réception ont gagné en capacité mémoire, permettant ainsi de développer des algorithmes de gestion de cache local. Ainsi au milieu des années 1990, afin de réduire l'attente d'un client qui "surfe" différents messages ou pages, des améliorations du protocole de réception du client ont pu être proposées : à l'aide de probabilités conditionnelles et d'indexage (entre autres), l'appareil client décide de *télécharger par anticipation* les messages en cours de diffusion, alors que l'utilisateur ne les a pas encore demandés, afin d'écourter l'attente par la suite.

Il existe aussi une autre branche de la dissémination de données en milieu asymétrique, dont le but n'est pas directement de minimiser l'attente de clients, mais de satisfaire des contraintes de "temps réel". Il est en effet parfois critique d'assurer un *débit* d'information constant, notamment pour les serveurs vidéo. Il s'agit dans ce cas pour le serveur de générer un ordonnancement qui satisfasse des contraintes sur le débit du type : "au moins vingt images du film A doivent être diffusées dans tout intervalle d'une seconde". Le problème, [en anglais, *pinwheel*], est alors très différent et sort du cadre de cette thèse ; le lecteur intéressé pourra se référer à [HMR$^+$89, CC92, CC93, BB97].

La dissémination de données met donc en jeux de nombreux critères d'optimisation (*e.g.* temps d'attente, économie d'énergie, stratégie d'anticipation au chargement, *etc...*) et propose donc de nombreuses variantes, dont quelques unes n'ont été envisagées que très récemment (à partir de 1994 essentiellement), et dont la plupart sont encore ouvertes. Ce problème présente de nombreuses originalités par rapport aux problèmes traditionnels d'ordonnancement (parallélisation, planification d'emploi du temps, *etc...*). Tout d'abord, l'ordonnancement s'étend sur une *durée infinie*, et les quantités à minimiser sont donc définies de manière *asymptotique*. Ensuite, comme nous le verrons, le temps de réponse du système est une fonction *quadratique*, alors que les problèmes d'ordonnancement usuels cherchent à minimiser une fonction objectif linéaire (attente maximale, attente totale, temps de complétion, *etc......*). De plus, trouver l'optimum est NP-difficile[3] dès les cas les plus simples (*e.g.* s'il n'y a aucune dépendance entre les messages, ou aucun coût d'émission). Les problèmes de gestion de cache sont aussi très différents. En effet, le coût d'une faute de page n'est pas constant, comme pour les caches mémoire, mais dépend de la date de la faute et de l'ordonnancement à venir. Aussi jusqu'au milieu des années 1990 et encore aujourd'hui, seuls les cas les plus contraints ont été étudiés.

[3]Un problème de décision (A) est dit NP-*difficile* si pour tout problème de décision (B) soluble en temps polynomial non-déterministe, toute instance de (B) peut se réduire en temps polynomial à une instance de (A) telle qu'une instance de (B) admet une solution si et seulement si l'instance correspondante de (A) en admet une. D'un point de vue pratique, un problème est NP-difficile s'il est au moins aussi dur que des problèmes réputés très difficiles (*e.g.* 3-SAT, le voyageur de commerce, *etc...*) dont on ne connaît pas de solutions polynomiales à l'heure actuelle.

Un problème d'ordonnancement générique

La problématique de la dissémination de messages ne se limite pas au simple cadre des réseaux sans fil mais modélise aussi deux autres problèmes, dont la correspondance est détaillée dans [BNBNS98] : la *planification de la maintenance de machines* et le *réapprovisionnement de stocks*. Pour le problème de maintenance, introduit par Wei et Lu [WL83] et repris par Anily, Glass et Hassin [AGH94, AGH95], l'équivalent de l'ensemble des messages à diffuser est un ensemble de machines à maintenir (par exemple, des photocopieurs). La probabilité instantanée de défaillance de chaque machine augmente linéairement avec le temps (par exemple, avec le nombre de copies effectuées). Il s'agit de calculer l'emploi du temps des différents opérateurs ou agents de maintenance (correspondant aux canaux dans le cadre de la dissémination de messages) de façon à minimiser à la fois le risque de défaillance et le coût de maintenance. Dans la problématique du réapprovisionnement de stocks, nous disposons d'un nombre limité de camions (les canaux de la dissémination de messages) qui doivent réalimenter différents stocks (les messages) ; les stocks doivent honorer des commandes (les requêtes des clients) ; les commandes non-honorées ont un coût proportionnel à la durée d'attente ; il s'agit alors de minimiser le coût de revient de l'exploitation. Une part importante des travaux sur le domaine a été réalisée par Anily, Glass et Hassin dans [AGH95], puis par Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber dans [BNBNS98], dans le cadre de la maintenance des machines ; nous présenterons leurs résultats dans le cadre de la dissémination de messages. Les résultats présentés dans cette thèse s'appliquent naturellement à ces différents domaines d'application.

Etat de l'art

La problématique de la dissémination de données est apparue au début des années 1980 avec le développement du Teletext et du Videotext [Sig80]. Jusqu'en 1996, les études se limitent au cas où tous les messages ont le même temps de transmission. Le temps est discret et l'unité de temps est la longueur commune des messages. Comme le souligne alors Ammar dans [Amm87], *"[this hypothesis] is required to render the problem under consideration tractable"*[4]. En 1983, dans [Gec83], Gecsei démontre que, si l'on tire aléatoirement la page à diffuser à chaque top selon une distribution fixée, le meilleur choix consiste à la tirer avec une probabilité proportionnelle à la *racine carrée de sa popularité*. Cette règle est connue dans le domaine sous le nom de la *règle de la racine carrée* [en anglais, *square root-rule*]. Nous verrons qu'elle s'étend à d'autres cas. Deux années plus tard, Ammar et Wong obtiennent, en étudiant les ordonnancements périodiques, un minorant sur le coût de tout ordonnancement périodique dans [AW85]. Ils justifient par la suite dans [AW87] que cette restriction aux ordonnancements périodiques ne soit pas limitative, en démontrant

[4] *En français* ;-), "[cette hypothèse] est nécessaire pour permettre l'étude du problème".

l'existence d'un ordonnancement optimal périodique, qu'ils décrivent à l'aide d'un processus Markovien fini. Une autre preuve de ce résultat, basée sur l'étude des cycles d'un graphe valué, sera proposée par Anily, Glass, et Hassin dans [AGH95].

Deux observations cruciales sont tirées de l'étude du minorant d'Ammar et Wong : *"idéalement"*, c'est-à-dire en *oubliant* les contraintes de *non-recouvrement* des messages, chaque message doit être diffusé *périodiquement* à intervalles *réguliers*, et avec une fréquence proportionnelle à la *racine carrée* de sa popularité. Ces deux observations sont à la base de toutes les études faites dans le domaine.

Ce minorant leur permet de plus de prouver que l'algorithme de Gecsei est une 2-approximation[5]. En effet "idéalement", chaque message est diffusé dans un intervalle de longueur τ proportionnelle à la racine carrée de sa popularité et donc chaque requête attendrait $\tau/2$. Dans le cas de l'algorithme de Gecsei, toute requête attend en moyenne τ unité de temps, et donc au plus le double de l'optimum.

Ils proposent de plus deux autres heuristiques déterministes. La première est gloutonne et choisit à chaque top d'ordonnancer le message dont l'attente cumulée est la plus élevée. L'autre utilise une propriété du nombre d'or, mise en valeur par Knuth [Knu73, vol. 3, pp. 510–511] dans le cadre du hachage, puis utilisée par Itai, Hofri et Rosberg [IR84, HR87] dans le cadre des réseaux TDM : les multiples du nombre d'or modulo 1 se répartissent le plus uniformément possible entre 0 et 1. Ammar et Wong utilisent cette propriété pour obtenir un ordonnancement périodique, tel que les intervalles entre deux émissions consécutives d'un même message soient à peu près réguliers. Ces deux heuristiques sont testées empiriquement sur des lots de messages, pour lesquels la distribution des popularités vérifie la loi de Zipf [Zip49], qui semble modéliser assez bien la réalité des demandes. D'autres études empiriques de ces heuristiques seront reprises dans le cadre de "la toile" par Su et Tassiulas, dans [ST97a, ST97b].

En 1994, le problème de l'ordonnancement est repris dans le cadre de la maintenance de machines par Anily, Glass, et Hassin qui, dans [AGH94], donnent une 1,033-approximation pour le cas de trois machines de même durée de maintenance. Dans [AGH95], ils proposent et analysent une 2,5-approximation basée sur un arrondi à des puissances de 2 des longueurs idéales des intervalles entre les maintenances d'une même machine, calculées à partir du minorant d'Ammar et Wong [AW85]. Dans [BNBNS98], Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber démontrent, dans le cadre de la maintenance de machines, que le problème de l'ordonnancement de messages de longueur uniforme avec coût de diffusion, est NP-difficile. Ils analysent également les heuristiques proposées par Ammar et Wong dans [AW85, AW87]. Ils démontrent que l'algorithme glouton est en fait la dérandomisation de l'algorithme de Gecsei, et est donc une 2-approximation. Ils montrent aussi que l'algorithme basé sur le nombre d'or est en fait une $9/8$-approximation. De plus, ils étendent ces deux heuristiques

[5] Une α-approximation d'un problème de minimisation est un algorithme polynomial qui génère une solution de coût égal à au plus α fois le coût optimal.

au cas des messages de longueur uniforme avec coût de diffusion sur plusieurs canaux. Dans [BNS99], Bar-Noy et Shilo étudient complètement le cas de deux messages sur *un* canal. Ils démontrent que quelles que soient les requêtes pour les messages A et B (A, B, A ou B, A et B, A puis B, B puis A), quels que soient leurs temps de transmission, l'ordonnancement optimal est périodique de période $(AB \cdots B)$ ou $(A \cdots AB)$.

Durant la même période, au milieu des années 1990, Acharya, Alonso, Franklin et Zdonik, dans [ZFAA94], proposent un modèle simplifié, plus restreint, pour déterminer les ordonnancements : les *disques diffusants* [en anglais, *broadcast disks*]. Il s'agit de décomposer l'ordonnancement des messages en série d'ordonnancements cycliques. Les messages sont partitionnés en groupes selon leur importance par une méthode *ad hoc*. Les messages d'un groupe sont diffusés cycliquement, une fois par cycle. Chaque cycle est visualisé comme un disque, qui tourne à une certaine vitesse, d'autant plus élevée que les messages qu'il contient sont populaires. L'ordonnancement final est obtenu en fusionnant les différents cycles avec différentes densités, données par les vitesses de rotation des disques [AAFZ95]. Cette approche permet de garantir que chaque message sera ordonnancé à intervalles réguliers, et que l'ordonnancement sera périodique, mais interdit d'atteindre l'optimum. Notons que la méthode des disques diffusants présente de nombreuses similarités avec l'heuristique développée par Anily, Glass et Hassin dans [AGH95]. Dans [AFZ96, Ach98], Acharyan, Franklin et Zdonik proposent, dans ce cadre, une étude des stratégies de gestion de cache : ils démontrent empiriquement que l'algorithme classique LRU (éviction de la page lue le plus anciennement) n'est pas adapté à ce contexte et qu'il faut lui préférer une stratégie qui tient compte de l'ordonnancement en cours. La stratégie déclarée la meilleure consiste à éliminer la page qui sera la moins demandée en moyenne par la suite, *i.e.* dont le produit de la popularité par l'attente jusqu'à sa prochaine dissémination est le plus petit. Dans [KL98], Khanna et Liberatore démontrent que, pour un disque diffusant cycliquement m messages (on parle de disque diffusant *linéaire* [en anglais, *flat broadcast disk*]), aucun algorithme en ligne déterministe ne peut obtenir, avec un cache de taille k, un rapport de performance inférieur à $\Omega(mk)$ sur le nombre optimal de fautes de page, et aucun algorithme randomisé ne peut obtenir un rapport de performance inférieur à $\Omega(m \log k)$. Ils proposent par ailleurs des algorithmes qui atteignent ces minorants à une constante près : $O(mk)$ pour l'algorithme déterministe et $O(m \log k)$ pour l'algorithme randomisé.

Parallèlement, à partir de 1994, des études sur l'économie d'énergie, réalisée en diffusant régulièrement un index des prochaines émissions, sont développées par Babrinath, Immielinski et Viswanathan [IB94, IVB94b, IVB94a] pour le cas d'un disque diffusant linéaire. Ils obtiennent, pour un disque diffusant linéaire de m messages, une $(1 + \varepsilon)$-approximation pour le temps d'attente et atteignent la borne $\Theta(\log m)$ sur le temps d'écoute, imposée par la théorie de l'information, en structurant l'index à l'aide de tables de hachage. Ces études sont poursuivies sur le cas de plusieurs canaux, par Shivakhumar et Venkatasubramanian dans [SV96] qui obtiennent également la borne $\Theta(\log m)$ pour le cas de

$O(\log m)$ canaux. En 1998, Khanna et Zhou dans [KZ98] étendent ces résultats en proposant un algorithme d'ordonnancement des messages sur un canal qui permet d'obtenir une 1,5-approximation pour le temps d'attente moyen tout en réalisant, à une constant, près le temps d'écoute minimal $\Theta(\log m)$.

Les seules études du cas des longueurs non-uniformes, antérieures à nos travaux, ont été menées par Hameed et Vaidya dans [VH96, VH97, VH99, HV99]. Ils proposent des heuristiques pour l'ordonnancement de messages sans coût de diffusion, basées sur l'extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong de [AW85]. Leurs heuristiques sont testées empiriquement sur des lots de messages dont la distribution de la popularité vérifie la loi de Zipf.

Notre contribution pour la dissémination de données

La contribution du présent document, pour le domaine de la dissémination de données, concerne la *conception de l'ordonnancement à partir du profil* de l'utilisateur, indépendamment de l'existence de cache ou d'indexation. Nous nous sommes attachés d'une part à améliorer les résultats précédents en proposant un algorithme plus efficace pour le cas où tous les messages ont la même longueur ; et d'autre part à étendre le domaine de recherche au cas où les messages à diffuser n'ont pas tous la même longueur. Cette restriction est en effet très contraignante en pratique puisque les données à diffuser sont le plus souvent de taille variable (*e.g.* les pages web d'un serveur ; les infos, la météo, la bourse et le bulletin de sport d'un journal). Nous avons donc étudié ce cas sous deux aspects : non-préemptif et préemptif. Nous avons démontré que ces deux cas sont NP-difficiles, même si les messages n'ont pas de coût de diffusion.

Nous montrons aussi que, comme l'avaient suspecté Ammar et Wong dans [AW85], le cas où les messages sont de longueurs différentes sans préemption, est beaucoup plus compliqué que le cas des longueurs uniformes. En effet, si l'ajout d'un canal dans le cas uniforme n'améliore l'attente optimale des utilisateurs que d'une constante, il l'améliore d'un facteur arbitraire dans le cas non-uniforme (*v.* exemple 2.2 page 61). En particulier, l'extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong [AW85] au cas des longueurs non-uniformes, est inefficace : le coût de l'ordonnancement optimal en est arbitrairement éloigné. Nous avons donc développé un nouveau minorant qui nous a permis d'obtenir un algorithme d'approximation d'un facteur constant, pour le cas d'un canal. Si, comme nous le verrons pour le schéma d'approximation pour le cas des longueurs uniformes, le cas de plusieurs canaux ne présente pas de différence de complexité avec un canal, l'exploration de plusieurs canaux reste un problème ouvert pour le cas des longueurs non-uniformes.

La question de savoir si l'extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong au cas des longueurs non-uniformes a un sens, a motivé l'introduction et l'étude du cas préemptif. Nous en proposons et étudions un modèle, où les messages sont découpés en paquets de même longueur. Le client intéressé par un message doit télécharger tous les paquets du message. Le problème reste NP-dur. Nous dérivons un nouveau minorant dont la valeur est assez similaire à l'extension naturelle de celui d'Ammar et Wong. Et nous obtenons pour ce problème une 2-approximation qui démontre donc que la préemption permet d'améliorer d'un facteur arbitraire le temps de réponse de l'ordonnancement de messages de longueurs non-uniformes.

Notre étude du cas préemptif peut également être vue comme une extension du problème de l'ordonnancement des messages de longueurs uniformes au cas où les utilisateurs ne demandent pas des messages seuls, mais des *lots* de messages (par exemple, différentes parties d'un journal). En effet les paquets constituant un message, peuvent être considérés comme des messages de longueur unitaire réunis en un lot que les utilisateurs peuvent demander. Notre étude est le cas particulier de cette extension, où les lots sont disjoints. En ce sens, ces travaux sont donc aussi une généralisation de certains des résultats de l'étude de toutes les requêtes possibles pour deux messages sur un canal, réalisée par Bar-Noy et Shilo dans [BNS99].

Nous avons aussi étudié le cas des messages de longueurs uniformes. Nous avons amélioré les résultats existants en proposant un schéma d'approximation polynomial[6]. Le meilleur algorithme polynomial précédent [BNBNS98] était une approximation à $9/8$ de l'optimum. Notre algorithme s'étend également au cas où les messages ont des coûts de diffusion bornés par une constante. Il présente aussi l'avantage de générer un ordonnancement périodique de période bornée qui soit quadratique en le nombre de messages.

Organisation de la première partie du document

Nos travaux sur « l'ordonnancement de la dissémination de données en environnements asymétriques » font l'objet de la première partie de ce document. Cette première partie est découpée en cinq chapitres.

Le premier chapitre définit le modèle et sa problématique, et présente dans le détail les travaux antérieurs qui sont à la base des travaux de cette thèse. Principalement, le travail d'Ammar et Wong [AW85] sur le calcul du minorant et sur la preuve de l'optimalité d'un ordonnancement périodique, et celui de Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber [BNBNS98] sur la NP-dureté, l'analyse des approximations et leurs extensions au cas de plusieurs canaux. Les lecteurs familiers du domaine pourront passer directement au chapitre suivant.

Notre étude du cas où les messages n'ont pas tous la même longueur fait l'objet du deuxième chapitre. Nous y présentons les changements avec le cas uniforme. Un nouveau

[6]Un *schéma d'approximation polynomial* d'un problème de minimisation (*resp.* de maximisation) est une suite calculable d'algorithmes $(A_{\varepsilon_n})_{\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+}$, qui en un temps polynomial calcule une solution réalisable dont la valeur est au plus $(1+\varepsilon_n)$ fois (*resp.* au moins $(1-\varepsilon_n)$ fois) la valeur optimale. En clair, une suite d'algorithmes polynomiaux qui calculent des solutions arbitrairement proches de l'optimal.

minorant est présenté, qui nous permet d'obtenir un algorithme d'approximation pour le cas d'un canal.

Le troisième chapitre étudie l'extension au cas préemptif. L'existence d'un ordonnancement périodique optimal y est démontrée et nous présentons un nouveau minorant pour ce cas. Nous obtenons également un algorithme d'approximation.

Nous présentons notre schéma d'approximation pour le cas des messages de longueur uniforme et de coût de diffusion borné au quatrième chapitre.

Le dernier chapitre de cette partie est consacré à la résolution de nos minorants. Nos minorants sont tous présentés sous forme de problèmes de minimisation contrainte non-linéaire. Nous y présentons l'extension de la méthode développée par Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber dans [BNBNS98]. La résolution utilise à la base une relaxation Lagrangienne. Nous en présenterons rapidement, au début de ce chapitre, les principes généraux. Le lecteur intéressé pourra se reporter au cours [Gui95] proposé par Guignard sur la question.

Allocation statique de fréquences dans les réseaux cellulaires

La seconde partie de cette thèse est consacrée à la conception d'algorithmes d'approximation pour l'allocation statique de fréquences dans les réseaux cellulaires.

La problématique

Dans un réseau sans fil, l'accès des utilisateurs au réseau se fait par voie hertzienne via un *transmetteur*. Chaque transmetteur couvre une certaine zone, dite *de couverture*, dans laquelle les utilisateurs peuvent émettre et recevoir sur le réseau en communiquant avec ce transmetteur sur une certaine fréquence. Plus précisément la communication est établie sur un *canal* de transmission. Un canal de transmission correspond à une gestion partagée des fréquences dont le but est de pouvoir augmenter le nombre d'utilisateurs connectés en même temps à un même transmetteur : un canal est une suite de créneaux de temps de communication à intervalles réguliers (dans le cas d'un multiplexage en temps, TDMA) sur une ou plusieurs fréquences (dans le cas d'un multiplexage en fréquences, FDMA) munie d'un code de transmission (cas d'une modulation par codage, CDMA). Par exemple, dans la norme GSM, chaque fréquence est partagée en huit canaux composés de créneaux de $0{,}5769$ ms ($= 75/130$ ms) répartis uniformément dans le temps ; les fréquences sont réparties toutes les $0{,}2$ MHz dans les bandes 890–915 MHz (pour les communications montantes, du mobile vers le transmetteur) et 935–960 MHz (pour les communications descendantes). Deux utilisateurs peuvent communiquer de façon simultanée sur des canaux différents. Cependant, du fait des interférences, deux communications distinctes (avec le même transmetteur ou avec deux transmetteurs différents) ne peuvent pas avoir lieu sur le même canal si les utilisateurs sont trop proches l'un de l'autre, car leurs communications se brouilleraient mutuellement. Le nombre de canaux disponibles sur un transmetteur correspond donc au nombre maximum d'utilisateurs qui peuvent accéder au réseau dans sa zone de couverture. L'allocation des canaux aux transmetteurs est donc une étape critique de la conception d'un réseau sans fil. Pour des raisons techniques de synchronisation temporelle, il est très difficile de partager une même fréquence sur deux transmetteurs différents. Aussi, le problème l'allocation des canaux se réduit à attribuer à chaque transmetteurs les fréquences sur lesquelles les communications vont être établies (notons que pour le cas de protocole CDMA, ce sont les codes qui forment la ressource critique). Nous oublierons donc à partir de maintenant la notion de canaux pour se concentrer sur le problème de l'allocation des fréquences sur les émetteurs.

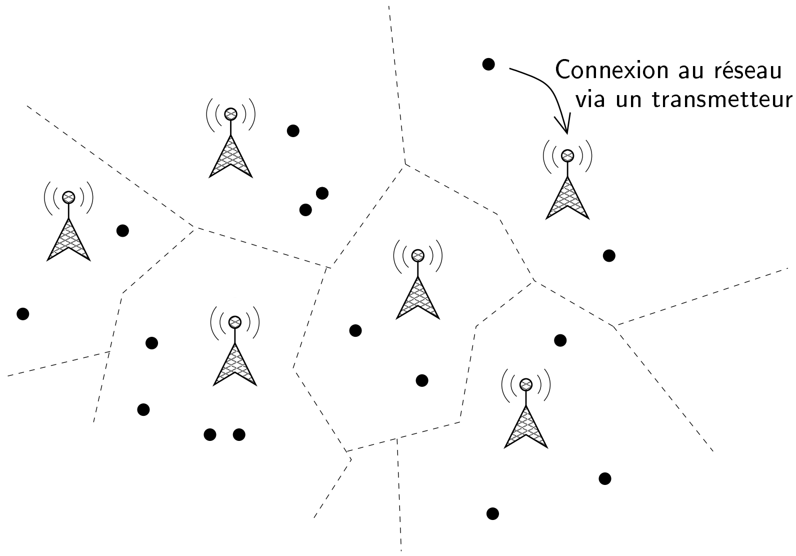


FIG. 2 : *Un exemple de réseau cellulaire et de son graphe de couverture (en pointillé). Pour accéder au réseau, les utilisateurs (représentés par des petits ronds noirs) se connecte sur le transmetteur de la zone de couverture où ils se trouvent.*

Rapidement, dès les années 1980, il est apparu nécessaire de réutiliser autant que possible les fréquences pour faire face à l'augmentation sans cesse croissante du nombre d'utilisateurs des réseaux sans fil. Aussi, les premiers réseaux à base de transmetteurs puissants couvrant une large zone de couverture ont été progressivement remplacés par des réseaux, dits *cellulaires*, constitués de transmetteurs de puissance plus faible couvrant des zones plus petites. Il est alors possible d'allouer les mêmes fréquences à des transmetteur pour peu qu'ils soient suffisamment éloignés. L'enjeu de l'allocation de fréquence est en effet d'assurer la qualité de la communication, c'est-à-dire le rapport signal-sur-bruit pour chaque fréquence utilisée [en anglais, *CIR Carrier-to-Interference ratio*], en utilisant une plage minimale de fréquences. L'atténuation d'un signal est progressive avec la distance d à l'émetteur selon $d^{-\alpha}$, où α varie entre 3 et 5 suivant les milieux. Par exemple, $\alpha \approx 3{,}5$ à l'intérieur d'un bâtiment [KN96], ce qui implique une diminution de 9% du signal à chaque fois que l'on double la distance au transmetteur. Il est donc possible d'allouer des fréquences identiques à des transmetteurs différents pour peu qu'ils soient à une distance suffisante l'un de l'autre, que l'on peut calculer en fonction de la qualité de communication requise et du réseau considéré.

Le problème de l'allocation de fréquences consiste alors à attribuer à chaque transmetteur un nombre suffisant de fréquences pour qu'il puisse répondre sans interférence aux demandes d'accès des utilisateurs dans sa zone de couverture, tout en minimisant la plage de fréquences utilisée. Si nous relions les transmetteurs pouvant entrer en interférence par une arête, nous obtenons le *graphe d'interférence* du réseau. Le problème de l'allocation de fréquences se ramène alors à attribuer à chaque sommet du graphe un certain nombre de fréquences égal à la demande dans la zone de couverture du transmetteur correspondant, tel que les fréquences allouées à deux sommets reliés par une arête satisfassent des contraintes d'interférence, sachant que ces contraintes varient avec la distance (physique) entre les transmetteurs correspondants. En considérant les fréquences comme des couleurs au sens classique de la théorie des graphes, nous sommes ramenés à une généralisation du problème de coloriage de graphe classique.

Modèle(s)

Nous avons vu que nous pouvions représenter le réseau cellulaire par un graphe $G = (V, E)$ dont les sommets $v \in V$ sont les transmetteurs, et où une arête $uv \in E$ signifie qu'il existe une possibilité d'interférence entre les transmetteurs u et v. Les *demandes* en fréquences des transmetteurs sont données par une fonction $d : V \to \mathbb{N}$. Les fréquences sont codées par des entiers, que l'on appellera aussi *couleurs*. Il s'agit donc d'attribuer à chaque transmetteur u un ensemble de fréquences (ou couleurs) $F(u) \subseteq \mathbb{N}$ de taille $|F(u)| = d(u)$ et tels que les fréquences de $F(u)$ n'interfèrent ni entre elles, ni avec celles des voisins de u, tout en minimisant la taille de la plage de fréquences utilisée, c'est-à-dire la différence entre la plus grande et la plus petite fréquence utilisée. Si chaque transmetteur demande une unique fréquence ($d(u) = 1$ pour tout u) et si les contraintes d'interférence sont simplement que les fréquences soient différentes, nous reconnaissons le problème de coloriage de graphes classique, dont l'ouvrage [JT95] de Jensen et Toft présentent une grande part des travaux.

Différents modèles ont été proposés pour les contraintes d'interférence. Le principe est que plus les transmetteurs sont proches, plus les fréquences qu'ils utilisent doivent être éloignées [BP90]. Aussi un premier modèle consiste à pondérer les arêtes $uv \in E$ par la différence minimale $c(uv)$ entre deux fréquences allouées aux sommets u et v (voir par exemple [Gam86]). Dans certains cas, seules certaines différences entre fréquences sont interdites et si l'on note T l'ensemble de différences interdites, le *T-coloriage*, proposé par exemple dans [Hal80], consiste à attribuer à chaque sommet u un ensemble de fréquences tel que les différences des fréquences de u entre elles et avec celles de ses voisins n'appartiennent pas à T. Dans [Rob91] et [Rob93], Roberts présente un état de l'art des résultats sur le T-coloriage. Dans d'autres applications pratiques, les plages de fréquences autorisées varient d'un transmetteur à l'autre (proximité d'un aéroport, fréquences de police, présence d'autres opérateurs, *etc...*). Aussi le *coloriage par listes*, introduit indépendamment par Erdös, Rubin et Taylor dans [ERT79] et Vizing dans [Viz76], propose d'attribuer à chaque sommet u une liste $L(u)$ de fréquences autorisées en u. Il s'agit alors de choisir $d(u)$ fréquences dans $L(u)$ pour le transmetteur u. L'état de l'art très complet de Tuza [Tuz97] présentent les nombreux travaux sur ces modèles très généraux. Notons que le coloriage par liste modélise également différents problèmes génériques d'ordonnancements classiques sous contrainte, comme la planification d'horaires d'avions dont les dates de maintenance sont fixées. Ces modèles posent cependant le problème de leur complexité due à leur grande généralité. En fait même pour les graphes les plus simples (par exemple, un simple cycle de longueur impaire) le cas général de ces problèmes devient très difficile voir inextricable, si bien que seuls les cas élémentaires ont été étudiés (*e.g.* une ligne de transmetteurs par exemple [GGS93], ou bien des schémas de demandes très simples *e.g.* [Gam82]). Le fait est que de très nombreux problèmes industriels restent sans solution. Les célèbres "Philadelphia examples" présentés par Anderson dans [And73] sont, par exemple, des graphes très simples (sous-graphes induits de la grille triangulaire comptant à peine une vingtaine de sommets) pour lesquels la recherche de solutions optimales a mobilisé pendant plusieurs années et mobilise encore de nombreux chercheurs pour des valeurs de demandes fixées et connues ! Les "Philadelphia examples" n'ont pu être résolus de façon optimale que par des heuristiques ad-hoc couplées avec des minorants adéquats, comme par exemple les travaux de Gamst dans [Gam86], de Janssen et Kilakos dans [JK96], ou de Smith et Hurley dans [SH97]. L'obtention de minorants fiables est d'ailleurs une contribution essentielle de ces modèles : ils permettent d'évaluer sur les problèmes réels les performances des heuristiques utilisées alors que leur analyse mathématique est désespérée actuellement, même sur les graphes élémentaires.

Aussi, depuis le milieu de années 1990, des *modèles simplifiés* sont étudiés sur des graphes de complexité modérée qui permettent d'obtenir des résultats plus précis. Ils permettent notamment de garantir les performances d'heuristiques sur des classes de graphes non-triviales, tout particulièrement celles proches des graphes utilisés dans les réseaux réels. Un de ces modèles simplifiés semble se démarquer depuis quelques années car il correspond assez bien aux problèmes pratiques tout en offrant de nombreuses possibilités théoriques. Dans ce modèle, que nous appellerons le problème du *multi-coloriage sous contraintes*, le graphe considéré n'est plus le graphe d'interférence du réseau, mais le graphe de *voisinage géographique*. Les arêtes de ce graphe relient des transmetteurs qui sont proches géographiquement. Les contraintes d'interférence sont alors caractérisées par une suite décroissante d'entiers $c_0 \geqslant c_1 \geqslant c_2 \geqslant \cdots$ où c_0, appelée contrainte *co-site*, est l'écart minimal imposé entre deux fréquences allouées à un même sommet et où les c_i, pour $i \geqslant 1$, appelées contraintes *inter-site*, sont les écarts minimaux entre deux fréquences allouées à deux sommets à distance i dans le graphe de voisinage géographique. Le premier indice D tel que $c_D = 0$, appelé *distance de réutilisation* dans le graphe, correspond à la distance dans le graphe à partir de laquelle deux sommets peuvent partager des fréquences sans interférence. Le problème consiste alors à trouver une allocation des fréquences sur les sommets qui minimise la (taille de la) plage de fréquences totale utilisée et qui satisfasse d'une part les demandes des sommets et d'autre part les contraintes d'interférence. Notons que si l'on se restreignait à minimiser le nombre de fréquences, les valeurs des constantes d'interférence $c_1, \ldots, c_{D-1}$ non-nulles seraient sans importance puisque l'on obtiendrait une solution optimale à partir d'une solution du problème avec $c_1 = \cdots = c_{D-1} = 1$ en multipliant les fréquences par la contrainte maximale c_0. Lorsque $c_0 = c_1 = 1$ et que $c_{i \geqslant 2} = 0$, ce problème est connu sous le nom du *multi-coloriage*. Le problème du multi-coloriage est un problème assez ancien en théorie des graphes [CGJ78, HRS73] qui connaît un regain d'intérêt depuis quelques années du fait de ces applications pour la conception des réseaux cellulaires. Le modèle du multi-coloriage sous contraintes est celui que nous adopterons dans la suite du document.

Etat de l'art

La majorité des travaux actuels porte sur le multi-coloriage "simple" où la distance de réutilisation vaut 2 ($c_i = 0$ pour $i \geqslant 2$) et où $c_0 = c_1 = 1$. Ce problème est NP-difficile pour de nombreuses classes de graphes, notamment pour les sous-graphes induits de la grille triangulaire [MR97]. Même pour des graphes élémentaires comme les cycles de longueurs impaires, le multi-coloriage sous contraintes générales reste un problème ouvert. Différentes classes de graphes ont donc été étudiées successivement. Narayanan et Shende dans [NS97] puis Khanna et Kumaran dans [KK98] proposent indépendamment des multi-coloriages optimaux pour les graphes bipartis et les cycles de longueurs impaires. Dans [NS97, MR97, SUŽ98], Narayanan, Shende, McDiarmid, Reed, Schabanel, Ubéda, Žerovnik proposent indépendamment trois algorithmes similaires pour le multi-coloriage des sous-graphes de la grille triangulaire qui réalisent des approximations à $4/3$ de l'optimum. Nous verrons au chapitre 6 que l'on peut réduire le facteur d'approximation jusqu'à 1 suivant l'uniformité des demandes des nœuds du graphe. Cette classe de graphes suscite un grand intérêt : d'un point de vue théorique, car le problème est NP-difficile dès les plus simples contraintes ; mais aussi car elle est très utilisée en pratique. Placer les transmetteurs selon la grille triangulaire offre en effet d'une part une excellente couverture et des interférences réduites, et d'autre part une régularité qui facilite la réalisation du réseau [Mac79, KN96]. Dans [KK98, Hav99], Khanna, Kumaran et Havet démontrent, indépendamment également, que l'on peut multi-colorier avec 5 couleurs les sous-graphes induits sans triangle de la grille triangulaire lorsque les demandes sont uniformes[7] $d \equiv 2$. Havet utilise ce résultat pour démontrer que l'on peut approximer le multi-coloriage de ces sous-graphes induits sans triangle de la grille triangulaire à un facteur $7/6$ de l'optimal. Certaines de ces heuristiques admettent des versions distribuées. Dans [JKNS98], Janssen, Krizanc, Narayanan et Shende proposent différentes approximations distribuées pour le multi-coloriage ($c_0 = c_1 = 1$) des sous-graphes induits de la grille triangulaire dont le facteur d'approximation varie en fonction de la taille du voisinage consulté par chaque nœud : une 3-approximation lorsqu'aucun voisin n'est consulté ; une $3/2$-approximation lorsque les voisins consultés sont à distance 1 ; une $17/12$-approximation pour un rayon de 2 ; et une $4/3$-approximation en consultant des voisins à distance au plus 4. Dans [HŽ99], Havet et Žerovnik proposent une $5/4$-approximation distribuée pour le multi-coloriage des sous-graphes induits sans triangle de la grille triangulaire.

Dans [SUŽ99], nous étendons notre approximation pour les sous-graphes induits de la grille triangulaire au cas d'une contrainte co-site arbitraire $c_0 \geqslant c_1 = 1$. Nous conservons le facteur d'approximation $4/3$ lorsque $c_0 = 2$ et obtenons un multi-coloriage optimal à une constante additive près lorsque $c_0 \geqslant 3$. Khanna et Kumaran proposent dans [KK98] une 2-approximation pour cette même classe de graphes dans le cas où la distance de réutilisation vaut 3 avec $c_0 = c_1 = c_2 = 1$ (et $c_{i \geqslant 3} = 0$), problème que Simon a démontré NP-difficile dans [Sim88]. A la suite de nos travaux, Janssen et Narayanan proposent dans [JN99] une $(4/3 + 1/100)$-approximation pour cette même classe de graphes dans le cas général des contraintes inter-site lorsque la distance de réutilisation vaut 2 et $c_0 \geqslant c_1$. Notons que Gerke propose dans [Ger99] un algorithme optimal pour le multicoloriage des graphes bipartis lorsque la distance de réutilisation vaut 2 et $c_0 \geqslant c_1$.

A l'instar du coloriage classique [Vis92, Ira94, LST89], il existe une variante dynamique du problème où les demandes des différents nœuds varient avec le temps [CR82]. Le but de cette variante est d'étudier le comportement d'un algorithme d'allocation sur une suite de demandes (correspondant par exemple à une série d'appels téléphonique pour un réseau de téléphonie mobile). Il s'agit de tester la réactivité de l'algorithme et ses possibilités de blocage. Katzela et Nagshineh proposent dans [KN96] un état de l'art des méthodes utilisées en pratique pour la réallocation dynamique des fréquences ainsi que leurs évaluations. Dans [JKM95], Janssen, Kilakos et Marcotte proposent pour les graphes k-coloriés où l'on ne s'autorise qu'à recolorier les sommets à distance au plus 1 des modifications des demandes, un algorithme de multi-coloriage en-ligne qu'ils démontrent optimal dans [JK95] au sens que l'algorithme utilise le nombre minimal de couleurs pour ne jamais bloquer

[7]On note $f \equiv$ Cte pour signifier que f est la fonction constante de valeur Cte.

quel que soit le nombre de modifications. Lorsque les contraintes d'interférence valent $c_0 = c_1 = c_2 = 1$ et $c_{i \geqslant 3} = 0$, Feder et Shende proposent une approximation en-ligne pour les sous-graphes induits de la grille triangulaire dans [FS98].

Notons enfin l'approche originale pour ce problème de Van den Heuvel, Leese et Sheperd qui proposent dans [HLS98] de considérer une distance cyclique modulo un entier n pour établir les contraintes entre les fréquences. Le problème consiste alors à trouver la valeur n minimale qui permette d'attribuer une valeur i_u modulo n à chaque sommet u d'une grille infinie triangulaire ou carrée, telle que $n \geqslant c_0$ et que pour toute paire de sommets u et v à distance d, les valeurs qui leurs sont affectées i_u et i_v sont à distance au moins c_d modulo n, où $c_0 \geqslant c_1 \geqslant \cdots$. Avec une telle allocation, chaque sommet u peut alors satisfaire une demande arbitraire en s'allouant les fréquences dont la valeur est i_u modulo n.

Notre contribution pour l'allocation statique de fréquences

Dans la seconde partie de cette thèse, au chapitre 6, nous proposons un algorithme d'allocation de fréquences pour les sous-graphes induits de la grille triangulaire dans le cas d'une distance de réutilisation 2 et pour des contraintes co-site arbitraires $c_0 \geqslant c_1 = 1$ ($c_{i \geqslant 2} = 0$). Notre algorithme réalise un facteur d'approximation de $4/3$ que nous pouvons porter, sous condition d'une certaine uniformité des demandes, à $(4 - \alpha)/3$, où α est le rapport de la demande minimale non-nulle sur la demande maximale des sommets. Notre contribution [SUŽ98, SUŽ99] a été obtenue indépendamment des travaux de Narayanan, Shende, McDiarmid et Reed [NS97, MR97] pour les contraintes $c_0 = c_1 = 1$ et en est une première extension à des contraintes d'interférence plus générales. Notons qu'à la suite de nos travaux, Janssen et Narayanan proposent dans [JN99] un algorithme d'approximation à un facteur $(4/3 + 1/100)$ de l'optimal pour le cas général des contraintes co-site et inter-site à distance 1, où $c_0 \geqslant c_1$ (et $c_i = 0$ pour $i \geqslant 2$).

Organisation du document

Ce document est présenté en deux parties. Chaque partie est complètement indépendante et possède sa propre conclusion. La première partie (chapitres 1–5) est consacrée à l'ordonnancement pour la dissémination de données. Son organisation a été présentée page 13. La seconde partie, composée d'un unique chapitre (chapitre 6) est consacrée à l'allocation statique de fréquences sur la grille triangulaire. Après une brève introduction aux méthodes et résultats mis en œuvre, nous y présenterons notre algorithme ainsi que son analyse. Nous conclurons enfin par les perspectives que nous envisageons et les prolongements possibles de nos travaux.

Première partie

Ordonnancement pour la dissémination de données

CHAPITRE

1 Ordonnancer la dissémination de données

L'objet de la première partie du présent document est l'obtention d'*ordonnancements efficaces pour la dissémination de données* dans les réseaux asymétriques.

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire section 1.1, la définition du modèle de la dissémination de données. Puis, la section 1.2 expose les résultats antérieurs qui sont à l'origine de nos travaux. Enfin nous présentons notre contribution par rapport à ces résultats, dans la section 1.3.

1.1 Définition du modèle et notations

1.1.1 Contexte

Le serveur de dissémination d'information diffuse un certain nombre de messages à des clients. Ces messages sont déterminés par certaines caractéristiques, dont le *temps de transmission* (qu'on appellera aussi *longueur*) et le *coût de* chaque *diffusion*. Le serveur cherche un ordonnancement pour la dissémination des messages qui minimise deux quantités : le *temps de service moyen* du système (on parlera aussi du *temps de réponse moyen*), c'est-à-dire l'*attente moyenne* des utilisateurs — qualité de service ; et le *coût moyen de diffusion* — coût du service. Dans un protocole pseudo-intéractif, les requêtes des utilisateurs ne sont plus transmises au serveur, mais les utilisateurs se connectent sur les canaux d'émission et attendent la diffusion des messages qui les intéressent. Aussi, le serveur connaît les utilisateurs par leur *profil*, c'est-à-dire la *distribution* des requêtes sur les différents messages. Les requêtes des utilisateurs arrivent selon un processus de Poisson et sont servies dès qu'elles ont téléchargé le message demandé.

Considérons l'exemple suivant pour nous familiariser avec le problème :

Exemple 1.1 Considérons un serveur qui doit diffuser deux messages A et B de temps de transmission identiques $1{,}0$ s et de coûts de diffusion nuls : A est demandé par 80% des requêtes, B par 20%. Comment doit-il diffuser ces deux messages sur un canal ? A est quatre fois plus demandé que B, un première idée serait donc de diffuser A quatre fois plus que B. Calculons donc le temps de service moyen de l'ordonnancement $(AAAAB)^\omega$, Figure 1.1 :

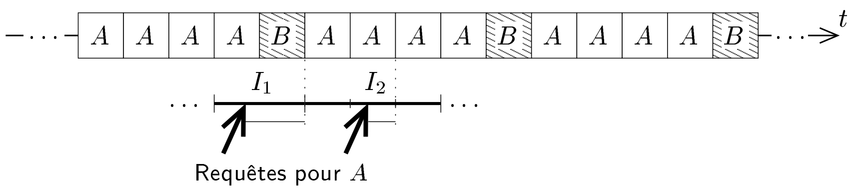


FIG. 1.1 : *L'ordonnancement* $(AAAAB)^\omega$

Une requête demande B avec probabilité 20%. Comme l'intervalle entre les diffusions de B est constant de longueur $5{,}0$ s, elle attend le début de l'émission de B en moyenne $5{,}0/2 = 2{,}5$ s, auxquelles il faut ajouter le temps de téléchargement de B : $1{,}0$ s. De même, une requête demande A avec probabilité 80%. Elle tombe dans l'intervalle I_1 de longueur $2{,}0$ s avec probabilité $2/5$ et attend le début de l'émission de A en moyenne : $2{,}0/2 = 1{,}0$ s. Et elle tombe dans l'un des trois intervalles de longueur $1{,}0$ s, qui composent I_2, avec probabilité $3/5$ et attend alors en moyenne $1{,}0/2 = 0{,}5$ s, auxquelles il faut ajouter le temps de chargement $1{,}0$ s. Ainsi, une requête pour A est servie, en moyenne, au bout de $1{,}0 + \frac{2}{5} \times 1{,}0 + \frac{3}{5} \times 0{,}5 = 1{,}7$ s. Le temps de réponse moyen à une requête pour l'ordonnancement $(AAAAB)^\omega$ est donc :

$$0{,}80 \times 1{,}7 + 0{,}20 \times 3{,}5 = 2{,}06 \text{ s}$$

Comparons ce résultat à l'ordonnancement périodique $(AAB)^\omega$, Figure 1.2 :

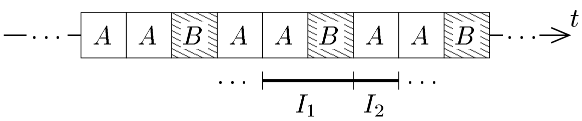


FIG. 1.2 : *L'ordonnancement* $(AAB)^\omega$

Pour cet ordonnancement, une requête pour B est servie en moyenne au bout de $1{,}0 + 1{,}5 = 2{,}5$ s ; et une requête pour A au bout de $1{,}0 + \frac{2}{3} \times 1{,}0 + \frac{1}{3} \times 0{,}5 \doteq 1{,}83$ s. Ainsi l'attente moyenne d'un client est de :

$$0,80 \times 1{,}83 + 0{,}20 \times 2{,}5 \doteq 1{,}97 \text{ s}$$

Ainsi, l'ordonnancement $(AAB)^\omega$ est meilleur que $(AAAAB)^\omega$. En fait $(AAB)^\omega$ est l'ordonnancement optimal ; il faut donc diffuser A deux fois plus que B, lorsque A est quatre fois plus populaire que B. Il s'agit, comme nous le verrons dans la section suivante, d'une règle générale pour ce problème, connue sous le nom de la *règle de la racine carrée* [en anglais, *square-root rule*], mise en évidence par Ammar et Wong dans [AW85] : les messages doivent "idéalement" être diffusés avec une probabilité proportionnelle à la *racine carrée de leur popularité*.

Nous allons à présent définir le modèle général et les notations qui seront utilisées tout au long de cette première partie du document.

1.1.2 Le modèle et les notations

Les messages. L'entrée du problème est un ensemble $M = \{M_1, \dots , M_m\}$ de m *messages*. Chaque message M_i est caractérisé par : son *temps de transmission* ℓ_i, qui sera appelé aussi *longueur* de M_i ; son *coût de diffusion* $c_i \geqslant 0$ — chaque diffusion de M_i coûte c_i ; et sa *popularité* $p_i \geqslant 0$, c'est-à-dire la probabilité qu'un utilisateur demande le message M_i :

$$p_1 + \cdots + p_m = 1$$

Nous emploierons par la suite indifféremment les termes *données*, *informations*, ou *pages (web)* pour désigner les messages à diffuser. La distribution (p_i) des demandes sur les messages sera aussi appelée le *profil* de l'utilisateur.

L'ordonnancement. Etant donné un nombre W de canaux de diffusion identiques, un *ordonnancement* S des messages $M_1, \dots , M_m$ est formellement une suite de couples $(s_w(n), t_w(n))$, où $n \geqslant 1$ et $w \in \{1, \dots , W\}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit $s_w(n) = i$ si M_i est le $n^{\text{ième}}$ message diffusé sur le canal w et $t_w(n)$ est le temps auquel commence cette émission. Comme sur un canal donné la diffusion d'un message doit être terminée avant le début de la suivante, nous avons la *contrainte de non-recouvrement* suivante :

$$(\forall w)\ (\forall n) \quad t_w(n+1) \geqslant t_w(n) + \ell_{s_w(n)} \tag{1.1}$$

Durant la diffusion, les utilisateurs se connectent suivant un processus de Poisson à un instant aléatoire (continu), se mettent à l'écoute des différents canaux et téléchargent le message qui les intéressent dès qu'il est diffusé sur l'un des canaux.

La fonction de coût. Le serveur cherche à minimiser la combinaison de deux quantités sur l'ordonnancement S : le *temps de service* moyen du système, et son *coût de diffusion*.

Le temps de service d'un ordonnancement S, que l'on appellera parfois le temps de réponse moyen, noté $\mathrm{TSM}(S)$ [en anglais, *Expected Service Time*], correspond à l'attente *asymptotique* moyenne des requêtes des clients, où la moyenne est prise à la fois sur le temps et sur la distribution des demandes (p_i). En définissant pour tout intervalle de temps I, $\mathrm{TSM}(S, I)$ comme le temps de service moyen d'une requête arrivant dans I, on pose :

$$\mathrm{TSM}(S) = \limsup_{T\to\infty} \mathrm{TSM}(S, [T_0, T]), \quad \text{pour tout } T_0.$$

De même si $\mathrm{TS}(S, M_i, t)$ désigne le temps de service d'une requête pour M_i arrivant au temps (continu) t, alors le temps de service moyen d'une requête pour M_i arrivant dans un intervalle de temps I est, en prenant la moyenne sur le temps :

$$\mathrm{TSM}(S, M_i, I) = \frac{1}{|I|} \int_I \mathrm{TS}(S, M_i, t)\, dt$$

En prenant la moyenne sur la distribution des demandes, on obtient finalement le temps de service moyen d'une requête quelconque arrivant dans I :

$$\mathrm{TSM}(S, I) = \sum_{i=1}^{m} p_i \, \mathrm{TSM}(S, M_i, I)$$

Le coût de diffusion d'un ordonnancement S, noté $\mathrm{CD}(S)$, est le coût moyen asymptotique par unité de temps de la diffusion des messages selon S. Par définition, la diffusion de chaque message M_i coûte c_i. Pour tout intervalle de temps I, le coût de diffusion moyen sur l'intervalle I, noté $\mathrm{CD}(S, I)$, est égal à la somme des coûts de diffusion des messages dont l'émission *commence* dans I, divisée par la longueur de I :

$$\mathrm{CD}(S, I) = \frac{1}{|I|} \sum_{(n,w):t_w(n)\in I} c_{s_w(n)}$$

Ainsi,

$$\mathrm{CD}(S) = \limsup_{T\to\infty} \mathrm{CD}(S, [T_0, T]), \quad \text{pour tout } T_0.$$

Le *coût d'un ordonnancement* S, noté $\mathrm{COUT}(S)$, est alors défini dans le problème de la dissémination de données, comme la somme du temps de service moyen et du coût de diffusion :

$$\mathrm{COUT}(S) = \mathrm{TSM}(S) + \mathrm{CD}(S)$$

Notons qu'en jouant sur les coûts de diffusion, nous pouvons obtenir n'importe quelle combinaison linéaire de ces deux quantités.

Remarque 1.1 Il est impossible de minimiser séparément, en même temps, le temps de service et le coût de diffusion. En effet minimiser le temps de service impose de maximiser le taux de diffusion, alors que cela maximise le coût de diffusion. C'est pourquoi le compromis de la minimisation de la somme est utilisé dans ce domaine.

Le cas des ordonnancements périodiques. Dans le cas d'un ordonnancement S périodique de période l'intervalle de temps I, ces expressions se simplifient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{TSM}(S) &= \mathrm{TSM}(S, I) \\ \mathrm{CD}(S) &= \mathrm{CD}(S, I) \\ \mathrm{COUT}(S) &= \mathrm{TSM}(S, I) + \mathrm{CD}(S, I) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Restreindre l'étude aux ordonnancements périodiques, permet donc d'*éliminer* le caractère *asymptotique*. Nous verrons par la suite que cela est souvent très utile.

1.1.3 Expression algébrique du coût

En regardant attentivement la méthode que nous avons employée dans l'exemple 1.1 page 24, pour calculer le temps de service d'un ordonnancement, nous nous rendons compte que nous utilisons les longueurs des intervalles délimités par les débuts des diffusions de chaque message. En effet, les longueurs des intervalles entre deux diffusions consécutives de A dans l'ordonnancement $(AAAB)^\omega$, Figure 1.1 page 24, sont : 2,0 s, 1,0 s, 1,0 s, et 1,0 s. Et le temps de service d'une requête pour A, hors temps de téléchargement de A, vaut : $\frac{1}{2\times 5{,}0} \cdot ((2,0)^2 + (1,0)^2 + (1,0)^2 + (1,0)^2)$ s. Etudions à présent le cas général. Nous avons besoin pour cela de quelques notations.

Notations. Soit S un ordonnancement sur W canaux et I un intervalle de temps borné. Pour chaque message M_i (*cf.* illustration Figure 1.3 page suivante) :

- n_i est le nombre de diffusions de M_i qui *commencent* dans I.
- t_1^i est le temps écoulé du début de I au début de la première diffusion de M_i. Et, pour $j \geqslant 2$, t_j^i est la longueur de l'intervalle de temps entre les débuts des $(j-1)^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ diffusion de M_i après le début de I.

- Δt^i est la longueur de l'intervalle entre la fin de I et le début de la première diffusion de M_i après I.

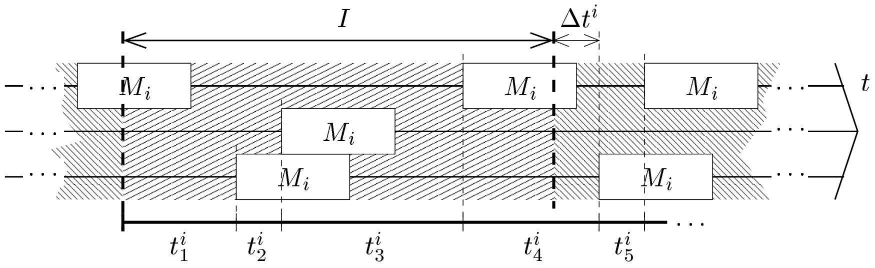


FIG. 1.3 : *Illustration des notations de la section 1.1.3. Ici, $n_i = 3$ émissions du message M_i commencent dans I.*

Avec ces notations, on obtient l'expression suivante pour le coût de l'ordonnancement S :

Lemme 1.1 (Expression algébrique du coût) *Le temps de service moyen d'un ordonnancement S des messages $M_1, \ldots, M_m$, sur un intervalle de temps I borné, avec les notations définies ci-dessus, est :*

$$\mathrm{TSM}(S,I) = \sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i + \frac{1}{2|I|} \sum_{i=1}^{m} p_i \left\{ \sum_{j=1}^{n_i+1} (t_j^i)^2 - (\Delta t^i)^2 \right\} \tag{1.3}$$

Et le coût de diffusion de S vaut :

$$\mathrm{CD}(S,I) = \frac{1}{|I|} \sum_{i=1}^{m} n_i c_i \tag{1.4}$$

Remarquons que l'on retrouve bien l'expression de l'exemple 1.1 page 24, pour temps de service moyen sur une période de l'ordonnancement $(AAAAB)^\omega$, d'une requête demandant le message A.

Preuve. Considérons une requête pour le message M_i. Pour $j \leqslant n_i$, avec probabilité $t_j^i/|I|$, elle tombe uniformément dans l'intervalle de longueur t_j^i et attend le début du message en moyenne $t_j^i/2$ temps. Et avec probabilité $(t_{n_i+1}^i - \Delta t^i)/|I|$, elle tombe dans le dernier intervalle et attend le début du message en moyenne : $\frac{t_{n_i+1}^i - \Delta t^i}{2} + \Delta t^i = \frac{t_{n_i+1}^i + \Delta t^i}{2}$.

En ajoutant le temps de téléchargement ℓ_i de M_i, puis en sommant sur les différentes requêtes, on obtient l'expression (1.3) page ci-contre.

Par définition, le coût de diffusion est la somme des coûts de diffusion des messages dont l'émission commence dans I, divisée par $|I|$; d'où l'expression (1.4) page précédente. □

Le coût d'un ordonnancement est donc une fonction *quadratique* en les longueurs des intervalles délimités par les émissions consécutives d'un même message, ce que l'on peut interpréter par "*plus l'intervalle est grand, plus on a de chance d'attendre longtemps*".

Remarquons que l'on peut représenter, comme le montre la figure 1.4, le temps de service de chaque message, *cumulé* sur un intervalle, par la somme des surfaces de triangles rectangles isocèles, dont le dernier est tronqué. Cette représentation nous sera utile plus tard pour l'obtention d'un algorithme en temps fini et pour l'analyse des algorithmes gloutons.

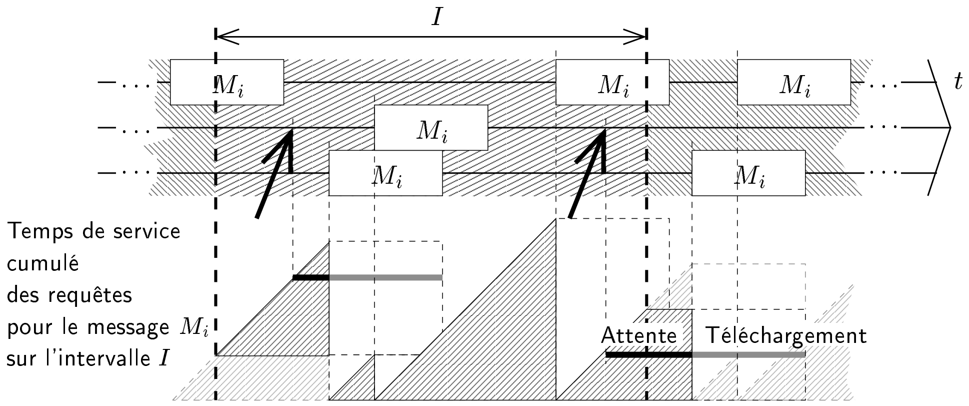


FIG. 1.4 : *Le temps de service des requêtes pour le message M_i, cumulé sur un intervalle I, est la somme des surfaces de triangles rectangles isocèles, dont le dernier est tronqué, et du temps de téléchargement de M_i. Les temps de service de deux requêtes sont illustrés par des traits épais, les parties grisées correspondent aux phases de téléchargement.*

L'expression algébrique de Lemme 1.1 se simplifie dans le cas d'un ordonnancement périodique :

Corollaire 1.1 *Si S est un ordonnancement périodique de période T des messages $M_1, \dots, M_m$, alors :*

$$\mathrm{COUT}(S) = \sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{m} \left\{ p_i \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(t_j^i)^2}{2} + n_i c_i \right\} \tag{1.5}$$

où n_i est le nombre de diffusions de M_i par période, et t_j^i désigne la longueur de l'intervalle entre la $(j-1)^{ième}$ et la $j^{ième}$ diffusion de M_i d'une période de S.

Ces expressions nous seront très utiles pour obtenir un minorant. Cependant, comme nous le verrons, il est souvent plus efficace de raisonner directement sur les requêtes. Les preuves en sont souvent plus courtes et plus intuitives.

1.1.4 Renversement du temps

Cette section adopte un point de vue particulier qui nous sera utile par la suite pour analyser facilement les algorithmes gloutons par exemple. La difficulté, à l'usage, de la définition du temps de service d'une requête est que celui-ci dépend du *futur*. Ainsi, on ne peut pas évaluer le coût à un instant t avec la seule connaissance de ce qu'il s'est passé avant t. Or, lorsque nous regardons l'expression du temps de service pour un ordonnancement périodique, Corollaire 1.1 page précédente, nous constatons qu'elle ne dépend que des longueurs des intervalles entre deux diffusions. Nous pourrions donc définir de façon équivalente le coût instantané au temps t en fonction de la date de la dernière diffusion de chaque message.

Nous démontrons ici que de temps de service de *tout* ordonnancement est *réversible*, c'est-à-dire que sa valeur est inchangée, que l'on définisse le coût en fonction de la diffusion suivante du message ou bien de la diffusion précédente. (Remarquons que cette propriété est triviale pour le coût de diffusion).

Ce résultat permet en particulier de démontrer que les différents articles traitant du domaine définissent bien le même modèle : ceux qui définissent le coût "en arrière" [AGH95, BNBNS98], et ceux qui définissent le coût "en avant" [BNS99, KS99, Sch00, KSY00].

Definition 1.1 Pour un ordonnancement S, nous définissons l'*attente en arrière* pour le message M_i à la date t, notée $\mathrm{AR}(S, M_i, t)$, comme le temps écoulé depuis le début de la dernière diffusion de M_i. Si t_i est la date du début de la dernière diffusion de M_i avant t, nous avons :

$$\mathrm{AR}(S, M_i, t) = t - t_i \tag{1.6}$$

Nous considérerons que tous les messages sont diffusés à la date $t = 0$ (l'équivalent de cette hypothèse pour le temps de service est qu'aucune requête n'arrive avant $t = 0$). Ainsi, si il n'y a eu aucune diffusion de M_i avant t, nous avons : $\mathrm{AR}(S, M_i, t) = t$.

De la même façon, l'*attente en arrière moyenne* pour M_i sur un intervalle borné I, noté $\mathrm{ARM}(S, M_i, I)$, est définie en prenant sur le temps :

$$\mathrm{ARM}(S, M_i, I) = \frac{1}{|I|} \int_I \mathrm{AR}(S, M_i, t)\, dt \tag{1.7}$$

Puis en prenant la moyenne sur le profil de l'utilisateur, nous obtenons l'attente en arrière moyenne sur l'intervalle borné I :

$$\mathrm{ARM}(S, I) = \sum_{i=1}^{m} p_i \, \mathrm{ARM}(S, M_i, I) \tag{1.8}$$

L'*attente en arrière moyenne* d'un ordonnancement en est alors la valeur asymptotique définie par :

$$\mathrm{ARM}(S) = \limsup_{T \to \infty} \mathrm{ARM}(S, [T_0, T]), \quad \text{pour tout } T_0. \tag{1.9}$$

Nous définissons finalement le *rétro-coût* RCOUT d'un ordonnancement comme la somme de l'attente en arrière, du coût de diffusion de l'ordonnancement, et du temps de téléchargement moyen des requêtes :

$$\mathrm{RCOUT} = \mathrm{ARM} + \mathrm{CD} + \sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i \tag{1.10}$$

Le théorème 1.1 suivant démontre que le coût d'un ordonnancement est identique qu'il soit défini à partir de $\mathrm{AR}(S, t)$ ou bien à partir de $\mathrm{TS}(S, t)$. Ainsi, $\mathrm{AR}(S, t)$ permet de définir un *coût instantané* en t d'un ordonnancement, déterminé en fonction des diffusions ordonnancées avant la date t, c'est-à-dire sur l'intervalle *borné* $[0, t]$.

Commençons par évaluer l'attente en arrière moyenne. L'attente en arrière moyenne se représente de la même façon que précédemment à l'aide de triangles, identiques à ceux du temps de service mais renversés, comme le montre la figure 1.5 page suivante. Cette figure met, de plus, en évidence une *correspondance graphique* étroite entre l'attente en arrière et le temps de service hors temps de téléchargement : le temps de service d'une requête au temps t correspond à la section *horizontale*, débutant au temps t, du triangle “en cours”, alors que l'attente en arrière correspond la section *verticale* du même triangle sous le temps t.

La proposition suivante démontre la propriété annoncée.

Théorème 1.1 (Réversibilité) *Pour tout ordonnancement S des messages $M_1, \ldots, M_m$, nous avons :*

$$\mathrm{TSM}(S) = \mathrm{ARM}(S) + \sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i \tag{1.11}$$

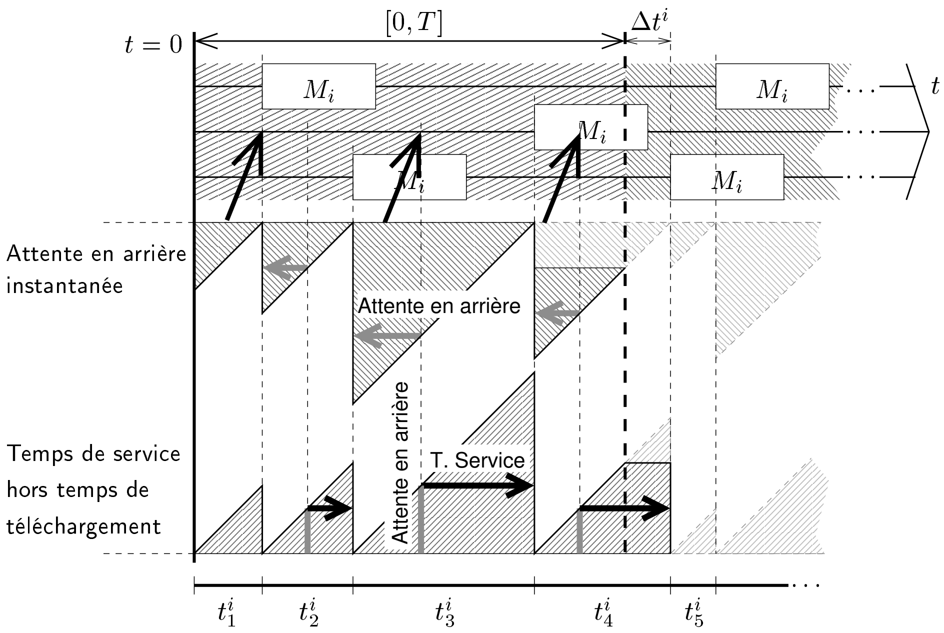


FIG. 1.5 : *Représention graphique de l'attente en arrière et de sa correspondance avec celle du temps de service. Les requêtes et leurs temps de service (hors temps de téléchargement) sont représentés en noir. L'attente en arrière à ces dates est représentée en grisé. Nous constatons que l'attente en arrière correspond à la section verticale du triangle à la verticale de t.*

Preuve. Soit S un ordonnancement. Il s'agit donc de prouver que :

$$\limsup_{T\to\infty} \mathrm{TSM}(S, [0, T]) = \sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i + \limsup_{T\to\infty} \mathrm{ARM}(S, [0, T])$$

Nous adoptons les notations de la section précédente, rappelées Figure 1.5 :

- $n_i(T)$ est le nombre de diffusions de M_i qui démarrent dans $[0, T]$.
- t_j^i est la longueur de l'intervalle de temps délimité par les débuts des $(j-1)^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ diffusions de M_i.
- $\Delta t^i(T)$ est la longueur de l'intervalle entre T et la diffusion de M_i immédiatement après T.

Nous avons (*cf.* illustration Figure 1.5 page précédente) :

$$\text{ARM}(S,[0,T]) = \frac{1}{2T}\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n_i(T)} (t_j^i)^2 + (t_{n_i(T)+1}^i - \Delta t^i(T))^2\right)$$

$$\text{et, } \text{TSM}(S,[0,T]) = \sum_{i=1}^{m} p_i\ell_i + \frac{1}{2T}\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n_i(T)+1} (t_j^i)^2 - (\Delta t^i(T))^2\right)$$

Ainsi :

$$\text{TSM}(S,[0,T]) - \text{ARM}(S,[0,T]) - \sum_{i=1}^{m} p_i\ell_i = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{m} p_i \underbrace{\Delta t^i(T)(t_{n_i(T)+1}^i - \Delta t^i(T))}_{\text{surface du petit rectangle grisé du triangle tronqué, Figure 1.5}} \geqslant 0 \tag{1.12}$$

Ainsi, $\text{TSM}(S,[0,T]) \geqslant \text{ARM}(S,[0,T]) + \sum_{i=1}^{m} p_i\ell_i$ et :

$$\text{TSM}(S) \geqslant \text{ARM}(S) + \sum_{i=1}^{m} p_i\ell_i$$

En particulier, si $\text{ARM}(S) = \infty$, alors $\text{TSM}(S) = \infty$ et nous avons fini.

Supposons que $\text{ARM}(S) < \infty$. La difficulté de la preuve, ici, est que les quantités $\text{ARM}(S,[0,T])$ et $\text{TSM}(S,[0,T])$ oscillent de façon déphasée. Nous allons donc procéder en deux étapes. Nous commençons par borner la distance entre deux crêtes consécutives de ces quantités en démontrant que les intervalles $t_{n_i(T)}^i$ sont petits devant T. Puis, nous bornerons la valeur de $\text{TSM}(S,[0,T])$ avec la valeur de crête suivante de $\text{ARM}(S,[0,T])$.

Commençons par borner $t_{n_i(T)}^i$. Comme $\text{ARM}(S) < \infty$, il existe κ tel que pour tout T : $\text{ARM}(S,[0,T]) \leqslant \kappa$. Ainsi, pour tout T et pour tout i :

$$\sum_{j=1}^{n_i(T)+1} (t_j^i)^2 + (t_{n_i(T)+1}^i - \Delta t^i(T))^2 \leqslant \frac{2\kappa}{p_i}\cdot T$$

En particulier, pour tout T : $(t_{n_i(T)+1}^i - \Delta t^i(T))^2 \leqslant \frac{2\kappa}{p_i}\cdot T$. Ainsi, en considérant la date T_0 telle que $\Delta t^i(T_0) = 0$, nous constatons que, pour tout T : $(t_{n_i(T)+1}^i)^2 \leqslant \frac{2\kappa}{p_i}\cdot(T + t_{n_i(T)+1}^i)$. Nous en concluons que, pour tout i :

$$t_{n_i(T)+1}^i = O\left(\sqrt{T}\right) \quad \text{et donc} \quad \Delta t^i(T) = O\left(\sqrt{T}\right)$$

Maintenant que nous nous sommes assurés que l'espace entre les crêtes est négligeable devant la période considérée, nous pouvons borner la valeur de $\mathrm{TSM}(S,[0,T])$ par la valeur de crête suivante de $\mathrm{ARM}(S,[0,T])$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ARM}(S,[0,T]) + \sum_{i=1}^{m} p_i\ell_i &\leqslant \mathrm{TSM}(S,[0,T]) \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_i\ell_i + \frac{1}{2T}\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n_i(T)+1} (t_j^i)^2 - (\Delta t^i(T))^2 \right) \\
&\leqslant \frac{T + \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \Delta t^i(T)}{T} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i\ell_i + \frac{1}{2(T + \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \Delta t^i(T))} \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n_i(T)+1} (t_j^i)^2 \right\} \\
&\leqslant \frac{T + \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \Delta t^i(T)}{T} \cdot \left(\mathrm{ARM}(S,[0,T + \max_{1\leqslant i\leqslant m} \Delta t^i(T)]) + \sum_{i=1}^{m} p_i\ell_i \right) \\
&\leqslant \left(1 + O\big(1/\sqrt{T}\big)\right) \cdot \left(\mathrm{ARM}\left(S, \left[0, T + O\big(\sqrt{T}\big)\right]\right) + \sum_{i=1}^{m} p_i\ell_i \right)
\end{aligned}$$

Et donc, en prenant les limites supérieures, lorsque T tend vers l'infini :

$$\mathrm{ARM}(S) = \mathrm{TSM}(S) + \sum_{i=1}^{m} p_i\ell_i$$

C.Q.F.D. □

Cette proposition sera particulièrement utile pour analyser les performances des algorithmes gloutons, Section 1.2.4 par exemple. Car, nous pourrons calculer leurs coûts à l'aide de l'attente en arrière moyenne et donc en fonction des messages qui sont déjà ordonnancés.

La section qui suit, retrace les travaux antérieurs pour le cas des messages de longueur uniforme, qui sont à la base de nos travaux. Elle présente en particulier le minorant d'Ammar et Wong [AW85] et différents algorithmes d'approximation que nous étendrons par la suite.

1.2 Travaux antérieurs

Parmi les travaux antérieurs sur l'ordonnancement de la dissémination d'information, seul le cas des *messages de longueur uniforme* a fait l'objet d'une étude approfondie menant à des algorithmes avec garantie de performance. Comme le souligne Ammar en 1987, dans [Amm87], *"[this hypothesis] is required to render the problem under consideration tractable"*[1].

Dans ce cadre, les auteurs font l'hypothèse que les canaux sont synchronisés et émettent aux dates entières et que les messages ont tous longueur 1 : ainsi, en reprenant les notations de la section 1.1.2 page 25 définissant le modèle, pour tout ordonnancement $S = (\langle s_w(n), t_w(n)\rangle)_{n\geqslant 1,\ w=1..W}$, les dates de début de diffusion $t_w(n)$ sont entières.

Remarquons que l'hypothèse du temps discret induit un surcoût inférieur à une unité de temps. En effet, il suffit de décaler toutes les diffusions de message qui ne commencent pas à une date entière, sur le temps entier immédiatement supérieur. Le coût de diffusion reste inchangé et le service des requêtes est retardé d'au plus une unité de temps.

Definition 1.2 Le $t^{\text{ième}}$ *créneau* [en anglais, *time slot*] d'un canal désignera l'intervalle de temps $[t-1, t]$ sur ce canal.

Il s'agit donc de trouver un bon ordonnancement des messages dans ces créneaux. Cette section détaille les résultats qui ont été obtenus dans ce domaine.

1.2.1 Un minorant sur le coût des ordonnancements

Une étape clé lors de la conception d'algorithme d'ordonnancement de la dissémination de données est la recherche d'un bon minorant sur le coût d'un ordonnancement optimal. Non seulement celui-ci permet de garantir les performances, mais il se révèle être très informatif sur la forme "idéale" d'un ordonnancement optimal, en proposant une *fréquence* "optimale" à respecter pour la diffusion de chaque message.

Le lemme suivant présente le minorant qu'Ammar et Wong ont proposé dans [AW85] pour le cas d'un ordonnancement sur un canal sans coût de diffusion. Nous donnons ce lemme dans le cas général de la dissémination de messages de longueurs *uniformes* sur W canaux. Cette généralisation est due à Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber dans [BNBNS98].

Lemme 1.2 (Un minorant pour le cas des longueurs uniformes, [AW85, BNBNS98]) *Le problème de minimisation non-linéaire* $\mathrm{MN}_1(M)$ *suivant est un minorant du coût de*

[1] *En français* ;-), "[cette hypothèse] est nécessaire pour permettre l'étude du problème".

tout ordonnancement S des messages $M_1, \dots, M_m$ de longueur 1, sur W canaux :

$$\mathrm{MN}_1(M) \begin{cases} \displaystyle\min_{\tau>0}\ 1 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{p_i \tau_i}{2} + \frac{c_i}{\tau_i} \right) \\ \text{Sur le domaine:} \quad (i) \quad (\forall i),\ \tau_i \geqslant 1 \\ \qquad\qquad\qquad (ii) \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i} \leqslant W \end{cases} \tag{1.13}$$

Ce problème de minimisation admet une unique solution τ^*. Et $\mathrm{MN}_1(M)$ est atteint si et seulement si il existe un ordonnancement S qui diffuse chaque message M_i périodiquement, exactement tous les τ_i^*.

Remarque 1.2 Ce minorant est particulièrement intéressant pour deux raisons. D'une part, il suggère une *fréquence* $1/(W \cdot \tau_i^*)$ pour chaque message M_i. D'autre part, il donne une condition d'optimalité : ce minorant n'est atteint qu'à la condition que l'on puisse ordonnancer chaque M_i périodiquement, exactement tous les τ_i^*. Le premier point va nous servir à concevoir et garantir des approximations, en particulier durant le chapitre 4, où nous établirons l'existence d'un schéma d'approximation polynomial pour ce problème. Le second point va nous permettre d'établir la NP-dureté du problème.

Preuve du Lemme 1.2. Nous verrons dans la section suivante qu'il existe un ordonnancement périodique optimal. Aussi, nous pouvons limiter notre étude aux ordonnancements périodiques.

Soit S un ordonnancement périodique de période T. Reprenons les notations n_i et $(t_j^i)_{j=1..n_i}$ définies pour chaque message M_i au corollaire 1.1 page 29. D'après ce corollaire, le temps de service moyen d'une requête pour M_i est :

$$\mathrm{TSM}(S, M_i) = 1 + \frac{1}{2T} \sum_{j=1}^{n_i} (t_j^i)^2$$

Relaxons les contraintes sur l'ordonnancement S en optimisant le temps de service pour chaque message M_i indépendamment des autres, sans tenir compte des contraintes de non-recouvrement entre les messages (définies par (1.1) page 25). Etant donné que $\sum_{j=1}^{m} t_j^i = T$, la stricte convexité de $x \mapsto x^2$ implique que la somme des carrés est minimisée si et seulement si tous les termes sont égaux[2] à T/n_i, c'est-à-dire si et seulement si le mes-

[2]Cette propriété est directement reliée à un autre problème de minimisation d'énergie de physique. En effet, la somme $\sum_{j=1}^{m} (t_j^i)^2$ correspond à l'énergie de n_i ressorts de raideur identique et de longueur à vide nulle, attachés à la queue le leu, entre deux clous distants de T. L'énergie est alors minimisée à l'équilibre, lorsque

sage M_i est diffusé périodiquement, tous les T/n_i exactement. Posons $\tau_i = T/n_i$, nous obtenons que :

$$\mathrm{TSM}(S, M_i) \geqslant 1 + \frac{\tau_i}{2}$$

et donc, en sommant sur les différents types de requêtes :

$$\mathrm{TSM}(S) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i \tau_i}{2}$$

D'autre part, le coût de diffusion se réécrit :

$$\mathrm{CD}(S) = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{n_i}{T} = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\tau_i}$$

Notons que $1/(W \cdot \tau_i) = n_i/(W \cdot T)$ correspond à la fréquence (à valeur dans $[0, 1]$) du message M_i dans l'ordonnancement, c'est-à-dire au pourcentage de créneaux qui sont consacrés à sa diffusion. Comme chaque t_j^i vérifie $t_j^i \geqslant 1$, on a : (i) $\tau_i \geqslant 1$. Et, comme $\sum_{i=1}^{m} n_i \leqslant WT$, on a : (ii) $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i \leqslant W$. Ainsi en minimisant sur τ sur le domaine défini par ces contraintes, nous obtenons bien un minorant sur le coût de tout ordonnancement.

La fonction objectif $f(\tau) = 1 + \sum_{i=1}^{m} (p_i \tau_i/2 + c_i/\tau_i)$ est convexe, en tant que combinaison linéaire positive de fonctions convexes. Le domaine de minimisation est également convexe (c'est l'intersection d'ensembles convexes). Ainsi, comme $\lim_{||\tau|| \to \infty} f(\tau) = \infty$ et comme f n'est constant sur aucun segment, la fonction objectif admet un unique minimum τ^* sur le domaine de minimisation.

Finalement, d'après ce qui précède, ce minimum est atteint si et seulement si il existe un ordonnancement qui diffuse chaque message M_i périodiquement, tous les τ_i^* exactement. $\square$

On ne sait pas donner d'expression algébrique de la solution τ^* du problème de minimisation $\mathrm{MN}_1(M)$. Aussi, pour sa résolution, Bar-Noy, Bhatia, Naor et Schieber utilisent une version relaxée $\mathrm{MN}_1'(M)$ du minorant $\mathrm{MN}_1(M)$, en éliminant la contrainte (i). On obtient alors un nouveau minorant, plus faible que le précédent, mais dont nous savons décrire algébriquement la solution τ'. Cette solution permet de construire la solution τ^* de $\mathrm{MN}_1(M)$, comme nous le verrons au lemme 1.4 page 39.

Lemme 1.3 (Minorant relaxé pour le cas des longueurs uniformes, [BNBNS98]) *Le problème de minimisation non-linéaire* $\mathrm{MN}_1'(M)$ *suivant est un minorant du coût de tout*

les ressorts ont tous la même longueur T/n_i.

ordonnancement S des messages $M_1, \dots, M_m$, de longueur 1, sur W canaux :

$$\mathrm{MN}'_1(M) \begin{cases} \displaystyle\min_{\tau>0}\ 1 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{p_i \tau_i}{2} + \frac{c_i}{\tau_i} \right) \\ \text{Sur le domaine:} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i} \leqslant W \end{cases} \tag{1.14}$$

Ce problème de minimisation admet une unique solution τ', telle que :

$$\tau'_i = \sqrt{\frac{2c_i + \lambda'}{p_i}}, \quad \text{pour un certain } \lambda' \geqslant 0, \tag{1.15}$$

défini par : si $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i/(2c_i)} \leqslant W$, alors $\lambda' = 0$; et, sinon, λ' est l'unique solution positive de : $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i/(2c_i + \lambda')} = W$. De plus, ce minorant est atteint si et seulement si il existe un ordonnancement qui ordonnance chaque message M_i périodiquement, tous les τ'_i exactement.

Preuve. Comme $\mathrm{MN}'_1(M) \leqslant \mathrm{MN}_1(M)$, $\mathrm{MN}'_1(M)$ est clairement un minorant du coût. De même, la fonction objectif est convexe sur un domaine convexe, et n'est constante sur aucun segment. Donc $\mathrm{MN}'_1(M)$ admet une unique solution τ'. Par construction, $\mathrm{MN}'_1(M)$ est réalisé si et seulement si il existe un ordonnancement qui diffuse chaque message M_i périodiquement, tous les τ'_i.

La résolution de ce problème de minimisation non-linéaire utilise une relaxation Lagrangienne dont nous allons détailler les étapes afin d'en justifier rigoureusement la validité.

Soit $f(\tau) = \sum_{i=1}^{m} p_i\tau_i + 2c_i/\tau_i$, la fonction objectif (épurée). Remarquons que chacune des fonctions $\tau_i \mapsto (p_i\tau_i + 2c_i/\tau_i)$ est unimodulaire[3] et admet un unique minimum $\tau_i^{\#} = \sqrt{2c_i/p_i}$, sur $\mathbb{R}_+^*$. f admet donc $\tau^{\#}$ pour unique minimum sur $\mathbb{R}_+^{*m}$.

Soit $g(\tau) = W - \sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i$, la contrainte principale. Les contraintes définissent un domaine D de $\mathbb{R}_+^{*m}$. Deux cas sont à considérer :

- Si $\tau^{\#} \in D$, alors $\tau' = \tau^{\#}$, et on pose $\lambda' = 0$.
- Si $\tau^{\#} \notin D$, alors comme chacun des termes $\tau_i \mapsto (p_i\tau_i + 2c_i/\tau_i)$ est unimodulaire, le minimum de f est atteint sur la frontière de D, définie par : $g(\tau') = 0$ (sinon, nous pouvons décroître l'un des τ'_i pour le rapprocher de $\tau_i^{\#}$, et améliorer ainsi la solution). Le théorème des extrema liés donne que les gradients de f et g sont colinéaires au minimum τ'. Remarquons que les gradients de f et g pointent dans la même direction en τ', puisque f croît lorsque τ entre dans le domaine $g(\tau) > 0$. Ainsi il existe un

[3]Une fonction est dite *unimodulaire* si elle change de sens de variation au plus une fois.

paramètre $\lambda' \geqslant 0$, appelé paramètre de Lagrange, tel que (τ', λ') soit solution du système suivant :

$$\begin{cases} \text{grad } f(\tau') = \lambda' \text{grad } g(\tau') \\ g(\tau') = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

Ce système peut être réécrit de la façon suivante en introduisant la fonction, dite de Lagrange, $F(\tau, \lambda) = f(\tau) - \lambda g(\tau)$:

$$(1.16) \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall i),\ \dfrac{\partial F}{\partial \tau_i}(\tau', \lambda') = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(\tau', \lambda') = 0 \end{cases} \quad \textit{i.e. } (\tau', \lambda') \text{ est un point critique de } F. \tag{1.17}$$

Or, F admet un unique point critique[4] (τ', λ'), tel que : $\tau' = \sqrt{(2c_i + \lambda')/p_i}$, $\lambda' \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i/(2c_i + \lambda')} = W$, *C.Q.F.D.*

□

Connaître la valeur de la solution τ' de $\mathrm{MN}'_1(M)$ permet de déduire la valeur de la solution τ^* de $\mathrm{MN}_1(M)$, comme l'indique de lemme suivant, qui sera démontré dans le cadre plus général de cette thèse au chapitre 5.

Lemme 1.4 (Résolution de $\mathrm{MN}_1(M)$, [BNBNS98]) *Soient τ^*, la solution de $\mathrm{MN}_1(M)$ et τ', la solution de $\mathrm{MN}'_1(M)$. Pour tout $1 \leqslant i_0 \leqslant m$, si $\tau'_{i_0} < 1$, alors $\tau^*_{i_0} = 1$.*

Remarquons que si $\tau'_i \geqslant 1$, pour tout i, alors τ' vérifie les contraintes de $\mathrm{MN}_1(M)$ et $\tau^* = \tau'$. Nous obtenons ainsi un *algorithme de résolution du minorant* $\mathrm{MN}_1(M)$: nous commençons par calculer la solution τ' de $\mathrm{MN}'_1(M)$; s'il existe un indice i_0, tel que $\tau_{i_0} < 1$, alors nous fixons la valeur de $\tau^*_{i_0}$ à 1, et nous itérons sur le problème où cette variable a été retirée ; sinon, nous avons $\tau^* = \tau'$. L'algorithme complet (1.1) est décrit page suivante.

Pour l'étude des extensions présentées dans ce document (tout particulièrement celle du chapitre 3), nous aurons besoin d'étendre la méthode que Bar-Noy, Bhatia, Naor et Schieber ont proposée pour la résolution du problème de minimisation $\mathrm{MN}_1(M)$. Ces résultats étant plutôt techniques, nous avons préféré leurs consacrer un chapitre séparé, le chapitre 5. Nous y présenterons, entre autres la preuve de notre généralisation du Lemme 1.4 ainsi que l'étude du calcul approché des solutions τ' et τ^* de $\mathrm{MN}'_1(M)$ et $\mathrm{MN}_1(M)$, respectivement.

Comme nous l'avons vu Remarque 1.2 page 36, le minorant propose une fréquence "idéale" $1/(W \cdot \tau^*_i)$ pour chaque message M_i et une condition d'optimalité qui est que chaque message M_i soit ordonnancé périodiquement tous les τ^*_i exactement. Cette condition va nous permettre d'établir que le problème avec des coûts de diffusion est NP-difficile.

[4]Un *point critique* d'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ est un point $x^{\#}$ tel que : $(\forall\ i)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{\#}) = 0$.

Algorithme 1.1 Calcul de la solution du minorant $\mathrm{MN}_1(M)$

Entrées : Un entier W et un ensemble $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ de messages de longueur 1, de probabilités (p_i) et coût (c_i).

Répéter

Calculer la solution τ' du problème relaxé $\mathrm{MN}'_1(M)$.

Pour tout $M_i \in M$ **tel que** $\tau'_i < 1$

$\tau^*_i := 1, \quad M := M \setminus \{M_i\}, \quad W := W - 1.$

Jusqu'à ce que M reste inchangé.

Pour tout $M_i \in M$

$\tau^*_i := \tau'_i$

1.2.2 NP-dureté

Nous donnons le résultat suivant, sans en détailler la preuve qui ne nous sera pas utile par la suite.

Théorème 1.2 (NP-dureté du cas longueurs uniformes avec coûts de diffusion, [BNBNS98]) *Le problème de l'ordonnancement de la dissémination de m messages $M_1, \ldots, M_m$,* avec *des coûts de diffusion, sur W canaux, est* NP*-difficile.*

Principe de la preuve. Le principe est de démontrer que décider si l'on peut réaliser le minorant $\mathrm{MN}_1(M)$, c'est-à-dire si l'on peut ordonnancer chaque message M_i périodiquement tous les τ^*_i, est NP-difficile. Ceci est obtenu en démontrant qu'en jouant sur les coûts de diffusion c_i, nous pouvons obtenir n'importe quelles valeurs pour les τ^*_i. Nous sommes alors ramener à montrer la NP-dureté de savoir s'il est possible d'ordonnancer des messages, sans recouvrement, à intervalles réguliers de longueurs fixées. La NP-dureté de ce dernier problème est alors obtenue par réduction du problème du coloriage des graphes [BNBNS98]. □

Remarque 1.3 La NP-dureté du problème de la dissémination de messages de longueur uniforme *sans* coût de diffusion, est encore un problème *ouvert* actuellement.

1.2.3 Existence d'un optimal périodique

Pour établir le minorant Lemme 1.2, nous avons fait l'hypothèse que nous pouvions nous restreindre aux ordonnancements périodiques. L'objet de cette section est de démontrer qu'il existe un ordonnancement optimal périodique, dans le cas où le temps est discret, et où tous les messages ont le même temps de transmission. Ce résultat a été obtenu une première fois par Ammar et Wong dans [AW87], en présentant le problème sous forme d'un processus Markovien fini. Nous exposerons ici la preuve d'Anily, Glass, et Hassin qu'ils ont proposée dans le cadre de la maintenance de machines [AGH95].

Le principe est de commencer par démontrer que nous pouvons borner l'intervalle entre deux diffusions consécutives d'un même message (Lemme 1.5) et ainsi démontrer que l'on peut se restreindre à l'exploration d'un nombre fini d'"états" possibles. Cette preuve utilise un graphe d'états valué dont les chemins infinis et leur fonction de coût associée sont en bijection avec les ordonnancements. Afin de clarifier les notations, nous ne considérerons que le cas d'un canal ; la généralisation au cas de plusieurs canaux est immédiate.

Definition 1.3 (Etat) Pour chaque créneau $[t-1, t]$ d'un ordonnancement S, nous définissons l'*état* $\vec{\sigma}(t)$ à la date t comme le m-uplet $\langle \sigma_1(t), \dots, \sigma_m(t) \rangle$, où $\sigma_i(t) \geqslant 1$ est le temps écoulé depuis le début de la dernière diffusion de M_i jusqu'au temps t (*cf.* Figure 1.6).

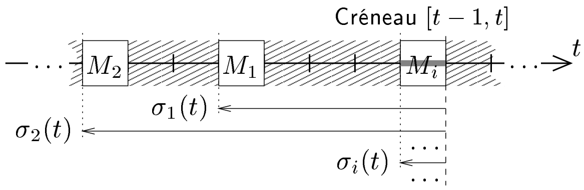


FIG. 1.6 : *Définition de l'état $\vec{\sigma}(t)$ à la date (entière) t pour le cas des messages de longueurs uniformes.*

Definition 1.4 (Graphe d'états) Le *graphe d'états* G_M d'un ensemble de messages $M = \{M_1, \dots, M_m\}$ est le graphe valué suivant. Les sommets de G_M sont les états $\vec{\sigma} = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle \in (N^*)^m$. Etre au sommet $\vec{\sigma}$ à la date (entière) t, signifie que la dernière diffusion de chaque message M_i a commencé à la date $(t - \sigma_i)$. Les arêtes sont de deux types. Pour $1 \leqslant i \leqslant m$, les arêtes qui relient les sommets $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_m \rangle$ aux sommets $\langle \sigma_1 + 1, \dots, 1, \dots, \sigma_m + 1 \rangle$ sont étiquetées "M_i". Et celles qui relient les sommets $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle$ aux sommets $\langle \sigma_1 + 1, \dots, \sigma_m + 1 \rangle$ sont étiquetées "X". Passer par une arête étiquetée "M_i" (*resp.* "X") entre les dates $(t-1)$ et t signifie que l'on a diffusé le message M_i (*resp.* rien) durant le créneau t. Nous associons à chaque arête un *coût*, correspondant au surcoût induit par la diffusion en cours, que nous définissons naturellement comme le *rétro-coût* moyen sur le créneau. Or, l'attente en arrière moyenne pour le message M_i durant un créneau d'état $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle$ est $(\sigma_i - 1/2)$. Ainsi, le coût d'une arête e_X

étiquetée “X” joignant $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle$ à $\langle \sigma_1 + 1, \dots, \sigma_m + 1 \rangle$ vaut :

$$\text{coût}_{G_M}(e_X) = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m} p_j \sigma_j \tag{1.18}$$

Et, pour une arête e_{M_i} joignant $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_m \rangle$ à $\langle \sigma_1 + 1, \dots, 1, \dots, \sigma_m + 1 \rangle$, étiquetée “$M_i$” :

$$\text{coût}_{G_M}(e_{M_i}) = c_i + \frac{1}{2} + \sum_{j \neq i} p_j \sigma_j \tag{1.19}$$

Nous définissons alors naturellement le coût d'un chemin fini γ comme le coût moyen de ses arêtes :

$$\text{coût}_{G_M}(\gamma) = \frac{1}{|\gamma|} \sum_{e \in \gamma} \text{coût}_{G_M}(e) \tag{1.20}$$

Le coût d'un chemin $\gamma = (e_i)_{i \geqslant 1}$ infini est alors défini comme la valeur asymptotique du coût de ses segments finis :

$$\text{coût}_{G_M}(\gamma) = \limsup_{n \to \infty} \text{coût}_{G_M}\big((e_{i_0}, \dots, e_n)\big), \quad \text{pour tout } i_0. \tag{1.21}$$

Ainsi si on note S_γ l'ordonnancement des messages $M_1, \dots, M_m$ sur un canal, obtenu en concaténant les étiquettes des arêtes du chemin γ, nous avons une bijection entre les chemins infinis γ de G_M et les ordonnancements S des messages $M_1, \dots, M_m$ sur un canal. De plus, par construction, le coût de γ est exactement le rétro-coût de S_γ : $\text{CD}(S_\gamma) + \text{ARM}(S_\gamma) = \text{coût}_{G_M}(\gamma)$. Ainsi, le théorème 1.1 page 31 sur la réversibilité du temps assure que :

$$\text{COUT}(S_\gamma) = \text{coût}_{G_M}(\gamma)$$

Nous avons donc établi une *correspondance entre les chemins infinis de G_m et les ordonnancements des messages $M_1, \dots, M_m$ sur un canal.*

Note 1.1 Pour le cas de plusieurs canaux, la définition de l'état à une date t reste inchangée, seule la définition des arêtes du graphe d'état doit être revue. Au lieu de diffuser au plus un message, chaque arête peut diffuser jusqu'à W messages et sont étiquetées en conséquence par autant de messages. Leur coût reste défini de la même façon, comme le rétro-coût moyen de l'ordonnancement sur le créneau correspondant aux diffusions de l'arête. L'unique difficulté est alors la lourdeur des notations.

Le lemme suivant démontre que l'on peut se restreindre à un graphe d'états *fini*. Nous donnerons par la suite deux preuves de ce résultat dans deux cas plus généraux : le cas où les messages n'ont pas tous la même longueur d'une part, et celui où les émissions des messages peuvent être préemptées, d'autre part. Aussi, nous ne donnerons ici que le principe de la preuve.

Lemme 1.5 (Borner l'intervalle entre deux diffusions, [AW87, AGH95]) *Pour tout ordonnancement S des messages $M_1, \dots, M_m$, il existe un ordonnancement S', tel que :*

$$\mathrm{COUT}(S') \leqslant \mathrm{COUT}(S)$$

et tel que pour tout i, tout intervalle entre deux diffusions consécutives du message M_i soit borné par $K_i = (2m + c_i)/p_i$.

Principe de la preuve. Pour chaque intervalle, considéré de gauche à droite l'un après l'autre, de longueur supérieure à K_i, dans lequel M_i n'est pas diffusé, on choisit un créneau vide, ou un créneau contenant un message M_j diffusé plusieurs fois, et on y ordonnance M_i. On démontre par le calcul que, pour la valeur de K_i donnée, le coût de l'ordonnancement obtenu est meilleur sur *tout* intervalle I. On définit alors S' comme l'ordonnancement limite. □

Théorème 1.3 (Existence d'un optimal périodique, [AW87, AGH95]) *Lorsque le temps est discret et que les messages ont tous le même temps de transmission, il existe un ordonnancement optimal qui est périodique,*

Preuve. Grâce au Lemme 1.5, nous pouvons nous restreindre aux ordonnancements S tels que l'intervalle de temps entre deux émissions consécutives de M_i est bornée par K_i. Soit S, un tel ordonnancement. S correspond à un chemin infini γ_S dans le sous-graphe *fini* G_M/K de G_M induit par les sommets σ tels que $\sigma_i \in \{1, \dots, K_i\}$. Ce chemin se décompose donc en un nombre fini de cycles dont certains sont parcourus un nombre infini de fois. Le coût de γ_S, et donc celui de S, est alors la combinaison barycentrique finie des coûts des différents cycles de G_M parcourus une infinité de fois par γ_S. Ainsi, le coût de tout ordonnancement S est minoré par le coût minimum d'un cycle du graphe fini G_M/K.

Ainsi, soit γ^* un cycle de G_M/K de coût minimum, l'ordonnancement correspondant S_{γ^*}, périodique, est optimal. □

Remarquons que nous obtenons ainsi un algorithme en temps fini (exponentiel) pour calculer un ordonnancement optimal basé sur la recherche d'un cycle de poids moyen minimum. Un algorithme permettant de calculer ce type de cycle, en temps polynomial en la taille du graphe, est donné par Orlin, Tarjan et Young dans [YTO91].

1.2.4 Algorithmes d'approximation à un facteur constant

Les meilleurs résultats jusqu'à nos travaux sont des approximations à un facteur constant pour ce problème. Comme nous l'avons annoncé au début de cette section, ces algorithmes reposent sur les observations tirées de l'analyse du problème de minimisation $\mathrm{MN}_1(M)$.

Algorithmes randomisés

Le premier algorithme, proposé par Gecsei dans [Gec83] pour le cas d'un canal, sans coût de diffusion, propose d'ordonnancer dans chaque créneau un message tiré au hasard suivant une distribution (s_i) fixée : $s_1 + \cdots + s_m = 1$. Le temps de service de cet ordonnancement est alors le suivant : chaque requête demande M_i avec probabilité p_i, attend $1/2$ jusqu'à la fin du créneau courant, puis attend en moyenne $\sum_{t\geqslant 1} \Pr\{M_i \text{ ne soit pas diffusé avant } t\} = \sum_{t\geqslant 1}(1-s_i)^t = 1/s_i - 1$ jusqu'à la diffusion de M_i, auxquels il faut ajouter le temps de chargement, 1, de M_i. Ainsi l'espérance du temps de service de l'ordonnancement aléatoire S_{Gec} généré est :

$$\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(S_{\text{Gec}})] = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{s_i} \tag{1.22}$$

En minimisant sur les s_i, sous la contrainte $s_1 + \ldots + s_m = 1$, (de la même façon que nous avons résolu le problème de minimisation relaxé $\mathrm{MN}_1(M)$ page 37)), il démontre que la distribution (s_i), qui minimise le temps de service, choisit s_i proportionnellement à la racine carrée de la popularité du message M_i, $\sqrt{p_i}$. L'espérance du temps de service de l'ordonnancement randomisé est alors de :

$$\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(S_{\text{Gec, } s\propto\sqrt{p}})] = \frac{1}{2} + \left(\sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i}\right)^2 \tag{1.23}$$

Notons que du fait de la loi de grands nombres, l'espérance est atteinte avec probabilité 1.

Ammar et Wong démontrent que pour ce cas, la solution du problème de minimisation $\mathrm{MN}_1(M)$ vérifie : $\tau_i^* = \sqrt{\lambda}/\sqrt{p_i}$. Ainsi le temps de service optimum est minoré par :

$$\mathrm{MN}_1(M) = 1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i}\right)^2 \tag{1.24}$$

L'algorithme de Gecsei est donc une 2-approximation.

Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber étendent dans [BNBNS98] cette heuristique au cas de W canaux avec coût de diffusion. Pour cela, ils proposent de diffuser chaque message M_i

Algorithme 1.2 Algorithme randomisé de dissémination sur un canal

Entrées : (τ_i) vérifiant, pour tout i, $\tau_i \geqslant 0$, et $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i \leqslant 1$.

Si $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i < 1$ **alors**

Introduire un message fantôme M_0, avec $p_0 = c_0 = 0$ et une valeur τ_0 telle que : $1/\tau_0 = 1 - \sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i$.

Sortie :

Pour tout $t = 1..\infty$

Tirer au hasard $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ avec probabilité $s_i = 1/\tau_i$.

Si $i = 0$ **alors**

Ne rien ordonnancer durant le créneau t

Sinon

Ordonnancer le message M_i durant le créneau t

---

dans chaque créneau sur chaque canal avec probabilité $s_i = 1/(W\tau_i^*)$, où τ^* est la solution du problème de minimisation $\mathrm{MN}_1(M)$. Rappelons que $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i^* \leqslant W$, ainsi $\sum_{i=1}^{m} s_i \leqslant 1$. Contrairement au cas de Gecsei, du fait de la présence des coûts, la somme des probabilités de diffusion (s_i) peut être inférieure à 1 ; cela signifie qu'avec probabilité $u_0 = (1 - \sum_{i=1}^{m} s_i)$, on ne diffuse rien. L'analyse du temps de service de l'ordonnancement généré S_{BNBNS}, est alors, de manière identique :

$$\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(S_{\mathrm{BNBNS}})] = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m} p_i \tau_i^* \tag{1.25}$$

Le coût de diffusion est la somme pondérée des fréquences. Par la linéarité de l'espérance, l'espérance du coût de diffusion de S est donc la somme pondérée des espérances des fréquences de chaque message, c'est-à-dire $s_i W = 1/\tau_i^*$ pour chaque M_i. Ainsi :

$$\mathbb{E}[\mathrm{CD}(S_{\mathrm{BNBNS}})] = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\tau_i^*} \tag{1.26}$$

Ainsi le coût de service moyen de S est :

$$\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S_{\mathrm{BNBNS}})] = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m} \left(p_i \tau_i^* + \frac{c_i}{\tau_i^*} \right) \leqslant 2\,\mathrm{MN}_1(M) - \frac{3}{2} \leqslant 2\,\mathrm{OPT}(M) - \frac{3}{2} \tag{1.27}$$

La difficulté de la généralisation au cas de plusieurs canaux, outre la résolution du problème de minimisation, est alors d'assurer qu'un même message ne soit pas diffusé plusieurs fois sur différents canaux dans le même créneau, ce qui biaiserait les probabilités. Bar-Noy, Bhatia, Naor et Schieber, proposent pour cela une distribution particulière sur chaque canal que nous présenterons sous une forme étendue, au chapitre 3.

Algorithmes déterministes

Algorithmes gloutons. Pour le cas d'un canal, sans coût de diffusion, Ammar et Wong proposent, dans [AW85], des expérimentations de différentes heuristiques gloutonnes sur des profils utilisateur suivant la loi de Zipf [Zip49]. L'ordonnancement est calculé de $t = 0$ à l'infini. La décision gloutonne est prise en fonction de l'état courant $\vec{\sigma}(t)$ de l'ordonnancement au créneau courant t. Ils démontrent ainsi expérimentalement que choisir, à chaque créneau, d'émettre le message de "délai moyen cumulé maximum" [en anglais, *MAD, maximize Mean Agregate Delay*], c'est-à-dire, avec nos notations, d'*attente en arrière cumulée* $(p_i\sigma_i^2)$ *maximale*, est la règle qui donne les meilleurs résultats. Des expérimentations similaires seront menées par la suite dans [ST97a, ST97b].

En fait, Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber démontrent implicitement dans [BNBNS98] que cette heuristique gloutonne est la version *dérandomisée* de l'algorithme randomisé de Gecsei. Ils l'étendent donc au cas de la dissémination sur plusieurs canaux avec coût de diffusion en dérandomisant (implicitement) leur généralisation de l'heuristique de Gecsei.

Le paragraphe suivant se propose de présenter le principe du paradigme utilisé ici, que nous appellerons : la dérandomisation gloutonne.

Dérandomisation gloutonne d'un algorithme randomisé. Considérons un algorithme randomisé dont l'objectif est de produire une solution qui minimise une certaine fonction de coût. Le principe de la *dérandomisation gloutonne* est de remplacer les tirages aléatoires de cet algorithme par un choix glouton qui garantisse à chaque étape que l'espérance du coût, conditionnée aux choix antérieurs, est toujours inférieure ou égale à l'espérance du coût de l'algorithme randomisé.

Plus précisément, les différentes exécutions possibles d'un algorithme randomisé peuvent se représenter sous forme d'un arbre des choix aléatoires (*cf.* Figure 1.7 page ci-contre). Les nœuds sont les parties non-randomisées du programme. Et les arêtes représentent les différents choix aléatoires possibles à la fin de l'exécution de chaque partie déterministe. Chaque arête est valuée par la probabilité du choix auquel elle correspond (la somme des valeurs des arêtes sortantes d'un nœud est donc 1).

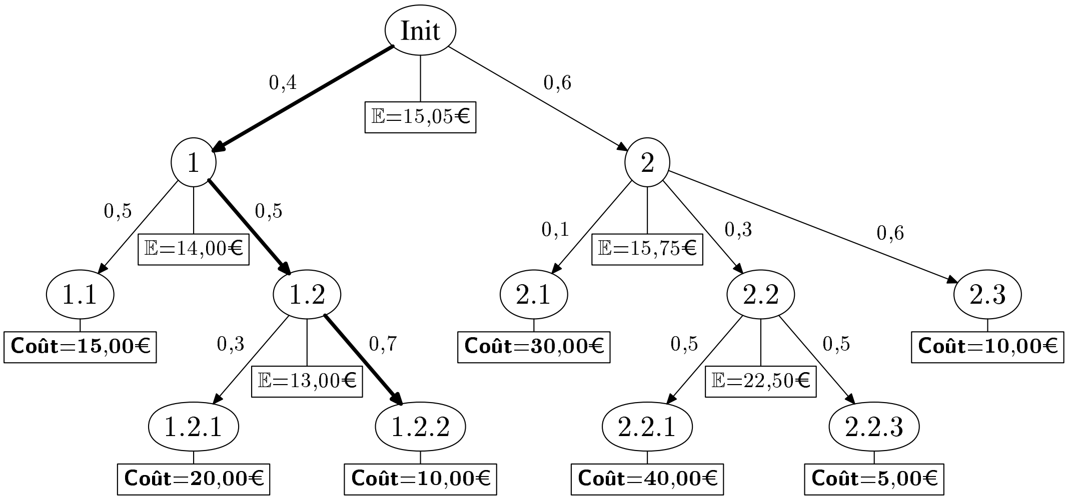


FIG. 1.7 : *Un exemple de l'arbre des exécutions possibles d'un algorithme randomisé et, en gras, la trace de sa dérandomisation gloutonne.*

Exécuter un algorithme randomisé revient à parcourir aléatoirement un chemin de la racine à une feuille dans cet arbre. Un tel chemin est parcouru avec une probabilité égale au produit des probabilités des arêtes qui le composent. Ainsi, Figure 1.7, la solution 1.2.1 coûtant 20,00€ est atteinte avec probabilité : $0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}06$.

Nous étiquetons chaque nœud par l'espérance $\mathbb{E}$ des valeurs des solutions proposées dans son sous-arbre. Ainsi, le nœud 1.2 a une espérance de : $0{,}3 \times 20{,}00 + 0{,}7 \times 10{,}00 = 13{,}00$€. De même, le nœud 1 a pour espérance : $0{,}5 \times 15{,}00 + 0{,}5 \times 13{,}00 = 14{,}00$€. Ainsi, si nous avons fait le choix 1, nous pouvons espérer un coût moyen de 14,00€, ce qui est meilleur que l'espérance initiale de 15,05€ ; et si nous faisons ensuite le choix 2, nous pourrons espérer un coût moyen encore meilleur de 13,00€. L'idée de la dérandomisation gloutonne d'un algorithme de minimisation (*resp.* maximisation) randomisé est de remplacer les tirages aléatoires lors d'une exécution, par la sélection du nœud dont l'espérance est la plus faible (*resp.* la plus élevée). Cette stratégie permet de garantir que l'algorithme glouton résultant produit une solution de qualité au moins égale à l'espérance de l'algorithme randomisé original. Sur notre exemple, Figure 1.7, pour minimiser le coût, notre algorithme glouton fait successivement les choix 1, puis 2, puis 1 : la solution obtenue a un coût de 10,00€. Remarquons que la dérandomisation gloutonne *ne produit pas la meilleure* *solution possible*, 5,00€ sur notre exemple, mais garantit seulement que la solution a un coût inférieur à l'espérance de l'algorithme randomisé initial.

Le point clé de ce paradigme est le *calcul de l'espérance conditionnelle du coût*. Dans notre cas, le fait que l'ordonnancement soit infini pose problème. Si l'on cherche à minimiser le coût asymptotique de l'ordonnancement global, tous les choix de messages sont équivalents pour les premiers créneaux : leur influence sur l'espérance du coût est négligeable, puisqu'ils sont en nombre fini. Nous pouvons malgré tout restreindre la minimisation aux ordonnancements de longueur finie $[0, T]$ puis faire tendre T vers l'infini. Nous préférerons cependant la méthode d'analyse développée par Bar-Noy, Bhatia, Naor et Schieber dans [BNBNS98], basée sur l'utilisation d'une fonction potentiel qui permet de tenir compte du surcoût éventuel à venir. L'utilisation de la fonction potentiel évite d'avoir à gérer les problèmes autour de la date T de l'approche finitiste. En fait leur fonction potentiel est définie comme l'espérance de l'attente cumulée à venir des requêtes arrivées avant la date t et qui n'ont pas encore été servies au temps t. Nous verrons que cette interprétation nous permettra de généraliser leur preuve aux différentes variantes que nous étudions dans cette thèse. Nous obtenons ainsi que l'algorithme 1.3 page suivante, qui choisit à chaque étape de diffuser le message qui maximise l'espérance de l'attente cumulée à venir des requêtes non-servies $(p_i \sigma_i \tau_i^* - c_i)$, est la (une) dérandomisation gloutonne de l'algorithme randomisé précédent.

Comme le soulignent Bar-Noy, Bhatia, Naor et Schieber, τ_i^* est proportionnel à $1/\sqrt{p_i}$ lorsque les messages n'ont pas de coût de diffusion. Ainsi, dans ces conditions, l'algorithme glouton choisit à chaque étape de diffuser le message qui maximise $\sqrt{p_i}\sigma_i$, c'est-à-dire qui maximise $p_i(\sigma_i)^2$: cet algorithme est donc bien la généralisation de l'heuristique d'Ammar et Wong.

Théorème 1.4 (Algorithme glouton, [BNBNS98]) *L'algorithme glouton 1.3 page ci-contre génère un ordonnancement S sur un canal, dont le coût est majoré par :*

$$\mathrm{COUT}(S) \leqslant \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m} \left(p_i \tau_i + \frac{c_i}{\tau_i} \right) \tag{1.28}$$

Ainsi, si $\tau = \tau^*$ est la solution du minorant $\mathrm{MN}_1(M)$:

$$\mathrm{COUT}(S) \leqslant 2 \cdot \mathrm{OPT}(M) - 3/2$$

Preuve. Nous allons utiliser le théorème de réversibilité page 31 qui nous assure que le coût de S est égal à son rétro-coût. Ainsi, nous allons pouvoir définir le coût de S sur $[0, t]$ uniquement en fonction des messages ordonnancés avant t. Nous définissons donc le coût $\mathrm{coût}(t, S)$ du créneau t qui diffuse le message M_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$ selon S, comme la somme

Algorithme 1.3 Algorithme glouton de dissémination sur un canal

Entrées : (τ_i) vérifiant, pour tout i, $\tau_i \geqslant 0$, et $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i \leqslant 1$.

Si $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i < 1$ **alors**

Introduire un message fantôme M_0, avec $p_0 = c_0 = 0$, et une valeur τ_0, telle que : $1/\tau_0 = 1 - \sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i$.

Sortie :

Pour tout $t = 1..\infty$

Soit $\vec{\sigma}$ l'état au temps $(t-1)$ de l'ordonnancement (Définition 1.3 page 41).

Choisir $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ tel que $(c_i - p_i \sigma_i \tau_i)$ soit minimal.

Si $i = 0$ **alors**

Ne rien ordonnancer durant le créneau t

Sinon

Ordonnancer le message M_i durant le créneau t

de l'attente en arrière moyenne durant le créneau précédent $(t-1)$, du coût de diffusion du message M_i et du temps de téléchargement moyen. Si l'on note $\vec{\sigma}^{(t-1)}(S)$ le vecteur d'état au temps $(t-1)$, l'attente en arrière moyenne pour chaque message M_j durant le créneau $(t-1)$ vaut $(\sigma_j^{t-1}(S) - 1/2)$, et donc :

$$\text{coût}(t,S) = c_i + \text{ARM}(S,[t-2,t-1]) + 1 = c_i + \sum_{j=1}^{m} p_j \sigma_j^{t-1}(S) + \frac{1}{2}$$

Notons que pour le premier créneau, l'attente en arrière dans le créneau précédent vaut 0 simplement et donc $\text{coût}(1,S)$ est défini comme la somme du coût de diffusion du premier message et d'une unité de temps. D'après le théorème 1.1, nous avons donc :

$$\text{COUT}(S) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \text{coût}(t,S)$$

Posons $\text{MOY} = 1/2 + \sum_{j=1}^{m}(p_j\tau_j + c_j/\tau_j)$. Pour démontrer que $\text{COUT}(S) \leqslant \text{MOY}$, nous utilisons une fonction potentiel $\Phi(t,S)$. Cette fonction potentiel est définie comme l'espérance de l'attente supplémentaire des requêtes arrivées avant t et qui n'ont pas encore été servies à la date t, si l'ordonnancement se poursuivait par l'ordonnancement randomisé après t. Comme $p_j\sigma_j^t(S)$ requêtes sont arrivées depuis la dernière diffusion et devraient attendre en moyenne τ_j la prochaine diffusion de M_j, nous posons :

$$\Phi(t,S) = \sum_{j=1}^{m} p_j \sigma_j^t(S) \tau_j$$

Cette fonction potentiel permet de prendre en compte par anticipation l'attente à venir des requêtes. Posons :

$$Y(t,S) = \text{MOY} - \text{coût}(t,S) + \Phi(t-1,S) - \Phi(t,S)$$

Nous allons démontrer que pour tout t, $Y(t,S) \geqslant 0$. Ainsi, comme $\Phi(0,S) = 0$ et $\Phi(t,S) \geqslant 0$, nous aurons en sommant de $t = 1$ à T :

$$\sum_{t=1}^{T} \text{coût}(t,S) \leqslant T \cdot \text{MOY},$$

ce qui donnera le résultat. Pour cela, nous allons calculer l'espérance de $Y(t,S)$ en supposant que le message diffusé au temps t soit choisi selon l'algorithme randomisé, et démontrer qu'elle est positive. Nous démontrerons ensuite que le choix glouton est celui qui maximise $Y(t, S)$. Notons S_i, l'ordonnancement identique à S sur $[0, t-1]$ et qui diffuse le message M_i durant le créneau t (si $i = 0$, S_i ne diffuse rien durant ce créneau). Alors, comme pour $j \neq i$, $\sigma_j^t(S_i) = \sigma_j^{t-1}(S) + 1$ et, $\sigma_i^t(S_i) = 1$, nous avons :

$$\Phi(t-1, S) - \Phi(t, S) = p_i \sigma_i^{t-1}(S)\tau_i - \sum_{j=1}^{m} p_j \tau_j$$

Ainsi,

$$Y(t, S_i) = \text{MOY} - c_i - \sum_{j=1}^{m} p_j \sigma_j^{t-1}(S) - \frac{1}{2} + p_i \sigma_i^{t-1}(S)\tau_i - \sum_{j=1}^{m} p_j \tau_j$$

Et donc, comme $\sum_{i=0}^{m} 1/\tau_i = 1$, l'espérance de $Y(t, S_i)$ vaut, en supposant que i est tiré avec probabilité $1/\tau_i$:

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\tau_i} Y(t, S_i) = 0$$

Or,

$$Y(t, S_i) = Y(t, S_0) - \left(c_i - p_i \sigma_i^{t-1}(S)\tau_i\right)$$

Ainsi, le choix glouton qui minimise $(c_i - p_i\sigma_i^{t-1}(S)\tau_i)$ assure bien que $Y(t, S)$ soit positif. *C.Q.F.D.* □

Note 1.2 La généralisation de l'algorithme glouton 1.3 page 49 au cas de plusieurs canaux consiste simplement à modifier la règle de sélection pour choisir, essentiellement, les W messages qui minimisent la quantité $(c - p\sigma\tau)$. Ainsi, comme pour le message fantôme, cette quantité vaut 0, nous ne considérons pour chaque créneau que les x messages M_i, $i \geqslant 1$, tels que $(c_i - p_i\sigma_i\tau_i) \leqslant 0$, et nous diffusons les $\min(x, W)$ messages parmi ceux-ci qui minimisent cette quantité.

Approximation à $9/8$ de l'optimum. Une autre heuristique pour de la dissémination de messages de longueurs uniformes sur *un* canal, a été développée dès 1987 par Ammar et Wong, dans [AW87], puis analysée par Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber dans [BNBNS98]. Cette heuristique produit un ordonnancement périodique de période exponentielle sur un canal et de coût inférieur à : $9/8$ de l'optimum, lorsque les coûts de diffusion des messages sont nuls ; et à $1{,}57$ de l'optimum, dans le cas contraire. L'idée est d'utiliser une propriété du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ mise en évidence par Turán Sós en 1957 (Théorème 1.5) : les multiples du nombre d'or modulo 1 se répartissent à peu près uniformément entre 0 et 1.

Théorème 1.5 (Vera Turán Sós, 1957, [Knu73, vol. 3, pp. 510–511, 543]) *Soit θ, un nombre irrationnel. Si l'on place les points $(\theta \mod 1)$, $(2\theta \mod 1)$, ..., $(n\theta \mod 1)$ sur le segment $[0, 1]$, les longueurs des $(n + 1)$ segments que l'on obtient sont au plus au nombre de trois. De plus, le point suivant $((n+1)\theta \mod 1)$ tombera dans un des segments de longueur maximale.*

En outre, si l'on dit que l'on a une mauvaise coupe *lorsque l'on découpe un segment $[a, c]$ en deux segments $[a, b]$ et $[b, c]$ dont l'un mesure plus du double de l'autre, alors les multiples de θ modulo 1 ne réalisent aucune mauvaise coupe de $[0, 1]$ si et seulement si θ est congru modulo 1 au nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou à $(1 - \varphi)$. Ainsi, le nombre d'or est l'irrationnel dont les multiples modulo 1 découpent $[0, 1]$ "le plus uniformément possible" par cette méthode.*

Cette propriété fut d'abord utilisée pour la construction de tables de hachage [Knu73, vol. 3], puis par Hofri, Itai, et Rosberg pour le traitement des requêtes dans les réseaux TDM [IR84, HR87]. Le principe est de calculer à l'aide du minorant d'Ammar et Wong, les proportions "idéales" $(1/\tau_i^*)$ des messages, puis de se donner une période T et d'effectuer $n_i = \lfloor T/\tau_i^* \rfloor$ diffusions de chaque message M_i dans la période. Les dates de diffusion de chaque message sont déterminées de la façon suivante. Chaque message M_i se voit attribuer un ensemble $X_i = \{(n_0 + \cdots + n_{i-1} + j)\varphi \mod 1 : 1 \leqslant j \leqslant n_i\}$ de n_i "positions" dans $[0, 1]$ correspondant à des multiples consécutifs de φ modulo 1. Ensuite, l'ensemble de ces positions $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ sont triées par ordre croissant. Puis on ordonnance durant le créneau t la diffusion du message M_i tel que la $t^{\text{ième}}$ position appartienne à X_i. L'algorithme complet (1.4) est décrit page suivante.

Théorème 1.6 ([BNBNS98]) *Soit S_T l'ordonnancement périodique de période T généré par l'algorithme 1.4 page ci-contre. Lorsque T tend vers l'infini, le coût de S_T admet pour limite :*

$$\limsup_{T\to\infty} \mathrm{COUT}(S_T) < \frac{9}{8} \cdot \mathrm{OPT}(M), \textit{ lorsque les coûts de diffusion des messages sont nuls ;}$$
$$\limsup_{T\to\infty} \mathrm{COUT}(S_T) < 1{,}57 \cdot \mathrm{OPT}(M), \textit{ sinon.}$$

Bar-Noy, Bhatia, Naor et Schieber proposent une généralisation pour la dissémination sur plusieurs canaux dans le cas où les coûts de diffusion sont nuls. Ils démontrent que la généralisation naturelle qui consiste à ordonnancer, sur les W canaux, les messages selon les positions, par blocs de W, donne le même rapport de performance. Cependant, Ammar et

Algorithme 1.4 Algorithme d'approximation basé sur le nombre d'or

Entrées : Un entier T et un ensemble $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ de messages de longueur 1, de probabilités (p_i) et coût (c_i).

Soit $\tau^* :=$ la solution du problème du minimisation $\mathrm{MN}_1(M)$ sur un canal.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i^* < 1$ **alors**

Introduire un message fantôme M_0, avec $p_0 = c_0 = 0$ et une valeur τ_0^*, telle que : $1/\tau_0^* = 1 - \sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i^*$.

Pour $i = 0..m$

$n_i := \lfloor T/\tau_i^* \rfloor$.

$X_i := \{((n_0 + \cdots + n_{i-1} + j)\theta) \mod 1 : 1 \leqslant j \leqslant n_i\}$.

Trier l'ensemble $X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_m$.

Sortie :

Pour $t = 1..(n_0 + \cdots + n_m)$

Si le $t^{\text{ième}}$ élément de X appartient à X_i avec $i \neq 0$ **alors**

Ordonnancer M_i le créneau t de l'ordonnancement périodique de période T.

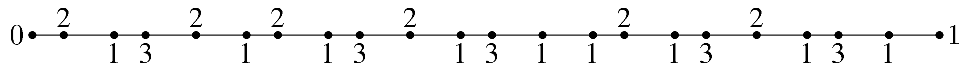
Sinon

Ne rien ordonnancer dans le créneau t.

Ne rien ordonnancer dans les créneaux $(n_0 + \cdots + n_m + 1)..T$.

Wong proposent dans [AW87] des simulations dont le résultat est qu'à période égale, l'algorithme glouton produit de *meilleurs* ordonnancements que l'algorithme basé sur le nombre d'or, lorsque les popularités des messages suivent la distribution de Zipf. La figure 1.8 présente une exécution de l'algorithme 1.4 avec $T = 20$, sur trois messages de coût de diffusion nul : M_1 a pour probabilité $p_1 = 60\%$, M_2 a pour probabilité $p_2 = 30\%$ et M_3 a pour probabilité $p_3 = 10\%$. Le minorant d'Ammar et Wong vaut alors : $\mathrm{MN}_1(M) \doteq 2{,}34$. Et l'algorithme du nombre d'or donne un ordonnancement dont le coût est 2,47.

Placement des vingt “positions” sur le segment $[0, 1]$:



L'ordonnancement périodique de période 20 correspondant est :

$$(M_2M_1M_3M_2M_1M_2M_1M_3M_2M_1M_3M_1M_1M_2M_1M_3M_2M_1M_3M_1)^\omega$$

FIG. 1.8 : *Le résultat de l'algorithme 1.4 page précédente pour* $T = 20$ *sur les trois messages de coûts de diffusion nuls* M_1, M_2 *et* M_3 *tels que :* $p_1 = 60\%$, $p_2 = 30\%$ *et* $p_3 = 10\%$. *Le coût de l'ordonnancement obtenu est :* 2,47, *alors que* $\mathrm{MN}_1(M) \doteq 2{,}34$.

Nous ne détaillerons pas cette heuristique plus avant car nous ne l'utiliserons pas par la suite. Nous proposerons d'ailleurs au chapitre 4 un schéma d'approximation pour ce même problème dont le principe est très différent.

1.3 Notre contribution

Notre première contribution a fait l'objet de la première partie de ce chapitre. Il s'agit d'avoir réuni dans un même cadre les approches précédentes issues de différents domaines, tels le Teletext, la maintenance de machines, la diffusion de message, *etc*..., en unifiant les notations et en les présentant dans une problématique cohérente, qui permettra par la suite les extensions envisagées. Les points particulièrement critiques concernent essentiellement la fonction de coût : d'une part nous en donnons une définition rigoureuse à l'aide d'une limite supérieure (et non pas d'une limite qui n'existe pas toujours), et d'autre part le théorème de réversibilité du coût page 31 permet d'assurer que les articles définissant le coût en arrière (*e.g.* [AGH95, BNBNS98]) et ceux définissant le coût en avant (*e.g.* [BNS99, KS99, Sch00, KSY00]) définissent bien le même modèle.

Nos contributions principales à l'ordonnancement de la dissémination de données dans ce document sont les suivantes :

- l'extension du modèle et de l'étude au cas des messages de longueurs non-uniformes, tout d'abord sans préemption, puis avec préemption.
- un schéma d'approximation polynomial pour le cas où les messages ont tous la même longueur.

1.3.1 Disséminer des messages de longueurs différentes

Cette étude fait l'objet du chapitre 2. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la conception d'un bon minorant du coût optimal est une partie délicate du problème de la dissémination de données. La deuxième étape importante, mais plus technique, est l'analyse des performances des algorithmes puis leur éventuelle dérandomisation.

Le cas des messages de longueurs non-uniformes et du temps continu présente de nombreuses singularités par rapport au cas des longueurs uniformes. Par exemple, il n'existe pas nécessairement d'ordonnancement optimal périodique sur plus de deux canaux, même en l'absence de coût. Il se peut également que les ordonnancements optimaux aient des trous même si les messages n'ont pas de coût de diffusion et ont des longueurs entières. En fait nous ne pouvons garantir l'existence d'un ordonnancement optimal périodique que sur un canal et lorsque les messages n'ont pas de coût de diffusion. En dehors de ce cas, nous ne savons (même) pas s'il existe un ordonnancement optimal descriptible en temps fini.

Nous ne pouvons donc pas utiliser d'ordonnancement optimal périodique pour construire notre minorant, comme Ammar et Wong dans [AW85]. Aussi, nous obtenons notre minorant en procédant "par densité" ; en remarquant que le coût de tout ordonnancement peut être approché arbitrairement par le coût d'un ordonnancement périodique. Nous obtenons ainsi un premier minorant sur le coût optimal, qui est l'extension naturelle de celui d'Ammar et Wong. Nous démontrons que ce minorant peut être cependant arbitrairement loin du coût optimal. Ce minorant nous permet tout de même de démontrer que le problème est fortement NP-difficile[5], en proposant une réduction de N-partition.

Nous dérivons alors un nouveau minorant du coût optimal des ordonnancements sur un canal, dont nous démontrons qu'il approche le coût optimal à un facteur constant en proposant une 3-approximation randomisée que nous déterminisons. La dissémination de données sur plusieurs canaux dans le cas où les messages n'ont pas tous la même longueur, reste un problème ouvert actuellement, contrairement au cas des longueurs uniformes.

[5]Un problème est *fortement* NP-*difficile*, lorsqu'il n'admet pas de schéma d'approximation (A_ε) *totalement* polynomial, c'est-à-dire tel que le temps de calcul de A_ε soit polynomial en $1/\varepsilon$ et en la taille des entrées (*cf.* [GJ79]).

1.3.2 Disséminer des messages avec préemption

Au chapitre 3, nous proposons un nouveau modèle où les messages sont découpés en un nombre fini de paquets de taille identique. Ce modèle est très proche des implémentations réelles de la dissémination de données, notamment de celle des serveurs vidéo. Ici, les requêtes des utilisateurs sont servies lorsque tous les paquets du message demandé sont téléchargés.

Une observation clé nous permet de réduire le nombre de paramètres : les paquets d'un même message sont diffusés de manière *cyclique* dans tout ordonnancement optimal. Nous en déduisons une expression algébrique “simple” du coût de tels ordonnancements dont nous établissons la réversibilité. Nous obtenons alors l'existence d'un ordonnancement optimal périodique. Nous en déduisons à l'aide d'une relaxation Lagrangienne, un minorant pour le cas préemptif sous forme d'un problème de minimisation non-linéaire dont certains coefficients peuvent être négatifs. Le chapitre 5 démontre comment étendre à ce cas l'étude menée par Bar-Noy, Bhatia, Naor et Schieber dans [BNBNS98].

Ce minorant établit une singularité intéressante de ce problème par rapport aux autres cas étudiés jusqu'à présent : “idéalement” les paquets d'un même message doivent être diffusés *consécutivement* à intervalles réguliers. Car ceci optimise l'attente des requêtes pour ce message. Cette observation nous permet d'établir que ce problème est fortement NP-difficile par une réduction de N-partition similaire à notre preuve du cas non-préemptif.

Ce minorant présente une valeur très similaire à celle de l'extension naturelle au cas des messages de longueurs non-uniformes du minorant d'Ammar et Wong. Nous proposons une 2-approximation randomisée que nous déterminisons et qui démontre ainsi que préempter les messages permet de gagner un facteur arbitraire sur le coût d'un ordonnancement de messages de longueurs non-uniformes. De plus, il est intéressant de noter que notre algorithme dissémine les données sur un nombre quelconque de canaux.

Notons que ce problème modélise une autre variante de la dissémination de messages. En effet, nous pouvons considérer que les paquets d'un message sont en fait des messages de longueur 1 réunis dans un lot. Ainsi le cas préemptif peut être vu comme le cas où les requêtes ne demandent plus un unique message, mais peuvent demander des lots de messages et ne sont servies que lorsqu'elles ont téléchargé le lot complet de ces messages. Le cas préemptif étudié ici, est le cas où ces lots sont tous disjoints. L'extension de cette étude au cas où les lots ne sont plus disjoints fait partie de nos perspectives proches.

1.3.3 Un schéma d'approximation pour la dissémination de messages de longueurs uniformes

Le chapitre 4 est sans doute le chapitre le plus “algorithmique” de cette partie, au sens usuel du terme. Nous y développons un schéma d'approximation pour le cas des messages de longueurs uniformes, répondant ainsi à l'interrogation de Khanna et Zhou dans [KZ98,

§1.2] sur l'éventuelle "non-approximabilité" du problème. Notre résultat démontre que la réponse est "Oui", ce problème est approximable arbitrairement près en temps polynomial.

Pour démontrer ce résultat nous étudions plusieurs cas particuliers de complexité croissante. Tout d'abord le cas où l'on peut partitionner les messages en *groupes* de grandes tailles dans lesquels tous les messages ont la même probabilité et le même coût de diffusion. Nous démontrons que dans ce cas, le minorant d'Ammar et Wong est essentiellement optimal. Nous considérons alors le cas où l'on ajoute un nombre constant de messages de probabilité importante. Nous avons alors deux types de messages en compétition : ceux de type A qui individuellement sont importants et ceux de type B qui en groupe sont importants. L'idée est alors de calculer la fréquence optimale de chacun de ces deux types et de les ordonnancer séparément : nous ordonnançons les messages de A de façon optimale avec la fréquence donnée, puis nous ordonnançons les messages de B dans les trous. En fait, nous démontrons par un argument probabiliste que l'on peut borner par une constante la période d'un ordonnancement quasi-optimal de A qui respecte quasiment la fréquence demandée. Ainsi comme la taille des groupes de B est suffisamment grande, les trous de l'ordonnancement de A paraissent quasiment uniformément répartis pour les messages de B et l'algorithme précédent pour le grands groupes est quasi-optimal. Nous obtenons donc un ordonnancement quasi-optimal des messages de A et de B.

Pour traiter le cas général, nous commençons par arrondir suivant un procédé désormais classique, les probabilités et les coûts de diffusion des messages. Puis nous partitionnons les messages en trois sous-ensembles : A réunit des messages importants individuellement, B réunit des messages partionnés en groupes de grandes tailles et C réunit des messages dont le coût est négligeable. Les messages de A et de B sont alors ordonnancés comme précédemment et les messages de C sont introduits "en force" dans l'ordonnancement obtenu, avec une fréquence suffisamment faible pour ne pas trop perturber le coût. Le lemme de partition en trois sous-ensembles est l'une des parties les plus techniques. Sa démonstration repose essentiellement sur le fait que les probabilités arrondies forment une série exponentiellement décroissante, ainsi les messages de même probabilité sont : soit très nombreux et influent ensemble sur le coût ; soit peu nombreux et alors négligeables.

CHAPITRE

2 Dissémination de messages de longueurs non-uniformes

Introduction

Le chapitre précédent a présenté l'état de l'art de l'étude du cas où les messages ont tous la même longueur et où le temps est discret. Nous nous proposons ici d'étudier le cas plus réaliste où les messages ont des longueurs différentes, à valeurs réelles, et où le temps est continu. Les seules études du cas des longueurs non-uniformes antérieures à nos travaux avaient été menées par Hameed et Vaidya qui testent empiriquement, dans [VH96, VH97, VH99, HV99], différentes heuristiques basées sur l'extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong. Cette étude est donc originale en ce sens que c'est la première étude rigoureuse du cas des messages de longueurs non-uniformes menant à des approximations avec garantie de performance.

Comme l'avaient suspecté Ammar et Wong, ce cas présente une complexité structurelle supérieure, que nous vous proposons de découvrir sur une série d'exemples introductifs.

L'existence d'un ordonnancement optimal périodique n'est plus garantie

Tout d'abord, nous ne pouvons garantir l'existence d'un ordonnancement optimal périodique que pour la dissémination de messages sans coût de diffusion, et sur un canal. Du fait de la continuité du temps, nous ne savons pas actuellement gérer l'existence et les longueurs des périodes où rien n'est diffusé. En ce qui concerne le cas de plusieurs canaux, contrairement au cas de messages de longueurs uniformes, il se peut qu'aucun ordonnancement périodique n'existe, même en l'absence de coût de diffusion.

Exemple 2.1 Considérons le cas de la dissémination sur deux canaux de deux messages M_1 et M_2 de coûts de diffusion nuls et tels que : $\ell_1 = 1$, $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, et $\ell_2 = \sqrt{2}$, $p_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. L'extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong, que nous verrons au Corollaire 2.2 Section 2.1, nous permet de démontrer que pour ce cas précis, l'ordonnancement optimal a pour coût $\mathrm{MN}_2(\{M_1, M_2\}) = \frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, qui n'est atteint que lorsque M_1 est diffusé tous les $\tau_1^* = 1$ et M_2 tous les $\tau_2^* = \sqrt{2}$. Ainsi l'ordonnancement optimal, illustré Figure 2.1, diffuse continûment le message M_1 sur un canal et continûment M_2 sur l'autre. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, l'ordonnancement est apériodique.

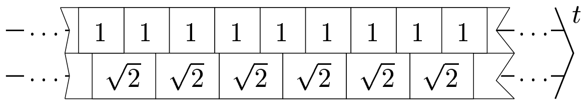


FIG. 2.1 : *Il n'existe pas d'ordonnancement optimal périodique pour la dissémination sur deux canaux des messages M_1 et M_2 de coûts de diffusion nuls avec $\ell_1 = 1$, $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, et $\ell_2 = \sqrt{2}$, $p_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.*

Cet exemple repose sur l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ et peut donc paraître anecdotique. Cependant, il démontre que si l'on veut prouver l'existence d'un ordonnancement périodique optimal sur plusieurs canaux, il faudra à un moment ou un autre utiliser le fait que les entrées sont rationnelles, ce qui n'était pas le cas lorsque les messages avaient tous la même longueur et que le temps était discret.

L'exemple 2.1 pose naturellement le problème de l'obtention d'un minorant. Rappelons qu'au chapitre précédent, Ammar et Wong avaient obtenu leur borne sur le coût optimal en minorant le coût des ordonnancements périodiques. Cette approche était justifiée par l'existence d'un ordonnancement périodique qui est optimal. Or, comme nous l'avons vu, il n'existe pas nécessairement d'ordonnancement périodique qui soit optimal pour le cas des longueurs non-uniformes.

Nous validerons malgré tout cette approche en démontrant que les ordonnancements périodiques sont "denses" parmi les ordonnancements optimaux : le coût de tout ordonnancement optimal peut être approché arbitrairement près par le coût d'un ordonnancement périodique. Ainsi tout minorant des coûts des ordonnancements périodiques sera un minorant du coût optimal.

Cette propriété de densité nous permettra également d'établir l'existence d'un ordonnancement optimal en concaténant un nombre suffisamment grand de périodes d'ordonnancements périodiques de plus en plus proche de l'optimal. Nous ne savons cependant pas actuellement si dans le cas général, il existe un ordonnancement optimal descriptible en temps fini (autrement que par la donnée des entrées du problème ;-)).

L'extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong peut être arbitrairement loin du coût optimal

Nous obtenons l'extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong au Lemme 2.3 en procédant de la même façon que précédemment pour le cas des messages de longueur uniforme. Pour cela, nous considérons chaque ordonnancement périodique et minimisons la contribution au coût de chaque message à fréquence fixée, en relaxant les contraintes de non-recouvrement. En minimisant sur les fréquences des différents messages, nous obtenons alors un minorant sur le coût des ordonnancements périodiques et donc sur le coût optimal. Comme dans le cas des longueurs uniformes ce minorant se simplifie en une "règle de la racine carré" lorsque les messages ont tous un coût de diffusion nul (Corollaire 2.2 Section 2.2). L'ordonnancement fictif (fictif, car il ne vérifie pas les contraintes de non-recouvrement) proposé par ce minorant diffuse chaque message M_i à intervalles réguliers, tous les τ_i^*, où τ^* est proportionnel au vecteur $\sqrt{\ell/p}$. Notons que lorsque les messages ont tous la même longueur, nous retrouvons la règle de la racine carré énoncée page 25.

Cependant, contrairement au cas des longueurs uniformes, cette règle n'est pas bonne à suivre car ce minorant n'est pas *fidèle*, c'est-à-dire qu'il peut prendre des valeurs arbitrairement faibles devant le coût optimal. Plus rigoureusement :

Definition 2.1 (Fidélité d'un minorant) Nous dirons qu'un minorant $m(\vec{x})$ de la valeur optimale $\mathrm{OPT}(\vec{x})$ de la fonction objectif $f(\vec{x},\vec{y})$ d'un problème de minimisation $\min_{\vec{y}\in D} f(\vec{x},\vec{y})$ d'entrée $\vec{x}$ est *fidèle* s'il existe une constante A telle que pour toute entrée $\vec{x}$:

$$m(\vec{x}) \leqslant \mathrm{OPT}(\vec{x}) \leqslant A \cdot m(\vec{x}) \tag{2.1}$$

L'intérêt de l'obtention d'un minorant fidèle est que son estimation du coût est fiable à une constante près et peut donc servir de base à la conception et à l'analyse d'algorithmes d'approximation, comme nous l'avons vu au chapitre précédent.

Considérons donc l'exemple suivant.

Exemple 2.2 Observons ce qui se passe lorsque L tend vers l'infini pour la dissémination sur un canal de deux messages M_1 et M_2 de coûts de diffusion nuls et de longueurs très différentes : $\ell_1 = 1, p_1 = \frac{L}{L+1}$, et $\ell_2 = L, p_2 = \frac{1}{L+1}$.

La règle de la racine carré nous donne que, si l'on relaxe les contraintes de non-recouvrement entre les messages, le coût est minimisé en diffusant M_1 tous les $\tau_1^* \propto \sqrt{\ell_1/p_1} = \Theta(1)$ et M_2 tous les $\tau_2^* \propto \sqrt{\ell_2/p_2} = \Theta(L)$. Dans l'ordonnancement fictif suggéré, illustré Figure 2.2, les requêtes demandent le message M_1 avec probabilité $\Theta(1)$ et sont alors servies au bout de $\Theta(1)$, et demandent le message M_2 avec probabilité $\Theta(1/L)$ et sont alors servies au bout de $\Theta(L)$. Ainsi le coût de l'ordonnancement fictif suggéré par l'extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong est $\Theta(1)$.

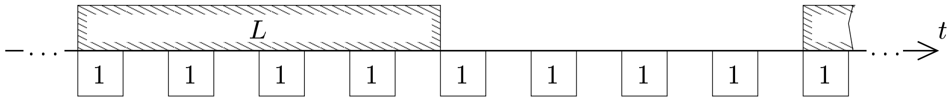


FIG. 2.2 : *L'ordonnancement fictif de coût $\Theta(1)$ suggéré par l'extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong, est irréalisable pour deux messages M_1 et M_2 de coût nul avec $\ell_1 = 1$, $p_1 = 1 - \frac{1}{L+1}$ et $\ell_2 = L$, $p_2 = \frac{1}{L+1}$.*

Cependant cet ordonnancement n'est pas réalisable. Pire, si l'on suit les proportions $1/\tau_1^* = \Theta(1)$ et $1/\tau_2^* = \Theta(1/L)$ suggérées pour M_1 et M_2, on obtient l'ordonnancement périodique de période $(M_2 M_1^L)^\omega$. Or pour cet ordonnancement, une requête demande le message M_1 avec probabilité $\Theta(1)$ et attend $\Omega(L)$ avec probabilité $1/2$. Ainsi le coût de l'ordonnancement obtenu est au moins $\Omega(L)$, alors que nous allons voir que le coût optimal est de l'ordre de $\Theta(\sqrt{L})$.

En effet, on peut démontrer facilement qu'il existe un ordonnancement optimal périodique pour deux messages sans coût de diffusion sur un canal, et que sa période est $(M_1 M_2^x)$ ou $(M_2 M_1^x)$. En minimisant sur x, on obtient que l'ordonnancement périodique optimal de nos deux messages, illustré Figure 2.3 est de la forme $(M_2 M_1^{L\sqrt{L}})^\omega$.

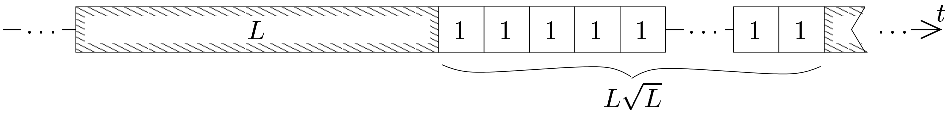


FIG. 2.3 : *L'ordonnancement optimal sur un canal de M_1 et M_2 a un coût de $\Theta(\sqrt{L})$.*

Dans cet ordonnancement, une requête demande M_2 avec probabilité $\Theta(1/L)$ et est servie au bout de $\Theta(L\sqrt{L})$ en moyenne. Et, une requête demande M_1 avec probabilité $\Theta(1)$ et attend en moyenne $\Theta(L)$ avec probabilité $\frac{L}{L+L\sqrt{L}}$ et, en moyenne $\Theta(1)$ avec probabilité $\frac{L\sqrt{L}}{L+L\sqrt{L}}$. Ainsi les contributions de chaque message au coût de l'ordonnancement sont toutes les deux de l'ordre de $\Theta(\sqrt{L})$ à l'optimal. Et donc le coût de l'ordonnancement optimal de M_1 et M_2 est :

$$\Theta(1) \quad \ll \quad \mathrm{OPT}\big(\{M_1, M_2\}\big) = \Theta(\sqrt{L}) \quad \ll \quad \Theta(L)$$

Plusieurs observations peuvent être tirées de cet exemple. Tout d'abord, l'extension du minorant d'Ammar et Wong n'est pas fidèle dès que les messages ont des longueurs très différentes. De plus, les proportions qu'elle suggère mènent à des ordonnancements dont le coût est arbitrairement grand par rapport au coût optimal. Ensuite, ce n'est pas le temps de téléchargement des messages qui est en cause, car il est constant pour chaque requête quel que soit l'ordonnancement, mais bien le fait que de diffuser un message long *retarde* considérablement le service des requêtes pour les autres messages.

Nous verrons dans la Section 2.2 que cet exemple est générique. Nous pouvons construire pour n'importe quel nombre de canaux, des ensembles de messages de coûts de diffusion nuls tels que le coût de l'ordonnancement optimal soit arbitrairement grand devant l'extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong.

Nous traiterons ce problème en enrichissant le minorant dans le cas d'un seul canal pour tenir compte du retard induit par la diffusion d'un message long (Lemme 2.5).

Le cas de plusieurs canaux pose problème

La dissémination de messages de longueurs différentes sur plusieurs canaux reste actuellement mal comprise. En particulier, l'exemple précédent met en évidence une nouvelle particularité par rapport au cas des longueurs uniformes. Dans le cas des longueurs uniformes, l'ajout d'un nouveau canal permet de diminuer le coût d'un facteur constant d'au plus $\frac{W}{W+1}$. En fait, nous verrons au chapitre 4 que, contrairement au cas des longueurs non-uniformes, l'ajout de canaux de diffusion ne change pratiquement pas la forme d'un ordonnancement optimal lorsque les messages ont le même temps de transmission. Or, dans l'exemple des deux messages de l'exemple précédent, l'ajout d'un canal permet de passer d'un coût de $\Theta(\sqrt{L})$ à $\Theta(1)$. En effet l'ordonnancement sur deux canaux qui diffuse continûment M_1 sur un canal et continûment M_2 sur l'autre, a un coût constant $\Theta(1)$. L'ajout d'un canal permet donc de réaliser un gain arbitraire sur le coût lorsque les messages ont des longueurs très différentes. Cet exemple sera généralisé Section 2.2 au cas de plusieurs canaux.

Un autre phénomène intéressant est que même pour des messages de longueurs entières, de probabilités rationnelles et de coûts de diffusion *nuls*, les ordonnancements optimaux sur plusieurs canaux peuvent contenir des “trous”, c'est-à-dire des périodes durant lesquelles aucun message n'est diffusé, ce qui était impossible dans le modèle précédent en l'absence de coûts de diffusion.

Exemple 2.3 Supposons que l'on veuille diffuser deux messages M_1 et M_2 de longueurs $\ell_1 = 2$ et $\ell_2 = 3$, et tels que M_1 soit bien plus populaire de M_2 : $p_1 = (1 - \varepsilon)$ et $p_2 = \varepsilon$.

Pour ε petit, tout ordonnancement optimal diffusera M_2 rarement. M_1 est le message critique, aussi, entre deux diffusions de M_2, il est diffusé de façon optimale dans tout ordonnancement optimal, car tout écart à cette stratégie coûte très cher. La stratégie optimale consiste donc à diffuser M_1 de façon synchronisée sur les deux canaux en décalé (à la façon des briques d'un mur, *cf.* Figure 2.4 page suivante). Supposons qu'un ordonnancement optimal n'ait pas de trou. Nous avons vu qu'il était impératif que la diffusion de M_1 soit synchronisée sur les deux canaux. Or, toute diffusion de M_2, de longueur 3, désynchronise ces canaux, à moins que M_2 ne soit diffusé deux fois de suite, soit sur le même canal, soit sur les deux canaux. Nous pouvons facilement démontrer que pour ε assez petit, aucune de ces deux stratégies n'est optimale.

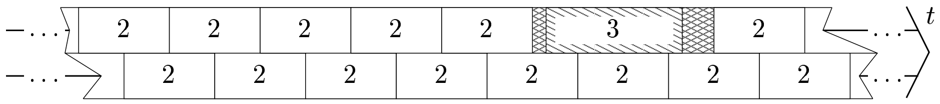


FIG. 2.4 : *Pour ε assez petit, il n'existe pas d'ordonnancement optimal sans trou pour la dissémination sur deux canaux des messages M_1 et M_2 de coûts de diffusion nuls avec $\ell_1 = 2$, $p_1 = (1 - \varepsilon)$, et $\ell_2 = 3$, $p_2 = \varepsilon$.*

Nous démontrons ainsi que pour ε suffisamment petit, *en l'absence de coût de diffusion*, un ordonnancement optimal, illustré Figure 2.4, diffuse M_1 “à la façon des briques d'un mur” sur les deux canaux et, pour diffuser M_2, arrête de diffuser M_1 sur un canal pendant 4 unités de temps, et laisse donc un ou deux trous d'une surface totale d'une unité de temps.

Dans ce chapitre...

... nous allons apporter une réponse (partielle) aux interrogations que nous venons de soulever dans cette longue introduction.

Tout d'abord nous allons démontrer Section 2.3 que le problème de décision associé à la minimisation du coût d'un ordonnancement pour la dissémination de messages de coûts de diffusion *nuls* est NP-difficile au sens fort (Théorème 2.1 page 77). La preuve de ce résultat doit être faite prudemment car, étant donné que le temps est continu et que les probabilités et les longueurs peuvent prendre a priori n'importent quelles valeurs réelles, nous risquons de quitter le cadre des machines de Turing. Aussi, toutes les valeurs que nous utilisons dans la preuve sont rationnelles et de tailles polynomiales. Notons que ce résultat démontre qu'il existe une complexité inhérente à la non-uniformité des longueurs, indépendamment des coûts de diffusion.

Nous démontrerons ensuite, Section 2.3, l'existence d'un ordonnancement optimal (Proposition 2.1 page 79), et qu'il en existe un périodique pour la dissémination sur un canal de messages sans coût de diffusion, que l'on peut construire en temps fini exponentiel (Théorème 2.2 page 80).

Nous proposerons enfin, Section 2.4, une approximation à un facteur constant pour l'ordonnancement de la dissémination sur un canal (Algorithme 2.3 page 92). Pour cela nous dérivons Section 2.2 un nouveau minorant sur le coût optimal, qui permet de tenir compte du retard infligé aux différents messages par la diffusion des messages longs (Lemme 2.5

page 75). L'étude de la généralisation de notre approche au cas de plusieurs canaux fait partie de nos perspectives à court terme.

Mais nous commençons Section 2.1 par démontrer quelques réductions qui seront utiles à la démonstration des résultats annoncés : la densité des ordonnancements périodiques, qui permettra de se concentrer sur les ordonnancements périodiques pour le calcul d'un minorant ; et le fait que la durée entre deux diffusions d'un même message peut être bornée dans un ordonnancement optimal.

2.1 Réductions

2.1.1 Densité des ordonnancements périodiques

Comme nous l'avons vu avec l'exemple 2.1 page 59, l'existence d'un ordonnancement optimal ne peut être garantie lorsque les messages ont des longueurs différentes. La propriété suivante nous permet de nous restreindre malgré tout aux ordonnancements périodiques pour l'estimation du coût optimal.

Lemme 2.1 (Densité des ordonnancements périodiques) *Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout ordonnancement S d'un ensemble de messages $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ sur W canaux, il existe un ordonnancement* périodique *S' dont le coût vérifie :*

$$\mathrm{COUT}(S') \leqslant \mathrm{COUT}(S) + \varepsilon$$

Preuve. Par définition du coût de S, soit T tel que pour tout $t \geqslant T$: $\mathrm{COUT}(S, [0, t]) \leqslant \mathrm{COUT}(S) + \varepsilon/2$. Posons $\mathcal{L} =_{\text{def}} \ell_1 + \ldots + \ell_m$ et $\ell_{\max} = \max_i \ell_i$. Soit S_t l'ordonnancement périodique de période $(t + \ell_{\max} + \mathcal{L})$, qui est identique à S sur $[0, t]$, puis qui diffuse entre $[t, t + \ell_{\max} + \mathcal{L}]$ sur chaque canal les m messages par ordre de première apparition après t sur ce canal. Par construction, les requêtes qui arrivent entre 0 et t, sont servies dans S_t au pire aussi tard que dans S. Et, les requêtes qui arrivent entre t et $(t + \ell_{\max} + \mathcal{L})$, sont servies au plus tard au bout de $(\ell_{\max} + \mathcal{L} + \mathrm{TS}(S, 0))$ (*Rappel :* $\mathrm{TS}(S, u)$ est le temps de service moyen d'une requête arrivant à la date u). Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{COUT}(S_t) = {} & \frac{t}{t + \ell_{\max} + \mathcal{L}} \mathrm{COUT}(S_t, [0, t]) \\
& + \frac{\mathcal{L} + \ell_{\max}}{t + \ell_{\max} + \mathcal{L}} \mathrm{COUT}(S_t, [t, t + \ell_{\max} + \mathcal{L}]) \\
\leqslant {} & \mathrm{COUT}(S) + \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{(\mathcal{L} + \ell_{\max})(\mathcal{L} + \ell_{\max} + \mathrm{TS}(S, 0))}{t + \ell_{\max} + \mathcal{L}}}_{O(1/t)}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour t suffisamment grand, nous obtenons le résultat annoncé. □

La densité des ordonnancements périodiques nous assure donc du résultat suivant : minorer le coût des ordonnancements périodiques, c'est minorer le coût des ordonnancements optimaux.

Corollaire 2.1 *Pour tout ensemble de messages M sur W canaux :*

$$\mathrm{OPT}(M) = \inf_{S \text{ périodique}} \mathrm{COUT}(S)$$

De plus, un ordonnancement optimal parmi les ordonnancements périodiques, est un ordonnancement optimal qui est périodique.

2.1.2 Borner la période d'émission

Le lemme suivant est l'équivalent du Lemme 1.5 page 43 du chapitre précédent pour les messages de longueurs uniformes. Il nous servira tout comme ce dernier à restreindre la taille du graphe d'états pour démontrer l'existence d'un ordonnancement optimal périodique sur un canal lorsque les coûts de diffusion sont nuls.

Lemme 2.2 (Intervalle maximal) *Pour tout ordonnancement périodique S d'un ensemble de messages $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ sur W canaux, il existe un ordonnancement périodique S' tel que pour tout i, la durée entre les débuts de deux diffusions consécutives du message M_i est bornée par $\mathcal{K}$, où :*

$$\mathcal{K} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{2}{p_i} (5\mathcal{L} + \mathcal{C} + 1), \quad \textit{avec } \mathcal{L} =_{\text{def}} \ell_1 + \cdots + \ell_m \textit{ et } \mathcal{C} =_{\text{def}} c_1 + \cdots + c_m$$

et tel que : $\quad \mathrm{COUT}(S') \leqslant \mathrm{COUT}(S)$.

Preuve. Soit S un ordonnancement périodique de période T des messages de M sur W canaux. Procédons par induction, soit M_{i_0} le message tel que la durée entre les débuts de deux diffusions consécutives de M_{i_0} soit maximale. Sans perte de généralité, supposons que $i_0 = 1$. Supposons que ces deux diffusions sont distantes de plus de $\mathcal{K}$. Sans perte de généralité, nous supposons que la première de ces diffusions a lieu à la date $t = 0$. Posons $K = (\mathcal{K}/2)$. Le principe est d'insérer une diffusion de M_1 sur l'un des canaux à la date $t = K$. Nous devons cependant le faire prudemment. Tout d'abord, les diffusions doivent être décalées sur chaque canal de ℓ_1 après le point d'insertion, afin que les différents canaux restent synchronisés correctement. Ensuite, nous ne pouvons pas insérer une diffusion de M_1 exactement à la date $t = K$, puisque les canaux sont peut-être en train de diffuser un message. Enfin, afin d'éviter de trop retarder la diffusion des autres messages, nous devons les diffuser également au point d'insertion. De sorte à minimiser le surcoût, ces diffusions sont effectuées par ordre de dernière apparence avant le point d'insertion. La construction de S' est illustrée Figure 2.5.

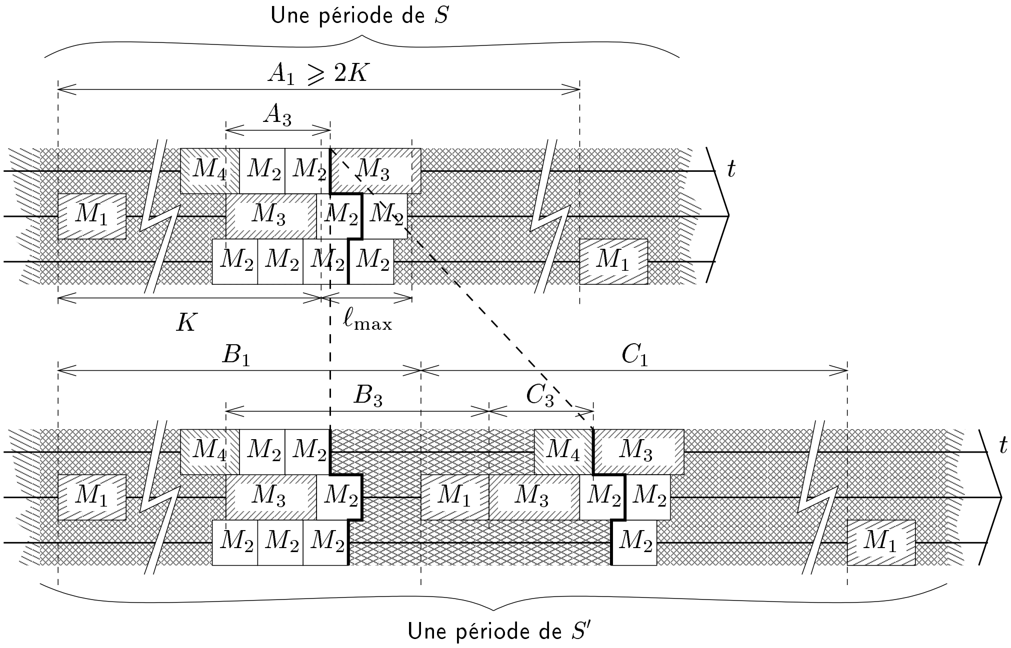


FIG. 2.5 : *Construction de S' à partir de S.*

Nous allons construire un ordonnancement périodique S' de période $(T + \mathcal{L})$ comme suit. Pour chaque canal w, soit T_w la date de la fin de la diffusion en cours à la date K dans l'ordonnancement S sur le canal w, si un message est en cours de diffusion, et $T_w = K$ sinon. Notons que $K \leqslant T_w < K + \ell_{\max}$, où $\ell_{\max}$ désigne la longueur maximale d'un message $\max_i \ell_i$. S' est obtenu en deux étapes, illustrées Figure 2.5 : tout d'abord en insérant dans S sur chaque canal w de S un trou de longueur $\mathcal{L}$ à la date T_w. Ceci permet de maintenir les canaux synchronisés. Puis, pour chaque message M_i, nous relevons la date t_i et le canal w_i où a lieu la dernière diffusion du message M_i avant $t = K$. Et, nous plaçons sur chaque canal w, de droite à gauche, à partir de la date $t = T_w + \mathcal{L}$ (dans le trou inséré), les messages M_i tels que $w_i = w$, dans l'ordre (*cf.* illustration Figure 2.5). Pour analyser le coût de l'ordonnancement obtenu, définissons quelques notations :

- A_i la durée entre les débuts deux diffusions consécutives de M_i qui chevauchent le point d'insertion dans S.
- B_i la durée entre les débuts de la dernière diffusion de M_i avant le point d'insertion

et la nouvelle diffusion de M_i insérée dans S'.

- C_i la durée entre les débuts de la nouvelle diffusion de M_i insérée et la première diffusion de M_i après le point d'insertion dans S'.

Par construction, nous avons, pour tout i :

$$B_i + C_i = A_i + \mathcal{L} \quad \text{et} \quad C_i \leqslant A_i \tag{2.2}$$

et d'autre part, pour tout i :

$$A_i \leqslant A_1 \quad \text{et donc} \quad B_i \leqslant C_1 + K + \mathcal{L} \tag{2.3}$$

Prouvons à présent que le coût de S' est inférieur au coût de S. Comme la période de S' est supérieure à celle de S, il suffit de démontrer que la variation du coût de diffusion cumulé $\Delta(T\,\mathrm{COUT}(S)) =_{\text{def}} (T + \mathcal{L})\,\mathrm{COUT}(S') - T\,\mathrm{COUT}(S)$ est négative. La variation du coût cumulé de S à S' vaut clairement :

$$\Delta(T\,\mathrm{CD}(S)) = \sum_{i=1}^{m} c_i = \mathcal{C}$$

Soit $i \neq 1$, la variation du temps de service cumulé des requêtes pour M_i vaut :

$$\begin{aligned}\Delta(2T\,\mathrm{TSM}(S, M_i)) &= B_i^2 + C_i^2 - A_i^2 = (A_i + \mathcal{L} - C_i)^2 + C_i^2 - A_i^2 \\ &= \mathcal{L}^2 + 2C_i \underbrace{(C_i - A_i)}_{\leqslant 0} + 2\mathcal{L} \underbrace{(A_i - C_i)}_{= B_i - \mathcal{L}} \\ &\leqslant 2\mathcal{L}B_i - \mathcal{L}^2\end{aligned}$$

Pour le message M_1, la variation du temps de service est :

$$\begin{aligned}\Delta(2T\,\mathrm{TSM}(S, M_1)) &= B_1^2 + C_1^2 - A_1^2 = B_1^2 + C_1^2 - (B_1 + C_1 - \mathcal{L})^2 \\ &= -2C_1 \underbrace{(B_1 - \mathcal{L})}_{\geqslant K - \mathcal{L}} + 2 \underbrace{B_1}_{\leqslant K + \mathcal{L}} \mathcal{L} - \mathcal{L}^2 \\ &\leqslant -2C_1(K - \mathcal{L}) + 2\mathcal{L}K + \mathcal{L}^2\end{aligned}$$

Ainsi la variation du temps de service cumulée est majorée par :

$$\begin{aligned}\Delta(2T\,\mathrm{TSM}(S)) &\leqslant -2p_1C_1(K-\mathcal{L}) + 2\mathcal{L}K + \mathcal{L}^2 + 2\mathcal{L}\underbrace{\sum_{i=2}^{m} p_iB_i}_{\leqslant C_1+K+\mathcal{L}} \\ &\leqslant -2\underbrace{C_1}_{\geqslant K-\ell_{\max}}(p_1K-2\mathcal{L}) + 4\mathcal{L}K + 3\mathcal{L}^2 \\ &\leqslant -2(K-\mathcal{L})(p_1K-2\mathcal{L}) + 4\mathcal{L}K + 3\mathcal{L}^2 \\ &\leqslant -2p_1K^2 + 10\mathcal{L}K\end{aligned}$$

Finalement, la variation totale du coût est majorée par :

$$\begin{aligned}\Delta(T\,\mathrm{COUT}(S)) &\leqslant -p_1K^2 + 5\mathcal{L}K + \mathcal{C} \\ &\leqslant 0, \quad \text{pour } K \geqslant \frac{1}{p_1}(5\mathcal{L}+\mathcal{C}+1)\end{aligned}$$

En procédant sur tous les intervalles “à problème”, nous obtenons au bout d'un nombre fini d'étapes, l'ordonnancement périodique annoncé. □

2.2 Minorer le coût d'un ordonnancement optimal

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, trouver un bon minorant est une étape clé pour la résolution du problème de la dissémination de données. Nous allons tout d'abord généraliser le minorant d'Ammar et Wong au cas des longueurs non-uniformes. Notons que ce minorant est à la base d'un certain nombre d'heuristiques testées expérimentalement par Hameed et Vaidya dans [VH96, VH97, VH99, HV99]. Ce minorant nous permettra d'établir dans la section suivante la NP-dureté du problème.

Nous démontrerons cependant que l'on peut étendre au cas de plusieurs canaux l'exemple 2.2 de l'introduction, et établir ainsi que ce minorant n'est pas fidèle dès que les messages ont des longueurs très différentes. Nous proposons donc au Lemme 2.5 page 75 un nouveau minorant pour le cas d'un canal qui nous permettra de construire une 3-approximation à la Section 2.4.

2.2.1 Extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong

A l'instar du chapitre précédent, nous obtenons un premier minorant sur le coût optimal d'un ordonnancement, en relaxant les contraintes de non-recouvrement entre les messages.

Lemme 2.3 (Extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong) *Le problème de minimisation non-linéaire* $\mathrm{MN}_2(M)$ *suivant est un minorant sur le coût de tout ordonnancement* S *des messages* $M_1, \ldots, M_m$ *de longueurs* (ℓ_i)*, de probabilités* (p_i)*, et de coûts de diffusion* (c_i)*, sur* W *canaux :*

$$\mathrm{MN}_2(M) \begin{cases} \min\limits_{\tau>0} \sum\limits_{i=1}^{m} p_i\ell_i + \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\frac{p_i\tau_i}{2} + \frac{c_i}{\tau_i}\right) \\ \text{Sur le domaine:} \quad \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\ell_i}{\tau_i} \leqslant W \end{cases} \tag{2.4}$$

Ce problème de minimisation admet une unique solution τ^**, telle que :*

$$\tau_i^* = \sqrt{\frac{2c_i + \lambda^*\ell_i}{p_i}}, \quad \textit{pour un certain } \lambda^* \geqslant 0, \tag{2.5}$$

tel que : si $\sum_{i=1}^{m} \ell_i\sqrt{p_i/(2c_i)} \leqslant W$*, alors* $\lambda^* = 0$*; et, sinon,* λ^* *est l'unique solution positive à :* $\sum_{i=1}^{m} \ell_i\sqrt{p_i/(2c_i + \lambda^*\ell_i)} = W$*.*
De plus, ce minorant est réalisé par un ordonnancement périodique S *sur* W *canaux si et seulement si chaque message* M_i *est diffusé dans* S *périodiquement, tous les* τ_i^* *exactement.*

Note 2.1 Notons que contrairement au cas des canaux synchronisés étudié au chapitre précédent, nous n'avons plus la contrainte : $\tau_i \geqslant 1$.

Preuve. La preuve est identique à celles données des lemmes 1.2 page 35 et 1.3 page 37 du chapitre précédent, nous en rappellerons seulement les grandes lignes.

Soit S un ordonnancement périodique des messages sur W canaux, de période T, et de coût fini. Soit n_i le nombre de diffusions du message M_i par période. En constatant que le temps de service est minimisé si le message M_i est diffusé à intervalles réguliers, on obtient en relaxant les contraintes de non-recouvrement des messages, que le temps de service des requêtes pour le message M_i est minoré par :

$$\mathrm{TSM}(S, M_i) \geqslant \frac{\tau_i}{2} + \ell_i, \quad \text{où } \tau_i = T/n_i \text{ (l'inverse de la fréquence de } M_i\text{)}$$

et que cette valeur est atteinte si et seulement si M_i est ordonnancé périodiquement exactement tous les τ_i. D'autre part sa contribution au coût de diffusion vaut :

$$\mathrm{CD}(S, M_i) = \frac{c_i n_i}{T} = \frac{c_i}{\tau_i}$$

Ainsi, le coût de l'ordonnancement périodique S est minoré par :

$$\mathrm{COUT}(S) \geqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i}_{\text{Temps de téléchargement moyen}} + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{p_i \tau_i}{2} + \frac{c_i}{\tau_i} \right)$$

Or, comme l'ordonnancement est périodique de période T sur W canaux, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{m} n_i \ell_i \leqslant T \cdot W, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{\ell_i}{\tau_i} \leqslant W$$

Ainsi en minimisant avec cette contrainte, nous obtenons le minorant $\mathrm{MN}_2(M)$ annoncé pour le coût des ordonnancements *périodiques*. Comme, d'après le corollaire 2.1 :

$$\mathrm{OPT}(M) = \inf_{S \text{ périodique}} \mathrm{COUT}(S)$$

$\mathrm{MN}_2(M)$ est bien un minorant sur le coût de *tout* ordonnancement.

En effectuant le changement de variable $\nu_i = \tau_i / \ell_i$, nous sommes ramenés au problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \displaystyle \min_{\nu > 0} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{p_i \ell_i \nu_i}{2} + \frac{c_i}{\ell_i \nu_i} \right) \\ \text{Sur le domaine:} \quad \displaystyle \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\nu_i} \leqslant W \end{cases} \tag{2.6}$$

D'après le lemme 1.3, le problème de minimisation non-linéaire (2.6) admet une unique solution ν^*, dont l'expression est la suivante :

$$\nu_i^* = \sqrt{\frac{\lambda^* + 2c_i/\ell_i}{p_i \ell_i}}, \quad \text{pour un certain } \lambda^* \geqslant 0,$$

tel que : si $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i \ell_i^2 / (2c_i)} \leqslant W$, alors $\lambda^* = 0$; et, sinon, λ^* est l'unique solution positive à : $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i \ell_i / (2c_i/\ell_i + \lambda^*)} = W$. D'où nous tirons l'expression de τ^*.

Comme la solution τ^* de $\mathrm{MN}_2(M)$ est unique, la valeur de $\mathrm{MN}_2(M)$ est, par construction, réalisée par un ordonnancement périodique S sur W canaux si et seulement si chaque message M_i est diffusé dans S périodiquement, exactement tous les τ_i^*.

C.Q.F.D. □

Lorsque les messages n'ont pas de coût de diffusion, l'expression du minorant $\mathrm{MN}_2(M)$ se simplifie, comme dans le cas des longueurs uniformes, en une règle de “la racine carré”. Cependant, nous verrons dans l'exemple qui suit, que cette règle mène à des ordonnancements dont le coût peut être arbitrairement loin de l'optimum, lorsque les messages ont des longueurs très différentes.

Corollaire 2.2 (Cas des coûts de diffusion nuls) *Lorsque les messages $M_1, \ldots, M_m$ ont des coûts de diffusion nuls, alors la solution τ^* du problème de minimisation non-linéaire $\mathrm{MN}_2(M)$ est proportionnelle au vecteur $\sqrt{\ell/p}$. Ainsi, la valeur du problème de minimisation est :*

$$\mathrm{MN}_2(M) = \sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i + \frac{1}{2W} \left(\sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i \ell_i} \right)^2 \tag{2.7}$$

Preuve. D'après le lemme précédent, lorsque les coûts de diffusion sont nuls, la solution τ^* de $\mathrm{MN}_2(M)$ est proportionnelle au vecteur $\sqrt{\ell/p}$: $(\forall i)\ \tau_i^* = \sqrt{\ell_i \lambda^*/p_i}$, où $\lambda^* \geqslant 0$ est la solution de $\sum_{j=1}^{m} \sqrt{\ell_j p_j/\lambda^*} = W$. Ainsi,

$$\sqrt{\lambda^*} = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{m} \sqrt{p_j \ell_j}$$

Et donc,

$$\mathrm{MN}_2(M) = \sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i + \frac{1}{2W} \sum_{j=1}^{m} \sqrt{p_j \ell_j} \sum_{i=1}^{m} p_i \sqrt{\frac{\ell_i}{p_i}}$$

C.Q.F.D. □

Nous l'avons annoncé dans l'introduction : le minorant $\mathrm{MN}_2(M)$ n'est pas une bonne estimation de la valeur du coût optimal. En fait, nous allons généraliser l'exemple 2.2 au cas de plusieurs canaux en procédant par récurrence sur le nombre de canaux. Nous démontrons ainsi que ce minorant est arbitrairement faible devant le coût optimal, quelque soit le nombre de canaux.

Exemple 2.4 Nous souhaitons démontrer que lorsque les messages ont des longueurs très différentes le minorant MN_2 est arbitrairement faible devant le coût de l'ordonnancement optimal.

Pour cela, nous allons exhiber un ensemble M^L de $(W + 1)$ messages, paramétré par une longueur “étalon” L, et tel que :

- la règle de la racine carré donne que le minorant $\mathrm{MN}_2(M^L)$ est constant en fonction de L,

- alors que le coût de l'ordonnancement optimal de M^L tend vers l'infini lorsque L tend vers l'infini.

Nous définissons les caractéristiques des messages $M_1^L, \dots, M_{W+1}^L$ de M^L, de coûts de diffusion nuls, de la façon suivante :

$$M_i^L \text{ a longueur } \ell_i = L^{i-1},$$
$$\text{et probabilité } p_i = \alpha/L^{i-1}, \text{ où } \alpha \text{ est choisi tel que } p_1 + \cdots + p_m = 1.$$

Notons que pour chaque message M_i^L, nous avons $p_i \ell_i = \Theta(1)$. Ainsi, la règle de la racine carré donne que la valeur de $\mathrm{MN}_2(M^L)$ est constante quand L tend vers l'infini.

Nous sommes intéressés par l'*ordre de grandeur* du coût optimal d'un ordonnancement de M^L sur W canaux, lorsque L tend vers l'infini. Aussi, nous pouvons nous restreindre à l'étude d'ordonnancements *asymptotiquement optimaux*, c'est-à-dire dont le coût est le coût optimal à un *facteur constant* en L près. Cette réduction va nous permettre d'exhiber une forme relativement simple d'ordonnancements qui sera facile à analyser.

La proposition suivante établit par récurrence que le coût optimal d'un ordonnancement de M^L est de l'ordre de $\Theta(L^{1/2^W})$ et tend donc vers l'infini lorsque L tend vers l'infini.

Lemme 2.4 *Il existe un ordonnancement asymptotiquement optimal $S_W(L)$ sur W canaux de M^L dont le coût vaut, lorsque L tend vers l'infini :*

$$\mathrm{COUT}(S_W(L)) = \Theta\left(L^{1/2^W}\right),$$

et qui est périodique de période $L^{W+1/2^W}$. Et donc, $\mathrm{OPT}(M^L) = \Theta\left(L^{1/2^W}\right)$, alors que $\mathrm{MN}_2(M^L) = \Theta(1)$.

En remarquant que $\mathrm{MN}_2(M^L) = \Theta(1)$, nous conclurons que MN_2 n'est pas fidèle.

Corollaire 2.3 (Non-fidélité de $\mathbf{MN_2}$) *Quelque soit le nombre de canaux, ll existe des ensembles de messages M dont le coût optimal est arbitrairement grand devant le minorant* $\mathrm{MN}_2(M)$.

Preuve du Lemme 2.4. Procédons par récurrence sur W. Afin d'alléger les notations, nous noterons M_i au lieu de M_i^L.

Nous avons vu, dans l'exemple 2.2 page 61, que cette propriété est vraie pour $W = 1$.

Considérons un ordonnancement S des messages sur W canaux. Remarquons tout d'abord que l'on peut supposer qu'aucune paire de diffusions de M_{W+1} ne se chevauche, quitte à multiplier l'attente moyenne des requêtes pour M_{W+1} par W (en supprimant au plus $\frac{W-1}{W}$ des diffusions de M_{W+1}). Ainsi, durant chaque diffusion de M_{W+1}, seuls les W messages $M_1, \ldots, M_W$ sont diffusés sur les $(W-1)$ canaux restants.

Par hypothèse de récurrence, il existe un ordonnancement périodique $S_{W-1}(L)$ des messages $M_1, \ldots, M_W$, qui est asymptotiquement optimal, et dont la période est $L^{W-1+1/2^{W-1}}$. Comme $L^{W-1/2^{W-1}} \ll \ell_{W+1} = L^W$, quitte à multiplier le coût par un facteur constant, nous pouvons supposer que, durant chaque diffusion de M_{W+1}, les messages $M_1, \ldots, M_W$ sont diffusés selon $L^{1-1/2^{W-1}}$ périodes de $S_{W-1}(L)$ sur les $(W-1)$ canaux restant.

Entre deux diffusions du message M_{W+1}, les W messages $M_1, \ldots, M_W$ sont diffusés sur les W canaux. Comme, diffuser continûment le message M_i sur le canal i donne un ordonnancement de coût $\Theta(1)$ (car pour tout i, $p_i \ell_i = 1$), cette façon de diffuser est optimale à un facteur constant près.

Ainsi nous avons donc démontré que le coût de notre ordonnancement initial S peut être minoré, à un facteur constant près, par le coût d'un ordonnancement qui :

- durant les diffusions de M_{W+1}, diffuse les messages $M_1, \ldots, M_W$ sur les $(W-1)$ autres canaux selon l'ordonnancement $S_{W-1}(L)$,
- et entre les diffusions de M_{W+1}, diffuse continûment chaque message M_i sur le canal i, pour $1 \leqslant i \leqslant W$.

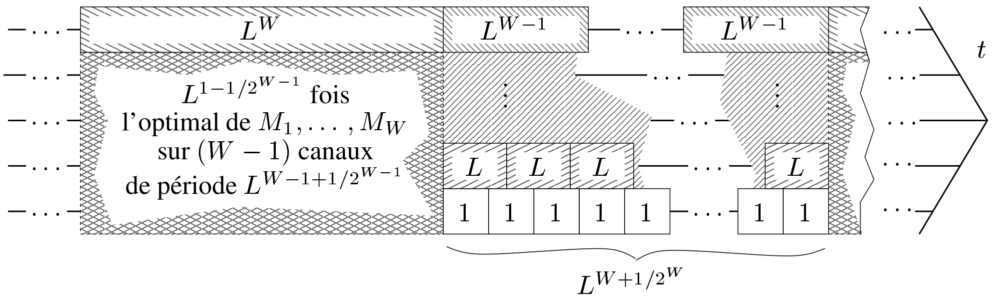


FIG. 2.6 : *L'ordonnancement asymptotiquement optimal sur W canaux des messages $M_1, \ldots, M_{W+1}$ de coûts de diffusion nuls, et tels que $\ell_i = L^{i-1}$ et $p_{i\geqslant 2} = 1/L^{i-1}$ et $p_1 = 1-(p_2+\cdots+p_{W+1})$, a un coût de $\Theta(L^{1/2^W})$.*

Si l'on découpe cet ordonnancement en blocs délimités par les dates des débuts des émissions du message M_{W+1}, le coût moyen de cet ordonnancement est une combinaison linéaire du coût de ces différents blocs. Ainsi il est minoré par le coût du meilleur bloc. En minimisant sur la longueur du bloc, nous obtenons donc un ordonnancement dont le coût est optimal à un facteur constant près.

Si x dénote la distance entre la fin de l'émission de M_{W+1} et la fin du bloc, le temps de service moyen (hors temps de téléchargement) pour le message M_{W+1} est $\frac{L^W+x}{2}$; et pour l'ensemble des messages $\{M_i\}_{1\leqslant i\leqslant W}$, le temps de service moyen vaut : le coût $\Theta(L^{1/2^{W-1}})$ de $S_{W-1}(L)$ pendant la durée L^W de la diffusion de M_{W+1} ; et $\Theta(1)$ entre deux diffusions de M_{W+1}. Ainsi le coût d'un bloc de longueur $(L^W + x)$ est (à un facteur constant près) :

$$\underbrace{\frac{1}{L^W}\cdot(L^W+x)}_{\text{Contribution de } M_{W+1}} + \underbrace{\frac{L^W}{L^W+x}\cdot L^{1/2^{W-1}} + \frac{x}{L^W+x}\cdot 1}_{\text{Contribution de } M_1,\dots,M_W}$$

Ce qui est minimisé pour $(L^W + x)^2 = L^{2W+1/2^{W-1}}$, c'est-à-dire, à un facteur constant près asymptotiquement, pour $x = L^{W+1/2^W}$. L'ordonnancement asymptotiquement optimal obtenu est illustré Figure 2.6 page précédente.

Le coût de cet ordonnancement est alors $\Theta(L^{1/2^W})$, et sa période $\Theta(L^{W+1/2^W})$. *C.Q.F.D.* □

Ainsi l'extension du minorant d'Ammar et Wong n'est pas fidèle lorsque les messages ont des longueurs très différentes. La cause en est que ce minorant ne tient pas compte du retard imposé par la diffusion des messages très longs. Nous allons voir dans la section suivante comment améliorer ce minorant pour le cas d'un canal.

2.2.2 Un minorant fidèle pour la dissémination sur un canal

Nous avons vu lors des deux précédents exemples 2.2 page 61 et 2.4 page 72, que nous devions tenir compte du retard imposé aux requêtes durant la diffusion des messages très longs. Cette observation nous a permis de proposer le minorant suivant du coût d'un ordonnancement sur un canal. Le principe en est que sur un canal, toutes les requêtes qui arrivent pendant la diffusion d'un message seront servies au plus tôt à la fin de la diffusion de ce message. Nous démontrerons Section 2.4 que ce minorant est en fait fidèle.

Lemme 2.5 (Minorant pour le cas d'un canal) *Pour tout* $0 < \alpha < 1$*, le problème de minimisation non-linéaire* MN_3 *suivant est un minorant du coût de tout ordonnancement des messages de* $M = \{M_1, \dots, M_m\}$ *sur un canal :*

$$\mathrm{MN}_3(\alpha, M)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\min_{\tau>0} \sum_{i=1}^m p_i\ell_i + \sum_{i=1}^m \left((1-\alpha)\frac{p_i\tau_i}{2} + \alpha\frac{\ell_i^2}{2\tau_i} + \frac{c_i}{\tau_i}\right) \\ \qquad\qquad \text{Sur le domaine:} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{\ell_i}{\tau_i} \leqslant 1 \end{array}\right. \tag{2.8}$$

Ce problème de minimisation admet une unique solution τ^*, telle que :

$$\tau_i^* = \sqrt{\frac{2c_i + \alpha\ell_i^2 + \lambda^*\ell_i}{(1-\alpha)p_i}}, \quad \textit{pour un certain } \lambda^* \geqslant 0, \tag{2.9}$$

tel que : si $\sum_{i=1}^m \ell_i \sqrt{(1-\alpha)p_i/(2c_i + \alpha\ell_i^2)} \leqslant 1$*, alors* $\lambda^* = 0$ *; et, sinon,* λ^* *est l'unique solution positive à :* $\sum_{i=1}^m \ell_i \sqrt{(1-\alpha)p_i/(2c_i + \alpha\ell_i^2 + \lambda^*\ell_i)} = 1$.

Note 2.2 Cet ordonnancement est le mélange de deux minorants ; lorsque $\alpha = 0$, on retrouve l'extension naturelle du minorant d'Ammar et Wong du Lemme 2.3.

Preuve. Comme précédemment, nous allons minorer le coût des ordonnancements périodiques. Soit S un ordonnancement périodique de période T sur un canal. On note n_i le nombre de diffusions du message M_i dans une période. D'après la preuve du lemme 2.3, nous avons :

$$\mathrm{TSM}(S) \geqslant \sum_{i=1}^m p_i\ell_i + \sum_{i=1}^m \frac{p_i\tau_i}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{CD}(S) = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{\tau_i} \tag{2.10}$$

Nous allons démontrer un nouveau minorant sur le temps de service moyen de S. Considérons une requête. Avec probabilité $\frac{n_i\ell_i}{T} = \ell_i/\tau_i$, elle arrive durant une diffusion du message M_i et doit donc attendre en moyenne $\ell_i/2$ la fin de cette diffusion avant d'être servie, auquel il faut ajouter le temps de téléchargement. Ainsi :

$$\mathrm{TSM}(S) \geqslant \sum_{i=1}^m \frac{\ell_i}{\tau_i}\frac{\ell_i}{2} + \sum_{j=1}^m p_j\ell_j = \sum_{i=1}^m \frac{\ell_i^2}{2\tau_i} + \sum_{j=1}^m p_j\ell_j \tag{2.11}$$

Ainsi, en combinant linéairement les deux minorants (2.10) et (2.11) sur le temps de service, nous obtenons le minorant MN_3. L'unicité et l'expression de la solution se déduisent directement du lemme 2.3 en remplaçant c_i par $(c_i + \alpha\ell_i^2/2)$ et p_i par $(1-\alpha)p_i$. □

Remarque 2.1 Ce minorant ne se généralise pas au cas de plusieurs canaux, car dans le cas de plusieurs canaux, les requêtes qui arrivent pendant la diffusion d'un message peuvent être servies sur les autres canaux.

Ce minorant nous permettra, Section 2.4, de concevoir une approximation à un facteur constant pour la dissémination de messages de longueurs non-uniformes sur un canal.

2.3 Autour de l'optimalité

2.3.1 NP-dureté

Théorème 2.1 (NP-dureté) *Le problème de décision associé au problème de la dissémination de messages sur un canal lorsque les entrées sont rationnelles et où les coûts de diffusion sont nuls, est fortement* NP*-difficile.*

Preuve. Nous allons réduire le problème fortement NP-difficile "N-partition" à celui de la dissémination sur un canal de messages de coûts de diffusion nuls, et de longueurs et probabilités rationnelles. Rappelons que le problème de décision "N-partition" admet en entrée m entiers $x_1, \ldots, x_m$ et doit décider s'il existe une partition de $\{1, \ldots, m\}$ en N sous-ensembles $I_1, \ldots, I_N$, telle que :

$$\sum_{i \in I_1} x_i = \cdots = \sum_{i \in I_N} x_i$$

Posons $\mathcal{S} =_{\text{def}} x_1 + \cdots + x_m$. Considérons l'instance suivante du problème de la dissémination de messages sur un canal : $(m+1)$ messages $M_0, M_1, \ldots, M_m$ de coûts de diffusion nuls, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rccc} M_0 : & \ell_0 = \mathcal{S}/N^2 & \text{et} & p_0 = 1/2 \\ M_{i \geqslant 1} : & \ell_i = x_i & \text{et} & p_i = \dfrac{x_i}{2\mathcal{S}} \end{array} \right. \tag{2.12}$$

Notons que toutes les entrées sont rationnelles et de tailles polynomiales. La règle de la racine carré du Corollaire 2.2 donne que la solution τ^* du minorant MN_2 vérifie pour ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{rl} M_0 : & \tau_0^* \text{ est proportionnel à } \sqrt{\ell_0/p_0} = \sqrt{2\mathcal{S}}/N \\ M_{i \geqslant 1} : & \tau_i^* \text{ est proportionnel à } \sqrt{\ell_i/p_i} = \sqrt{2\mathcal{S}} \end{array} \right.$$

Ainsi : $\tau_0^* = (\mathcal{S}/N + \ell_0)$ et $\tau_{i \geqslant 1}^* = (\mathcal{S} + N\ell_0) = N\tau_0^*$. De plus, la valeur du minorant $\mathrm{MN}_2(M)$ est :

$$\mathrm{MN}_2(M) = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2}{2\mathcal{S}} + \frac{\mathcal{S}}{4}\left(1 + \frac{1}{N}\right)^2$$

Considérons le problème de décision suivant : *"Existe-t-il un ordonnancement sur un canal des messages $M_0, M_1, \ldots, M_m$ dont le coût est inférieur ou égal à* $\left(\frac{\sum_{i=1}^m x_i^2}{2\mathcal{S}} + \frac{\mathcal{S}}{4}\left(1 + \frac{1}{N}\right)^2\right)$ *?"*. Remarquons que notre réduction est bien polynomiale.

Comme nous le verrons ci-après au théorème 2.2, il existe un ordonnancement optimal et périodique sur un canal pour toute instance de messages sans coût de diffusion. Ainsi, nous pouvons reformuler ce problème de décision sous la forme équivalente : *"Existe-t-il* *un ordonnancement* périodique *sur un canal des messages* $M_0, M_1, \dots, M_m$ *dont le coût est inférieur ou égal à* $\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}{2\mathcal{S}} + \frac{\mathcal{S}}{4}\left(1 + \frac{1}{N}\right)^2\right)$ *?"*. D'après le corollaire 2.2, la réponse à cette question est "oui" si et seulement si il existe un ordonnancement périodique S qui diffuse le message M_0 exactement tous les $\tau_0^* = (\ell_0 + \mathcal{S}/N)$, et chaque message $M_{i \geqslant 1}$ exactement tous les $\tau_i^* = (N\ell_0 + \mathcal{S})$. Un tel ordonnancement existe si et seulement si l'on peut partitionner l'ensemble des messages $M_1, \dots, M_m$ en N sous-ensembles $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_N$ tels que (*cf.* illustration Figure 2.7) :

$$\sum_{M_i \in \mathcal{M}_1} \ell_i = \cdots = \sum_{M_i \in \mathcal{M}_N} \ell_i$$

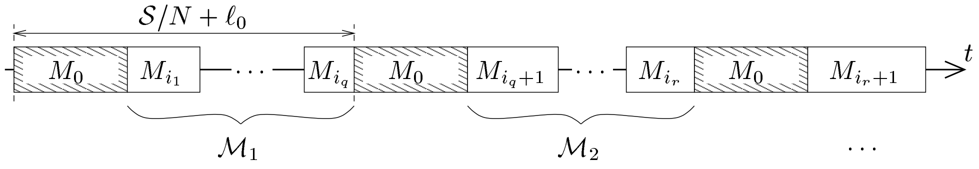


FIG. 2.7 : *Un ordonnancement qui satisfait le problème de décision.*

C.Q.F.D. $\square$

Note 2.3 Notons que nous pouvons également déduire la NP-dureté du cas des longueurs non-uniformes à partir de la NP-dureté du cas des longueurs uniformes *avec* coût de diffusion démontrée par Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber dans [BNBNS98]. Cependant, notre démonstration du théorème 2.1 n'utilise pas les coûts de diffusion mais repose uniquement sur le fait que les messages n'ont pas la même longueur.

Note 2.4 Ce résultat peut être facilement généralisé au cas de plusieurs canaux pour démontrer la NP-dureté du problème de décision : "*Existe-t-il un ordonnancement* périodique *de la dissémination sur W canaux de m messages de coûts de diffusions nuls et de longueurs et probabilités rationnelles, dont le coût est inférieur ou égal à x ?*". Il suffit d'ajouter dans la réduction précédente $(W-1)$ messages $M_{m+1}, \dots, M_{m+W-1}$ de longueurs $\ell_{i>m} = (\mathcal{S} + N\ell_0)$ et de probabilités ajustées telles que $\tau_{i>m}^* = (\mathcal{S} + N\ell_0)$.

2.3.2 Existence d'un ordonnancement optimal ?

L'hypothèse du temps continu pose problème car elle permet des optimisations qui n'étaient pas possibles avec un temps discret. En particulier comme nous l'avons vu dans l'exemple 2.1, l'existence d'un ordonnancement périodique n'est plus garantie dès que l'on ordonnance sur plus de deux canaux.

La proposition suivante est une conséquence directe du lemme de densité des ordonnancements périodiques page 65.

Proposition 2.1 (Existence d'un ordonnancement optimal) *Pour tout $W \geqslant 1$ et pour tout ensemble de messages M, il existe un ordonnancement optimal sur W canaux.*

Preuve. L'idée est de concaténer un certain nombre de périodes d'ordonnancements périodiques de plus en plus proche du coût optimal. La construction reste délicate car il faut s'assurer que le coût tend continûment vers l'optimum, sans "secousse" au point de jonction entre deux ordonnancements.

Soit (S_q) une suite d'ordonnancements périodiques telle que pour tout q, $\mathrm{COUT}(S_q) \leqslant \mathrm{OPT}(M) + 1/2^q$. Nous allons construire par récurrence un ordonnancement S et une suite croissante de dates (t_q) tels que :

$$(\forall\, q), \quad (\forall\, t \geqslant t_q), \quad \mathrm{COUT}(S, [0, t]) \leqslant \mathrm{OPT}(M) + 1/2^{q-1}$$

Un tel ordonnancement S sera donc optimal.

Commençons par remarquer que pour tout ordonnancement périodique S, il existe un point u tel que, pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{COUT}(S, [u, u+t]) \leqslant \mathrm{COUT}(S)$. En effet, soit u un maximum de la fonction continue et périodique $f : \big(x \mapsto x\,\mathrm{COUT}(S, [0, x]) - x\,\mathrm{COUT}(S)\big)$ sur une période. alors, pour $t \geqslant 0$: $f(u+t) = (u+t)\,\mathrm{COUT}(S, [0, u+t]) - (u+t)\,\mathrm{COUT}(S) \leqslant f(u) = u\,\mathrm{COUT}(S, [0, u]) - u\,\mathrm{COUT}(S)$. Or $(u+t)\,\mathrm{COUT}(S, [0, u+t]) = u\,\mathrm{COUT}(S, [0, u]) + t\,\mathrm{COUT}(S, [u, u+t])$ et donc pour tout $t \geqslant 0$, $t\,\mathrm{COUT}(S, [u, u+t]) \leqslant t\,\mathrm{COUT}(S)$.

Quitte à décaler les ordonnancements (S_q), nous pouvons donc supposer que, pour tout q :

$$(\forall\, t \geqslant 0) \quad \mathrm{COUT}(S_q, [0, t]) \leqslant \mathrm{COUT}(S_q)$$

En particulier, le temps de service moyen des requêtes qui arrivent à $t = 0$ vaut :

$$\mathrm{TS}(S_q, 0) \leqslant \mathrm{COUT}(S_q)$$

Posons $\mathcal{L} = \ell_1 + \cdots + \ell_m$, $\mathcal{C} = c_1 + \cdots + c_m$, et $\ell_{\max} = \max_i \ell_i$. Pour établir la jonction entre les différents ordonnancements, nous allons placer entre eux tous les messages. Pour cela, nous allons définir pour tout q et pour tout $t \geqslant 0$, l'ordonnancement $S_{q,t}$ de longueur $(t + \ell_{\max} + \mathcal{L})$ qui est identique à S_q sur $[0, t]$, puis entre $[t, t + \ell_{\max} + \mathcal{L}]$ diffuse chaque message une fois, dans l'ordre de la prochaine diffusion dans S_q sur le canal de cette diffusion. Ainsi toute requête qui arrive à une date $u \leqslant t$ dans $S_{q,t}$ est servie au plus tard aussi tard que dans S_q. Ainsi nous garantissons que pour tout $0 \leqslant u \leqslant t$,

$\mathrm{COUT}(S_{q,t},[0,u]) \leqslant \mathrm{COUT}(S_q,[0,u]) \leqslant \mathrm{COUT}(S_q)$. Estimons le coût de l'ordonnancement S_q sur $[t, t+\ell_{\max}+\mathcal{L}]$. Le coût des diffusions dans $[t, t+\ell_{\max}+\mathcal{L}]$ est clairement $\mathcal{C}$. Supposons que l'ordonnancement $S_{q,t}$ soit suivi d'une période de S_{q+1} après $(t+\ell_{\max}+\mathcal{L})$. Alors le temps de service pour les requêtes qui arrivent dans $[t, t+\ell_{\max}+\mathcal{L}]$ est majoré par $\ell_{\max}+\mathcal{L}+\mathrm{TS}(S_{q+1},0) \leqslant \ell_{\max}+\mathcal{L}+\mathrm{COUT}(S_{q+1})$.

Supposons maintenant que nous ayons construit S jusqu'à la date t_{q-1}, en particulier : $\mathrm{COUT}(S,[0,t_{q-1}]) \leqslant \mathrm{OPT} + 1/2^{q-2}$. Nous diffusons donc dans S, après la date t_{q-1}, l'ordonnancement $S_{q,t}$. Evaluons le coût de S sur tout intervalle $[0, t_{q-1}+u]$, en supposant, par anticipation, que $S_{q,t}$ sera suivi par l'ordonnancement S_{q+1}. Pour tout $0 \leqslant u \leqslant t$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{COUT}(S,[0,t_{q-1}+u]) &= \frac{t_{q-1}}{t_{q-1}+u}\mathrm{COUT}(S,[0,t_{q-1}]) + \frac{u}{t_{q-1}+u}\mathrm{COUT}(S_q,[0,u])\\ &\leqslant \mathrm{OPT}(M) + 1/2^{q-2}\end{aligned}$$

et pour $u \in [t, t+\ell_{\max}+\mathcal{L}]$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{COUT}(S,[0,t_{q-1}+u]) &\leqslant \frac{t_{q-1}}{t_{q-1}+u}\mathrm{COUT}(S,[0,t_{q-1}]) + \frac{t}{t_{q-1}+u}\mathrm{COUT}(S)\\ &\quad + \frac{\overbrace{(\ell_{\max}+\mathcal{L})(\ell_{\max}+\mathcal{L}+\mathcal{C}+\mathrm{TS}(S_{q+1},0))}^{=_{\mathrm{def}} A}}{t_{q-1}+u}\\ &\leqslant \mathrm{OPT}(M) + \underbrace{\frac{t_{q-1}/2^{q-2}+t/2^q+A}{t_{q-1}+t}}_{\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1/2^q}\end{aligned}$$

Ainsi pour t suffisamment grand, nous pouvons garantir que, pour tout $u \in [t, t+\ell_{\max}+\mathcal{L}]$:

$$\mathrm{COUT}(S,[t_{q-1}, t_{q-1}+u]) \leqslant \mathrm{OPT}(M) + 1/2^{q-1}$$

Il suffit alors de poser $t_q = (t+\ell_{\max}+\mathcal{L})$. La preuve se termine par induction. *C.Q.F.D.* □

Nous avons donc prouvé l'existence d'un ordonnancement optimal grâce à la simple densité des ordonnancements périodiques. L'ordonnancement obtenu n'est cependant pas descriptible en temps fini.

En fait la dissémination de messages de coûts de diffusion nuls sur un canal est un cas qui est bien mieux compris comme le démontre le théorème suivant.

Théorème 2.2 (Existence d'un ordonnancement optimal périodique) *Il existe un ordonnancement optimal périodique sur un canal de tout ensemble de messages de coûts de diffusion nuls.*

De plus, il existe un algorithme en temps fini, exponentiel, qui le construit.

En revanche, il existe des ensembles de messages de coûts de diffusion nuls qui n'admettent pas d'ordonnancement périodique optimal sur plus de deux canaux.

Preuve. Cette preuve repose sur la construction d'un graphe d'états similaire à celle du chapitre précédent. Comme les messages n'ont pas de coût de diffusion, et que la dissémination a lieu sur un canal, nous pouvons restreindre notre étude aux ordonnancements sans "trou".
Considérons donc le graphe valué infini G_M suivant. Les sommets de G_M sont les m-uplets $\vec{\sigma} = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle$ où σ_i est un nombre réel positif. Etre au sommet $\vec{\sigma}$ au temps t signifie que le début de la dernière diffusion de chaque M_i avant t a démarré à la date $(t - \sigma_i)$. Une arête e, *étiquetée* "M_i" et de *longueur* ℓ_i, relie le sommet $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_m \rangle$ au sommet $\langle \sigma_1 + \ell_i, \dots, \ell_i, \dots, \sigma_m + \ell_i \rangle$. Passer par cette arête étiquetée "M_i" entre les dates t et $(t + \ell_i)$ signifie que l'on diffuse le message M_i à la date t. Nous associons à cette arête un *coût* correspondant au surcoût induit par la diffusion en cours, que nous définissons comme au chapitre précédent comme le rétro-coût cumulé sur la période $[t, t + \ell_i]$. L'attente en arrière moyenne pour le message M_j entre t et $(t + \ell_i)$, pendant la diffusion du message M_i, vaut $(\ell_i/2 + \sigma_j)$. Ainsi :

$$\text{coût}_{G_M}(e) = c_i + \ell_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} p_j \ell_j + \frac{\ell_i}{2} + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} p_j \sigma_j \right) \tag{2.13}$$

Tout comme au chapitre précédent, nous associons à chaque chemin γ dans G_M un coût égal au coût des arêtes qui le composent, moyenné par la longueur du chemin :

$$\text{coût}_{G_M}(\gamma) = \frac{\sum_{e\in\gamma} \text{coût}_{G_M}(e)}{\sum_{e\in\gamma} \text{longueur}(e)}, \quad \text{si } \gamma \text{ est fini,}$$
$$\text{et} \quad \text{coût}_{G_M}(\gamma) = \limsup_{n\to\infty} \text{coût}_{G_M}\big((e_1, \dots, e_n)\big), \quad \text{si } \gamma = (e_i)_{i \geqslant 1}.$$

A tout chemin infini γ de G_M, nous associons un ordonnancement S_γ sans trou défini par la concaténation des étiquettes des arêtes de γ. Par construction, le coût de γ correspond au rétro-coût de S_γ. Le théorème de réversibilité page 31, que nous avons démontré pour le modèle général des longueurs non-uniformes, nous assure alors que le coût de γ est également le coût de S_γ :

$$\text{COUT}(S_\gamma) = \text{coût}_{G_M}(\gamma)$$

De plus, l'application $(\gamma \mapsto S_\gamma)$ est une surjection des chemins infinis de G_M sur les ordonnancements sans trou sur un canal des messages de M. Ainsi :

$$\mathrm{OPT}(M) = \inf_{\text{chemins infinis } \gamma} \text{coût}_{G_M}(\gamma)$$

Le lemme 2.2 nous permet de restreindre notre recherche aux ordonnancements dans lesquels la durée entre les débuts de deux diffusions consécutives de chaque message M_i est bornée par une constante $\mathcal{K}$. Nous sommes donc ramenés à la recherche d'un chemin optimal dans le sous-graphe $G_M/\mathcal{K}$ de G_M induit par les sommets $\vec{\sigma}$ tels que $\sigma_i \in [0, \mathcal{K}]$. Cependant, contrairement au cas du chapitre précédent, ce sous-graphe *n'est pas de taille finie*.

Le lemme de densité des ordonnancements périodiques page 65 nous permet cependant de restreindre notre recherche aux ordonnancements périodiques. En effet, si nous trouvons un ordonnancement S^* optimal parmi les ordonnancements périodiques, cet ordonnancement sera optimal par densité. Aussi nous sommes ramenés à rechercher un cycle optimal dans $G_M/\mathcal{K}$. Considérons un sommet $\vec{\sigma}$ d'un cycle γ de $G_M/\mathcal{K}$: chaque σ_i est une combinaison linéaire entière des longueurs des messages ℓ_j. $G_M/\mathcal{K}$ n'admet donc qu'un *nombre fini de cycles*. Il existe donc un cycle optimal γ^*. L'ordonnancement correspondant S_{γ^*} est donc un ordonnancement périodique qui est optimal.

Remarquons que nous pouvons construire γ^* en temps fini en parcourant tous les cycles de $G_M/\mathcal{K}$. Lorsque les longueurs des messages sont entières (ou rationnelles), nous pouvons utiliser l'algorithme de recherche d'un cycle de poids moyen minimal d'un graphe, décrit par Orlin, Tarjan et Young dans [YTO91]. Nous obtenons alors un cycle de coût minimal en temps exponentiel $O\big(m(2\ell_{\max}(5\mathcal{L} + \mathcal{C} + 1)/p_{\min})^{2m+1}\big)$. □

Remarque 2.2 Comme nous l'avons vu, dès que nous considérons plus de deux canaux ou la présence de coûts de diffusion, des "trous" peuvent apparaître dans l'ordonnancement optimal, or nous ne savons pas à l'heure actuelle comment traiter la présence de ces trous en temps continu.

Remarque 2.3 (Temps discret) Si l'on retourne au modèle du temps discret, et que nous supposons que les messages ont des temps de transmission entiers, alors nous pouvons facilement démontrer, à l'aide d'une construction d'un graphe similaire à celle du chapitre précédent, qu'il existe toujours un ordonnancement périodique optimal quel que soit le nombre de canaux et les coûts de diffusion.

Dans la section suivante nous proposons une approximation à un facteur constant pour la dissémination de messages quelconques sur un canal.

Algorithme 2.1 Approximation randomisée pour la dissémination sur un canal

Entrées :

1. Un ensemble de m messages $M_1, \ldots, M_m$ de probabilités de demande $(p_i)_{i=1..m}$, de temps de transmission $(\ell_i)_{i=1..m}$ et de coûts de diffusion $(c_i)_{i=1..m}$.
2. Une distribution de fréquences de diffusion $(s_i)_{i=\mathbf{0}..m}$, telle que : $s_0 + \cdots + s_m = 1$, et une longueur "fantôme" $\ell_0 > 0$.

Sortie :

Boucler

Tirer $i \in \{0, \ldots, m\}$ avec probabilité s_i.

Si $i = 0$ **alors**

Ne rien diffuser pendant une période de durée ℓ_0.

Sinon

Diffuser le message M_i.

2.4 Approximations d'un facteur constant sur un canal

A l'instar du minorant d'Ammar et Wong, notre minorant MN_3 propose des fréquences de diffusion $(1/\tau_i^*)$ pour chaque message M_i. De plus, il "recommande" également de diffuser chaque message à intervalle régulier. Nous allons donc proposer une généralisation de l'algorithme randomisé de Gecsei pour le cas des messages de longueurs uniformes. Nous dérandomisons ensuite cette heuristique pour obtenir un algorithme déterministe qui génère un ordonnancement *périodique* de période quadratique en le nombre de messages.

2.4.1 Approximation randomisée

Etant donné que le temps est continu, la génération de trous éventuels dans l'ordonnancement pose problème. Nous introduisons donc un message "fantôme" qui est sélectionné lorsque l'on ne doit rien diffuser. Sa longueur ℓ_0 est donnée en entrée de l'algorithme. Ce paramètre permet de déterminer le pas des trous : plus ℓ_0 est faible, meilleure est la précision mais, plus le nombre de tirages aléatoires lors du calcul de l'ordonnancement augmente. L'algorithme est décrit sur cette page.

Lemme 2.6 (Analyse de l'approximation randomisée) *L'algorithme 2.1 produit un ordonnancement S des messages de $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ sur un canal dont l'espérance* *du coût vérifie :*

$$\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S)] = \sum_{i=0}^{m} \frac{s_i}{\mathbb{E}_s[\ell]} \frac{\ell_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\mathbb{E}_s[\ell]}{s_i} + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{s_i}{\mathbb{E}_s[\ell]}, \tag{2.14}$$

où $\mathbb{E}_x[y] =_{\mathrm{def}} \sum_{j=0}^{m} x_j y_j$*, pour tout* (y_j) *et toute distribution* (x_j)*.*

Ainsi si l'on choisit les probabilités de diffusions en fonction de la solution du minorant, nous obtenons une approximation à un facteur constant.

Proposition 2.2 (Approximation randomisée) *Etant donné* $0 < \alpha < 1$*, si* τ^* *est la solution du problème de minimisation non-linéaire* $\mathrm{MN}_3(\alpha, M)$ *et si l'on définit* τ_0^* *par :* $\frac{\ell_0}{\tau_0^*} = 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\ell_i}{\tau_i^*}$ *et que pour tout* $i \geqslant 0$*,* $s_i = \frac{1/\tau_i^*}{\sum_{j=0}^{m} 1/\tau_j^*}$*, l'algorithme randomisé 2.1 génère un ordonnancement* S *dont le coût est borné par :*

$$\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S)] \leqslant \max\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{1-\alpha}\right) \cdot \big(\mathrm{MN}_3(\alpha, M) - \mathbb{E}_p[\ell]\big) + \frac{\ell_0}{2} \tag{2.15}$$

Pour $\alpha = 1/3$*, nous obtenons une* 3*-approximation :*

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{COUT}(S) \middle| \alpha = \frac{1}{3}\right] \leqslant 3\ \mathrm{MN}_3(\alpha = 1/3, M) + \frac{\ell_0}{2} - 3\,\mathbb{E}_p[\ell] \tag{2.16}$$

Remarque 2.4 (Résolution approchée) L'analyse de la résolution approchée du problème de minimisation MN_3 fera l'objet du chapitre 5, où cette problématique sera abordée dans le cadre général des différents minorants mis en jeu dans ce document.

L'analyse des performances de l'algorithme de la proposition 2.2 a pour conséquence immédiate que MN_3 est un minorant fidèle.

Corollaire 2.4 (Fidélité de $\mathbf{MN_3}$) *Pour tout ensemble de messages* M*, le coût optimal d'un ordonnancement sur un canal vérifie :*

$$\mathrm{OPT}(M) \leqslant 3\,\mathrm{MN}_3(\alpha = 1/3, M)$$

Comme le temps est continu et avance de façon aléatoire au gré des temps de transmission des messages sélectionnés, nous avons besoin de quelques lemmes préliminaires à l'analyse des performance de notre algorithme randomisé. Ces lemmes démontrent que les messages sont bien diffusés avec la fréquence souhaitée. Leurs démonstrations reposent sur des théorèmes du type "Loi des grands nombres" et sont proposées en annexe page 97.

Lemme 2.7 (Analyse de la fréquence de diffusion) *Soit $N(T)$ la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages aléatoires effectués par l'algorithme 2.1 page 83 pour ordonnancer les messages entre 0 et T. Alors :*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N(T)}{T} = \frac{1}{\mathbb{E}_s[\ell]}, \quad \textit{avec probabilité } 1. \tag{2.17}$$

En particulier : $\mathbb{E}\left[\limsup_{T\to\infty} \frac{N(T)}{T}\right] = \frac{1}{\mathbb{E}_s[\ell]}$.

Remarque 2.5 Ce résultat est très naturel, en ce sens qu'étant donné que la longueur moyenne des messages diffusés est $\mathbb{E}_s[\ell]$, intuitivement, il y a $T/\mathbb{E}_s[\ell]$ diffusions entre 0 et T. Cependant la valeur moyenne de l'inverse n'est pas en général l'inverse de la valeur moyenne.

Corollaire 2.5 (Fréquence des messages) *Soit $N_i(T)$ la variable aléatoire qui compte le nombre de diffusions du message M_i entre 0 et T dans l'ordonnancement généré par l'algorithme 2.1 page 83. Alors :*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N_i(T)}{T} = \frac{s_i}{\mathbb{E}_s[\ell]}, \quad \textit{avec probabilité } 1. \tag{2.18}$$

En particulier : $\mathbb{E}\left[\limsup_{T\to\infty} \frac{N_i(T)}{T}\right] = \frac{s_i}{\mathbb{E}_s[\ell]}$.

Nous pouvons à présent analyser les performances de notre algorithme randomisé.

Preuve de la Proposition 2.2 page précédente. Commençons par analyser le coût de l'ordonnancement généré par une distribution de fréquences (s_i) donnée.

Analyse du temps de service de l'ordonnancement généré. Considérons une requête pour le message M_i arrivant à la date t. Son temps de service $\mathrm{TS}(S, M_i, t)$ est la somme de deux variables aléatoires et du temps de téléchargement de M_i : $\mathrm{TS}(S, M_i, t) = Y(t) + Z_i + \ell_i$. $Y(t)$ est le temps écoulé jusqu'à la fin de la diffusion du message en cours à la date t, et Z_i est la durée de l'attente depuis $t + Y(t)$ jusqu'au début de la diffusion de M_i. Notons que $Y(t)$ est indépendant de i, et que Z_i est indépendant de t.

Calculons tout d'abord $\mathbb{E}[Y(t)]$. Une requête arrive durant l'émission d'un message M_j avec probabilité égale à $\mathbb{E}\left[\limsup_{T\to\infty} \ell_j N_j(T)/T\right] = s_j \ell_j / \mathbb{E}_s[\ell]$, et attend alors en moyenne $\ell_j/2$. Ainsi :

$$\mathbb{E}[Y(t)] = \sum_{j=\mathbf{0}}^{m} \frac{\ell_j}{2} \cdot \frac{s_j \ell_j}{\mathbb{E}_s[\ell]} \tag{2.19}$$

Ensuite, si X_n^i désigne la variable aléatoire de la longueur du $n^{\text{ième}}$ message diffusé sachant qu'il est différent de M_i, nous avons :

$$\mathbb{E}[Z_i] = \mathbb{E}\Big[\sum_{n \geqslant 0} (X_1^i + \cdots + X_n^i)(1 - s_i)^q s_i\Big]$$

Comme la série est convergente à termes positifs, nous pouvons permuter les termes et utiliser que indépendamment de n : $\mathbb{E}[X_n^i] = \sum_{j=\mathbf{0}, j \neq i}^{m} \frac{s_j}{1-s_i} \ell_j$. Nous obtenons alors que :

$$\mathbb{E}[Z_i] = \frac{\sum_{j=\mathbf{0}, j \neq i}^{m} s_j \ell_j}{s_i} \tag{2.20}$$

En sommant les équations (2.19) et (2.20) sur les requêtes pour les différents messages, nous en déduisons l'espérance du temps de service de l'ordonnancement généré :

$$\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(S)] = \sum_{i=\mathbf{0}}^{m} \frac{s_i}{\mathbb{E}_s[\ell]} \frac{\ell_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\mathbb{E}_s[\ell]}{s_i} \tag{2.21}$$

Analyse du coût de diffusion de l'ordonnancement. Par définition, $\mathrm{CD}(S, [0, T]) = \sum_{i=1}^{m} c_i N_i(T)/T$. Or, nous avons : $\mathbb{E}[\limsup_{T \to \infty} N_i(T)/T] = s_i / \mathbb{E}_s[\ell]$. Ainsi par la linéarité de l'espérance nous obtenons que :

$$\mathbb{E}[\mathrm{CD}(S)] = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{s_i}{\mathbb{E}_s[\ell]} \tag{2.22}$$

Nous obtenons donc en sommant les équations (2.21) et (2.22) l'expression de la Proposition 2.2 pour l'espérance du coût de l'ordonnancement généré par l'algorithme randomisé 2.1 page 83.

Analyse lorsque (s_i) est définie en fonction de τ^*. Comme s_i est choisi proportionnel à $(1/\tau_i^*)$ et que $\sum_{i=\mathbf{0}}^{m} \ell_i/\tau_i^* = 1$, l'expression du coût de l'ordonnancement se simplifie en :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S)] &= \sum_{i=\mathbf{0}}^{m} \frac{\ell_i^2}{2\tau_i^*} + \sum_{i=1}^{m} p_i \tau_i^* + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\tau_i^*} \\ &\leqslant \frac{\ell_0}{2} + \max\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{1-\alpha}, 1\right)\big(\mathrm{MN}_3(M) - \mathbb{E}_p[\ell]\big)\end{aligned}$$

Comme le minimum de $\Big(\alpha \mapsto \max\big(\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{1-\alpha}, 1\big)\Big)$ vaut 3 et est atteint pour $\alpha = 1/3$, nous obtenons pour $\alpha = 1/3$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathrm{COUT}(S)\middle|\alpha = \frac{1}{3}\right] &\leqslant 3\,\mathrm{MN}_3(\alpha = 1/3, M) + \frac{\ell_0}{2} - 3\,\mathbb{E}_p[\ell] \\ &\leqslant 3\,\mathrm{OPT}(M) + \frac{\ell_0}{2} - 3\,\mathbb{E}_p[\ell]\end{aligned}$$

□

2.4.2 Approximation déterministe et périodique

Nous nous proposons dans cette section de dériver un algorithme glouton à partir de l'algorithme randomisé 2.1 page 83 en utilisant le paradigme de dérandomisation gloutonne présenté page 46, que nous avons déjà utilisé pour dérandomiser l'algorithme de Gecsei au Théorème 1.4 page 48. La principale difficulté de l'analyse par rapport au cas des longueurs uniformes est que le temps est continu et avance en fonction du message sélectionné.

Definition 2.2 (Etat) A l'instar du chapitre précédent, nous définissons l'*état* $\vec{\sigma}(t, S)$ d'un ordonnancement S à la date t comme le m-uplet $\langle \sigma_1(t, S), \ldots, \sigma_m(t, S)\rangle$, où $\sigma_i(t, S)$ est le temps écoulé depuis le début de la dernière diffusion du message M_i démarrée avant t. Nous considérons que tous les messages sont fictivement ordonnancés à $t = 0$ (il est équivalent de dire qu'aucune requête n'arrive avant $t = 0$ ou encore que toutes les requêtes qui arrivent avant $t = 0$ sont servies instantanément), ainsi : pour tout i, $\sigma_i(t = 0, S) = 0$.

Remarquons que nous avons utilisé implicitement ces définitions dans la preuve du théorème d'existence d'un ordonnancement périodique optimal page 80.

L'algorithme glouton 2.2 est décrit page suivante. Remarquons que la règle de sélection est bien plus compliquée que pour le cas des longueurs uniformes (Algorithme 1.3 page 49), dont elle est une généralisation.

Algorithme 2.2 Approximation gloutonne pour la dissémination sur un canal

Entrées :

1. Un ensemble de m messages $M_1, \dots, M_m$ de probabilités de demande $(p_i)_{i=1..m}$, de temps de transmission $(\ell_i)_{i=1..m}$ et de coûts de diffusion $(c_i)_{i=1..m}$.
2. Une distribution de fréquences de diffusion $(s_i)_{i=\mathbf{0}..m}$, telle que : $s_0 + \cdots + s_m = 1$, et une longueur "fantôme" $\ell_0 > 0$.

Sortie :

Boucler

Soit $\vec{\sigma}$ l'état de l'ordonnancement à la fin de la dernière diffusion.

Choisir $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ qui minimise la quantité suivante :

$$c_i + \frac{\ell_i^2}{2} - p_i \sigma_i \frac{\mathbb{E}_s[\ell]}{s_i} - \ell_i \underbrace{\left\{ \frac{\mathbb{E}_s\left[c + \ell^2/2\right]}{\mathbb{E}_s[\ell]} - \sum_{j=1}^{m} p_j \sigma_j \right\}}_{\text{Indépendant de } i}$$

où $\mathbb{E}_s[y] =_{\text{def}} \sum_{j=0}^{m} s_j y_j$.

Si $i = 0$ **alors**

Ne rien diffuser pendant une période de durée ℓ_0.

Sinon

Diffuser le message M_i.

Lemme 2.8 (Analyse de l'approximation gloutonne) *L'algorithme glouton 2.2 page précédente génère un ordonnancement S sur un canal, dont le coût vérifie :*

$$\mathrm{COUT}(S) \leqslant \sum_{i=\mathbf{0}}^{m} \frac{s_i}{\mathbb{E}_s[\ell]} \frac{\ell_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\mathbb{E}_s[\ell]}{s_i} + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{s_i}{\mathbb{E}_s[\ell]},$$

où $\mathbb{E}_x[y] =_{\mathrm{def}} \sum_{j=0}^{m} x_j y_j$, pour tout (y_j) et toute distribution (x_j). Ainsi, étant donné $0 < \alpha < 1$, si

Cette analyse nous permettera de conclure comme précédemment que l'ordonnancement obtenu est une 3-approximation.

Proposition 2.3 (Gloutonnisation) *Etant donné $0 < \alpha < 1$, si τ^* est la solution du problème de minimisation non-linéaire $\mathrm{MN}_3(\alpha, M)$ et si l'on définit τ_0^* par : $\frac{\ell_0}{\tau_0^*} = 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\ell_i}{\tau_i^*}$ et que pour tout $i \geqslant 0$, $s_i = \frac{1/\tau_i^*}{\sum_{j=\mathbf{0}}^{m} 1/\tau_j^*}$, l'algorithme glouton 2.2 page ci-contre génère un ordonnancement S sur un canal, dont le coût est borné par :*

$$\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S)] \leqslant \max\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{1-\alpha}\right) \cdot \big(\mathrm{MN}_3(\alpha, M) - \mathbb{E}_p[\ell]\big) + \frac{\ell_0}{2} \qquad (2.23)$$

Pour $\alpha = 1/3$, nous obtenons une 3-approximation :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{COUT}(S) \middle| \alpha = \frac{1}{3}\right] \leqslant 3\ \mathrm{MN}_3(\alpha = 1/3, M) + \frac{\ell_0}{2} - 3\,\mathbb{E}_p[\ell] \qquad (2.24)$$

Preuve. Remarquons que nous n'avons qu'à prouver le lemme 2.8, la proposition découle naturellement de la preuve de la proposition 2.2.

Notons $S_G = (M_{i_n^G})_{n \geqslant 1}$ l'ordonnancement généré par l'algorithme glouton 2.2 : $M_{i_n^G}$ est le $n^{\text{ième}}$ message sélectionné par l'algorithme, où $i_n^G \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Comme au chapitre précédent, nous allons majorer le rétro-coût RCOUT après chaque sélection. Le théorème de réversibilité page 31 nous garantit qu'en passant à la limite, nous obtenons ainsi un majorant sur le coût de l'ordonnancement. Nous définissons donc le coût $\text{coût}(n, S_G)$ de la $n^{\text{ième}}$ diffusion de l'ordonnancement S_G comme la somme du coût de diffusion du message diffusé et de l'attente en arrière cumulée sur la durée de la diffusion. Ainsi nous avons, pour tout N :

$$\mathrm{RCOUT}(S_G, [0, \ell_{i_1^G} + \cdots + \ell_{i_N^G}]) = \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{coût}(n, S_G)}{\sum_{n=1}^{N} \ell_{i_n^G}}$$

et donc, lorsque N tend vers l'infini :

$$\mathrm{COUT}(S_G) = \mathrm{RCOUT}(S_G) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{coût}(n, S_G)}{\sum_{n=1}^{N} \ell_{i_n^G}}$$

Notons $\vec{\sigma}^n(S)$, le vecteur d'état à la fin de la $n^{\text{ième}}$ diffusion d'un ordonnancement S, *i.e.* tel que : si la $n^{\text{ième}}$ diffusion se termine à la date t, la dernière diffusion du message M_j a commencé à la date $(t - \sigma_j^n(S))$. Si la $n^{\text{ième}}$ diffusion de S est celle du message M_i, alors l'attente en arrière moyenne pour le message M_j durant cette diffusion vaut $(\ell_i/2 + \sigma_j^{n-1}(S))$, si $j \neq i$, et $\ell_i/2$, si $j = i$. Le coût cumulé de cette $n^{\text{ième}}$ diffusion est donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{coût}(n, S) &=_{\text{def}} c_i + \ell_i \cdot \sum_{j=1}^{m} p_j \left(\frac{\ell_i}{2} + \sigma_j^{n-1}(S) + \ell_j \right) - \ell_i p_i \sigma_i^{n-1}(S) \\
&= c_i + \frac{\ell_i^2}{2} + \ell_i \sum_{j=1, j\neq i}^{m} p_j \sigma_j^{n-1}(S) + \ell_i \, \mathbb{E}_p[\ell]
\end{aligned}$$

Nous allons utiliser une fonction potentiel $\Phi(n, S)$ qui va nous permettre de tenir compte par anticipation du coût présumé de l'attente des requêtes qui sont arrivées avant la fin de la $n^{\text{ième}}$ diffusion et qui n'ont pas encore été servies. Pour chaque message M_j, $(p_j \sigma_j^{n-1}(S))$ requêtes sont arrivées après la dernière diffusion de M_j et seraient donc servies en moyenne après une attente supplémentaire de $\mathbb{E}[Z_j] = \sum_{k=\mathbf{0}, k\neq j}^{m} s_k \ell_k / s_j$ si l'ordonnancement se poursuivait par l'algorithme randomisé (*cf.* l'équation (2.20) page 86 de la preuve de la proposition 2.2). Ainsi nous définissons notre fonction potentiel par :

$$\Phi(n, S) =_{\text{def}} \sum_{j=1}^{m} p_j \sigma_j^n(S) \frac{\sum_{k=\mathbf{0}, k\neq j}^{m} s_k \ell_k}{s_j} \tag{2.25}$$

Posons :

$$\mathrm{MOY} =_{\text{def}} \frac{1}{\mathbb{E}[\ell]} \sum_{i=0}^{m} \frac{s_i \ell_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\mathbb{E}_s[\ell]}{s_i} + \frac{1}{\mathbb{E}_s[\ell]} \sum_{i=1}^{m} s_i c_i \tag{2.26}$$

Nous allons démontrer que :

$$\sum_{n=1}^{N} \text{coût}(n, S_G) \leqslant \text{MOY} \sum_{n=1}^{N} \ell_{i_n^G}$$

Pour cela, nous allons procéder en démontrant l'inégalité pour chacun des termes. Nous introduisons une "fonction de choix" $Y(n, S)$ dont la particularité par rapport au chapitre précédent est de devoir tenir compte de la durée ℓ_i de la $n^{\text{ième}}$ diffusion dans S en cours :

$$Y(n, S) = \ell_i \, \text{MOY} - \text{coût}(n, S) + \Phi(n-1, S) - \Phi(n, S)$$

Nous allons démontrer que le $n^{\text{ième}}$ choix de l'algorithme glouton est celui qui maximise la valeur de la fonction de choix, et que celle-ci a une valeur moyenne nulle sur les différents choix. Ainsi la fonction de choix sera toujours positive et, comme $\Phi(0, S) = 0$ et pour tout n, $\Phi(n, S) \geqslant 0$, nous aurons :

$$(\forall N), \quad 0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} Y(n, S_G) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \ell_{i_n^G} \, \text{MOY} - \sum_{n=1}^{N} \text{coût}(n, S_G),$$

ce qui terminera la preuve du résultat.

Notons S_i l'ordonnancement dont les $(n-1)$ premières diffusions sont identiques à celles de S_G et dont la $n^{\text{ième}}$ est celle du message M_i, $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Alors :

$$\Phi(n-1, S_i) - \Phi(n, S_i) = -\ell_i \sum_{j=1}^{m} p_j \frac{\sum_{k=\mathbf{0}, k \neq j}^{m} s_k \ell_k}{s_j} + p_i \sigma_i^{n-1} \frac{\sum_{j=\mathbf{0}, j \neq i}^{m} s_j \ell_j}{s_i}$$

Ainsi,

$$Y(n, S_i) = \ell_i \, \text{MOY} - c_i - \frac{\ell_i^2}{2} - \ell_i \sum_{j=1}^{m} p_j \sigma_j^{n-1}(S_G) - \ell_i \sum_{j=1}^{m} p_j \frac{\mathbb{E}_s[\ell]}{s_j} + p_i \sigma_i^{n-1}(S_G) \frac{\mathbb{E}_s[\ell]}{s_i}$$

Et donc,

$$\sum_{i=1}^{m} s_i Y(n, S_i) = \mathbb{E}_s[\ell] \, \text{MOY} - \sum_{i=1}^{m} s_i c_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{s_i \ell_i^2}{2} - \sum_{j=1}^{m} p_j \frac{\mathbb{E}_s[\ell]^2}{s_j} = 0$$

Algorithme 2.3 Approximation déterministe et périodique sur un canal

Entrées : Un ensemble M de messages et un paramètre $T > 0$. On pose $\mathcal{L} = \ell_1 + \cdots + \ell_m$ et $\mathcal{C} = c_1 + \cdots + c_m$.

Calculer τ^* la solution du problème de minimisation $\mathrm{MN}_3(\alpha = 1/3, M)$.

Poser $\ell_0 := \mathbb{E}_p[\ell]$. Définir une valeur τ_0^* et une distribution $(s_i)_{i=\mathbf{0}..m}$ telles que :

$$\frac{\ell_0}{\tau_0^*} = 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\ell_i}{\tau_i^*} \quad \text{et} \quad s_i = \frac{1/\tau_i^*}{\sum_{j=\mathbf{0}}^{m} 1/\tau_i^*}$$

Ordonnancer entre les dates $t = 0$ et $t = \mathcal{L}$ tous les messages $M_1, \ldots, M_m$ les un après les autres.

Exécuter avec les paramètres ℓ_0 et (s_i), N pas de l'ordonnancement glouton jusqu'à ce que la dernière diffusion chevauche la date $t = T + \mathcal{L}$. Soit $(T' + \mathcal{L})$ la date de la fin de la dernière diffusion ($T \leqslant T' \leqslant T + \ell_{\max}$).

Trier les messages M_i par τ_i^* croissants. Ordonnancer consécutivement les diffusions des messages dans cet ordre entre les dates $t = (T' + \mathcal{L})$ et $t = (T' + 2\mathcal{L})$.

Remarquons que s'il on réécrit $Y(n, S_i)$ ainsi :

$$Y(n,S_i) = p_i\sigma_i^{n-1}(S_G)\frac{\mathbb{E}_s[\ell]}{s_i} - c_i - \frac{\ell_i^2}{2} + \ell_i \left\{ \frac{\mathbb{E}_s[\ell^2]}{2\,\mathbb{E}_s[\ell]} + \frac{\mathbb{E}_s[c]}{\mathbb{E}_s[\ell]} - \sum_{j=1}^{m} p_j\sigma_j^{n-1}(S_G) \right\},$$

on reconnaît que l'algorithme glouton sélectionne systématiquement le message M_i qui maximise cette quantité (monstrueuse), et garantit donc que pour tout n, $Y(n, S_G) \geqslant \mathbb{E}_{s_i}[Y(n, S_i)] = 0$.

C.Q.F.D. □

Il est parfois intéressant d'avoir un ordonnancement périodique fixé, par exemple, pour concevoir des stratégies de cache ou encore pour décharger le serveur du calcul de l'ordonnancement. La propriété suivante démontre que l'on peut arrêter l'algorithme glouton précédent au bout d'un nombre quadratique de pas et obtenir un ordonnancement périodique dont le coût est à un facteur constant de l'optimum. Cette propriété sera très utile au chapitre 4 pour obtenir un schéma d'approximation polynomial et déterministe.

Notre algorithme est décrit ci-dessus et illustré Figure 2.8 page ci-contre.

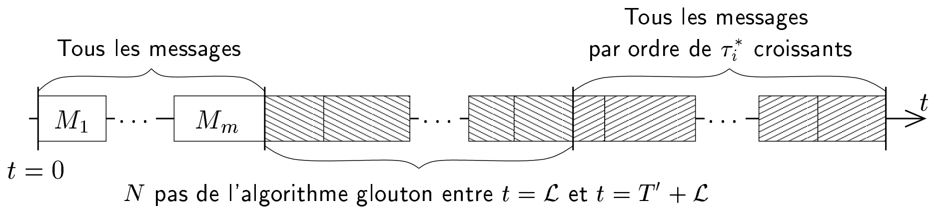


FIG. 2.8 : *L'algorithme d'approximation périodique.*

Théorème 2.3 (Ordonnancement périodique) *L'algorithme 2.3 page précédente construit en temps polynomial un ordonnancement périodique S_T de coût $\leqslant 3 \cdot \mathrm{MN}_3(\alpha = 1/3, M)$ dès que sa période T_S vérifie :*

$$T_S \geqslant \frac{4(\mathcal{L}^2 + \mathcal{C})}{5\,\mathbb{E}_p[\ell]} + \ell_{\max}$$

Nous obtenons donc en temps polynomial une 3-approximation de période quadratique en la somme des longueurs des messages et la somme des coûts de diffusion.

Preuve. L'algorithme 2.3 construit un ordonnancement périodique S_T de période $(T' + 2\mathcal{L})$. Analysons le coût de S_T. Calculons le rétro-coût cumulé sur une période, le théorème de réversibilité du coût page 31 nous permettra de conclure.

D'après l'analyse de l'algorithme glouton, Proposition 2.3, nous avons :

$$T' \,\mathrm{RCOUT}(S_T, [\mathcal{L}, T' + \mathcal{L}]) \leqslant T' \,\mathrm{MOY} + \Phi(n = 0, S_T) - \Phi(n = N, S_T) \tag{2.27}$$

où MOY et Φ sont définis respectivement aux équations (2.26) et (2.25) page 90. Notons $(T' + \mathcal{L} + t_i)$ la date de la diffusion de M_i entre $(T' + \mathcal{L})$ et $(T + 2\mathcal{L})$ dans S_T. Remarquons que comme les messages sont diffusés par τ_i^* croissants et que $\sum_{i=0}^{m} \ell_i/\tau_i^* \leqslant 1$, nous avons : $t_i \leqslant (\tau_i^* - \ell_i)$. L'attente en arrière moyenne pour M_i entre $t = (T' + \mathcal{L})$ et $t = (T' + \mathcal{L} + t_i)$ vaut $t_i/2 + \sigma_i^N(S_T)$. La somme des attentes en arrière cumulées jusqu'au date $(T' + \mathcal{L} + t_i)$ et des temps de téléchargement est majorée par :

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \underbrace{t_i}_{\leqslant \tau_i^* - \ell_i} \left(\frac{t_i}{2} + \sigma_i^N(S_T) + \ell_i \right)$$

Or, avec la définition de s_i, nous avons : $\Phi(n, S_T) = \sum_{i=1}^{m} p_i \sigma_i^n(S_T)(\tau_i^* - \ell_i)$. Ainsi, cette contribution au coût est majorée par :

$$\Phi(N, S_T) + \sum_{i=1}^{m} p_i \tau_i^* \underbrace{\left(\frac{t_i}{2} + \ell_i\right)}_{\leqslant \mathcal{L}, \text{ par construction}} \leqslant \Phi(N, S_T) + \mathcal{L}\,\mathrm{MOY} \tag{2.28}$$

Considérons à présent l'attente en arrière pour les messages M_i aux dates $t \in [T' + \mathcal{L} + t_i, T' + 2\mathcal{L}] \cup [0, \mathcal{L}]$. La somme de l'attente en arrière et du temps de téléchargement est bornée par $2\mathcal{L}$. Ainsi, la contribution cumulée sur une période est bornée par :

$$(2\mathcal{L})^2 \tag{2.29}$$

Ainsi en sommant les différentes contributions (2.27), (2.28), (2.29), et le coût de diffusion des messages sur $[0, \mathcal{L}]$ et $[T' + \mathcal{L}, T' + 2\mathcal{L}]$, nous obtenons :

$$(T' + 2\mathcal{L})\,\mathrm{RCOUT}(S') \leqslant (T' + \mathcal{L})\,\mathrm{MOY} + \Phi(n = 0, S_T) + 4\mathcal{L}^2 + 2\mathcal{C}$$

Or, $\Phi(n = 0, S_T) \leqslant \mathcal{L} \sum_{i=1}^{m} p_i \tau_i^* \leqslant \mathcal{L}\,\mathrm{MOY}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{COUT}(S_T) = \mathrm{RCOUT}(S_T) &\leqslant \mathrm{MOY} + \frac{4\mathcal{L}^2 + 2\mathcal{C}}{T' + 2\mathcal{L}} \\
&\leqslant 3\,\mathrm{MN}_3(\alpha = 1/3, M) + \frac{\mathbb{E}_p[\ell]}{2} - 3\,\mathbb{E}_p[\ell] + \frac{4\mathcal{L}^2 + 2\mathcal{C}}{T' + 2\mathcal{L}}
\end{aligned}$$

Donc dès que la période $(T' + 2\mathcal{L})$ de S_T est supérieure à $T_0 = \dfrac{4(\mathcal{L}^2 + \mathcal{C})}{5\,\mathbb{E}_p[\ell]}$, nous avons :

$$\mathrm{COUT}(S_T) \leqslant 3\,\mathrm{MN}_3(\alpha = 1/3, M) \leqslant 3\,\mathrm{OPT}(M)$$

C.Q.F.D. □

Remarque 2.6 Ce principe de l'obtention d'un ordonnancement périodique à partir d'un algorithme glouton peut naturellement être utilisé dans tous les contextes, en particulier pour les messages de longueurs uniformes. Ceci nous sera particulièrement utile au chapitre 4, lorsque nous aurons besoin de borner la période de l'ordonnancement généré.

Conclusions et Perspectives

Dans ce chapitre, nous avons donc introduit et étudié la dissémination de messages lorsque les messages n'ont pas le même temps de transmission, et que le temps est continu.

Nous avons démontré que ce problème est NP-difficile de “façon intrinsèque” c’est-à-dire sans que les coûts de diffusion soient impliqués (Théorème 2.1 page 77). Nous avons mis en évidence un certain nombre de nouvelles difficultés dues à la continuité du temps, comme l’absence d’ordonnancements périodiques optimaux dès que la dissémination a lieu sur plusieurs canaux. Pour contourner cette difficulté, nous avons utilisé une propriété de densité des ordonnancements périodiques pour obtenir des minorants sur le coût d’un ordonnancement optimal (Lemme 2.1 page 65). Le premier est l’extension naturelle du minorant qu’Ammar et Wong avaient conçu pour le cas où les messages ont le même temps de transmission dans [AW85]. Nous avons démontré que ce minorant n’est pas fidèle dès que les messages ont des longueurs très différentes, et ne peut donc être utilisé pour construire des approximations efficaces (Corrolaire 2.3 page 73). Nous avons alors proposé un nouveau minorant pour le cas de la dissémination sur un canal (Lemme 2.5 page 75). Ce nouveau minorant nous a permis de développer une approximation randomisée à un facteur 3 de l’optimal. Nous en proposons également une version dérandomisée de cette heuristique, qui produit un ordonnancement déterministe et périodique de période quadratique (Algorithme 2.3 page 92).

Le cas de plusieurs canaux reste cependant mal compris : en particulier le fait que l’on puisse faire un gain arbitraire en ajoutant un canal, ce qui est impossible pour le cas des longueurs uniformes. Notre minorant ne se généralise d’ailleurs pas au cas de plusieurs canaux. Nous avons malgré tout une heuristique en tête pour le cas de deux canaux, basée sur l’idée que nous pouvons supprimer les chevauchements entre les messages quitte à multiplier l’attente des requêtes par une constante. Ainsi, nous pouvons supposer que durant la diffusion d’un message long sur un canal, seuls des messages plus courts sont diffusés sur l’autre canal. Nous sommes ainsi ramenés à ordonnancer des “blocs de messages” que nous pouvons optimiser. Nous ne connaissons pas actuellement les performances de cette heuristique. L’analyse de ces performances ainsi que le développement d’estimations efficaces du coût optimal sur plusieurs canaux, font partie de nos perspectives à court terme.

Nous pouvons également envisager une autre approche en remarquant que l’ordonnancement fictif suggéré par l’extension naturelle du minorant d’Ammar et Wong vérifie, tout de même, toutes les contraintes hormis les contraintes de recouvrement. Or, c’est l’impossibilité de satisfaire ces dernières contraintes lorsque les messages ont des longueurs très différentes, qui interdit à tout ordonnancement d’approcher ce minorant. Cependant, nous “voyons” bien Figure 2.2 page 62 que l’on pourrait réaliser “à peu près” cet ordonnancement fictif si l’on découpait le long message L en petits paquets de taille 1, c’est-à-dire si l’on pouvait préempter les longs messages. Nous pourrions ainsi interrompre la diffusion des longs messages et permettre aux requêtes pour les petits messages d’être servies sans trop de retard. Cette approche est d’autant plus intéressante que le coût de cet ordonnancement fictif est arbitrairement faible devant le coût optimal d’un ordonnancement non préemptif, comme nous l’avons vu Corollaire 2.3 page 73. Ainsi préempter les messages pourrait nous permettre de faire un gain arbitraire sur le coût de l'ordonnancement.

Aussi, nous nous proposons d'introduire au chapitre suivant un modèle préemptif pour la dissémination de messages de longueurs non-uniformes.

Annexe : Analyse des fréquences des messages dans l'algorithme randomisé

Preuve du Lemme 2.7 page 85. Nous reprenons ici des arguments classiques de la loi des grands nombres.

Posons $\ell_{\max} = \max_{0 \leqslant i \leqslant m} \ell_i$ et $\ell_{\min} = \min_{0 \leqslant i \leqslant m} \ell_i$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des ordonnancements S pour lesquels $N(T)/T$ ne tend pas vers $1/\mathbb{E}_s[\ell]$ quand T tend vers l'infini. Nous souhaitons démontrer que :

$$\Pr \mathcal{A} = 0$$

Pour cela nous allons écrire $\mathcal{A}$ comme union dénombrable d'ensembles de probabilité nulle.

Commençons par remarquer que le message le plus court à longueur $\ell_{\min} > 0$, ainsi pour tout ordonnancement S, et tout T_0, nous avons :

$$(\forall T \in [T_0, T_0 + \ell_{\min}]) \quad N(T_0) \leqslant N(T) \leqslant N(T_0) + 1$$

Ainsi s'il on pose $T_q = q \cdot \ell_{\min}$, $N(T)/T$ admet $1/\mathbb{E}_s[\ell]$ pour limite quand T tend vers l'infini si et seulement si la suite $(N(T_q)/T_q)_{q \geqslant 0}$ admet $1/\mathbb{E}_s[\ell]$ pour limite. Nous pouvons donc redéfinir $\mathcal{A}$ comme l'ensemble des ordonnancements pour lesquels $N(T_q)/T_q$ n'admet pas $1/\mathbb{E}_s[\ell]$ pour limite.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ S : \exists \varepsilon \ \forall Q \ \exists q \geqslant Q, \left| \frac{N(T_q)}{T_q} - \frac{1}{\mathbb{E}_s[\ell]} \right| \geqslant \varepsilon \right\} \\ &= \bigcup_{\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcap_{Q \in \mathbb{N}} \bigcup_{q \geqslant Q} \overbrace{\left\{ S : \left| \frac{N(T_q)}{T_q} - \frac{1}{\mathbb{E}_s[\ell]} \right| \geqslant \varepsilon \right\}}^{=_{\mathrm{def}} \mathcal{A}_{\varepsilon,q}}}_{=_{\mathrm{def}} \mathcal{A}_{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Ainsi $\Pr \mathcal{A} \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \Pr \mathcal{A}_{\frac{1}{n}}$. Il nous suffit donc de démontrer que $\Pr \mathcal{A}_\varepsilon = 0$ pour tout n.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit X_r la variable aléatoire de la longueur du $r^{\text{ième}}$ messages diffusé. Par définition de $N(T)$, nous avons :

$$X_1 + \cdots + X_{N(T)-1} \leqslant T < X_1 + \cdots + X_{N(T)} \quad \text{et} \quad \frac{T}{\ell_{\max}} \leqslant N(T) \leqslant \frac{T}{\ell_{\min}}$$

Nous pouvons donc borner la grande déviation de $N(T)/T$ par :

$$\Pr\left\{\frac{N(T)}{T} \geqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{1}{\mathbb{E}_s[\ell]}\right\} \leqslant \Pr\Big\{X_1 + \cdots + X_{N(T)-1} \leqslant (1-\varepsilon)N(T)\,\mathbb{E}_s[\ell]\Big\}$$

Comme les X_r sont à valeur bornée l'inégalité de Chernoff donne :

$$\Pr\left\{\frac{N(T)}{T} \geqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{1}{\mathbb{E}_s[\ell]}\right\} = O\left(e^{-\varepsilon^2 N(T)/\ell_{\max}}\right) = O\left(e^{-\varepsilon^2 T/{\ell_{\max}}^2}\right)$$

Par le même argument nous avons :

$$\Pr\left\{\frac{N(T)}{T} \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{1}{\mathbb{E}_s[\ell]}\right\} = O\left(e^{-\varepsilon^2 T/{\ell_{\max}}^2}\right)$$

Nous avons donc que $\Pr\mathcal{A}_{\varepsilon,q} = O\left(e^{-\varepsilon^2 T_q/{\ell_{\max}}^2}\right)$, ce qui implique que la série $\sum_{q\geqslant Q}\Pr\mathcal{A}_{\varepsilon,q}$ est convergente pour tout ε et tend vers 0 lorsque Q tend vers l'infini. Nous en concluons que $\Pr\mathcal{A}_{\frac{1}{n}} = \lim_{Q\to\infty}\sum_{q\geqslant Q}\Pr\mathcal{A}_{\frac{1}{n},q} = 0$.

C.Q.F.D. □

CHAPITRE

3 Dissémination de messages de longueurs non-uniformes avec préemption

Introduction

Nous avons étudié au chapitre précédent l'ordonnancement pour la dissémination de messages dont les temps de transmission ne sont pas identiques. Nous y avons démontré dans les exemples 2.2 page 61 et 2.4 page 72 que le coût optimal d'un ordonnancement peut être arbitrairement grand par rapport au minorant du lemme 2.3. Nous avons vu que cette différence était dûe à l'attente des requêtes lors de la diffusion des messages *longs*.

Revenons donc sur l'exemple 2.2 : la dissémination sur un canal de deux messages 1 et L de longueurs $\ell_1 = 1$ et $\ell_L = L$ et de probabilités de diffusion $p_1 = \frac{L}{L+1}$ et $p_L = \frac{1}{L+1}$. Le minorant MN_2 du chapitre précédent propose un ordonnancement fictif "idéal" rappelé Figure 3.1 page suivante dont le coût serait $\Theta(1)$ constant en fonction de L alors que le coût optimal d'un ordonnancement "réel" est en fait $\Theta(\sqrt{L})$. Remarquons cependant Figure 3.1 page suivante que l'on pourrait presque réaliser l'ordonnancement fictif si l'on découpait le message long L en L *paquets* de longueurs 1. L'ordonnancement qui diffuse une fois sur deux le message 1 et une fois sur deux un paquet de L, a en effet un coût de $\Theta(1)$. En effet, dans cet ordonnancement, une requête demande le message 1 avec probabilité $\frac{L}{L+1}$ et attend en moyenne une unité de temps le début de l'émission de l'unique paquet du message puis une autre pour le télécharger ; et une requête demande le message long avec probabilité $\frac{1}{L+1}$ et commence à télécharger le premier paquet au bout d'une unité de temps en moyenne puis termine de télécharger le dernier paquet au bout de $(2L - 1)$ unités supplémentaires.

Nous voyons sur cet exemple que le coût de l'ordonnancement préemptif est $\Theta(1)$

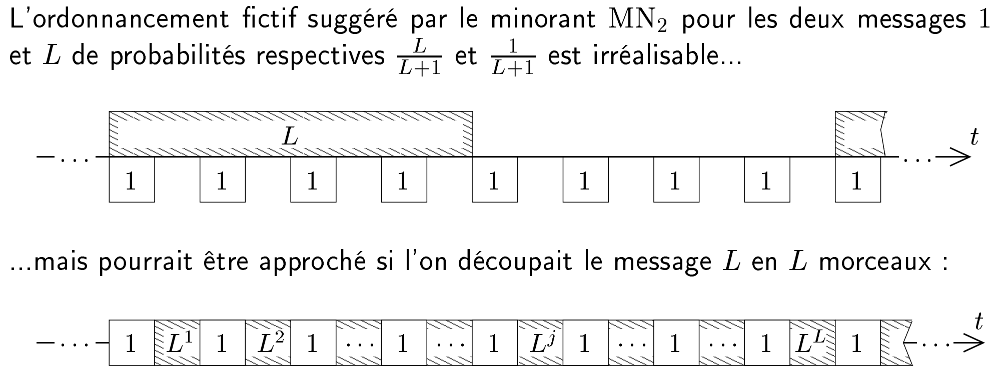


FIG. 3.1 : *Exemple de diminution du coût d'un ordonnancement par préemption.*

contre $\Theta(\sqrt{L})$ pour le meilleur ordonnancement non-preemptif. Ainsi la préemption pourrait permettre de réaliser un gain arbitraire.

Notons de plus, que la dissémination sur plusieurs canaux reste mal comprise lorsque les messages sont de longueurs différentes. Aussi préempter les messages pourrait permettre de gérer plus simplement le cas de plusieurs canaux.

Ces remarques sont à l'origine de notre définition d'un modèle préemptif dans ce chapitre.

Le modèle préemptif

Dans notre modèle, les messages sont découpés en paquets de longueur 1. Le serveur diffuse les paquets sur les canaux. Les canaux sont synchronisés et les diffusions des paquets sont ordonnancées aux dates entières. Un utilisateur intéressé par l'un des messages écoute les différents canaux et télécharge *un par un* les paquets lorsqu'ils sont diffusés sur l'un des canaux ; l'utilisateur est servi lorsqu'il a téléchargé tous les paquets du message demandé. L'ordre de téléchargement est sans importance, à l'instar des protocoles TCP/IP. Le serveur cherche à ordonnancer la diffusion des messages de sorte à minimiser d'une part le temps de service des utilisateurs et d'autre part, le coût du service que l'on définit de la même façon que précédemment. Remarquons que ce modèle est très proche des implémentations réelles de la dissémination de données, notamment de celle des serveurs vidéo.

Etudions par exemple le cas de deux messages A et B de probabilités identiques $p_A = p_B = 1/2$, de coûts de diffusion nuls et tous deux composés de deux paquets de temps de transmission 1 s : A^1 et A^2 pour A et, B^1 et B^2 pour B. Une première idée est de diffuser régulièrement les paquets de chaque message, à la même fréquence puisqu'ils sont équiprobables. Etudions le coût de l'ordonnancement périodique résultant $(A^1B^1A^2B^2)^\omega$

illustré Figure 3.2.

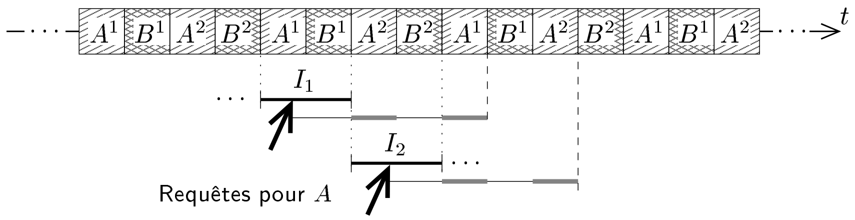


FIG. 3.2 : *L'ordonnancement $(A^1B^1A^2B^2)^\omega$. Les phases de téléchargement des requêtes sont représentées en grisé.*

Une requête demande le message A ou le message B avec la même probabilité et attend dans cet ordonnancement en moyenne le même temps. Etudions donc une requête pour A. Que la requête tombe dans les intervalles I_1 ou I_2 Figure 3.2, elle attend en moyenne 1 s jusqu'au début de la diffusion du premier paquet, puis 3 s supplémentaires jusqu'à la fin du téléchargement du second paquet. Ainsi le temps de service moyen de l'ordonnancement $(A^1B^1A^2B^2)^\omega$ est $4{,}0$ s.

Etudions cependant l'ordonnancement $(A^1A^2B^1B^2)^\omega$ illustré Figure 3.3, qui ordonnance tous les paquets de A, puis tous les paquets de B consécutivement et toujours avec la même fréquence.

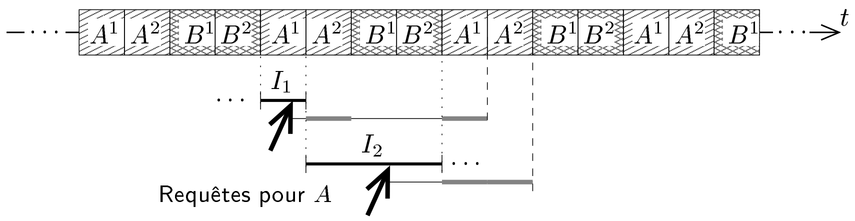


FIG. 3.3 : *L'ordonnancement $(A^1A^2B^1B^2)^\omega$. Les phases de téléchargement des requêtes sont en grisé.*

De même, les requêtes demandent le message A ou le message B avec la même probabilité, et attendent dans cet ordonnancement le même temps en moyenne. Etudions donc une requête pour A : avec probabilité $1/4$, elle arrive dans l'intervalle I_1 Figure 3.3, entre les débuts des diffusions des paquets A^1 et A^2, et attend $0{,}5$ s en moyenne le début du téléchargement de A^2 puis $4{,}0$ s supplémentaires pour télécharger le paquet A^1 ; avec probabilité $3/4$, elle arrive dans l'intervalle I_2 entre les débuts des diffusions des paquets A^2 et A^1, et attend $1{,}5$ s en moyenne le début du téléchargement du paquet A^1 puis $2{,}0$ s supplémentaires jusqu'à la fin du téléchargement du paquet A^2. Ainsi le temps de service moyen d'une requête pour A (ou B) est avec l'ordonnancement $(A^1A^2B^1B^2)^\omega$: $0{,}25 \times 4{,}5 + 0{,}75 \times 3{,}5 = 3{,}75$ s $< 4{,}0$ s !

Nous voyons donc sur cet exemple que le coût de l'ordonnancement est donc paradoxalement meilleur lorsque l'on ne préempte pas les messages. En fait, le minorant du coût optimal que nous exhiberons Section 3.2, démontrera que l'ordonnancement $(A^1A^2B^1B^2)$ est l'optimal. En général, contrairement aux modèles précédents, le minorant ne peut *pas être réalisé* en diffusant les paquets de chaque message *régulièrement* mais en les diffusant dans des créneaux consécutifs à intervalles réguliers. Nous en déduirons en particulier que ce problème est fortement NP-difficile d'une façon similaire au cas non-préemptif. Nous verrons cependant que dans le cas général il est impossible d'approcher ce minorant sans préempter, et que nous obtenons “malgré tout” une 2-approximation en diffusant les paquets régulièrement.

Notre étude...

...est basée sur une observation fondamentale : dans un ordonnancement optimal, les paquets d'un même message sont diffusés de manière cyclique (Lemme 3.1 page 104). Nous obtenons alors une expression raisonnable du coût d'un ordonnancement, puis la preuve d'existence d'un ordonnancement optimal périodique constructible en temps fini (exponentiel) (Théorème 3.3). Nous dérivons également deux minorants du coût optimal. Le minorant doit tenir compte des dépendances entre les paquets. Le premier minorant est obtenu en relaxant les contraintes de non-recouvrement et en étudiant le temps minimal de téléchargement d'un des paquets (Lemme 3.5 page 116). Ce minorant nous servira à analyser simplement les heuristiques. En revanche, pour démontrer que le problème est NP-dur, nous avons besoin d'une minoration plus précise pour laquelle nous connaissons les ordonnancements qui la réalisent, ce qui nécessite une étude plus fine des conditions d'optimalité. Ce minorant s'exprime sous forme d'un problème de minimisation plus complexe (la fonction objectif n'est plus convexe) (Lemme 3.6 page 117). Nous avons donc dû étendre la méthode de résolution proposée par Bar-Noy, Bhatia, Naor et Schieber dans [BNBNS98] (*voir* chapitre 5).

Nous proposons Section 3.4 différents algorithmes pour approcher le coût optimal. Nous procéderons de façon incrémentale en commençant par décrire un algorithme randomisé pour la dissémination sur un canal, que nous dérandomiserons en un algorithme glouton qui génère un ordonnancement périodique (Algorithme 3.3 page 132). Puis, nous généraliserons cette approche au cas de plusieurs canaux (Algorithme 3.6 page 139).

D'un point de vue pratique, le résultat principal de ce chapitre est que préempter permet de réaliser un gain arbitrairement grand sur le coût de l'ordonnancement comme dans l'exemple de la figure 3.1 : en effet les algorithmes que nous proposons Section 3.4 génèrent des ordonnancements de coûts $\Theta(\mathrm{OPT})$.

Notons enfin que ce problème modélise aussi une autre variante de la dissémination de données. En effet, nous pouvons considérer que les paquets d'un messages sont en fait des messages de longueurs unitaires réunis dans un "lot". Ainsi, le cas préemptif peut être vu comme le cas où les requêtes ne demandent plus un unique message, mais peuvent demander des lots de messages et sont servies lorsqu'elles ont téléchargé le lot complet de ces messages. Le cas préemptif étudié ici, est le cas où ces lots sont tous disjoints. En ce sens nos travaux sont une extension de l'étude de dépendances dans le cas deux messages réalisée par Bar-Noy et Shilo dans [BNS99]. L'extension de notre étude au cas où les lots ne sont pas disjoints fait partie de nos perspectives à court terme.

3.1 Définition du modèle et résultats préliminaires

3.1.1 Le modèle

Les messages. L'entrée du problème est un ensemble $M = \{M_1, \dots, M_m\}$ de m messages. Chaque message M_i est composé de ℓ_i *paquets* de longueurs unitaires $M_i^1, \dots, M_i^{\ell_i}$. Chaque paquet du message M_i a un coût de diffusion $c_i \geqslant 0$. Les utilisateurs sont caractérisés par la distribution $(p_i)_{i=1..m}$ des requêtes sur les différents messages :

$$(\forall i) \quad p_i > 0 \quad \text{et} \quad p_1 + \cdots + p_m = 1$$

L'ordonnancement. Les W canaux, tous identiques, sont synchronisés et les paquets sont émis aux dates entières. Un ordonnancement S des paquets des messages $M_1, \dots, M_m$ est formellement une suite partielle $(s_{t,w})_{t \geqslant 0, 1 \leqslant w \leqslant W}$: $s_{t,w} = (i, j)$ signifie que le $j^{\text{ième}}$ paquet du message M_i est diffusé entre les dates t et $(t+1)$ (durant le créneau $(t+1)$) sur le canal w.

Durant la diffusion, les utilisateurs se connectent suivant un processus de Poisson à un instant aléatoire (continu), se mettent à l'écoute des différents canaux, téléchargent *un par un* les différents paquets du message qu'ils demandent, lorsque ces paquets sont diffusés sur l'un des canaux, et sont servis lorsqu'ils ont téléchargé tous les paquets du message demandé. L'ordre de téléchargement des messages est sans importance, tout comme dans le protocole TCP/IP.

La fonction de coût. La fonction à minimiser combine deux quantités : le *temps de service* moyen et le *coût de diffusion*.
Tout comme dans les modèles précédents (*cf.* pages 25–27), le temps de service $\mathrm{TSM}(S)$, est la valeur asymptotique moyenne du temps de service des requêtes, où la moyenne est prise sur la distribution (p_i) d'une part et sur le temps d'autre part. Le temps de service $\mathrm{TS}(S, M_i, t)$ d'une requête pour le message M_i arrivant à la date t dans l'ordonnance-

ment S est le temps *minimum* nécessaire pour télécharger les ℓ_i paquets de M_i à partir de la date t. Ainsi,

$$\mathrm{TSM}(S) = \limsup_{T\to\infty} \sum_{i=1}^{m} p_i \int_{T_0}^{T} \frac{\mathrm{TS}(S, M_i, t)}{T - T_0}\, dt, \quad \text{pour tout } T_0. \tag{3.1}$$

Le coût de diffusion de l'ordonnancement S, noté $\mathrm{CD}(S)$, est de même que pour le cas non-préemptif, la valeur asymptotique de la moyenne sur le temps de la somme des coûts de diffusion des paquets des messages. Si $\mathrm{CD}(S, I)$ désigne le coût moyen des diffusion des paquets qui démarrent dans l'intervalle de temps I, nous avons :

$$\mathrm{CD}(S, I) = \frac{1}{|I|} \sum_{s_{t,w}=(i,j):t\in I} c_i \tag{3.2}$$

$$\text{et} \quad \mathrm{CD}(S) = \limsup_{T\to\infty} \mathrm{CD}(S, [T_0, T]), \quad \text{pour tout } T_0. \tag{3.3}$$

Le *coût* d'un ordonnancement S est alors défini comme la somme de ces deux quantités :

$$\mathrm{COUT}(S) = \mathrm{TSM}(S) + \mathrm{CD}(S) \tag{3.4}$$

3.1.2 Une observation cruciale

Le calcul du temps de service d'un ordonnancement est délicat dans le cas général. Nous allons cependant constater que nous pouvons nous restreindre à l'étude d'un certain type d'ordonnancements, les ordonnancements "paquets-cycliques", dont nous savons exprimer algébriquement le coût.

Definition 3.1 Un ordonnancement S des paquets des messages $M_1, \ldots, M_m$ est *paquets-cyclique* si chaque créneau de S diffuse au plus un paquet de chaque message M_i, et si S diffuse les paquets de chaque M_i en ordre cyclique.

Lemme 3.1 (Réduction aux ordonnancements paquets-cycliques) *Pour tout ordonnancement S des paquets des messages $M_1, \ldots, M_m$ sur W canaux, il existe un ordonnancement S' paquets-cyclique dont le coût est au plus celui de S :*

$$\mathrm{COUT}(S') \leqslant \mathrm{COUT}(S)$$

De plus, si S est périodique et n'est pas paquets-cyclique, alors S' peut être choisi périodique et tel que : $\mathrm{COUT}(S') < \mathrm{COUT}(S)$.

Preuve. Considérons un ordonnancement S et une requête pour le message M_i arrivant à une date t. Considérons les ℓ_i créneaux suivant la date t durant lesquels un ou plusieurs paquets de M_i sont diffusés. Comme un utilisateur ne peut télécharger qu'au plus un paquet par créneau de temps, le temps de réponse à cette requête est minimisé si chacun que ces ℓ_i créneaux diffuse un paquet de M_i différent. Ainsi, si nous réordonnançons de façon cyclique les paquets de chaque message M_i dans les créneaux où ils étaient diffusés de façon quelconque dans S, nous obtenons un ordonnancement paquets-cyclique S' dont le temps de service est meilleur que celui de S pour toutes les requêtes, et dont le coût de diffusion est inchangé. Ainsi : $\mathrm{COUT}(S') \leqslant \mathrm{COUT}(S)$.

De plus, si S est périodique de période T et n'est pas paquets-cyclique, alors S' est lui aussi périodique, de période bornée par $(T \cdot \prod_{i=1}^{m} \ell_i)$, et admet un coût strictement meilleur que celui de S. □

Nous ne considérerons donc plus que des ordonnancements paquets-cycliques dans ce chapitre.

3.1.3 Expression du coût et réversibilité

Afin de calculer le coût d'un ordonnancement, nous allons définir quelques notations très similaires à celles utilisées page 27 au chapitre 1.

Notations. Soit S un ordonnancement paquets-cyclique des paquets de $M_1, \ldots, M_m$ sur W canaux, et I un intervalle de temps borné. Pour chaque message M_i (*cf.* illustration Figure 3.4) :

- n_i est le nombre de diffusions de paquets de M_i qui commencent dans I.
- t_1^i est le temps écoulé depuis le début de I jusqu'au début de la première diffusion d'un paquet de M_i. Et, pour $j \geqslant 2$, t_j^i est la longueur de l'intervalle de temps entre les débuts des $(j-1)^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ diffusions d'un paquet de M_i après le début de I.
- Δt^i est la longueur de l'intervalle entre la fin de I et le début de la première diffusion d'un paquet de M_i après I.

Avec ces notations, nous obtenons l'expression suivante pour le coût de tout ordonnancement paquets-cyclique S :

Lemme 3.2 (Expression algébrique du coût) *Le temps de service d'un ordonnancement S des paquets des messages $M_1, \ldots, M_m$ sur un intervalle de temps I borné est,*

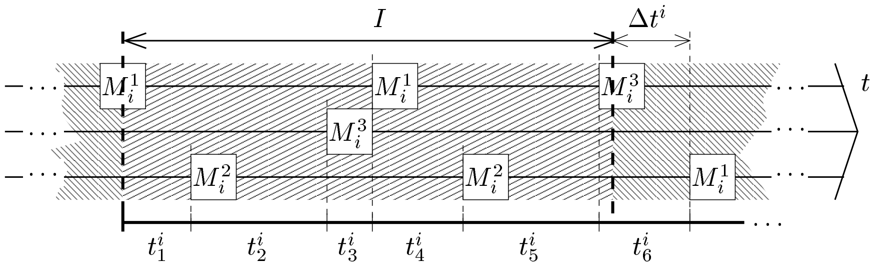


FIG. 3.4 : *Illustration des notations de la section 3.1.3. Ici, on compte $n_i = 5$ diffusions des $\ell_i = 3$ paquets de M_i qui démarrent dans I.*

avec les notations définies ci-dessus :

$$\mathrm{TSM}(S,I) = 1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \left\{ \sum_{j=1}^{n_i+1} \frac{t_j^i}{|I|} \left(\frac{t_j^i}{2} + \left(t_{j+1}^i + \cdots + t_{j+\ell_i-1}^i\right) \right) - \frac{\Delta t^i}{|I|} \left(\frac{\Delta t^i}{2} + \left(t_{n_i+2}^i + \cdots + t_{n_i+\ell_i}^i\right) \right) \right\} \tag{3.5}$$

Et, son coût de diffusion vaut :

$$\mathrm{CD}(S,I) = \frac{1}{|I|} \sum_{i=1}^{m} n_i c_i \tag{3.6}$$

Nous verrons à la remarque 3.2 page ci-contre comment interpréter graphiquement ces expressions.

Preuve du Lemme 3.2. Considérons une requête pour le message M_i arrivant dans I. Pour $j \leqslant n_i$, avec probabilité $t_j^i/|I|$, elle tombe uniformément dans l'intervalle de longueur t_j^i, attend le début de la diffusion d'un premier paquet du message en moyenne $t_j^i/2$ temps, puis termine de télécharger les ℓ_i paquets au bout d'une durée $(t_{j+1}^i + \cdots + t_{j+\ell_i-1}^i + 1)$. Avec probabilité $\frac{t_{n_i+1}^i - \Delta t^i}{|I|}$, elle tombe dans le dernier intervalle et attend le début de la diffusion d'un premier paquet du message en moyenne $\frac{t_{n_i+1}^i + \Delta t^i}{2}$ temps, puis termine de télécharger les ℓ_i paquets de M_i au bout d'une durée $(t_{n_i+2}^i + \cdots + t_{n_i+\ell_i}^i + 1)$. En sommant sur les différents intervalles puis sur les différentes requêtes, on obtient l'expression (3.5).

Par définition, le coût de diffusion est la somme des coûts de diffusion des messages dont l'émission commence dans I, divisée par $|I|$; d'où l'expression (3.6). □

Remarque 3.1 Nous retrouvons bien la même expression du coût qu'au chapitre 1 lorsque les messages sont tous composés d'un unique paquet.

Remarque 3.2 (Représentation graphique du coût) Le temps de service de chaque message M_i, cumulé sur un intervalle de temps, d'un ordonnancement paquets-cyclique peut se représenter graphiquement comme la somme des surfaces de trapèzes rectangle délimités par les dates de diffusions des différents paquets des messages comme le montre la figure 3.5.

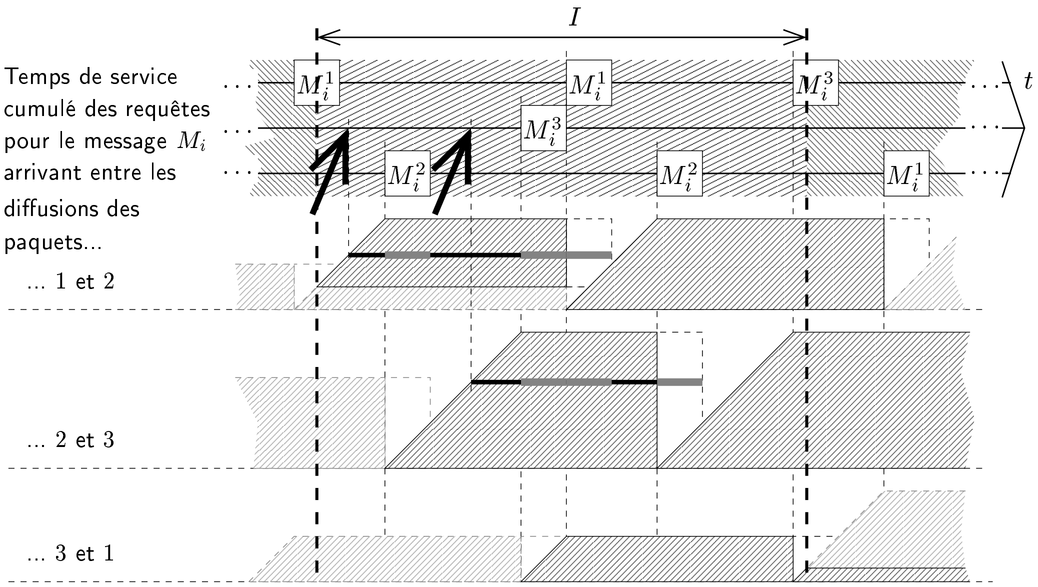


FIG. 3.5 : *Représentation par des trapèzes rectangle du temps de service d'un message. Les temps de service de deux requêtes sont illustrés par deux traits noirs et gris, les parties grises correspondent aux phases de téléchargement.*

De même que pour le cas non-préemptif, l'expression du coût se simplifie lorsque l'ordonnancement est périodique :

Corollaire 3.1 (Coût des ordonnancements périodiques) *Soit S un ordonnancement paquets-cyclique et périodique de période T des paquets des messages $M_1, \dots, M_m$. Pour tout i, on note ν_i le nombre de diffusions du* message *M_i dans une période, et $(t_j^i)_{1 \leqslant j \leqslant \nu_i \ell_i}$ la durée de l'intervalle délimité par les débuts des $(j-1)^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ diffusions d'un* paquet *de M_i. Alors :*

$$\mathrm{TSM}(S) = 1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{\nu_i \ell_i} \frac{t_j^i}{T} \left\{ \frac{t_j^i}{2} + \left(t_{j+1}^i + \cdots + t_{j+\ell_i-1}^i \right) \right\} \tag{3.7}$$

$$\textit{et} \quad \mathrm{CD}(S) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{m} c_i \nu_i \ell_i, \tag{3.8}$$

où les indices sont calculés modulo $(\nu_i \ell_i)$.

Nous allons définir également le rétro-coût d'un ordonnancement de la même manière que dans le cas des messages non préemptés page 30. Nous verrons au théorème 3.1 que de même que pour le cas préemptif, le coût et le rétro-coût d'un ordonnancement définissent la même quantité asymptotique.

Definition 3.2 (Rétro-coût) Pour un ordonnancement paquets-cyclique S des paquets de $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$, nous définissons l'*attente en arrière* à la date t pour le message M_i, notée comme précédemment $\mathrm{AR}(S, M_i, t)$, comme le temps écoulé depuis le début de la ${\ell_i}^{\text{ième}}$ dernière diffusion d'un paquet de M_i dans S.

Ainsi, si t_i est la date du début de la ${\ell_i}^{\text{ième}}$ dernière diffusion d'un paquet de M_i démarrée avant t, nous avons :

$$\mathrm{AR}(S, M_i, t) = t - t_i \tag{3.9}$$

Nous considérons de même que tous les paquets sont fictivement diffusés à $t = 0$. L'équivalent de cette hypothèse pour la définition du temps service est qu'aucune requête n'arrive avant la date $t = 0$. Ainsi, s'il y a moins de ℓ_i diffusions des paquets de M_i avant la date t, nous avons que : $\mathrm{AR}(S, M_i, t) = t$.

De la même façon que précédemment nous définissons alors l'attente en arrière moyenne $\mathrm{ARM}(S)$ en prenant la valeur asymptotique de la moyenne sur la distribution des requêtes d'une part et sur le temps d'autre part :

$$\mathrm{ARM}(S) = \limsup_{T \to \infty} \sum_{i=1}^{m} p_i \int_{T_0}^{T} \frac{\mathrm{AR}(S, M_i, t)}{T - T_0}\, dt, \quad \text{pour tout } T_0. \tag{3.10}$$

Le *rétro-coût* d'un ordonnancement est alors défini comme la somme de l'attente en arrière moyenne, du coût de diffusion moyen et du temps de téléchargement moyen du dernier paquet :

$$\mathrm{RCOUT} = \mathrm{ARM} + \mathrm{CD} + 1 \tag{3.11}$$

Théorème 3.1 (Réversibilité du coût) *Pour tout ordonnancement paquets-cyclique S des paquets de $M_1, \dots, M_m$, nous avons :*

$$\mathrm{TSM}(S) = \mathrm{ARM}(S) + 1 \tag{3.12}$$

et donc : $\quad \mathrm{COUT}(S) = \mathrm{RCOUT}(S) + 1.$

Preuve. La preuve est, disons-le franchement, pénible mais nécessaire. Aussi, nous allons commencer par le cas des ordonnancements périodiques.

Le cas d'un ordonnancement S paquets-cyclique et périodique. En utilisant les notations du corollaire 3.1 page 107, nous avons les expressions suivantes pour le temps de service et l'attente en arrière moyenne pour chaque message M_i :

$$\mathrm{TSM}(S, M_i) = 1 + \sum_{j=1}^{\nu_i \ell_i} \frac{t_j^i}{T} \left\{ \frac{t_j^i}{2} + \left(t_{j+1}^i + \cdots + t_{j+\ell_i-1}^i\right) \right\}$$

$$\text{et} \quad \mathrm{ARM}(S, M_i) = \sum_{j=1}^{\nu_i \ell_i} \frac{t_j^i}{T} \left\{ \frac{t_j^i}{2} + \left(t_{j-1}^i + \cdots + t_{j-\ell_i+1}^i\right) \right\}$$

où les indices sont calculés modulo $(\nu_i \ell_i)$.

Remarquons que l'on peut réécrire l'attente en arrière moyenne de S de la façon suivante :

$$\mathrm{ARM}(S, M_i) = \sum_{j=1}^{\nu_i \ell_i} \frac{(t_j^i)^2}{2T} + \sum_{j=1}^{\nu_i \ell_i} \sum_{k=j-\ell_i+1}^{j-1} \frac{t_j^i t_k^i}{T}$$

Et comme la suite $(t_j^i)_j$ est périodique de période $(\nu_i \ell_i)$, et que :

$$\left\{(j,k) \mod (\nu_i \ell_i) : k \in [j-\ell_i+1, j-1]\right\} = \left\{(j,k) \mod (\nu_i \ell_i) : j \in [k+1, k+\ell_i-1]\right\}$$

Nous avons :

$$\mathrm{ARM}(S, M_i) = \sum_{j=1}^{\nu_i \ell_i} \frac{(t_j^i)^2}{2T} + \sum_{k=1}^{\nu_i \ell_i} \sum_{j=k+1}^{k+\ell_i-1} \frac{t_j^i \cdot t_k^i}{T} = \mathrm{TSM}(S, M_i) - 1$$

Nous avons donc le résultat pour les ordonnancements périodiques.

Remarque 3.3 Remarquons que de même que dans le cas non-préemptif, on peut représenter graphiquement l'attente en arrière instantanée à la date t comme la surface de la section sous la date t des trapèzes Figure 3.5 page 107. L'égalité dans le cas des ordonnancement périodiques est donc aussi la conséquence de cette observation.

Etudions à présent le cas d'un ordonnancement paquets-cyclique quelconque.

Le cas général d'un ordonnancement S paquets-cyclique. De même que pour le cas préemptif nous allons procéder en plusieurs étapes. Nous allons tout d'abord démontrer que le temps de service est toujours supérieur à l'attente en arrière moyenne sur tout intervalle $[0, T]$. De même que pour le cas préemptif, les deux quantités oscillent de façon déphasée et, nous majorerons donc le temps de service par la valeur de crête suivante de l'attente en arrière moyenne.

Soit $T > 0$. Reprenons les notations du Lemme 3.2 page 105 :

- $n_i(T)$ est le nombre de diffusions d'un paquet de M_i qui démarrent dans $[0, T]$.
- t_j^i est la longueur de l'intervalle de temps délimité par les débuts des $(j-1)^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ diffusion de M_i depuis $t = 0$. Nous posons $t_j^i = 0$ pour $j \leqslant 0$, conformément à la définition du rétro-coût page 108.
- $\Delta t^i(T)$ est la longueur de l'intervalle de temps entre la date T et le début de la diffusion d'un paquet de M_i immédiatement après la date T.

L'expression de l'attente en arrière pour le message M_i sur l'intervalle $[0, T]$ est alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ARM}(S, M_i, [0,T]) &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{AR}(S, M_i, t)\ dt \\
&= \sum_{j=1}^{n_i(T)} \frac{t_j^i}{T}\left(\frac{t_j^i}{2} + t_{j-1}^i + \cdots + t_{j-\ell_i+1}^i\right) \\
&\quad + \frac{t_{n_i(T)+1}^i - \Delta t^i(T)}{T}\left(\frac{t_{n_i(T)+1}^i - \Delta t^i(T)}{2} + t_{n_i(T)}^i + \cdots + t_{n_i(T)-\ell_i+2}^i\right)
\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ARM}(S, M_i, [0,T]) = \sum_{j=1}^{n_i(T)+1} \frac{(t_j^i)^2}{2T} + \frac{\Delta t^i(T)^2}{2T} + \sum_{j=1}^{n_i(T)+1} \sum_{k=j-\ell_i+1}^{j-1} \frac{t_j^i \cdot t_k^i}{T} \\
- \sum_{k=n_i(T)-\ell_i+2}^{n_i(T)+1} \frac{\Delta t^i(T) \cdot t_k^i}{T}
\end{aligned}$$

D'où, en permutant les indices j et k :

$$\mathrm{ARM}(S, M_i, [0,T]) = \sum_{j=1}^{n_i(T)+1} \frac{(t_j^i)^2}{2T} + \frac{\Delta t^i(T)^2}{2T} + \sum_{k=2-\ell_i}^{n_i(T)} \sum_{j=\max(1,k+1)}^{\min(n_i(T)+1,k+\ell_i-1)} \frac{t_j^i \cdot t_k^i}{T} - \sum_{k=n_i(T)-\ell_i+2}^{n_i(T)+1} \frac{\Delta t^i(T) \cdot t_k^i}{T}$$

Or, comme $t_k^i = 0$ pour $k \leqslant 0$, l'expression se "simplifie" en :

$$\mathrm{ARM}(S, M_i, [0,T]) = \sum_{j=1}^{n_i(T)+1} \frac{(t_j^i)^2}{2T} + \frac{\Delta t^i(T)^2}{2T} + \sum_{k=1}^{n_i(T)} \sum_{j=k+1}^{\min(n_i(T)+1,k+\ell_i-1)} \frac{t_j^i \cdot t_k^i}{T} - \sum_{k=n_i(T)-\ell_i+2}^{n_i(T)+1} \frac{\Delta t^i(T) \cdot t_k^i}{T}$$

D'autre part le temps de service des requêtes pour M_i arrivant dans l'intervalle $[0,T]$ est :

$$\mathrm{TSM}(S, M_i, [0,T]) = 1 + \sum_{j=1}^{n_i(T)+1} \frac{(t_j^i)^2}{2T} - \frac{\Delta t^i(T)^2}{2T} + \sum_{j=1}^{n_i(T)+1} \sum_{k=j+1}^{j+\ell_i-1} \frac{t_j^i \cdot t_k^i}{T} - \sum_{k=n_i(T)+2}^{n_i(T)+\ell_i} \frac{\Delta t^i(T) \cdot t_k^i}{T}$$

Ainsi, nous avons :

$$\mathrm{TSM}(S, M_i, [0,T]) - \mathrm{ARM}(S, M_i, [0,T]) - 1 = \left(\frac{\Delta t^i(T)}{T} \left(t_{n_i(T)+1} - \Delta t^i(T) + \sum_{k=n_i(T)-\ell_i+2}^{n_i(T)} t_k^i \right) + \frac{t_{n_i(T)+1}^i - \Delta t^i(T)}{T} \sum_{k=n_i(T)+2}^{n_i(T)+\ell_i} t_k^i + \sum_{j=n_i(T)-\ell_i+3}^{n_i(T)} \sum_{k=n_i(T)+2}^{j+\ell_i-1} \frac{t_j^i \cdot t_k^i}{T} \right) \geqslant 0$$

Remarquons que lorsque $\ell_i = 1$, nous obtenons bien l'expression du cas non-préemptif page 33.

Ainsi pour tout $T \geqslant 0$, $\mathrm{ARM}(S,[0,T]) + 1 \leqslant \mathrm{TSM}(S,[0,T])$, et donc à la limite : $\mathrm{ARM}(S) + 1 \leqslant \mathrm{TSM}(S)$.

Nous en concluons que si $\mathrm{ARM}(S,[0,T]) = \infty$, alors $\mathrm{TSM}(S) = \infty = \mathrm{ARM}(S)$ et nous avons fini.

Supposons à présent que $\mathrm{ARM}(S) < \infty$. Nous allons procéder comme dans la preuve du Théorème 1.1 page 31. Nous allons commencer par montrer que les t_j^i sont bornés en T, puis nous allons majorer la valeur de $\mathrm{TSM}(S,[0,T])$ par $\mathrm{ARM}(S,T')$ pour un certain T' proche de T.

Comme $\mathrm{ARM}(S) < \infty$, il existe une constante κ telle que pour tout T, $\mathrm{ARM}(S,[0,T]) \leqslant \kappa$. En particulier, pour tout T et tout i, nous avons :

$$(t^i_{n_i(T)+1} - \Delta t^i(T))^2 \leqslant \frac{2\kappa}{p_i} \cdot T$$

ainsi, en considérant la date $T_0 = T + \Delta t^i(T)$ telle que $\Delta t^i(T_0) = 0$, nous obtenons que pour tout T : $(t^i_{n_i(T)+1})^2 \leqslant \frac{2\kappa}{p_i} \cdot (T + t^i_{n_i(T)+1})$. Nous en concluons de même que dans le cas non-préemptif, que pour tout i :

$$t^i_{n_i(T)+1} = O(\sqrt{T}) \quad \text{et} \quad \Delta t^i(T) = O(\sqrt{T})$$

La preuve se termine de façon similaire en bornant la valeur de $\mathrm{TSM}(S,[0,T])$ par un terme de la forme $(1+o(1))\,\mathrm{ARM}(S,[0,T+o(T)])$. Pour tout i, posons $T_i = (T + \Delta t^i(T) + t^i_{n_i(T)+2} + \cdots + t^i_{n_i(T)+\ell_i+1})$, tel que $n_i(T_i) = n_i(T) + \ell_i + 1$. Notons que $T_i = T + O(\sqrt{T})$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TSM}(S,[0,T]) &\leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i \left(1 + \sum_{j=1}^{n_i(T)+1} \frac{(t_j^i)^2}{2T} + \sum_{j=1}^{n_i(T)+1} \sum_{k=j+1}^{j+\ell_i-1} \frac{t_j^i \cdot t_k^i}{T}\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i \left(1 + \sum_{j=1}^{n_i(T)+\ell_i+1} \frac{(t_j^i)^2}{2T} + \sum_{k=1}^{n_i(T)+\ell_i} \sum_{j=k+1}^{\min(n_i(T)+\ell_i+1,k+\ell_i-1)} \frac{t_j^i \cdot t_k^i}{T}\right) \\
&\leqslant \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant m} T_i}{T} \cdot \left(\mathrm{ARM}(S,[0,\max_{1\leqslant i\leqslant m} T_i]) + 1\right) \\
&\leqslant \left(1 + O(1/\sqrt{T})\right) \cdot \left(\mathrm{ARM}(S,[0,T+O(\sqrt{T})] + 1)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi en prenant les limites supérieures, lorsque T tend vers l'infini :

$$\mathrm{ARM}(S) + 1 \leqslant \mathrm{TSM}(S) \leqslant \mathrm{ARM}(S) + 1$$

C.Q.F.D. □

Le théorème de réversibilité du coût nous sera utile à plusieurs reprises par la suite. Tout d'abord pour établir l'existence d'un ordonnancement périodique optimal Section 3.3, puis pour l'analyse des algorithmes gloutons Section 3.4.

3.1.4 Réductions

Les deux lemmes suivants sont les équivalents des lemmes 2.1 et 2.2 du chapitre précédent. Ils nous serviront de la même façon qu'au chapitre précédent à restreindre l'espace d'étude.

Lemme 3.3 (Densité des ordonnancements périodiques) *Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout ordonnancement S des paquets de $M_1, \ldots, M_m$ sur W canaux, il existe un ordonnancement périodique S' de ces paquets dont le coût vérifie :*

$$\mathrm{COUT}(S') \leqslant \mathrm{COUT}(S) + \varepsilon$$

Preuve. La preuve est très similaire à celle donnée au lemme 2.1 page 65 à l'exception que nous considérons les paquets des messages et non les messages.

On peut supposer sans perte de généralité que S est paquets-cyclique. Par définition du coût de S, soit T tel que pour tout $t \geqslant T$: $\mathrm{COUT}(S, [0,t]) \leqslant \mathrm{COUT}(S) + \varepsilon/2$. Posons $\mathcal{L} =_{\text{def}} \ell_1 + \ldots + \ell_m$. Pour t entier, soit S_t l'ordonnancement périodique de période $(t+\mathcal{L})$, qui est identique à S sur $[0,t]$, puis qui diffuse entre $[t, t+\mathcal{L}]$ chaque paquet des m messages une fois, par ordre de première apparition après la date t, sur le canal de cette apparition. Par construction, les requêtes qui arrivent entre 0 et t, sont servies dans S_t au pire aussi tard que dans S. Et, les requêtes qui arrivent entre t et $(t + \mathcal{L})$, sont servies au pire au bout de $(\mathcal{L} + \mathrm{TS}(S, 0))$ (*Rappel :* $\mathrm{TS}(S, u)$ est le temps de service moyen d'une requête arrivant à la date u). Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{COUT}(S_t) &= \frac{t}{t+\mathcal{L}} \mathrm{COUT}(S_t, [0,t]) + \frac{\mathcal{L}}{t+\mathcal{L}} \mathrm{COUT}(S_t, [t, t+\mathcal{L}]) \\ &\leqslant \mathrm{COUT}(S) + \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{\mathcal{L}(\mathcal{L} + \mathrm{TS}(S,0))}{t+\mathcal{L}}}_{O(1/t)}\end{aligned}$$

Ainsi, pour t suffisamment grand, nous obtenons le résultat annoncé. □

Le lemme suivant est l'équivalent pour le modèle préemptif du lemme 1.5 du cas des longueurs uniformes et du lemme 2.2 du cas non-préemptif.

Lemme 3.4 (Intervalle maximal) *Pour tout ordonnancement périodique S des paquets de $M_1, \ldots, M_m$ sur W canaux, il existe un ordonnancement périodique S' de ces paquets* *dont le coût est au plus celui de S :* $\mathrm{COUT}(S') \leqslant \mathrm{COUT}(S)$*, et tel que pour tout i, le temps écoulé entre les débuts de deux diffusions consécutives du message M_i soit borné par une constante K_i, donnée par :*

$$K_i = \frac{1}{p_i}\left((2\mathcal{L}+1)^2 + c_i\right), \quad \text{avec } \mathcal{L} = \ell_1 + \cdots + \ell_m. \tag{3.13}$$

Preuve. Nous pouvons considérer sans perte de généralité que S est paquets-cyclique. Supposons qu'il existe un message M_i tel qu'aucun paquet de M_i ne soit diffusé dans S pendant un intervalle de temps I de longueur $\geqslant K_i$. Etudions deux cas :

1. *Il n'existe pas de créneau de diffusion libre dans l'ordonnancement S durant I.* Comme $K_i \geqslant (2\mathcal{L}+1)$, il existe un message M_j et un intervalle de temps J inclus dans I de longueur $|J| \leqslant (2\mathcal{L}+1)$, tels que : $(2\ell_j+1)$ diffusions des paquets de M_j sont ordonnancées dans J.

   Considérons alors l'ordonnancement périodique S' construit à partir de S en remplaçant la $(j+1)^{\text{ième}}$ diffusion d'un paquet de M_j dans l'intervalle J par la diffusion d'un paquet de M_i. Afin que S' reste paquets-cyclique, la période de S' est multipliée par $(\ell_i\ell_j)$ et la substitution est effectuée en parallèle dans chacune des copies de l'intervalle J.

   Remarquons que contrairement au cas du chapitre précédent où les messages n'avaient pas la même longueur, seuls les contributions au coût des messages M_i et M_j sont modifiées de S à S'.

   La variation du coût de diffusion est exactement :

   $$c_i - c_j \tag{3.14}$$

   Etudions la variation $\Delta(T\,\mathrm{TSM}(S, M_j))$ du temps de service des requêtes pour M_j cumulé sur une période de S. Notons $(u_k)_{k=1..2\ell_j}$ les temps écoulés entre les débuts des $k^{\text{ième}}$ et $(k+1)^{\text{ième}}$ diffusions des paquets de M_j dans J. Le temps de service d'une requête arrivant avant la première diffusion d'un paquet de M_j dans J est inchangé, de même que celui d'une requête arrivant après le point d'insertion. Ainsi, nous ne considérons que les requêtes pour M_j qui arrivent dans les intervalles de longueurs u_k avec $k = 1..\ell_j$. Une requête arrive dans l'intervalle de longueur u_k avec probabilité (u_k/T), et son service est alors retardé de $u_{k+\ell_j}$ exactement de S à S' puisqu'il faut attendre une diffusion d'un paquet de M_j supplémentaire. Ainsi :

   $$\Delta(T\,\mathrm{TSM}(S, M_j)) = \sum_{k=1}^{\ell_j} u_k u_{k+\ell_j},$$

   que nous pouvons borner de la façon suivante en utilisant l'inégalité de Cauchy-

Schwarz :

$$\Delta(T\,\mathrm{TSM}(S, M_j)) \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\ell_j} u_k^2}\sqrt{\sum_{k=\ell_j+1}^{2\ell_j} u_k^2} \leqslant (2\mathcal{L}+1)^2 \qquad (3.15)$$

De même, si l'on note de même $(v_k)_{k=1..2\ell_i}$ les longueurs des intervalles délimités par les débuts des ℓ_i diffusions d'un paquet de M_i précédant le point d'insertion, le point d'insertion et les débuts des ℓ_i diffusions suivant le point d'insertion, alors nous obtenons le résultat opposé pour le temps de service cumulé des requêtes pour M_i :

$$\Delta(T\,\mathrm{TSM}(S, M_i)) = -\sum_{k=1}^{\ell_i} u_k u_{k+\ell_i},$$

que nous pouvons majorer de la façon suivante :

$$\Delta(T\,\mathrm{TSM}(S, M_i)) \leqslant -u_{\ell_i+1} - u_{\ell_i} \leqslant -K_i \qquad (3.16)$$

Nous obtenons ainsi la borne suivante sur la variation du coût cumulé sur une période de S à S' en sommant les équations (3.14), (3.15) et (3.16) :

$$p_j(2\mathcal{L}+1)^2 - c_j - p_i K_i + c_i \leqslant 0, \quad \text{par construction de } K_i.$$

Le coût de S' est donc bien plus faible que celui de S.

2. *S'il existe un créneau libre dans l'ordonnancement S durant I.* On construit S' à partir de S en diffusant dans ce créneau vide un paquet de M_i (la période de S' est multipliée par ℓ_i afin que S' reste paquets-cyclique). La démarche ci-dessus implique a fortiori que le coût de S' est meilleur que celui de S.

Nous terminons la preuve en itérant cette stratégie sur tous les intervalles qui posent problèmes. La période de l'ordonnancement S' résultant est alors au plus $(\prod_{i=1}^{m} \ell_i)$ fois la période de S. □

3.2 Minorer le coût optimal

Nous allons dériver deux minorants pour ce problème. Le premier, $\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}$, est une version légèrement modifiée du minorant MN_2 page 70. Ce premier minorant donnera l'analyse la plus directe des heuristiques proposées Section 3.4. Le deuxième minorant, plus précis, servira à la démonstration de NP-dureté.

3.2.1 Un premier minorant

Lemme 3.5 (Minorant) *L'expression* $\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M)$ *ci-dessous, est un minorant du coût de tout ordonnancement des paquets des messages de* $M = \{M_1, \dots, M_m\}$ *sur* W *canaux :*

$$\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M) \begin{cases} \displaystyle\min_{\tau>0}\ 1 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{p_i \tau_i \ell_i}{2} + \frac{c_i}{\tau_i} \right) \\ \text{Sur le domaine:} \quad (i) \quad (\forall i),\ \tau_i \geqslant 1 \\ \qquad\qquad\qquad (ii) \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i} \leqslant W \end{cases} \tag{3.17}$$

Ce problème de minimisation admet une unique solution τ^* *dont la résolution sera détaillée au chapitre 5.*

Preuve. Les lemmes 3.1 page 104 et 3.3 page 113 assurent que tout minorant sur le coût des ordonnancements paquets-cycliques et périodique est un minorant sur le coût de tout ordonnancement. Considérons donc un ordonnancement S paquets-cyclique et périodique de période T des paquets des messages $M_1, \dots, M_m$ sur W canaux. De même qu'au corollaire 3.1 page 107, notons ν_i le nombre de diffusions de chaque *message* M_i par période.

L'idée de ce minorant est très simple et consiste à minorer le temps de service des requêtes pour le message M_i par l'attente moyenne optimale de ces requêtes pour le paquet n°1 de ce message. Comme il y a ν_i diffusions de ce paquet dans une période, d'après les résultats précédents l'attente est minimisée lorsque ce paquet est diffusé à intervalle régulier tous les $(\ell_i \tau_i)$ où $\tau_i =_{\mathrm{def}} (T/\nu_i) \geqslant 1$. Le temps de service des requêtes pour M_i est donc minoré par : $\mathrm{TSM}(S, M_i) \geqslant (\ell_i \tau_i / 2 + 1)$. D'autre part la contribution au coût de diffusion de S des paquets du message M_i est : $\mathrm{CD}(S, M_i) = (c_i \ell_i \nu_i / T) = (c_i / \tau_i)$.

Enfin, au plus WT paquets sont diffusés durant une période de S, ainsi : $\sum_{i=1}^{m} \nu_i \ell_i \leqslant WT$, *i.e.* (ii) $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i \leqslant W$. Et, comme S est paquets-cyclique, nous avons $\nu_i \ell_i \leqslant T$ et donc (i) $\tau_i \leqslant 1$. Minimiser sur les τ_i selon ces contraintes donne donc le résultat annoncé. □

Remarque 3.4 Le minorant $\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}$ minore le temps de téléchargement du premier paquet. Il n'est donc jamais réalisé par un ordonnancement dès qu'un des messages compte plus d'un paquet.

3.2.2 Un minorant réalisable

L'obtention d'un minorant qui puisse être réalisé par des ordonnancements, est nécessaire pour prouver que le problème est NP-difficile. Nous allons dans cette section proposer un second minorant dont la valeur est très proche de celle du précédent, mais qui est réalisable à la condition que l'on puisse ordonnancer les messages à intervalles réguliers et sans préemption. Cette propriété est plutôt surprenante et démontre que lorsqu'on introduit des dépendances entre les messages à diffuser, le principe qui consiste à diffuser à intervalles réguliers est remis en cause.

Ce minorant est obtenu de nouveau en relaxant les contraintes de non-recouvrements. Cependant la détermination de l'ordonnancement optimal en l'absence de ces contraintes n'est plus immédiate. Le minorant est exprimé également sous forme d'un problème de minimisation sous contraintes non-linéaire et sa résolution nécessite une adaptation prudente des méthodes développées par Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber dans [BNBNS98], car contrairement aux études précédentes, certains des coefficients peuvent être négatifs. L'existence, l'unicité et le calcul de la solution ne sont donc plus immédiats et seront démontrés au chapitre 5.

Lemme 3.6 (Un minorant réalisable) *Le problème de minimisation non-linéaire* MN_4 *suivant est un minorant du coût de tout ordonnancement des paquets des messages de* $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ *sur* W *canaux :*

$$\mathrm{MN}_4(M) \left\{ \begin{array}{lll} \displaystyle\min_{\tau>0} \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{\tau_i \ell_i}{2} + \ell_i - \frac{\ell_i - 1}{2\tau_i} \right) + \frac{c_i}{\tau_i} & & \\ \text{Sur le domaine:} & (i) & (\forall i),\ \tau_i \geqslant 1 \\ & (ii) & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i} \leqslant W \end{array} \right. \tag{3.18}$$

Ce problème de minimisation admet une unique solution τ^**. De plus, le minorant* $\mathrm{MN}_4(M)$ *est réalisé par un ordonnancement si et seulement si il existe un ordonnancement paquets-cyclique périodique qui pour chaque* M_i*, diffuse les* ℓ_i *paquets de* M_i *dans des créneaux consécutifs (éventuellement sur différents canaux) à intervalles réguliers, exactement tous les* $(\tau_i^* \cdot \ell_i)$*.*

Remarque 3.5 Ce nouveau minorant a une valeur très proche du minorant précédent puisque pour tout ensemble de messages M :

$$\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i + \frac{1}{2} \leqslant \mathrm{MN}_4(M) \leqslant \mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M) + \sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i$$

Preuve du Lemme 3.6. Les lemmes 3.1 et 3.3 assurent qu'il suffit de considérer les ordonnancements paquets-cycliques et périodiques. Considérons un tel ordonnancement S de période T des paquets des messages $M_1, \ldots, M_m$ sur W canaux. Notons ν_i le nombre de diffusions du *message* M_i par période.

Pour obtenir le minorant MN_4, nous relaxons les contraintes de non-recouvrements entre les paquets de messages différents et optimisons le placement des $(\nu_i \ell_i)$ paquets de chaque message M_i pour minimiser le temps de service de requêtes pour chaque M_i indépendamment. Comme S est paquets-cyclique, nous sommes ramenés à l'étude du meilleurs placements de $(\nu_i \ell_i)$ paquets de chaque message M_i de longueur ℓ_i dans un intervalle de longueur T. La preuve fonctionne en trois temps :

1. Nous démontrons que le temps de service des requêtes pour chaque message M_i de plus de deux paquets est optimisé si pour tout instant t où un paquet de M_i est diffusé, un paquet de M_i est également diffusé au temps $(t-1)$ ou au temps $(t+1)$.
2. Nous en déduirons que le temps de service est optimisé si et seulement si les ℓ_i paquets de chaque message M_i sont diffusés consécutivement.
3. Enfin, nous optimisons le positionnement de ces blocs de paquets de longueur ℓ_i en démontrant qu'ils doivent être diffusés à intervalle régulier, tous les (T/ν_i).

Etape 1. Considérons un message M_i avec $\ell_i \geqslant 2$, et deux paquets consécutifs de M_i (notons que les paquets n°ℓ_i et n°1 sont consécutifs). Sans perte de généralité, considérons les paquets n°1 et n°2. Pour $k = 1..\nu_i$, notons I_k, J_k et K_k les intervalles délimités par (*cf.* Figure 3.6) : la fin de la $k^{\text{ième}}$ émission du paquet n°1, le début de la $k^{\text{ième}}$ émission du paquet n°2, la fin de cette diffusion, et le début de l'émission du paquet suivant (J_k est le créneau de la $k^{\text{ième}}$ diffusion du paquet n°2 et est donc toujours de longueur 1).

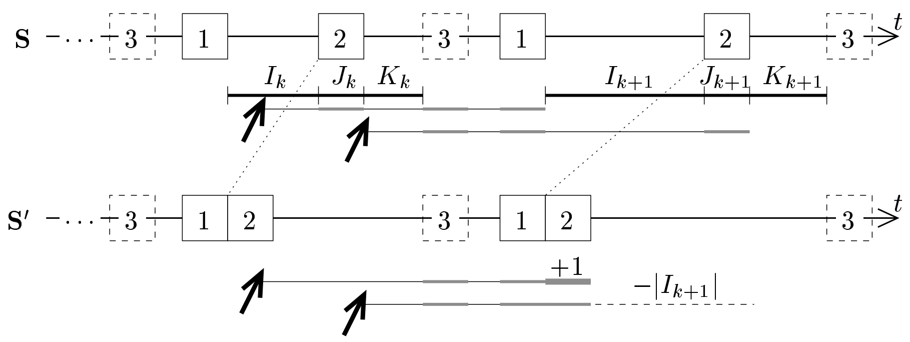


FIG. 3.6 : *Coller les paquets n°2 aux paquets n°1 permet d'améliorer le temps de service des requêtes globalement: le service de celles qui arrivent dans I_k est retardé de 1, mais le service de celles qui arrivent dans $J_k \cup K_k$ est avancé de $|I_k|$.*

Nous construisons à partir de l'ordonnancement S, un ordonnancement S' des paquets du message M_i de la façon suivante. Pour $k \neq 2$, S' diffuse les paquets n°k exactement comme S ; mais S' diffuse les paquets n°2 juste après les paquets n°1 (*cf.* illustration Figure 3.6).

Analysons le temps de service de S' pour les requêtes pour le message M_i par rapport à celui de S. Les temps de service des requêtes qui arrivent en dehors des intervalles I_k, J_k et K_k, sont inchangés de S à S'. Une requête qui arrive durant un intervalle I_k, ne peut plus télécharger le paquet n°2 en premier et doit donc le télécharger en dernier, une unité de temps après avoir téléchargé le paquet n°1. Son temps de service est donc augmenté de 1. Une requête qui arrive pendant l'intervalle $J_k \cup K_k$, télécharge en revanche le paquet n°2 juste après la $(k+1)^{\text{ième}}$ diffusion du paquet n°1, et son temps de service est donc réduit de la longueur de l'intervalle I_{k+1} (les indices sont calculés modulo ν_i). Ainsi la variation du temps de service des requêtes pour M_i de S à S' est :

$$\sum_{k=1}^{\nu_i} (|I_k| \times 1 - (1 + |K_k|) \times |I_{k+1}|) = -\sum_{k=1}^{\nu_i} |K_k| \cdot |I_{k+1}| \leqslant 0 \tag{3.19}$$

Ainsi S' a toujours un coût inférieur à celui de S. De plus, S' est strictement meilleur si une des diffusions du paquet n°2 n'a pas lieu dans S juste après l'émission précédente du paquet n°1, ni juste avant l'émission du paquet suivant.

Etape 2. Supposons que nous ayons un ordonnancement S des $(\nu_i \ell_i)$ paquets de M_i qui ne diffuse pas les paquets par bloc de créneaux consécutifs de taille ℓ_i. Considérons le plus petit bloc de créneaux consécutifs dans lequel des paquets de M_i sont diffusés, et notons x sa taille : $x < \ell_i$ par hypothèse. Sans perte de généralité, nous considérons que le paquet n°1 est le premier paquet diffusé dans ce bloc. On applique alors $(x-1)$ fois la transformation précédente sur les paires de paquets n°ℓ_i et n°1, n°1 et n°2, ... , n°$(x-2)$ et n°$(x-1)$. Le coût de l'ordonnancement S' obtenu est inférieur à celui de S. Or, dans S', le paquet n°x du bloc précédent est isolé, donc appliquer à S' la transformation précédente sur la paire de paquets n°$(x-1)$ et n°x diminue strictement son coût.

Ainsi, paradoxalement, le temps de service des requêtes pour les $(\nu_i \ell_i)$ paquets de M_i est minimisé en l'absence des contraintes de non-recouvrement entre les message si et seulement si les paquets du messages M_i sont diffusés par bloc de taille ℓ_i.

Etape 3. Nous sommes donc ramenés à optimiser le placement de ν_i blocs de taille ℓ_i dans une période de longueur T. Pour $k = 1..\nu_i$, notons t_k la distance entre les débuts des $k^{\text{ième}}$ et $(k+1)^{\text{ième}}$ blocs (*cf.* illustration Figure 3.7).

Une requête tombe entre le début de l'émission du dernier paquet du $k^{\text{ième}}$ bloc et le début du $(k+1)^{\text{ième}}$ bloc avec probabilité $((t_k - \ell_i + 1)/T)$. Elle est alors servie en moyenne au bout de $((t_k - \ell_i + 1)/2 + \ell_i)$. Une requête tombe entre le début du $k^{\text{ième}}$ bloc et la fin de l'émission de l'avant-dernier paquet de ce bloc avec probabilité $(\ell_i - 1)/T$. Elle est alors servie en moyenne au bout de $(t_k + 1/2)$. Ainsi, le temps de service des requêtes pour le

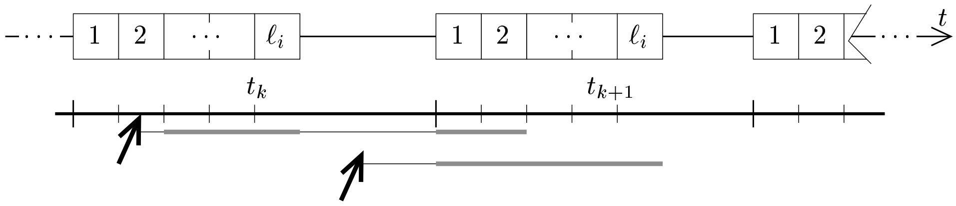


FIG. 3.7 : *Illustration des notations de l'étape 3 de la preuve du lemme 3.6.*

message M_i vaut :

$$\sum_{k=1}^{\nu_i} \left\{ \frac{t_k - \ell_i + 1}{T} \left(\frac{t_k - \ell_i + 1}{2} + \ell_i \right) + \frac{\ell_i - 1}{T} \left(t_k + \frac{1}{2} \right) \right\},$$

que l'on simplifie en remarquant que $\sum_{k=1}^{\nu_i} t_k = T$:

$$\sum_{k=1}^{\nu_i} \left(\frac{t_k^2}{2T} \right) + \ell_i - \frac{\nu_i \ell_i (\ell_i - 1)}{2T} \tag{3.20}$$

Cette expression quadratique est donc minimisée lorsque les blocs sont uniformément répartis. En posant $\tau_i = T/(\nu_i \ell_i)$, nous en déduisons que le temps de service des requêtes pour le message M_i dans l'ordonnancement S initial est minoré par :

$$\mathrm{TSM}(S, M_i) \geqslant \frac{\ell_i \tau_i}{2} + \ell_i - \frac{\ell_i - 1}{2\tau_i} \tag{3.21}$$

Et donc le coût de l'ordonnancement S est minoré par :

$$\mathrm{COUT}(S) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \left\{ p_i \left(\frac{\tau_i \ell_i}{2} + \ell_i - \frac{\ell_i - 1}{2\tau_i} \right) + \frac{c_i}{\tau_i} \right\} \tag{3.22}$$

De plus comme $(\nu_i \ell_i) \leqslant T$, nous avons (i) $\tau_i \geqslant 1$ et comme $\sum_{i=1}^{m} \nu_i \ell_i \leqslant WT$, nous avons (ii) $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i \leqslant W$. En minimisant sous ces contraintes nous obtenons le minorant annoncé.

Nous verrons au chapitre 5 que ce problème de minimisation admet une unique solution τ^*, ce qui n'est plus immédiat car $(c_i - (\ell_i - 1)/2)$ peut être négatif et la fonction objectif n'est donc plus convexe. Par construction et comme la solution τ^* est unique, le minorant est atteint par un ordonnancement périodique et paquets-cyclique S si et seulement si S ordonnancent les ℓ_i paquets de chaque message M_i dans des créneaux consécutifs (éventuellement sur plusieurs canaux) à intervalles réguliers, tous les $(\tau_i^* \ell_i)$ exactement. Nous verrons au théorème 3.3 qu'il existe un ordonnancement optimal qui est périodique et paquets-cyclique. Ainsi si le minorant est atteint par un ordonnancement, il est atteint par un ordonnancement périodique et paquets-cyclique qui vérifie donc la propriété ci-dessus. *C.Q.F.D.* □

Ainsi, dans ce modèle et contrairement aux modèles précédents, le temps de service d'un message donné n'est pas minimisé en diffusant ses paquets à intervalles réguliers, mais en les diffusant tous d'un bloc. Nous savons malgré tout par les résultats du chapitre précédent qu'une telle stratégie peut conduire à des ordonnancements de coût arbitrairement grand lorsque les messages ont des longueurs très différentes. Aussi, les heuristiques Section 3.4 seront basées sur un principe très différent.

3.3 A propos de l'optimal

3.3.1 NP-dureté

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le minorant MN_4 n'est réalisé que par les ordonnancements qui diffuse chaque message à intervalle régulier sans préemption. Nous allons utiliser ce fait pour démontrer que le problème de décision associé à la dissémination préemptive de messages est NP-difficile.

Théorème 3.2 (NP-dureté) *Trouver un ordonnancement optimal sur un canal des paquets d'un ensemble de messages $M = \{M_1, \dots, M_m\}$ de coûts de diffusion nuls est fortement* NP*-difficile.*

Preuve. De même qu'au chapitre précédent, nous allons réduire le problème "N-partition" à une instance du problème de dissémination préemptive sans coût de diffusion. Rappelons que le problème de décision "N-partition" admet en entrée m entiers $x_1, \dots, x_m$ et doit décider s'il existe une partition de $\{1, \dots, m\}$ en N sous-ensembles $I_1, \dots, I_N$, telle que :

$$\sum_{i \in I_1} x_i = \cdots = \sum_{i \in I_N} x_i$$

Posons $\mathcal{S} =_{\text{def}} x_1 + \cdots + x_m$. Remarquons que si N ne divise pas $\mathcal{S}$, cette instance n'admet trivialement pas de solution. Nous supposerons donc que $(\mathcal{S}/N)$ est entier. Considérons l'instance suivante du problème de la dissémination de messages sur un canal. Soit l'ensemble $M_x = \{M_0, M_1, \dots, M_m\}$ de $(m+1)$ messages de coûts de diffusion nuls, tels que :

$$\begin{cases} M_0: \quad \ell_0 = \mathcal{S}/N \quad \text{et} \quad p_0 = \alpha \Big/ \left(\dfrac{5\mathcal{S}}{N} - 1\right) \\ M_{i\geqslant 1}: \quad \ell_i = x_i \quad \text{et} \quad p_i = \alpha \Big/ \left(\dfrac{2\mathcal{S}^2}{x_i} + x_i - 1\right) \end{cases} \tag{3.23}$$

où $\alpha > 0$ est choisi tel que : $p_0 + \cdots + p_m = 1$.

D'après la proposition 5.2 du chapitre 5. Il existe un certain $\lambda^* \geqslant 0$ tel que la solution τ^* du problème de minimisation $\mathrm{MN}_4(M_x)$ vérifie :

$$\tau_i^* = \sqrt{\frac{\lambda^* - p_i(\ell_i - 1)}{p_i}}, \quad \text{où } \lambda^* \text{ est l'unique solution de : } \quad \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\tau_i^*} = W \tag{3.24}$$

Or remarquons que pour $\lambda = \alpha$, nous avons :

$$\tau_0(\lambda = \alpha) = \sqrt{\frac{(\frac{5\mathcal{S}}{N} - 1) - (\frac{\mathcal{S}}{N} - 1)}{\frac{\mathcal{S}}{N}}} = 2$$

$$\text{et} \quad \tau_1(\lambda = \alpha) = \sqrt{\frac{(\frac{4\mathcal{S}^2}{x_i} + x_i - 1) - (x_i - 1)}{x_i}} = \frac{2\mathcal{S}}{x_i}$$

Et donc : $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\tau_i(\alpha)} = 1$. Ainsi, le paramètre Lagrangien λ^* a pour valeur α, et la solution du minorant $\mathrm{MN}_4(M_x)$ est τ^* tel que : $\tau_0^* = 2$ et $\tau_i^* = (x_i/2\mathcal{S})$. Soit A la valeur correspondante (abominable mais rationnelle) du minorant $\mathrm{MN}_4(M_x)$.

Notons que toutes les entrées p_i, ℓ_i et A sont rationnelles et de tailles polynomiales et que notamment les longueurs sont bien entières. Considérons donc le problème de décision suivant *"Existe-t-il un ordonnancement sur un canal des paquets des messages $M_0, M_1, \ldots, M_m$ dont le coût est inférieur ou égal à A ?"*. Notre réduction est bien polynomiale. D'après le lemme 3.6, la réponse à cette question est "oui" si et seulement si il existe un ordonnancement périodique S qui diffuse les paquets du message M_0 dans des créneaux consécutifs exactement tous les $\tau_0^*\ell_0 = 2\mathcal{S}/N$, et les paquets de chaque message $M_{i\geqslant 1}$ dans des créneaux consécutifs exactement tous les $\tau_i^*\ell_i = 2\mathcal{S}$. Un tel ordonnancement existe si et seulement si l'on peut partitionner l'ensemble des messages $M_1, \ldots, M_m$ en N sous-ensembles $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_N$ tels que (*cf.* illustration Figure 3.8) :

$$\sum_{M_i \in \mathcal{M}_1} \ell_i = \cdots = \sum_{M_i \in \mathcal{M}_N} \ell_i$$

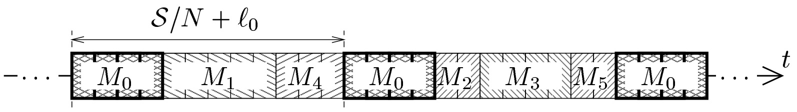


FIG. 3.8 : *Un ordonnancement qui satisfait le problème de décision.*

C.Q.F.D. □

Remarque 3.6 L'extension de la preuve au cas de W canaux pour démontrer la NP-dureté du problème de décision "Existe-t-il un ordonnancement sur W canaux des paquets des messages M de coûts de diffusion nuls et de probabilités de demande rationnelles, dont le coût est inférieur à A ?" est directe. Il suffit d'ajouter à l'ensemble M_x, $(W-1)$ messages $M_{m+1}, \ldots, M_{m+W-1}$ constitués de $(\mathcal{S}+N\ell_0)$ paquets et dont les probabilités sont ajustées de sorte que : $\tau^*_{i>m} = 1$.

Remarque 3.7 La preuve de Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber dans [BNBNS98] démontre également que ce problème est NP-difficile. Cependant notre preuve n'utilise pas les coûts de diffusion. Ce résultat démontre donc que *même en présence de préemption* le cas des longueurs non-uniformes présente une complexité intrinsèque.

3.3.2 Existence d'ordonnancements optimaux périodiques

Théorème 3.3 (Existence d'un ordonnancement optimal périodique) *Pour tout W et tout ensemble de messages $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$, il existe un ordonnancement optimal des paquets de $M_1, \ldots, M_m$ sur W canaux qui soit périodique.*
De plus, il existe un algorithme qui le construit en temps fini exponentiel.

Preuve. La preuve de ce résultat repose sur la construction d'un graphe d'état similaire à celui des théorèmes 1.3 et 2.2 des chapitres précédents. Afin de simplifier les notations, nous ne construisons le graphe d'état uniquement dans le cas d'un unique canal de dissémination.

Tout d'abord grâce au lemme 3.1 page 104 nous ne considérons que les ordonnancements paquets-cycliques. Ensuite, le lemme de densité page 113 nous assure que nous pouvons restreindre notre recherche aux ordonnancements périodiques : un ordonnancement optimal parmi les périodiques est optimal. Enfin, le lemme 3.4 page 113 nous permet de nous restreindre aux ordonnancements qui diffusent un paquet de chaque message M_i au moins tous les K_i créneaux, où K_i est une constante qui ne dépend que des caractéristiques des messages.

Pour l'ensemble de messages M, nous définissons le *graphe d'état* G_M fini et valué suivant. Les sommets de G_M sont les m-uplets $\vec{\sigma} = \langle \vec{\sigma}_1, \ldots, \vec{\sigma}_m \rangle$, où $\vec{\sigma}_i$ est un vecteur de taille ℓ_i à valeurs dans $\{1, \ldots, K_i\}$. $\vec{\sigma}_i$ est appelé le *vecteur d'état* du message M_i. On notera $\sigma_{i,k}$, la $k^{\text{ième}}$ coordonnées de $\vec{\sigma}_i$, où $1 \leqslant k \leqslant \ell_i$. Etre au sommet $\vec{\sigma}$ au temps t signifie que pour tout $i = 1..m$ et tout $k = 1..\ell_i$, la $k^{\text{ième}}$ des ℓ_i dernières diffusions d'un paquet du message M_i avant t, a démarré à la date $(t - (\sigma_{i,k} + \cdots + \sigma_{i,\ell_i}))$ (*cf.* Figure 3.10 page 128). Nous définissons deux opérateurs sur les vecteurs d'état :

- $\alpha(\vec{\sigma}_i)$ est le décalage à gauche du vecteur d'état σ_i :

$$\alpha(\vec{\sigma}_i)_{\ell_i} = 0, \quad \text{et} \quad \alpha(\vec{\sigma}_i)_k = \sigma_{i,(k+1)}, \quad \text{pour } k < \ell_i.$$

- $\beta(\vec{\sigma}_i)$ incrémente la dernière coordonnée de $\vec{\sigma}_i$:

$$\beta(\vec{\sigma}_i)_{\ell_i} = \sigma_{i,\ell_i} + 1, \quad \text{et} \quad \beta(\vec{\sigma}_i)_k = \sigma_{i,k}, \quad \text{pour } k < \ell_i.$$

Dans le graphe G_M, les arêtes sont étiquetées "X" ou "M_i", pour un certain i. Une arête e_{M_i} étiquetée "M_i" relie chaque sommet $\vec{\sigma} = \langle \vec{\sigma}_1, \ldots, \vec{\sigma}_i, \ldots, \vec{\sigma}_m \rangle$ au sommet $\vec{\sigma}' = \langle \beta(\vec{\sigma}_1), \ldots, \beta \circ \alpha(\vec{\sigma}_i), \ldots, \beta(\vec{\sigma}_m) \rangle$. Suivre cette arête e_{M_i} durant le créneau t signifie que l'on ordonnance le paquet du message M_i suivant dans l'ordre cyclique pendant le créneau t. Nous donnons à cette arête un *coût* égal au surcoût induit par cette "diffusion", que nous définissons naturellement comme le rétro-coût du créneau :

$$\text{coût}_{G_M}(e_{M_i}) =_{\text{def}} c_i + 1 - p_i \sigma_{i,1} + \sum_{j=1}^{m} p_j \left(\frac{1}{2} + \sigma_{j,1} + \cdots + \sigma_{j,\ell_j} \right)$$

Une arête e_X étiquetée "X" relie chaque sommet $\vec{\sigma} = \langle \vec{\sigma}_1, \ldots, \vec{\sigma}_m \rangle$ au sommet $\vec{\sigma}' = \langle \beta(\vec{\sigma}_1), \ldots, \beta(\vec{\sigma}_m) \rangle$. Suivre cette arête e_X durant le créneau t signifie que l'on n'ordonnance aucun paquet durant le créneau t. Nous donnons à cette arête un *coût* égal au surcoût induit, que nous définissons naturellement comme le rétro-coût du créneau :

$$\text{coût}_{G_M}(e_X) =_{\text{def}} \sum_{j=1}^{m} p_j \left(\frac{1}{2} + \sigma_{j,1} + \cdots + \sigma_{j,\ell_j} \right)$$

Nous définissons alors le coût d'un cycle γ de G_M comme le coût moyen de ces arêtes :

$$\text{coût}_{G_M}(\gamma) = \frac{1}{|\gamma|} \sum_{e \in \gamma} \text{coût}_{G_M}(e)$$

Nous établissons ainsi de même que dans les chapitres précédents, une surjection $(\gamma \mapsto S_\gamma)$ des cycles du graphe G_M vers les ordonnancements périodiques, paquets-cycliques, et qui diffusent un paquet de chaque message M_i au moins tous les K_i créneaux : la surjection associe à tout cycle γ l'ordonnancement S_γ obtenu en concaténant les étiquettes des arêtes du cycle. Le théorème de réversibilité nous donne alors que le coût du cycle γ est le rétro-coût, donc le coût de l'ordonnancement S_γ :

$$\mathrm{COUT}(S_\gamma) = \mathrm{coût}_{G_M}(\gamma)$$

La recherche d'un ordonnancement périodique optimal se ramène donc à la recherche d'un cycle de coût minimal dans G_M. Or G_M est de taille finie, ainsi un tel cycle existe et peut être calculé en temps fini exponentiel (par exemple, avec l'algorithme de Orlin, Tarjan et Young [YTO91]). □

3.4 Approximations à un facteur constant

Dans cette section nous allons proposer des heuristiques qui génèrent des ordonnancements dont le coût est inférieur à $(2 \cdot \mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M))$ et donc à $(2 \cdot \mathrm{OPT}(M))$.

Nos heuristiques sont basées sur la remarque suivante : diffuser les paquets du message M_i régulièrement tous les τ_i au lieu de les diffuser en bloc tous les $(\tau_i \ell_i)$, multiplie au plus par 2 le temps de service moyen pour ce message (*cf.* Figure 3.9). Nous obtenons ainsi des 2-approximations.

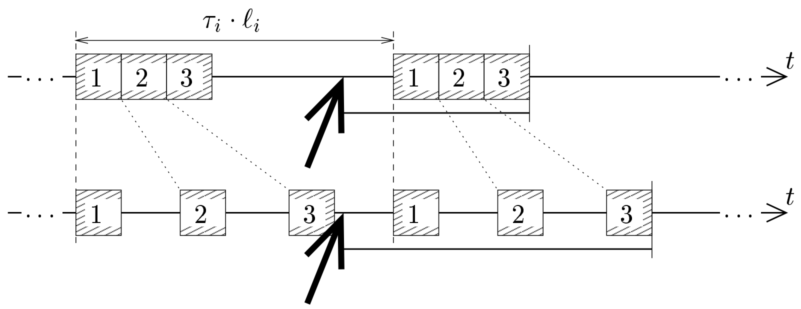


FIG. 3.9 : *Ordonnancer les paquets régulièrement.*

Les minorants suggèrent une fréquence de diffusion optimale $(1/\tau_i^*)$ pour M_i. Nous allons donc développer différentes heuristiques qui réalisent ces fréquences optimales. Nous allons tout d'abord présenter ces heuristiques sur un canal, puis nous montrerons comment les généraliser au cas de plusieurs canaux en utilisant un résultat de Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber [BNBNS98].

Note 3.1 L'extension de ces heuristiques au cas de plusieurs canaux est tout particulièrement intéressant car nous n'avons pas à l'heure actuelle d'algorithme de performance garantie pour la dissémination sur plusieurs canaux de message de longueurs non-uniformes sans préemption.

3.4.1 Ordonnancer sur un canal

Nous commençons par présenter une heuristique randomisée que nous dérandomiserons pour en faire un algorithme déterministe qui produit un ordonnancement périodique.

Approximation randomisée

Proposition 3.1 (Approximation randomisée) *L'algorithme randomisé 3.1 page ci-contre génère un ordonnancement S des messages de $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ sur un canal, tel que :*

$$\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S)] = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m} \left(p_i \tau_i \ell_i + \frac{c_i}{\tau_i} \right) \tag{3.25}$$

Ainsi, si $\tau = \tau^*$ est la solution du problème $\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M)$, l'ordonnancement généré est une 2-approximation :

$$\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S)] \quad \leqslant \quad 2 \cdot \mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M) - \frac{3}{2} \quad \leqslant \quad 2 \cdot \mathrm{OPT}(M) - \frac{3}{2}$$

Preuve. Par la linéarité de l'espérance, l'espérance du coût est la somme des espérances du temps de service et du coût de diffusion : $\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S)] = \mathbb{E}[\mathrm{TSM}(S)] + \mathbb{E}[\mathrm{CD}(S)]$.

L'espérance du coût de diffusion est la somme pondérée des coûts de diffusion des paquets de chaque message. Un paquet du message M_i est diffusé dans chaque créneau avec probabilité $(1/\tau_i)$, ainsi le nombre moyen de paquets de M_i diffusés par unité de temps est $1/\tau_i$. Le coût moyen de diffusion de l'ordonnancement S est donc :

$$\mathbb{E}[\mathrm{CD}(S)] = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\tau_i}$$

De même, l'espérance du temps de service est la somme pondérée des temps de service pour chaque message. Considérons une requête pour le message M_i arrivant durant le créneau t. Elle attend tout d'abord en moyenne $1/2$ la fin du créneau, puis sera servie une fois qu'elle aura télécharger les ℓ_i paquets de M_i. Soit $X_{i,k}(u)$ la variable aléatoire du temps écoulé entre les fins des $(k-1)^{\text{ième}}$ et $k^{\text{ième}}$ diffusions d'un paquet de M_i depuis la fin du créneau u. L'attente de la requête est donc la somme des $X_{i,k}$ pour $k = 1..\ell_i$. Or $X_{i,k}(u)$ est indépendant de u et de k, et son espérance est τ_i. L'espérance du temps de service de la

Algorithme 3.1 Approximation randomisée pour la dissémination préemptive sur un canal

Entrées : (τ_i) vérifiant, pour tout i, $\tau_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i \leqslant 1$.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i} < 1$ **alors**

Ajouter un message "fantôme" M_0, avec $\ell_0 = 1$, $p_0 = c_0 = 0$ et une valeur τ_0 telle que : $1/\tau_0 = 1 - \sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i$.

Sortie :

Pour $t = 1..\infty$

Tirer au hasard $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ avec probabilité $s_i = 1/\tau_i$.

Si $i = 0$ **alors**

Ne rien ordonnancer durant le créneau t.

Sinon

Ordonnancer le paquet suivant (dans l'ordre cyclique) du message M_i durant le créneau t.

---

requête est donc finalement : $(1/2 + \ell_i\tau_i)$. Ainsi :

$$\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(S)] = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i \tau_i$$

Ainsi, lorsque $\tau = \tau^*$ est la solution du problème de minimisation $\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M)$, nous avons : $\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S)] \leqslant 2\,\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M) - 3/2 \leqslant 2\,\mathrm{OPT}(M) - 3/2$. □

Remarque 3.8 En pratique, il convient de prendre τ égal à la solution du problème de minimisation du coût de l'ordonnancement généré. Ce problème de minimisation à la forme générique étudiée au chapitre 5.

Approximation gloutonne

Nous proposons dans cette section une version dérandomisée de l'heuristique précédente. Pour cela, nous définissons l'état de l'ordonnancement à la fin du créneau t de la façon suivante :

Definition 3.3 (Etat) L'état $\vec{\sigma}(t, S)$ d'un ordonnancement paquets-cyclique à la fin du créneau t est le m-uplet $\langle \vec{\sigma}_1(t, S), \dots, \vec{\sigma}_m(t, S) \rangle$, où $\vec{\sigma}_i(t, S)$ est un vecteur de taille ℓ_i dont la $k^{\text{ième}}$ coordonnée $\sigma_{i,k}$ est le temps écoulé entre les débuts des $k^{\text{ième}}$ et $(k+1)^{\text{ième}}$ des ℓ_i dernières diffusions d'un paquet avant la date t (*cf.* Figure 3.10). De même qu'aux chapitres précédents et qu'à la définition du rétro-coût, nous considérons que tous les paquets sont fictivement diffusés à la date $t = 0$ (il est équivalent de dire qu'aucune requête n'arrive au temps $t = 0$ ou encore que tous les requêtes qui arrivent avant $t = 0$ sont servies instantanément), ainsi : pour tout i, k, $\sigma_{i,k}(t = 0, S) = 0$.

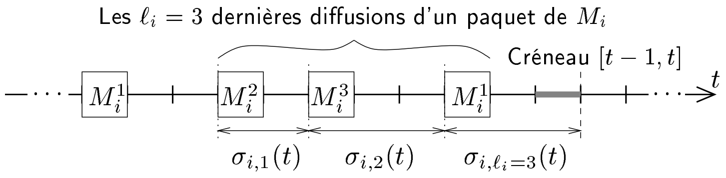


FIG. 3.10 : *Définition de l'état $(\vec{\sigma}_i(t))$ à la date t.*

Proposition 3.2 (Algorithme glouton) *L'algorithme glouton 3.2 page suivante produit un ordonnancement S des messages de $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ sur un canal dont le coût vérifie :*

$$\mathrm{COUT}(S) \leqslant \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m} \left(p_i \tau_i \ell_i + \frac{c_i}{\tau_i} \right) \tag{3.26}$$

Ainsi, si $\tau = \tau^*$ est la solution du problème $\mathrm{MN}_4(M)$, l'ordonnancement généré est une 2-approximation :

$$\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S)] \quad \leqslant \quad 2 \cdot \mathrm{MN}_4(M) - \frac{3}{2} \quad \leqslant \quad 2 \cdot \mathrm{OPT}(M) - \frac{3}{2}$$

Remarque 3.9 Il est intéressant de noter que le choix glouton se fait uniquement sur la quantité $\left(\sum_{k=1}^{\ell_i} \sigma_{j,k}(t-1, S_G) \right)$ qui est le temps écoulé depuis la dernière diffusion du paquet que l'on se propose de diffuser. Ce choix est donc indépendant des dates des autres diffusions.

Preuve. Cet algorithme est la version dérandomisée de l'algorithme 3.1 page précédente. Nous allons procéder de la même façon qu'au chapitre précédent en bornant le rétro-coût cumulé de l'ordonnancement glouton S_G sur tout intervalle $[0, t]$ par $((t+1) \cdot \mathrm{MOY})$ où $\mathrm{MOY} =_{\text{def}} \left(1/2 + \sum_{i=1}^{m} (p_i \ell_i \tau_i + c_i/\tau_i) \right)$ est l'espérance du coût de l'ordonnancement randomisé. Comme le théorème de réversibilité assure l'égalité entre le coût et le rétro-coût d'un ordonnancement, nous aurons le résultat annoncé en faisant tendre t vers l'infini.

Algorithme 3.2 Algorithme glouton de dissémination préemptive sur un canal

Entrées : (τ_i) vérifiant, pour tout i, $\tau_i \geqslant 0$, et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i \leqslant 1$.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i} < 1$ **alors**

Ajouter un message “fantôme” M_0, avec $\ell_0 = 1$, $p_0 = c_0 = 0$ et une valeur τ_0 telle que : $1/\tau_0 = 1 - \sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i$.

Sortie :

Pour $t = 1..\infty$

Calculer l’état $\vec{\sigma}$ à la date $(t-1)$ de l’ordonnancement (Définition 3.3 page 127).

Choisir $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ qui minimise la quantité : $\displaystyle\left(c_i - p_i\tau_i \sum_{k=1}^{\ell_i} \sigma_{i,k}\right)$.

Si $i = 0$ **alors**

Ne rien ordonnancer durant le créneau t.

Sinon

Ordonnancer le paquet suivant (dans l’ordre cyclique) du message M_i durant le créneau t.

Pour cela nous allons démontrer que le choix glouton au temps t est le choix qui minimise la somme du rétro-coût $\mathrm{RCOUT}(S_G, [t-2, t-1])$ sur le créneau $(t-1)$ et de la variation d’une fonction potentiel $\Phi(t, S_G)$. Cette fonction potentiel nous permet comme au chapitre précédent de “payer” par anticipation l’attente des requêtes en attente au temps t. Nous la définissons donc naturellement comme l’espérance de l’attente des requêtes qui n’ont pas été servies avant la date t. Considérons un ordonnancement S. Une requête pour le message M_i n’a pas été servie dans S au temps t, si elle est arrivée après le début de la première des ℓ_i dernières diffusions d’un paquet de M_i avant la date t (*cf.* Figure 3.10). Or, $(p_i\sigma_{i,k}(t, S_G))$ requêtes pour le message M_i sont arrivées entre les débuts des $k^{\text{ième}}$ et $(k+1)^{\text{ième}}$ des ℓ_i dernières diffusions d’un paquet de M_i avant t, et seront servies une fois qu’elles auront téléchargé les k paquets de M_i qui leurs manquent ; ces requêtes devraient donc attendre $(k\tau_i)$ en moyenne si l’ordonnancement était généré par l’algorithme randomisé 3.1 après la date t. Nous définissons donc notre fonction potentiel $\Phi(t, S)$ pour un ordonnancement S par :

$$\Phi(t, S) =_{\text{def}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\ell_i} p_i \; \sigma_{i,k}(t, S) \; k \; \tau_i$$

Remarquons que : $\Phi(t = 0, S) = 0$ et que pour tout t : $\Phi(t, S) \geqslant 0$. Nous posons donc :

$$Y(t, S) =_{\text{def}} \text{MOY} - \text{RCOUT}(S, [t-2, t-1]) + \Phi(t-1, S) - \Phi(t, S),$$

et nous allons démontrer que tout t : $Y(t, S_G) \geqslant 0$. Ainsi en sommant de $t = 0$ à $t = T$, nous aurons que :

$$T \cdot \text{RCOUT}(S_G, [0, T]) + \underbrace{\Phi(0, S_G) - \Phi(T, S_G)}_{\geqslant 0} \leqslant (T+1) \cdot \text{MOY}\,,$$

ce qui impliquera le résultat. Pour cela nous allons démontrer que l'espérance de $Y(t, S_G)$ si le paquet ordonnancé durant le créneau t était choisi aléatoirement, est positive, et que le choix glouton est celui qui maximise la valeur de cette fonction.

Notons S_j l'ordonnancement qui diffuse exactement les mêmes paquets que S avant la date $(t-1)$ et ordonnance le paquet du message M_j suivant dans l'ordre cyclique, si $j > 0$ et n'ordonnance rien dans le créneau t si $j = 0$.

Reprenons les notations des opérateurs α et β sur les vecteurs d'état définis page 124 à l'occasion de la preuve de l'existence d'un ordonnancement optimal périodique. Ainsi nous pouvons définir l'état $\vec{\sigma}(t, S_j)$ de l'ordonnancement S_j à la date t en fonction de l'état $\vec{\sigma}(t, S_G)$ à la date $(t-1)$ par :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_i(t, S_j) &= \beta(\vec{\sigma}_i(t-1, S_G)), \quad \text{si } j \neq i \\ \text{et} \quad \vec{\sigma}_i(t, S_j) &= \beta \circ \alpha(\vec{\sigma}_i(t-1, S_G)), \quad \text{si } j = i. \end{aligned}$$

Un rapide calcul démontre qu'alors :

$$\Phi(t-1, S_j) - \Phi(S_j, t) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i \tau_i + p_j \sum_{k=1}^{\ell_j} \sigma_{j,k}(t-1, S_G) \cdot \tau_j$$

D'autre part, l'attente en arrière moyenne pour le message M_i dans le créneau $(t-1)$ de l'ordonnancement S_j (ou S_G) vaut $\big(\sigma_{i,1}(t-1, S_G) + \cdots + \sigma_{i,\ell_i-1}(t-1, S_G) + (\sigma_{i,\ell_i}(t-1, S_G) - 1/2)\big)$. Ainsi le rétro-coût de S_j sur le créneau $(t-1)$ est de :

$$\text{RCOUT}(S_j, [t-2, t-1]) = c_j + \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{k=1}^{\ell_i} \sigma_{i,k}(t-1, S_G)$$

Ainsi,

$$Y(t,S_j) = \text{MOY} - c_j - \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{k=1}^{\ell_i} \sigma_{i,k}(t-1,S_G) - \sum_{i=1}^{m} p_i \ell_i \tau_i + p_j \sum_{k=1}^{\ell_j} \sigma_{j,k}(t-1,S_G) \cdot \tau_j$$

Et donc,

$$\mathbb{E}_{1/\tau}[Y(t,S_j)] = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\tau_j} Y(t,S_j) = 0$$

Or,

$$Y(t,S_j) = Y(t,S_0) - \left(c_j - p_j \sum_{k=1}^{\ell_j} \sigma_{j,k}(t-1,S_G) \cdot \tau_j \right)$$

Par conséquent, le choix glouton est bien celui qui maximise $Y(t,S_j)$, et assure donc que pour tout t, $Y(t,S_G) \geqslant 0$.

C.Q.F.D. □

Approximation gloutonne périodique

Certaines applications imposent que l'ordonnancement soit périodique. Cela permet d'une part de décharger le serveur du calcul de l'ordonnancement et aussi de rendre l'ordonnancement prévisible, ce qui permet de définir des stratégies de gestion de caches et de préchargement plus efficace. Remarquons que cette dernière remarque était l'un des reproches adressés aux ordonnancements "compliqués" à performances bornées par certains papiers de la communauté des broadcast disks. Nous verrons également au chapitre suivant que l'existence d'ordonnancements périodiques efficaces sera à la base de notre schéma d'approximation.

Ainsi, de même que dans le chapitre précédent, nous pouvons arrêter l'algorithme glouton au bout d'un nombre de pas quadratique en le nombre total de paquets, pour générer un ordonnancement périodique à un facteur 2 de l'optimum. Il suffit pour cela d'être prudent lors du bouclage pour assurer que l'ordonnancement reste paquets-cyclique. L'algorithme est présenté page suivante et illustré Figure 3.11 page suivante.

Algorithme 3.3 Approximation déterministe et périodique sur un canal

Entrées : Un ensemble M de messages et un entier $T > 0$. On pose $\mathcal{L} = \ell_1 + \cdots + \ell_m$.

Calculer τ^* la solution du problème de minimisation $\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M)$.

Ordonnancer tous les paquets de chacun des messages entre les dates $t = 0$ et $t = \mathcal{L}$.

Executer T pas de l'algorithme glouton 3.2 page 129 avec $\tau = \tau^*$, dans les créneaux $t = \mathcal{L} + 1$ à $t = T + \mathcal{L}$.

Trier l'ensemble $X = \{k\tau_i^* : 1 \leqslant k \leqslant \ell_i\}$.

Pour $r = 1..m$

  Soit $(k\tau_i^*)$ le $r^{\text{ième}}$ élément de X.

  Ordonnancer dans le créneau $t = T + m + r$ le paquet suivant du message M_i dans l'ordre cyclique.

Pour $i = 1..m$

  Soit n_i le nombre de diffusions des paquets de M_i entre $t = 0$ et $t = (T + 2\mathcal{L})$.

  Ordonnancer les $((\ell_i - n_i) \mod \ell_i)$ paquets du message M_i suivants dans l'ordre cyclique à la suite de l'ordonnancement.

Théorème 3.4 (Ordonnancement périodique) *L'algorithme 3.3 construit un ordonnancement S_T paquets-cyclique et périodique, sur un canal, de coût $\leqslant 2 \cdot \mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M)$ dès que sa période T_S est suffisamment longue :*

$$T_S \;\geqslant\; \frac{14}{3}\mathcal{L}^2 + 2\sum_{i=1}^{m} c_i\ell_i, \quad \text{avec } \mathcal{L} = \ell_1 + \cdots + \ell_m.$$

Nous obtenons donc en temps polynomial une 2-approximation de période quadratique en nombre total de paquets et en les coûts des messages.

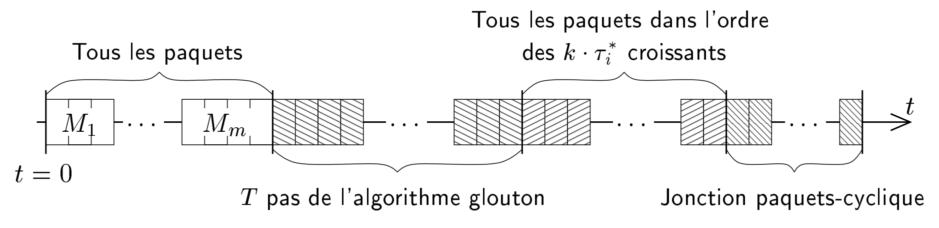


FIG. 3.11 : *Une approximation déterministe et périodique.*

Preuve. Posons $U = \sum_{i=1}^{m}((\ell_i - n_i) \mod \ell_i) \leqslant \mathcal{L} - m$. L'ordonnancement S obtenu est paquets-cyclique et périodique de période $(T + 2\mathcal{L} + U)$. Estimons le coût de cet ordonnancement en calculant son rétro-coût.

D'après l'analyse de l'algorithme glouton Proposition 3.2, le rétro-coût cumulé sur la période $[\mathcal{L}, T + \mathcal{L}]$ est borné par :

$$\mathrm{RCOUT}(S,[\mathcal{L}, T + \mathcal{L}]) \leqslant (T + 1)\,\mathrm{MOY} - \Phi(T + \mathcal{L}, S) + \Phi(\mathcal{L}, S)$$

Remarquons que $\Phi(\mathcal{L}, S) \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i \tau_i^* \mathcal{L} \leqslant \mathcal{L}\,\mathrm{MOY}$. Ainsi :

$$\mathrm{RCOUT}(S,[\mathcal{L}, T + \mathcal{L}]) \leqslant (T + \mathcal{L} + 1)\,\mathrm{MOY} - \Phi(T + \mathcal{L}, S) \tag{3.27}$$

Majorons à présent le rétro-coût sur la période de temps $[T + \mathcal{L}, T + 2\mathcal{L} + U] \cup [0, \mathcal{L}]$. Le coût de diffusion cumulé sur les périodes $[0, \mathcal{L}]$ et $[T + \mathcal{L}, T + 2\mathcal{L} + U]$ est borné par :

$$3 \sum_{i=1}^{m} c_i \ell_i \tag{3.28}$$

Notons $(T + \mathcal{L} + t_{i,k})$ la date du début de la $k^{\text{ième}}$ diffusion d'un paquet du message M_i entre $(T + \mathcal{L})$ et $(T + 2\mathcal{L})$ et posons $t_{i,0} = 0$ pour tout i. L'attente en arrière moyenne pour M_i entre les dates $(T + \mathcal{L} + t_{i,k-1})$ et $(T + \mathcal{L} + t_{i,k})$, vaut $\big((t_{i,k} - t_{i,k-1})/2 + \sigma_{i,\ell_i}(T + \mathcal{L}) + \cdots + \sigma_{i,k}(T + \mathcal{L})\big)$. Ainsi la somme de l'attente en arrière cumulée et du temps de téléchargement sur ces périodes de temps est majorée par :

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{k=1}^{\ell_i} (t_{i,k} - t_{i,k-1}) \left(\frac{t_{i,k} - t_{i,k-1}}{2} + \sigma_{i,\ell_i}(T + \mathcal{L}, S) + \cdots + \sigma_{i,k}(T + \mathcal{L}, S) + 1 \right)$$

ce que l'on peut borner par :

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{k=1}^{\ell_i} t_{i,k} \cdot \sigma_{i,k}(T + \mathcal{L}, S) + \mathcal{L}^2$$

Remarquons que puisque les paquets sont diffusés par $k\tau_i^*$ croissant et que $\sum_{i=1}^{m} k/\tau_i^* \leqslant k$ nous avons $t_{i,k} < k\tau_i^*$. Or, $\Phi(t, S) = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{k=1}^{\ell_i} \sigma_{i,k}(t, S)$. Ainsi nous majorons cette contribution au rétro-coût par :

$$\Phi(T + \mathcal{L}) + \mathcal{L}^2 \tag{3.29}$$

Enfin la somme de l'attente en arrière pour les messages M_i et du temps de téléchargement sur les périodes $[T + \mathcal{L} + t_{i,\ell_i}, T + 2\mathcal{L} + U] \cup [0, T]$ est majorée par $(2\mathcal{L})$. Ainsi leur contribution au rétro-coût est inférieur à :

$$6\mathcal{L}^2 \tag{3.30}$$

En sommant les différentes contributions (3.27), (3.30), (3.29) et (3.30) nous obtenons donc que :

$$(T + 2\mathcal{L} + U)\,\mathrm{RCOUT}(S) \leqslant (T + \mathcal{L} + 1)\,\mathrm{MOY} + 3\sum_{i=1}^{m} c_i\ell_i + 7\mathcal{L}^2$$

Ainsi :

$$\mathrm{RCOUT}(S) \leqslant 2\,\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M) - \frac{3}{2} + \frac{7\mathcal{L}^2 + 3\sum_{i=1}^{m} c_i\ell_i}{T + 2\mathcal{L} + U}$$

Et donc, nous obtenons une 2-approximation dès que la période $(T + 2\mathcal{L} + U)$ de S est supérieure à $(\frac{14}{3}\mathcal{L}^2 + 2\sum_{i=1}^{m} c_i\ell_i)$. □

3.4.2 Dissémination sur plusieurs canaux

Cette section se propose d'étendre au cas de plusieurs canaux les heuristiques précédentes. Ces résultats sont particulièrement intéressants car ils permettent d'ordonnancer avec garantie de performance des messages de longueur non-uniforme. Nous avons vu en effet au chapitre précédent que le cas de plusieurs canaux reste mal compris en l'absence de préemption. Ces résultats s'inspirent largement de la méthode développée par Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber dans le cas des longueurs uniformes [BNBNS98].

Approximation randomisée

L'analyse des performances de l'algorithme randomisé repose sur le fait qu'un paquet de chaque message M_i est ordonnancé avec probabilité $(1/\tau_i)$ dans chaque créneau de temps. La généralisation de cette heuristique au cas de plusieurs consiste donc à trouver une distribution des probabilités de diffusion qui permette d'assurer que :

1. Un paquet de chaque message M_i soit diffusé avec probabilité $(1/\tau_i)$ dans chaque créneau de temps.
2. Au plus un paquet de chaque message M_i soit ordonnancé dans chaque créneau de temps.

Cette seconde condition est nécessaire pour ne pas biaiser les probabilités et assurer que l'ordonnancement généré est bien paquets-cyclique.

Dans [BNBNS98], Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber proposent dans le cadre des messages de longueur uniforme une distribution de probabilité qui permet d'ordonnancer chaque message M_i au plus une fois et avec probabilité $1/\tau_i$ sur les W canaux. La généralisation de leur méthode au cas des paquets de messages fait l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.7 (Algorithme 3.4, [BNBNS98]) *Etant donné $\tau_i > 1$ pour $i = 1..m$, et W tel que $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i \leqslant 1$, l'algorithme 3.4 génère un ordonnancement aléatoire paquets-cyclique sur W canaux où un paquet du message M_i est diffusé avec probabilité $1/\tau_i$ dans chaque créneau.*

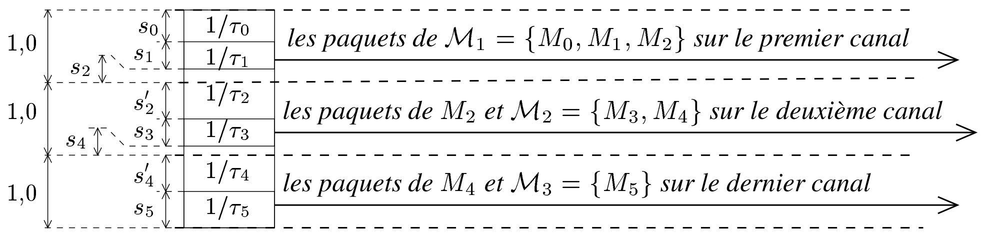


FIG. 3.12 : *Distribution pour le multicanal.*

Preuve. L'idée de l'algorithme 3.4 est d'ordonnancer les paquets d'un même message sur au plus deux canaux consécutifs. Au plus $(W-1)$ messages seront diffusés sur deux canaux. Ceux-ci sont numérotés $\kappa(1), \ldots, \kappa(W-1)$. L'ensemble d'indices $\mathcal{M}_1$ contient les indices des messages qui seront diffusés sur le premier canal, et pour $w \geqslant 2$, $\mathcal{M}_w \cup \{\kappa(w-1)\}$ est l'ensemble des indices des messages qui seront diffusés sur le canal w. Afin de garantir que pour tout w, deux paquets du message $M_{\kappa(w)}$ ne soient pas diffusés en même temps sur les canaux w et $(w+1)$, les probabilités de diffusion des messages sur le canal $(w+1)$ sont modulées suivant si un paquet de ce message a été diffusé sur le canal précédent. L'algorithme 3.4 génère donc bien un ordonnancement paquets-cyclique (en particulier au plus un paquet de chaque est diffusé dans chaque créneau de temps).

Il nous suffit de vérifier que cette distribution est correcte (la somme des probabilités vaut 1) et ordonnance bien un paquet de chaque message M_i avec probabilité $(1/\tau_i)$ dans chaque créneau. Remarquons que par construction (*cf.* Figure 3.12) :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } i \notin \{\kappa(1), \ldots, \kappa(W-1)\}, &\quad s_i = 1/\tau_i \\ \text{pour tout } w \in \{1, \ldots, (W-1)\}, &\quad s_i + s'_i = 1/\tau_i \\ \text{et que pour tout } w \geqslant 2, &\quad s'_{\kappa(w-1)} + s_{\kappa(w-1)+1} + \cdots + s_{\kappa(w)} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi il nous suffit de démontrer par récurrence que sur chaque canal w, un paquet de chaque M_i, $i \in \mathcal{M}_w \cup \{\kappa(w-1)\}$ est ordonnancé avec probabilité s_i si $i \neq \kappa(w -$

Algorithme 3.4 Approximation randomisée pour la dissémination sur W canaux

Entrées :

1. Un ensemble de messages $M = \{M_1, \dots, M_m\}$.
2. Des coefficients (τ_i) vérifiant, pour tout i, $\tau_i > 1$, et $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i \leqslant W$.

$W := \lceil \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i} \rceil$.
Ajouter un message fantôme M_0, avec : $\ell_0 = 1$, $p_0 = c_0 = 0$ et τ_0 tel que : $\frac{1}{\tau_0} = W - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i}$.
$\mathcal{S} := 0$ et $\kappa(0) := 0$.
Pour $i = 0..m$ // *cf. Figure 3.12 page précédente*
  Si $(\mathcal{S} + 1/\tau_i) < \lceil \mathcal{S} \rceil$ **alors**
    $s_i := 1/\tau_i$.
  Sinon
    $w := \lceil \mathcal{S} \rceil$, $\kappa(w) := i$ et $\mathcal{M}_w := \{\kappa(w-1)+1, \dots, \kappa(w)\}$.
    $s_i := (w - \mathcal{S})$ et $s'_i := (\mathcal{S} + 1/\tau_i - w)$.
  $\mathcal{S} := (\mathcal{S} + 1/\tau_i)$.

Sortie :
Pour $t = 1..\infty$
  Tirer $i_1 = i \in \mathcal{M}_1$ avec probabilité s_i.
  Si $i_1 = 0$ **alors**
    Ne rien ordonnancer pendant le créneau t sur le canal $w = 1$.
  Sinon
    Ordonnancer le paquet suivant (dans l'ordre cyclique) de M_{i_1} sur le canal $w = 1$ pendant le créneau t.
  Pour $w := 2..W$
    Si $i_{w-1} = \kappa(w-1)$ **alors**
      Tirer $i_w = i \in \mathcal{M}_w$ avec probabilité $s_i/(1 - s'_{\kappa(w-1)})$.
    Sinon
      Tirer $i_w = i \in \mathcal{M}_w \cup \{\kappa(w-1)\}$ avec probabilité :
      $$\frac{s'_{\kappa(w-1)}}{1 - s_{\kappa(w-1)}}, \text{ pour } i = \kappa(w-1)$$
      $$\frac{s_i(1 - s_{\kappa(w-1)} - s'_{\kappa(w-1)})}{(1 - s'_{\kappa(w-1)})(1 - s_{\kappa(w-1)})}, \text{ sinon.}$$
    Ordonnancer le paquet suivant de M_{i_w} sur le canal w.

1), et probabilité s'_i si $i = \kappa(w-1)$. La propriété est évidente pour le premier canal. Supposons-la vraie au canal $(w-1)$. Un paquet du message $M_{\kappa(w-1)}$ a été ordonnancé avec probabilité $s_{\kappa(w-1)}$ sur le canal $(w-1)$. Ainsi un paquet du message M_i est ordonnancé par l'algorithme sur le canal w avec probabilité :

$$(1 - s_{\kappa(w-1)}) \cdot \frac{s'_{\kappa(w-1)}}{1 - s_{\kappa(w-1)}} = s'_{\kappa(w-1)}$$

D'autre part un paquet d'un message M_i, $i \in \mathcal{M}_w$ est ordonnancé avec probabilité :

$$\underbrace{s_{\kappa(w-1)} \cdot \frac{s_i}{1 - s'_{\kappa(w-1)}}}_{\text{lorsque } M_{\kappa(w-1)} \text{ est ordonnancé sur le canal précédent}} + \underbrace{(1 - s_{\kappa(w-1)}) \cdot \frac{s_i(1 - s_{\kappa(w-1)} - s'_{\kappa(w-1)})}{(1 - s_{\kappa(w-1)})(1 - s'_{\kappa(w-1)})}}_{\text{sinon}} = s_i$$

C.Q.F.D. □

Proposition 3.3 (Approximation randomisée) *Soit M un ensemble de messages et W un nombre de canaux. Et soit τ^* la solution du problème de minimisation* $\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M)$. *Soit $A = \{i : \tau^*_i = 1\}$ et $B = \{i : \tau^*_i > 1\}$. Alors, l'algorithme qui diffuse continûment les paquets de chaque de message M_i sur le canal $(W+1-i)$ pour $i \in A$, et diffuse les paquets des messages $\{M_i : i \in B\}$ selon l'algorithme 3.4 sur les canaux $1, \ldots, (W - |A|)$ est une 2-approximation.*

Preuve. Conséquence immédiate des analyses du lemme 3.7 et de la proposition 3.1. □

Approximations déterministes

La généralisation de l'algorithme glouton est très intuitive. Nous avons vu que la règle gloutonne sur un canal consiste à ordonnancer durant le créneau t le paquet suivant du message M_i qui minimise la quantité :

$$c_i - p_i \tau_i \sum_{k=1}^{\ell_i} \sigma_{i,k}$$

où $\vec{\sigma}$ est l'état au temps $(t-1)$.

Pour la dissémination sur plusieurs canaux, il s'agit de sélectionner les (au plus) W messages qui minimisent cette quantité, sachant que si cette quantité est négative, il vaut mieux ne rien ordonnancer. L'algorithme glouton 3.5 obtenu est présenté page suivante.

Algorithme 3.5 Algorithme glouton de dissémination préemptive sur W canaux

Entrées : W canaux ; (τ_i) vérifiant, pour tout i, $\tau_i \geqslant 0$, et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i \leqslant 1$.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i} < 1$ **alors**

Ajouter un message "fantôme" M_0, avec :

$$\ell_0 = 1,\, p_0 = c_0 = 0 \text{ et } \tau_0 \text{ tel que : } \frac{1}{\tau_0} = 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i}$$

Sortie :

Pour $t = 1..\infty$

Soit $\vec{\sigma}$ l'état au temps $(t-1)$ de l'ordonnancement (Définition 3.3 page 127).

Posons $f : (i \mapsto c_i - p_i \tau_i \sum_{k=1}^{\ell_i} \sigma_{i,k})$. Soit $X = \{i : i \neq 0 \text{ et } f(i) \leqslant 0\}$ et $x = \min(|X|, W)$. Soit $i_1, \ldots, i_x \in X$, tels que : $f(i_1) \leqslant \ldots \leqslant f(i_x)$.

Pour $w = 1..x$, ordonnancer le paquet du message M_{i_w} suivant dans l'ordre cyclique, sur le canal w durant le créneau t.

Ne rien ordonnancer sur les canaux $(x+1)$ à W pendant le créneau t.

Proposition 3.4 (Gloutonnisation) *L'algorithme glouton 3.5 génère un ordonnancement paquets-cyclique des paquets des messages de M dont le coût est au plus deux fois l'optimal lorsque $\tau = \tau^*$ est la solution du problème de minimisation* $\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M)$.

Preuve. La preuve est identique à celle de l'ordonnancement glouton sur un canal. On étudie de la même façon les ordonnancements $S_{j_1,\ldots,j_W}$ qui diffusent les mêmes paquets que l'ordonnancement glouton jusqu'au temps $(t-1)$ et qui ordonnancent les paquets suivants des messages $M_{j_1}, \ldots, M_{j_W}$ sur les W canaux au temps t. Comme dans le cas d'un canal, nous définissons une fonction $Y(t, S_{j_1,\ldots,j_W})$, où $S_{j_1,\ldots,j_W}$ est l'ordonnancement identique à S jusqu'à $(t-1)$ et qui ordonnance les paquets suivants des messages $M_{j_1}, \ldots, M_{j_W}$ durant le créneau t. L'étude de son espérance, sur tous les W-uplets $\langle j_1, \ldots, j_W \rangle$ suivant la distribution de l'algorithme randomisé 3.4, démontre qu'elle vaut zéro, et que le choix glouton est celui qui la maximise. On obtient ainsi de la même façon que précédemment la borne sur la performance de l'algorithme. □

On obtient enfin un ordonnancement périodique en arrêtant l'algorithme glouton au bout d'un nombre quadratique de pas. L'algorithme est présenté page ci-contre.

Algorithme 3.6 Approximation déterministe et périodique sur W canaux

Entrées : Un ensemble M de messages et un entier $T > 0$. On pose $\mathcal{L} = \ell_1 + \cdots + \ell_m$.

Calculer τ^* la solution du problème de minimisation $\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M)$.

Ordonnancer tous les paquets de chacun des messages entre les dates $t = 0$ et $t = \mathcal{L}$ sur le premier canal.

Executer T pas de l'algorithme glouton 3.5 page précédente avec $\tau = \tau^*$, dans les créneaux $t = \mathcal{L} + 1$ à $t = T + \mathcal{L}$.

Trier l'ensemble $X = \{k\tau_i^* : 1 \leqslant k \leqslant \ell_i\}$.

Pour $r = 1..m$

Soit $(k\tau_i^*)$ le $r^{\text{ième}}$ élément de X.

Ordonnancer sur le premier canal du créneau $t = T + m + r$ le paquet suivant du message M_i dans l'ordre cyclique.

Pour $i = 1..m$

Soit n_i le nombre de diffusions des paquets de M_i entre $t = 0$ et $t = (T + 2\mathcal{L})$.

Ordonnancer sur le premier canal les $((\ell_i - n_i) \mod \ell_i)$ paquets du message M_i suivants dans l'ordre cyclique à la suite de l'ordonnancement.

Théorème 3.5 (Ordonnancement périodique sur W canaux) *L'algorithme 3.6 page précédente construit un ordonnancement S_T paquets-cyclique et périodique, sur W canaux, de coût $\leqslant 2 \cdot \mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}(M)$ dès que sa période T_S est suffisamment longue :*

$$T_S \quad \geqslant \quad \frac{14}{3}\mathcal{L}^2 + 2\sum_{i=1}^{m} c_i\ell_i, \quad \text{avec } \mathcal{L} = \ell_1 + \cdots + \ell_m.$$

Nous obtenons donc en temps polynomial une 2-approximation de période quadratique en nombre total de paquets et en les coûts des messages.

Preuve. La preuve est identique à celle de l'algorithme 3.3 sur un canal. □

Remarque 3.10 Nous obtenons donc une 2-approximation en préemptant systématiquement les messages. Nous avons vu Figure 3.9 page 125 que ceci coûtait un facteur 2 par rapport au coût "idéal" suggéré par le minorant qui propose un ordonnancement fictif qui ne préempte jamais. Pour améliorer nos heuristiques nous devrons donc remettre en cause cette procédure, en préemptant moins souvent, ou bien modifier le minorant pour tenir compte de la nécessité de préempter.

Conclusions et Perspectives

Dans ce chapitre nous avons introduit et présenté un modèle préemptif naturel pour la dissémination de données. D'un point de vue pratique nous avons démontré que préempter les messages permet de réaliser un gain arbitraire sur le coût de la dissémination d'un ensemble de messages lorsque les messages ont des temps de transmission très différents. Notre étude des ordonnancements optimaux pour le cas préemptif nous a révélé que la dissémination de messages de longueur non-uniforme en présence de préemption reste NP-difficile de manière intrinsèque, c'est-à-dire sans que les coûts de diffusions soient impliqués (Théorème 3.2 page 121). Le modèle préemptif capture donc une partie de la complexité des longueurs non-uniformes bien que les paquets aient la même longueur. Rappelons que la complexité (NP-dureté) de la dissémination de messages de longueurs uniformes de coût de diffusion nuls est encore ouverte à ce jour. L'étude de la réalisabilité du minorant MN_4 nous a également révélé que le temps de service est minimisé lorsque les messages ne sont pas préemptés (Lemme 3.6 page 117). Nous avons vu cependant qu'il était impossible d'approcher ce minorant sans préemption dans le cas général (Exemple 2.2 page 61). Aussi nous avons proposé des heuristiques à un facteur constant de l'optimal pour le cas d'un nombre arbitraires de canaux (Algorithme 3.6). Notons que nous ne disposons pas actuellement de garantie de performances pour la dissémination de messages de longueurs non-uniformes sur plusieurs canaux sans préemption.

Nous avons vu également que notre cadre préemptif modélise le cas où les requêtes ne demandent plus des messages individuels mais demandent des lots de messages et sont servies lorsque tous les messages du lot demandé sont téléchargés. Le cas étudié dans ce chapitre est le cas où les messages ont la même longueur et où les lots de messages sont tous disjoints. Il serait intéressant de voir comment nous pouvons généraliser notre étude au cas où les lots ne sont pas tous disjoints. Ce problème se pose de façon concrète dans de nombreuses applications, par exemple pour la diffusion de journaux électroniques : par exemple, si A, B, C, D et E sont respectivement les informations, la météo, la page de sport, la bourse et le résultat des courses à Vincennes, et que des utilisateurs $\mathcal{A}$ demandent les informations, la météo et la bourse, c'est-à-dire le lot $\{A, B, D\}$, que des utilisateurs $\mathcal{B}$ souhaitent recevoir la page de sport, la météo et le résultat des courses, c'est-à-dire le lot $\{B, C, E\}$, et qu'enfin des utilisateurs $\mathcal{C}$ demandent les informations, la météo et le résultats des courses, c'est-à-dire le lot $\{A, B, E\}$, comment ordonnancer les messages A, B, C, D et E ? Sur cet exemple, les lots demandés ne sont plus disjoints. Notre approche dans ce chapitre est basée sur l'observation que les messages d'un lot doivent être diffusés de façon cyclique lorsque les lots sont disjoints. C'est cette observation qu'il faudrait essayer de généraliser pour traiter le cas où les lots ne sont plus disjoints. Cette étude fait partie de nos perspectives proches.

Le chapitre suivant présente une première réponse à la question de la complexité de la dissémination de messages de longueurs uniformes en proposant un schéma d'approximation.

CHAPITRE

4

Un schéma d'approximation polynomial pour la dissémination de messages de longueurs uniformes

Introduction

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes attaqués à l'étude de l'ordonnancement pour la dissémination de données lorsque les messages n'ont pas tous la même longueur. Dans ce chapitre, nous revenons sur le cas des messages de longueurs uniformes en proposant un schéma d'approximation polynomial. Plus précisément nous présentons un algorithme qui pour toute constante ε et pour tout ensemble de m messages de coûts de diffusion bornés par une constante $\mathcal{C}$, calcule en temps $\Theta(m^2)$ un ordonnancement périodique sur W canaux de période $(m^2 + m\mathcal{C})/\varepsilon$, dont le coût est à $(1 + \varepsilon)$ du coût optimal.

Notons que la NP-dureté de la dissémination de messages de longueur uniforme et de coûts de diffusion bornés, est une question encore ouverte aujourd'hui. Nous avons vu aux chapitres précédents cependant que différentes variantes sont des problèmes NP-difficiles : lorsque les coûts de diffusion ne sont pas restreints (théorème 1.2 page 40, [BNBNS98]), lorsque les messages n'ont pas tous la même longueur (théorème 2.1 page 77), ou encore lorsque les messages sont découpés en paquets de longueur unitaire (théorème 3.2 page 121) Jusqu'ici, les meilleurs algorithmes polynomiaux étaient des approximations à un facteur constant, dont le meilleur génère un ordonnancement de rapport de performance $9/8$, sans garantie sur la taille de la période (théorème 1.5 page 52, [AW87, BNBNS98]). Récemment Khanna et Zhou s'interrogeaient d'ailleurs dans [KZ98] sur l'éventuelle "non-approximabilité" du problème des longueurs uniformes sans coût de diffusion. Le résultat présenté dans ce chapitre démontre que non : le problème de la dissémination des messages de longueurs uniformes est approximable à $(1+\varepsilon)$ près.

Notons enfin que pour des raisons techniques, le problème restreint aux messages des longueurs uniformes est le modèle privilégié dans les domaines applicatifs. En effet ce modèle englobe celui des "disques diffusants" [en anglais, *broadcast disks*] qui est apparemment très utilisé dans les implémentations des systèmes de dissémination [HGLW87, BGH$^+$92, Ach98]. Si notre algorithme ne peut être utilisé directement en l'état (car le temps de calcul est très largement exponentiel en $1/\varepsilon$), les principes mis en évidence par notre méthode devraient permettre d'obtenir des heuristiques performantes en pratique.

4.1 Présentation générale

Notre étude part de la remarque suivante. Le minorant d'Ammar et Wong (Lemme 1.2 page 35, [AW85]) indique qu'"idéalement" chaque message M_i devrait être diffusé périodiquement tous les τ_i^*, où τ^* est la solution du problème de minimisation $\mathrm{MN}_1(M)$. Ainsi l'attente moyenne des requêtes pour chaque message M_i est "idéalement" $(\tau_i^*/2)$. Pour approcher ce minorant, ils proposent un algorithme randomisé (algorithme 1.2 page 45) qui diffuse dans chaque créneau le message M_i avec probabilité $(1/\tau_i^*)$. Ainsi les requêtes pour chaque message M_i sont servies en moyenne au bout de τ_i^*. Ils obtiennent alors une 2-approximation (équation 1.27 page 46).

Supposons que nous ayons regroupé en un groupe G des messages ayant même probabilité de demande et même coût. Ces messages partagent alors le même τ_i^* et sont diffusés avec la même fréquence dans l'algorithme randomisé d'Ammar et Wong. Nous *pouvons alors améliorer la diffusion des messages du groupe en les diffusant cycliquement*. En effet, dans l'algorithme initial, une requête pour un message du groupe doit attendre en moyenne $|G|$ diffusions d'un message du groupe avant d'être servie. Mais, si les messages sont diffusé de manière cyclique, cette même requête attendra en moyenne $\big((1+2+\cdots+|G|)/|G|\big) = \big((|G|+1)/2\big)$ diffusions d'un message du groupe G pour être servie. Nous réussissons ainsi à "sauver" quasiment un facteur 2. Cette version "*groupes-cyclique*" de l'algorithme randomisé d'Ammar et Wong réalise en fait une $(1+1/|G|)$-approximation du coût "idéal" pour chaque message de ce groupe. Ainsi, si nous partitionnons l'ensemble des messages en regroupant les messages de même probabilité et de même coût, nous obtenons une $(1+1/\min_G |G|)$-approximation. Le *minorant d'Ammar et Wong peut donc quasiment être atteint lorsque tous les groupes sont de grandes tailles*.

Nous procédons de la façon suivante pour étendre cette approche au cas général. Nous commençons par regrouper les messages qui ont une probabilité et un coût identique à un petit arondi près. Puis nous partitionnons les groupes en trois ensembles, $M = A \sqcup B \sqcup C$[1], tels que (Lemme 4.10 page 172) :

1. A contient un nombre *constant*, indépendant de $m, p_1, \ldots, p_m, c_1, \ldots, c_m$, de messages *importants*.
2. B contient des messages faisant partie de groupes de *grande taille*, en particulier très grande devant la taille de A.
3. C réunit des messages qui participent de façon négligeable au coût de l'ordonnancement.

L'ordonnancement est alors construit de la façon suivante. Nous commençons par ordonnancer les messages importants : ceux de A, importants par eux-mêmes, et ceux de B, importants par leur nombre (Proposition 4.2 page 166). Pour cela, nous recherchons les proportions optimales des messages de A et des messages de B dans un ordonnancement. Formellement, si nous définissons la *fréquence de diffusion* dans un ordonnancement d'un ensemble de messages comme le pourcentage de créneaux utilisés pour la diffusion de ces messages dans l'ordonnancement, nous devinons la fréquence α^* des messages A dans un ordonnancement quasi-optimal de $A \sqcup B$. Puis nous construisons un ordonnancement périodique quasi-optimal de A de fréquence de diffusion α^*. Ensuite, nous utilisons une version "groupes-cyclique" et périodique de l'algorithme glouton d'Ammar et Wong pour ordonnancer les messages de B dans les "trous" (Lemme 4.8 page 164). Les messages de C sont enfin insérés "en force" tous les $O(1/\varepsilon)$, suffisamment rarement pour ne quasiment pas augmenter le temps de service des requêtes pour A et B (Proposition 4.3 page 170).

La première difficulté est donc de trouver la bonne fréquence de diffusion α^* pour A. Pour cela nous utilisons une généralisation du minorant d'Ammar et Wong au cas où l'on impose une fréquence maximale de diffusion. Ensuite, il s'agit de trouver un ordonnancement de A de fréquence α^* et tel que l'on puisse par la suite diffuser les messages de B dans les emplacements libres. Pour cela, nous avons besoin que les emplacements libres soient bien répartis : notre ordonnancement de A est périodique de période très petite devant la taille du plus petit groupe de B. Ainsi, comme les messages sont diffusés cycliquement dans leur groupe, les emplacements vides sont répartis à peu près régulièrement du point de vue de chaque message de B. L'ordonnancement que nous obtenons finalement a une période $\Theta(m^2)$ quadratique en le nombre de messages. Une dernière étape permet de réduire la constante multiplicative et d'obtenir un ordonnancement de période $(m^2 + m\mathcal{C})/\varepsilon$ exactement en extrayant le meilleur bloc de cette taille dans l'ordonnancement précédent.

Les sections qui suivent décrivent l'algorithme par étapes. Tout d'abord la section 4.2 présente l'algorithme groupes-cycliques qui servira à ordonnancer les groupes de grandes

[1]On note $X \sqcup Y$ pour signifier que l'union de X et de Y est disjointe.

tailles (Algorithme 4.3 page 154), ainsi que son analyse (Proposition 4.1 page 153). La section 4.3 démontre comment ordonnancer les ensembles de messages A et B (Proposition 4.2 page 166). Nous verrons ensuite à la section 4.4 qu'introduire "en force" les messages de C tous les $O(1/\varepsilon)$ permet d'obtenir un ordonnancement de $M = A \sqcup B \sqcup C$ à partir d'un ordonnancement des messages de A et de B (Proposition 4.3). Enfin la dernière section 4.5 démontre à l'aide du lemme de partition (Lemme 4.10 page 172) comment nous pouvons mettre bout-à-bout les résultats des sections précédentes pour obtenir notre schéma d'approximation (Algorithme 4.5).

4.2 Ordonnancer des groupes de messages

Considérons un ensemble de messages M.

Definition 4.1 (Groupes) Nous dirons qu'un ensemble de message M est *partitionné en q groupes* $M = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$ si les messages de chaque de groupe G_j ont la même probabilité de demande p_j et le même coût c_j. On notera alors $g_j = |G_j|$ la taille du groupe G_j.

Nous allons voir dans cette section que nous pouvons améliorer les heuristiques du chapitre 1 lorsque que les messages sont regroupés.

4.2.1 Ordonnancements groupes-cycliques

Le lemme suivant valide l'approche générale.

Definition 4.2 (Groupes-cyclique) Un ordonnancement S est dit *groupes-cyclique* lorsque les messages de chaque groupe G_j sont ordonnancés de façon cyclique.

Lemme 4.1 (Ordonnancement groupes-cyclique) *Soit M un ensemble de messages partitionné en q groupes $M = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$ et S un ordonnancement de M. Alors il existe un ordonnancement groupes-cyclique S' de M dont le coût est au plus celui de S :*

$$\mathrm{COUT}(S') \leqslant \mathrm{COUT}(S)$$

De plus, si S est périodique et n'est pas groupes-cyclique, alors : $\mathrm{COUT}(S') < \mathrm{COUT}(S)$.

Pour la démonstration de ce lemme et pour la suite, posons la définition suivante.

Definition 4.3 (emplacement) L'emplacement (w, t) d'un ordonnancement S correspond au créneau de diffusion du canal w durant la période de temps $[t-1, t]$. Nous dirons qu'un emplacement (w, t) de S est *vide*, si S ne diffuse aucun message sur le canal w durant le créneau t. Un emplacement vide sera aussi appelé un *trou*.

Preuve du Lemme 4.1. L'argument est très semblable à celui du lemme 3.1. Soit S un ordonnancement des messages de M. Pour chaque groupe G_j, considérons une requête arrivant à un instant t qui demande un message aléatoire du groupe G_j. L'attente moyenne de cette requête est minimisée si et seulement si les g_j messages du groupe G_j sont diffusés dans les g_j emplacements réservés à la diffusion des messages du groupe G_j juste après la date t dans S. Ainsi s'il on réordonnance les messages de chaque groupe de manière cyclique dans les emplacements réservés à la diffusion de ce groupe dans S, l'ordonnancement groupes-cyclique S' obtenu a le même coût de diffusion que S et au plus le même temps de service. De plus si S est périodique de période T, S' est aussi périodique de période inférieure à $(T \prod_{j=1}^{q} g_j)$. Enfin si S est périodique mais n'est pas groupes-cyclique, alors S' est strictement meilleur. □

Remarque 4.1 (Réécriture du minorant d'Ammar et Wong avec des groupes) Soit M un ensemble de messages partitionné en q groupes $M = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$. Considérons le problème de minimisation $\mathrm{MN}_1(M)$ (lemme 1.2 page 35) définissant un minorant sur le coût de tout ordonnancement de M sur un canal. La solution τ^* de $\mathrm{MN}_1(M)$ est unique. Or, les g_j messages du groupe G_j ont les mêmes probabilités et les mêmes coûts. Donc, par unicité de la solution, ils ont le même τ_i^*. Ainsi nous pouvons définir $\tau_j^* = (\tau_i^*/g_j)$ pour chaque groupe G_j où M_i est un message quelconque de G_j, et réécrire le problème de minimisation $\mathrm{MN}_1(M)$ de la façon suivante :

$$\mathrm{MN}_1(M) \begin{cases} \min\limits_{\tau>0} \ 1 + \sum\limits_{j=1}^{q} \left(\dfrac{p_j g_j^2 \tau_j}{2} + \dfrac{c_j}{\tau_j} \right) \\ \text{Sur le domaine:} \quad \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{1}{\tau_j} \leqslant 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

4.2.2 Approximation groupes-cyclique

Nous l'avons expliqué ci-dessus, nous pouvons optimiser les algorithmes d'approximation en ordonnançant de façon cyclique les messages d'un même groupe. Nous obtenons alors l'algorithme randomisé 4.1 page suivante pour la dissémination sur un canal. Nous verrons dans la section suivante comment nous pourrons simplement transposer cet ordonnancement sur plusieurs canaux.

Lemme 4.2 (Algorithme groupes-cyclique randomisé) *Soit $M = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$ un ensemble de messages partitionné en groupes. L'algorithme 4.1 page suivante génère un or-*

Algorithme 4.1 Approximation groupes-cyclique randomisée sur un canal

Entrées : Une partition en q groupes des messages $M = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$ et $\tau_1, \ldots, \tau_q$ strictement positifs et tels que : $\sum_{j=1}^{q} 1/\tau_j \leqslant 1$

Poser $\tau_0 > 0$ tel que : $1/\tau_0 = 1 - \sum_{j=1}^{q} 1/\tau_j$.

Sortie :

Pour $t = 1..\infty$

Tirer $j \in \{0, \ldots, q\}$ avec probabilité $1/\tau_j$.

Si $j = 0$ **alors**

Ne rien diffuser pendant le créneau t.

Sinon

Diffuser le message suivant du groupe G_j dans l'ordre cyclique.

donnancement aléatoire S sur un canal dont le coût a pour espérance :

$$\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S)] = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{q} \left(p_j \frac{g_j(g_j+1)}{2} \tau_j + \frac{c_j}{\tau_j} \right) \tag{4.2}$$

Si $(\tau_j)_{j=1..q} = (\tau_j^*)_{j=1..q}$ est la solution de la version "groupes" du minorant $\mathrm{MN}_1(M)$ (remarque 4.1 page précédente), alors l'algorithme 4.1 est une $(1 + 1/\min_j g_j)$-approximation.

Preuve. Soit S l'ordonnancement généré par l'algorithme 4.1. Dans S, un message du groupe G_j est ordonnancé dans chaque créneau de temps avec probabilité $(1/\tau_j)$. L'espérance de la fréquence des messages de chaque groupe G_j est donc $(1/\tau_j)$. Ainsi, l'espérance du coût de diffusion moyen de S vaut : $\mathbb{E}[\mathrm{CD}(S)] = \sum_{j=1}^{q} 1/\tau_j$.

L'analyse du temps de service a déjà été esquissée Section 4.1. Comme nous l'avons vu, l'optimisation groupes-cyclique va nous permettre d'améliorer le temps de service des requêtes. Pour tout j, un message du groupe G_j est diffusé avec probabilité $(1/\tau_j)$ dans chaque créneau. Le temps moyen pour télécharger le prochain message du groupe G_j à partir d'une date t entière est donc τ_j. Une requête demande avec probabilité $(g_j p_j)$ un message tiré uniformément dans le groupe G_j. Elle attend alors en moyenne $(1/2)$ la fin du créneau courant. Si l'on note $(X_k)_{k=1..g_j}$ les variables aléatoires du temps nécessaire au téléchargement du $k^{\text{ième}}$ message du groupe G_j à partir de la fin de ce créneau, la linéarité de l'espérance donne que : $\mathbb{E}[X_k] = (k\tau_i)$. Ainsi comme la requête demande chacun des messages avec la même probabilité, elle attend en moyenne $((1 + \cdots + g_j)\tau_j/g_j) = (g_j +$

$1)\tau_j/2$. Le temps de service moyen de l'ordonnancement S est donc :

$$\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(S)] = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{q} p_j \frac{g_j(g_j+1)}{2}\tau_j$$

Ainsi si $\tau = \tau^*$ est la solution de la version "groupes" de $\mathrm{MN}_1(M)$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{COUT}(S)] &\leqslant \left(1 + \frac{1}{\min_j g_j}\right)\left\{1 + \sum_{j=1}^{q}\left(p_j \frac{g_j^2}{2}\tau_j^* + \frac{c_j}{\tau_j^*}\right)\right\} \\ &\leqslant \left(1 + \frac{1}{\min_j g_j}\right)\mathrm{MN}_1(M),\end{aligned}$$

et nous obtenons une $(1 + 1/\min_j g_j)$-approximation randomisée. □

Remarque 4.2 Si tous les groupes sont de tailles supérieures à $1/\varepsilon$, nous obtenons une $(1+\varepsilon)$-approximation.

4.2.3 Dérandomisation

Ordonnancement glouton. Nous souhaitons obtenir une approximation déterministe pour pouvoir garantir d'une part une borne sur la taille de la période de l'ordonnancement généré et d'autre part un temps de calcul polynomial. Nous allons donc entreprendre de dérandomiser l'heuristique groupes-cyclique précédente par la méthode que nous connaissons bien maintenant. Notons que bien que la technique soit similaire, l'analyse est différente du cas préemptif (chapitre précédent) puisque l'on cherche pas à télécharger tous les messages d'un groupe, mais l'un en particulier.

Definition 4.4 (Etat) L'*état* à la date t d'un ordonnancement S groupes-cyclique dun ensemble de messages M partitionné en groupes $M = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$ est le q-uplet $\vec{\sigma}(t) = \langle \vec{\sigma}_1(t), \ldots, \vec{\sigma}_q(t) \rangle$ où $\vec{\sigma}_j(t)$ est le vecteur de taille g_j dont la $k^{\text{ième}}$ coordonnée $\sigma_{j,k}(t)$ est le temps écoulé depuis le début de la $k^{\text{ième}}$ des g_j dernières diffusions d'un message du groupe G_j jusqu'à la date t, comme illustré Figure 4.1.

Lemme 4.3 (Algorithme groupes-cyclique glouton) *Soit $M = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$ un ensemble de messages partitionné en groupes. L'algorithme 4.2 page suivante génère un ordonnancement S sur un canal dont le coût est majoré par :*

$$\mathrm{COUT}(S) \leqslant \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{q}\left(p_j \frac{g_j(g_j+1)}{2}\tau_j + \frac{c_j}{\tau_j}\right) \tag{4.3}$$

Algorithme 4.2 Approximation groupes-cyclique gloutonne sur un canal

Entrées : $\tau_1, \ldots, \tau_q$ strictement positifs et tels que : $\sum_{j=1}^{q} 1/\tau_j \leqslant 1$

Poser $p_0 = c_0 = 0$ et $\tau_0 > 0$ tel que : $1/\tau_0 = 1 - \sum_{j=1}^{q} 1/\tau_j$.

Sortie :

Pour $t = 1..\infty$

Soit $\vec{\sigma}$ l'état de l'ordonnancement à la date $(t-1)$ (Définition 4.4 page précédente).

Choisir $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$ qui minimise la quantité suivante :

$$\left(c_j - p_j \tau_j \sum_{k=1}^{g_j} \sigma_{j,k} \right)$$

Si $j = 0$ **alors**

Ne rien ordonnancer durant le créneau t

Sinon

Ordonnancer durant le créneau t, le message suivant du groupe G_j dans l'ordre cyclique.

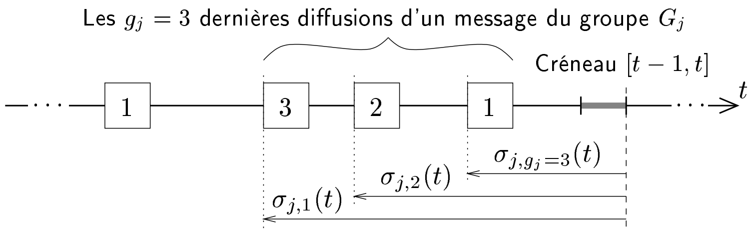


FIG. 4.1 : *Définition de l'état $\vec{\sigma}_j(t)$.*

Si $(\tau_j)_{j=1..q} = (\tau^*_j)_{j=1..q}$ est la solution de la version "groupes" du minorant $\mathrm{MN}_1(M)$ (remarque 4.1 page 147), alors l'algorithme 4.2 est une $(1 + 1/\min_j g_j)$-approximation.

Preuve. Le principe de la preuve de cette heuristique est le même qu'aux chapitres précédents. Soit S_G, l'ordonnancement glouton généré par l'algorithme groupes-cyclique glouton 4.2. Posons : $\mathrm{MOY} =_{\text{def}} \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{q} \left(p_j \frac{g_j(g_j+1)}{2} \tau_j + \frac{c_j}{\tau_j} \right)$. Nous introduisons la fonction :

$$Y(S,t) =_{\text{def}} \mathrm{MOY} - \mathrm{CD}(S,[t-1,t]) - \mathrm{ARM}(S,[t-2,t-1]) + 1 + \Phi(S,t-1) - \Phi(S,t)$$

où Φ est une fonction potentielle positive et nulle en $t = 0$, que nous allons définir à l'instar des chapitres précédents comme l'espérance de l'attente cumulée des requêtes arrivées avant la date t et qui n'ont pas été servies à cette date, si l'ordonnancement était généré par l'algorithme groupes-cyclique randomisé 4.1 après la date t. Le but est de démontrer que pour t, $Y(S_G, t) \geqslant 0$. Ainsi, en sommant de $t = 1$ à $t = T + 1$, nous aurons que $\sum_{t=1}^{T+1} Y(S_G, t) \geqslant 0$, c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}(T+1)\,\mathrm{RCOUT}(S,[0,T]) &\leqslant \sum_{t=1}^{T+1} \big(\mathrm{CD}(S,[t-1,t]) + \mathrm{ARM}(S,[t-2,t-1]) + 1\big) \\ &\leqslant (T+1)\,\mathrm{MOY} - \underbrace{\Phi(S_G, T+1)}_{\geqslant 0}\end{aligned}$$

Ce qui impliquera, grâce au théorème de réversibilité que : $\mathrm{COUT}(S_G) = \mathrm{RCOUT}(S_G) \leqslant \mathrm{MOY}$.

Considérons l'état $\vec{\sigma}(S,t)$ d'un ordonnancement S à la date t. A la date t, $p_j \sigma_{j,k}(S,t)$ requêtes ont demandé le $k^{\text{ième}}$ message du groupe G_j et seraient servies en moyenne au bout de $(k\tau_j)$ temps si l'ordonnancement était généré par l'algorithme randomisé après la date t. Nous définissons donc la fonction potentielle par :

$$\Phi(S,t) =_{\text{def}} \sum_{j=1}^{q} p_j \sum_{k=1}^{g_j} \sigma_{j,k}(S,t) \cdot k\tau_j$$

Remarquons que pour tout t, $\Phi(S,t) \geqslant 0$ et que $\Phi(S,0) = 0$.

Pour $0 \leqslant l \leqslant q$, soit S_l l'ordonnancement identique à l'ordonnancement glouton S_G sur l'intervalle $[0, t-1]$ et qui, si $l > 0$, ordonnance le message suivant dans l'ordre cyclique du groupe G_l durant le créneau t, et qui n'ordonnance rien sinon. Nous allons démontrer que :

$$\mathbb{E}_{1/\tau_l}[Y(S_l,t)] = 0,$$

puis que le choix glouton est bien celui qui maximise $Y(S_l,t)$ ce qui terminera la preuve. Notons que $\vec{\sigma}(t-1, S_l) = \vec{\sigma}(t-1, S_G)$. Ainsi, l'attente en arrière moyenne pour le $k^{\text{ième}}$ message du groupe G_j sur la période $[t-2, t-1]$ vaut $\big(\sigma_{j,k}(t-1, S_G) - 1/2\big)$. Donc :

$$\text{ARM}(S_G, [t-2, t-1]) = -\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{q} p_j \sum_{k=1}^{g_j} \sigma_{j,k}(t-1, S_G) \tag{4.4}$$

L'état au temps t de l'ordonnancement S_l s'exprime par :

$$\begin{aligned}
\text{pour } j \neq l, \quad & \sigma_{j,k}(t, S_l) = \sigma_{j,k}(t-1, S_G) + 1, \quad \text{pour } k = 1..g_j \\
\text{et pour } l \neq 0, \quad & \sigma_{l,g_l}(t, S_l) = 1 \\
\text{et} \quad & \sigma_{l,k}(t, S_l) = \sigma_{l,k+1}(t-1, S_G) + 1, \quad \text{pour } k = 1..(g_l - 1)
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors que :

$$\Phi(S_l, t-1) - \Phi(S_l, t) = -\sum_{j=1}^{q} p_j \frac{g_j(g_j+1)}{2} \tau_j + p_l \tau_l \sum_{k=1}^{g_l} \sigma_{j,k}(t-1, S_G) \tag{4.5}$$

Ainsi en sommant les équations (4.4) et (4.5), nous obtenons que :

$$Y(S_G, t) = \sum_{j=1}^{q} \frac{c_j}{\tau_j} - c_l - \sum_{j=1}^{q} p_j \sum_{k=1}^{g_j} \sigma_{j,k}(t-1, S_G) + p_l \tau_l \sum_{k=1}^{g_l} \sigma_{l,k}(t-1, S_G)$$

Comme $\sum_{j=0}^{q} 1/\tau_j = 1$ nous obtenons alors que :

$$\sum_{j=0}^{q} \frac{1}{\tau_l} Y(S_l, t) = 0$$

Notons finalement, que :

$$Y(t, S_l) = Y(t, S_0) - \left(c_l - p_l \tau_l \sum_{k=1}^{g_l} \sigma_{l,k}(t-1, S_G) \right)$$

Nous reconnaissons donc que le groupe G_l choisi par l'algorithme glouton et qui minimise $\left(c_l - p_l\tau_l \sum_{k=1}^{g_l} \sigma_{l,k}(t-1, S_G)\right)$, maximise $Y(t, S_l)$. Le choix glouton assure donc que : $Y(S_G, t) \geqslant 0$ pour tout t. $\square$

Remarque 4.3 (De bonnes performances "en pratique") L'algorithme glouton 1.3 a expérimentalement d'excellentes performances [AW85, AW87], bien meilleures que le facteur de performance 2 démontré par Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber dans [BNBNS98].
En fait, les distributions de probabilités utilisés dans les tests d'Ammar et Wong suivent la distribution de Zipf. Les messages les plus importants ont donc des probabilités similaires. Or, l'algorithme glouton d'Ammar et Wong sélectionne le message dont l'attente en arrière cumulée est la plus grande. Ainsi, lorsque plusieurs messages ont même probabilité, ils sont naturellement ordonnancés de façon cyclique. L'analyse précédente permettrait donc d'expliquer les bonnes performanaces expérimentales.

Génération d'un ordonnancement périodique. Afin d'obtenir une description courte de l'ordonnancement généré, nous souhaitons générer un ordonnancement périodique. L'algorithme 4.3 page suivante procède comme dans l'algorithme 4.2, en faisant boucler l'ordonnancement sur lui-même au bout d'un nombre quadratique de pas.

Proposition 4.1 (Algorithme glouton périodique) *Soit $M = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$ un ensemble de messages partitionné en groupes. L'algorithme 4.3 page suivante génère un ordonnancement S sur un canal périodique de période $(T + 2m)$ et dont le coût est majoré par :*

$$\mathrm{COUT}(S) \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{q} \left(p_j \frac{g_j(g_j+1)}{2} \tau_j + \frac{c_j}{\tau_j} \right),$$

lorsque la période $(T + 2m)$ de l'ordonnancement vérifie : $T + 2m \geqslant 9m^2 + 4 \sum_{i=1}^{m} c_i$.
Ainsi, si $\tau = \tau^*$ est la solution de la version "groupes" du minorant $\mathrm{MN}_1(M)$, et que T vérifie la condition ci-dessus, nous obtenons une $(1 + 1/\min_j g_j)$-approximation.

Preuve. La preuve est essentiellement la même qu'aux chapitres précédents. L'idée est d'utiliser le coût prépayé dans le potentiel pour compenser le surcoût dû à l'ajout des m messages aux extrémités de la période.

Algorithme 4.3 Approximation groupes-cyclique périodique sur un canal

Entrées : T un entier et des nombres $\tau_1, \dots, \tau_q$ strictement positifs et tels que : $\sum_{j=1}^{q} 1/\tau_j \leqslant 1$

Sortie :

Pour $t = 1..m$

Ordonnancer le message M_t dans le créneau t.

Exécuter T pas de l'algorithme glouton 4.2 dans les créneaux $t = m + 1$ à $t = T + m$.

Trier par ordre croissant l'ensemble $X = \{k\tau_j : 1 \leqslant j \leqslant q; 1 \leqslant k \leqslant g_j\}$.

Pour $r = 1..m$

Soit $(k\tau_j)$ le $r^{\text{ième}}$ élément de X.

Ordonnancer dans le créneau $(T + m + r)$ le message suivant du groupe G_j dans l'ordre cyclique.

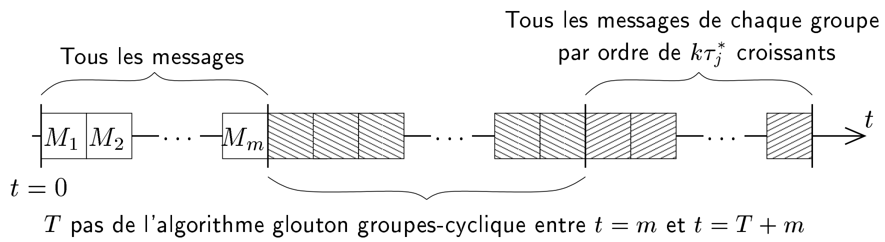


FIG. 4.2 : *Construction de l'ordonnancement périodique.*

Notons que contrairement au chapitre nous n'avons pas besoin d'assurer la groupes-cyclicité de l'ordonnancement car nous avons prouvé la réversibilité du coût pour tout ordonnancement et pas seulement pour les ordonnancements groupes-cycliques.

Nous allons estimer le coût de cet ordonnancement en majorant son rétro-coût. D'après l'analyse de l'algorithme glouton, le rétro-coût cumulé sur la période $[m, T+m]$ est majoré par :

$$\mathrm{RCOUT}(S, [m, T + m]) \leqslant (T + 1)\,\mathrm{MOY} + \Phi(S, m) - \Phi(S, T + m)$$

Remarquons que $\Phi(S, m) = \sum_{j=1}^{q} p_j \tau_j \sum_{k=1}^{g_j} k \cdot \sigma_{j,k}(m, S) \leqslant \sum_{j=1}^{q} p_j \tau_j \frac{g_j(g_j+1)}{2} \cdot m$. Ainsi :

$$\Phi(S, m) \leqslant m\,\mathrm{MOY} \tag{4.6}$$

Considérons à présent le rétro-coût sur la période $[T+m, T+2m] \cup [0,T]$. Le coût de diffusion est clairement :

$$\mathrm{CD}(S, [T+m, T+2m] \cup [0,T]) = 2\sum_{i=1}^{m} c_i \tag{4.7}$$

Ensuite, notons $(T+m+t_{j,k})$ la date du début de la diffusion du $k^{\text{ième}}$ message du groupe G_j après la date $t = (T+m)$ dans S. L'attente en arrière moyenne pour le $k^{\text{ième}}$ message du groupe $G_{j,k}$ sur la période $[T+m, T+m+t_{j,k}]$ vaut $(t_{j,k}/2 + \sigma_{j,k}(S, T+m))$. La somme de l'attente en arrière moyenne sur ces périodes et du temps de téléchargement est donc :

$$\sum_{j=1}^{q} p_j \sum_{k=1}^{g_j} t_{j,k} \left(\frac{t_{j,k}}{2} + \sigma_{j,k}(S, T+m) + 1 \right)$$

Or, $\sum_{j=1}^{q} p_j g_j = 1$ et $(t_{j,k}+1) \leqslant \min(m, k\tau_j)$ par construction ($\sum_{j=1}^{q} 1/\tau_j \leqslant 1$), nous pouvons donc majorer cette expression par :

$$\frac{m^2}{2} + \sum_{j=1}^{q} p_j \sum_{k=1}^{g_j} \sigma_{j,k}(S, T+m) k\tau_j \leqslant \frac{m^2}{2} + \Phi(S, T+m) \tag{4.8}$$

Enfin, considérons l'attente en arrière pour les messages sur les périodes $[T+m+t_{j,k}, T+2m] \cup [0,T]$. La somme de l'attente en arrière moyenne et du temps de téléchargement est majorée par $2m$. La contribution au rétro-coût de cette période est donc majorée par :

$$4m^2 \tag{4.9}$$

En sommant les équations (4.6), (4.7), (4.8) et (4.9), nous obtenons donc le majorant suivant sur le rétro-coût et donc sur le coût de l'ordonnancement périodique S :

$$(T+2m)\,\mathrm{COUT}(S) \leqslant (T+m+1)\,\mathrm{MOY} + \frac{9m^2}{2} + 2\sum_{i=1}^{m} c_i$$

Ainsi :

$$\mathrm{COUT}(S) \leqslant \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{q} p_j \frac{g_j(g_j+1)}{2}\tau_j \right\} + \frac{9m^2/2 + 2\sum_{i=1}^{m} c_i}{T+2m} - \frac{1}{2}$$

Nous obtenons donc bien l'approximation souhaitée dès que $T + 2m \geqslant 9m^2 + 4\sum_{i=1}^{m} c_i$.
□

Nous savons donc construire un ordonnancement quasi-optimal d'un ensemble de messages partitionné en groupes de taille supérieure à $1/\varepsilon$. La section suivante étudie comment ordonnancer en même temps un nombre constant de messages.

4.3 Ordonnancer des grands groupes et un nombre constant de messages

Cette partie est le cœur de l'algorithme. Nous y exposons comment construire un ordonnancement quasi-optimal d'un ensemble de messages M supposé partitionné en deux sous-ensembles $M = A \sqcup B$, tels que :

1. A est constitué d'un nombre constant de messages.
2. B est partitionné en q groupes $B = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$ de grande taille : pour tout $1 \leqslant j \leqslant q$, nous avons $g_j \geqslant \kappa(\varepsilon)|A|^2$, où $\kappa(\varepsilon)$ sera défini plus tard.

L'idée est de deviner la bonne fréquence de diffusion α^* pour les message de A, puis d'ordonnancer quasi-optimalement les deux ensembles A et B à fréquences. Trouver α^* se fait essentiellement par recherche exhaustive. Pour chaque fréquence α, il faut estimer les contributions de A et B au coût de l'ordonnancement. Pour estimer la contribution au coût des messages de B nous allons utiliser une variante du minorant d'Ammar et Wong, puisque nous avons vu à la section précédente que ce minorant est très proche de l'optimal. L'estimation de la contribution de A est plus délicate. Nous allons démontrer qu'il existe une *constante* qui borne la période d'ordonnancements quasi-optimaux qui diffusent les messages de A quasiment à cette fréquence. Nous pourrons donc estimer la contribution de A par simple énumération des ordonnancements. Ce résultat nous permettra également de démontrer que l'on peut ordonnancer les messages de B dans les emplacements vides de l'ordonnancement de A à l'aide de l'algorithme glouton groupes-cyclique et périodique 4.3 de la section précédente.

4.3.1 Fréquences de diffusion

Soient M un ensemble de messages, $A \subseteq M$ et S un ordonnancement des messages de M.

Definition 4.5 (Contribution) La *contribution au coût* de l'ordonnancement S des messages de A, notée $\mathrm{COUT}(S, A)$, est définie par :

$$\mathrm{COUT}(S, A) = \sum_{M_i \in A} \big(p_i \,\mathrm{TSM}(S, M_i) + \mathrm{CD}(S, M_i)\big)$$

de sorte que le coût d'un ordonnancement S est la somme des contributions de A et de $(M \setminus A) = B$.

Definition 4.6 (Fréquence de diffusion) Si l'on note $n(S, A, I)$ le nombre d'emplacements utilisés pour la diffusion d'un message de A dans l'ordonnancement S pendant l'intervalle de diffusion I, la *fréquence de diffusion* des messages de A dans l'ordonnancement S, notée $\alpha(S, A) \in [0, 1]$, est définie comme :

$$\alpha(S, A) = \limsup_{T \to \infty} \frac{n(A, S, [0, T])}{W \cdot T}$$

Si S est périodique de période T, la fréquence de diffusion de A se simplifie en :

$$\alpha(S, A) = \frac{n(S, A, [0, T])}{WT}$$

La *fréquence de diffusion* d'un ordonnancement S, noté $\alpha(S)$ est le pourcentage d'emplacements utilisés pour la diffusion des messages : $\alpha(S) = \alpha(S, M)$.

Definition 4.7 (Contribution optimale à fréquence fixée) La *contribution optimale à fréquence de diffusion* α d'un ensemble de message A, notée $\mathrm{OPT}(A, \alpha)$, est le coût minimal induit par les messages de A s'ils sont diffusés à la fréquence α dans un ordonnancement :

$$\mathrm{OPT}(A, \alpha) = \inf_{S \,:\, \alpha(S,A)=\alpha} \mathrm{COUT}(S, A)$$

Le minorant suivant, qui généralise légèrement le minorant MN'_1 page 37, va nous permettre d'estimer la contribution des messages de B.

Lemme 4.4 (Minorant) *Soit M un ensemble de message et $B \subseteq M$ un sous-ensemble partitionné en groupes $B = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$. Alors le problème de minimisation $\mathrm{MN}_5(B, \alpha)$ suivant est un minorant sur la contribution de l'ensemble B au coût de tout ordonnancement qui diffuse les messages de B avec une fréquence inférieure ou égale à α :*

$$\mathrm{MN}_5(B, \alpha) \begin{cases} \min_{\tau > 0} \; 1 + \sum_{j=1}^{q} \left(\frac{p_j g_j^2 \tau_j}{2} + \frac{c_j}{\tau_j} \right) \\ \text{Sur le domaine:} \quad \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{\tau_j} \leqslant \alpha \cdot W \end{cases} \tag{4.10}$$

Ce problème de minimisation admet une unique solution τ^*, telle que :

$$\tau_j^* = \frac{1}{g_j}\sqrt{\frac{2c_j + \lambda^*}{p_j}}, \quad \textit{avec } \lambda^* \geqslant 0,$$

avec : si $\sum_{j=1}^q g_j \sqrt{p_j/(2c_j)} \leqslant W$, alors $\lambda^* = 0$; et sinon, λ^* est l'unique solution de l'équation : $\sum_{j=1}^q g_j \sqrt{p_j/(2c_j + \lambda^*)} = \alpha W$.

Preuve. Il s'agit d'une généralisation immédiate du minorant d'Ammar et Wong. Pour cela nous avons besoin de démontrer de nouveau la densité des ordonnancements périodiques d'une fréquence donnée autour de l'optimal. La démonstration de ce lemme de densité est similaire aux lemmes de densités des chapitres précédents.

De même que précédemment, $\sum_{j=1}^q 1/\tau_j$ est le nombre moyen d'emplacements utilisés pour la diffusion des messages de B par unité de temps. Comme la fréquence de diffusion de B est majorée par α nous obtenons bien la contrainte : $\sum_{j=1}^q 1/\tau_j \leqslant \alpha W$. □

4.3.2 Borner la période d'un ordonnancement quasi-optimal de A

Nous allons démontrer dans cette section que nous pouvons nous restreindre à l'exploration d'un nombre *constant* d'ordonnancements des messages de A.

Lemme 4.5 (Borner la période de A**)** *Soit M un ensemble de messages de coûts de diffusion bornés par $\mathcal{C}$, et $A \subseteq M$. Pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et toute fréquence de diffusion $0 < \alpha < 1$, il existe un ordonnancement S périodique sur W canaux des messages de A tel que :*

1. *La fréquence des emplacements vides dans S est approximativement au moins $(1 - \alpha)$:*
$$1 - \alpha(S) \quad \geqslant \quad (1-\varepsilon)(1-\alpha) \quad \textit{et} \quad \alpha(S) \in]0,1[$$
2. *Le coût de S est quasi-optimal :*
$$\mathrm{COUT}(S, A) \leqslant (1+\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(A, \alpha) + \varepsilon/2$$
3. *La période T_S de S est quadratique en la taille de A :*
$$T_S \leqslant \frac{80\ln(1 + 4/\varepsilon)}{\varepsilon^4(1-\varepsilon/6)} \max(\mathcal{C}, 1) \cdot |A|^2$$

Remarque 4.4 La condition 1 garantit qu'il reste suffisamment de place pour ordonnancer les messages de B.

La preuve de ce lemme repose sur un couper-coller aléatoire avec des morceaux d'un ordonnancement quasi-optimal de A. Un argument probabiliste va nous démontrer qu'il suffit d'échantillonner un nombre fini de morceaux de cet ordonnancement pour obtenir un ordonnancement périodique quasi-optimal, ayant quasiment la bonne fréquence. Pour cela, nous avons besoin de pouvoir "découper en morceaux *indépendants*" un ordonnancement. Le lemme suivant démontre que l'on peut insérer des trous de taille arbitraire à intervalles réguliers dans un ordonnancement pour un surcoût faible. Pour prouver le lemme 4.5, nous remplirons ces trous avec tous les messages de A de sorte à créer des blocs qui auront une "interface" commune et seront donc indépendants (*cf.* illustration Figure 4.4 page 162). Nous pourrons alors échantillonner ces blocs et démontrer le lemme.

Le lemme suivant montre qu'on peut faire une pause dans un ordonnancement une fois de temps à autre pour un surcoût négligeable.

Lemme 4.6 (Etirer un ordonnancement) *Soit $0 < \varepsilon < 1/2$, S un ordonnancement de $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ sur W canaux et deux entiers y et κ tels que :*

$$\kappa \geqslant \frac{y^2 + y}{\varepsilon} - y$$

Soit S' l'ordonnancement obtenu à partir de S en insérant y créneaux vides aux dates $x, x + \kappa, \ldots, x + u \cdot \kappa, \ldots$, où x est tiré au hasard uniformément dans $\{0, \ldots, \kappa - 1\}$ (cf. illustration Figure 4.3 page suivante). Alors :

$$\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(S')] \leqslant (1 + \varepsilon)\,\mathrm{TSM}(S)$$

En particulier il existe $x_0 \in \{0, \ldots, \kappa - 1\}$ tel que le temps de service de l'ordonnancement S' soit inférieur à $(1 + \varepsilon)\,\mathrm{TSM}(S)$.

Preuve. Commençons par remarquer que le coût de diffusion de S' est strictement inférieur à celui de S.
Dans S', considérons une requête Q pour le message M_i. Soit $\mathcal{E}_1$ l'événement que Q arrive en dehors des créneaux vides insérés. Le temps de service moyen de cette requête vaut :

$$\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(Q, S')] = \frac{\kappa}{\kappa + y}\,\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(Q, S')|\mathcal{E}_1] + \frac{y}{\kappa + y}\,\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(Q, S')|\overline{\mathcal{E}}_1]$$

Si Q arrive dans les créneaux vides insérés dans S, elle attendra en moyenne $(y/2)$ la fin du bloc de créneaux vides. Puis si l'on note ℓ, le nombre de créneaux jusqu'au la diffusion du message M_i dans S à partir du point d'insertion, et ℓ' la longueur correspondante dans S', nous avons que : $\ell' \leqslant (1 + y/\kappa)\ell$. Ainsi la requête sera donc servie au bout de $(\frac{y}{2} + \ell(1 + \frac{y}{\kappa}) + 1) \leqslant y(\frac{3}{2} + \ell)$ au plus tard dans S'. Comme le point d'insertion est choisi aléatoirement,

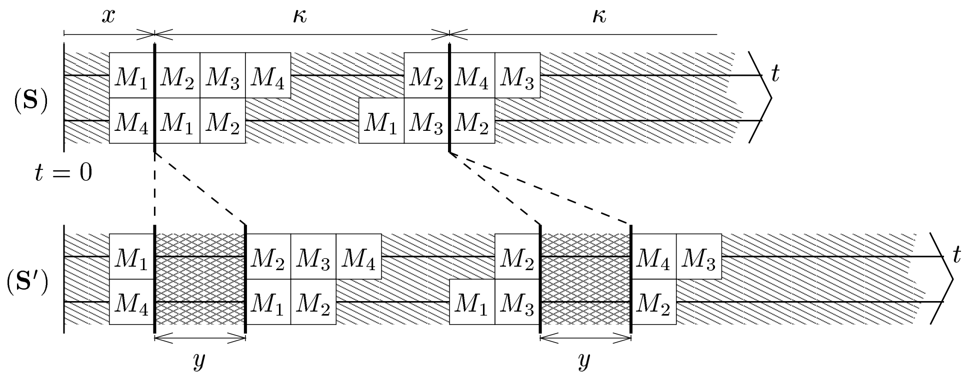


FIG. 4.3 : *Etirer un ordonnancement.*

$\mathbb{E}[\frac{3}{2} + \ell] = \mathrm{TSM}(S, M_i)$ et donc :

$$\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(Q, S')|\overline{\mathcal{E}}_1] \leqslant y\,\mathrm{TSM}(S, M_i) \tag{4.11}$$

*Si Q arrive en dehors des créneaux vides insérés dans S,*soit Q_1 la requête arrivant dans le même créneau au même moment dans S. Q_1 est servie en moyenne au bout de $1/2 + \ell + 1$, où ℓ est le nombre de créneaux jusqu'au début de la diffusion suivante de M_i. L'espérance du temps de service pour la requête Q dans S' est donc $3/2 + \mathbb{E}[\ell']$, où ℓ' est l'équivalent de ℓ dans S'. En moyenne, l'intervalle entre chaque créneau est augmenté de y/κ, et donc par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}[\ell'] = \ell + (\ell+1)y/\kappa$. Ainsi le temps de service moyen pour la requête Q vaut : $3/2 + \ell(1 + \frac{y}{\kappa}) + \frac{y}{\kappa} \leqslant \mathrm{TSM}(Q_1, S)(1 + \frac{2y}{\kappa})$. Nous en concluons que :

$$\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(Q, S')|\overline{\mathcal{E}}_1] \leqslant \mathrm{TSM}(S, M_i) \cdot \left(1 + \frac{2y}{\kappa}\right) \tag{4.12}$$

La somme pondérée des équations (4.11) et (4.11) donne finalement que :

$$\mathbb{E}[\mathrm{TSM}(S', M_i)] \leqslant (1+\varepsilon)\,\mathrm{TSM}(S, M_i), \quad \text{par construction de } \kappa.$$

C.Q.F.D. □

Preuve du Lemme 4.5.

Réduction. Tout d'abord, remarquons que nous pouvons supposer que $\alpha \leqslant (1 - \varepsilon/10)$, quitte à augmenter le coût optimal de $(1+\varepsilon/10)$. En effet, si $\alpha \geqslant (1-\varepsilon/10)$, considérons un ordonnancement optimal S de fréquence α des messages de A et de coût $\mathrm{OPT}(A, \alpha)$. Soit

S' l'ordonnancement construit à partir de S en insérant un créneau vide tous les $(10/\varepsilon - 1)$ à partir d'un point de départ aléatoire. Le lemme d'étirement ($y = 1$ et $\kappa = 10/\varepsilon - 1$) nous assure qu'il existe un point de départ tel que :

$$\mathrm{COUT}(S') \leqslant (1 + \varepsilon/5)\,\mathrm{OPT}(A, \alpha)$$

Et, la densité de S' est exactement : $(1 - \varepsilon/10)\alpha \leqslant (1 - \varepsilon/10)$. Remarquons que cette supposition facilite l'obtention de premier fait du lemme.

Découper l'ordonnancement en blocs indépendants. Considérons, par densité, S^* un ordonnancement quasi-optimal périodique de A ayant pour fréquence de diffusion α et tel que :

$$\mathrm{COUT}(S^*, A) \leqslant \frac{1 + 2\varepsilon/3}{(1 + \varepsilon/3)(1 + \varepsilon/4)}\,\mathrm{OPT}(A, \alpha)$$

Nous allons construire un ordonnancement S_2 dont le coût sera quasiment celui de S et dont la fréquence des créneaux vides sera quasiment $(1 - \alpha)$, mais qui sera constitué de blocs indépendants que nous pourrons échantillonner par la suite.
Soit T^* la période de S^*. Afin d'alléger les notations, supposons que $\mathcal{C} \geqslant 1$ (*Rappel :* $\mathcal{C} = \max c_i$).
Posons $T = \dfrac{6|A|^2\mathcal{C}}{\varepsilon} - |A|$. Quitte à multiplier T^* par T, nous pouvons supposer que T^* est un multiple de T.
Construisons l'ordonnancement S_1 en insérant dans S^* tous les T, un bloc de $|A|$ créneaux vides sur tous les canaux, à partir du point d'insertion qui minimise le surcoût. Le lemme d'étirement nous assure que :

$$\mathrm{COUT}(S_1, A) \leqslant (1 + \varepsilon/3)\,\mathrm{COUT}(S^*, A)$$

Et la fréquence S_1 vaut : $\alpha(S_1) = (1 - \frac{\varepsilon}{6|A|\mathcal{C}})\alpha$.

Nous construisons alors S_2 à partir de S_1 en insérant dans chaque bloc de créneaux vides de les $|A|$ messages de A dans un ordre fixé. Le temps de service de S_2 est inférieur à celui de S_1, et l'augmentation du coût de diffusion de S_1 à S_2 est majorée par $\frac{\mathcal{C}|A|}{T+|A|} \leqslant \varepsilon/6$. Ainsi :

$$\mathrm{COUT}(S_2, A) \leqslant \mathrm{COUT}(S_1, A) + \varepsilon/6$$

La fréquence des créneaux vides diminue en revanche de S_1 à S_2 et vérifie :

$$(1 - \alpha(S_2)) \geqslant (1 - \varepsilon/6)(1 - \alpha)$$

Nous avons donc construit notre ordonnancement S_2 dont le coût est quasi-optimal et dont la fréquence des créneaux vides est quasiment $(1 - \alpha)$. L'intérêt est que S_2 est constitué de Z *blocs indépendants* $B_1, \ldots, B_Z$ de longueur $(T + |A|)$ délimités par les débuts des blocs de créneaux insérés dans S (*cf.* illustration Figure 4.4). Comme chacun des blocs commence par la diffusion de tous les messages de A dans un ordre fixé, nous pouvons les *permuter* sans modifier le coût de l'ordonnancement S_2 ni le temps de service des requêtes qui arrivent dans chacun de ces blocs. Nous définissons donc le *coût* de chaque bloc B_z comme le coût moyen de S_2 sur l'intervalle de temps de ce bloc. Par définition, le coût de S_2 est alors exactement la moyenne des coûts des blocs et de même que la fréquence de diffusion de S_2 est exactement la moyenne des fréquences de diffusion des blocs. Nous allons donc pouvoir échantillonner des blocs de S_2 et obtenir ainsi un ordonnancement dont le coût et la fréquence de diffusion sont quasiment ceux de S_2.

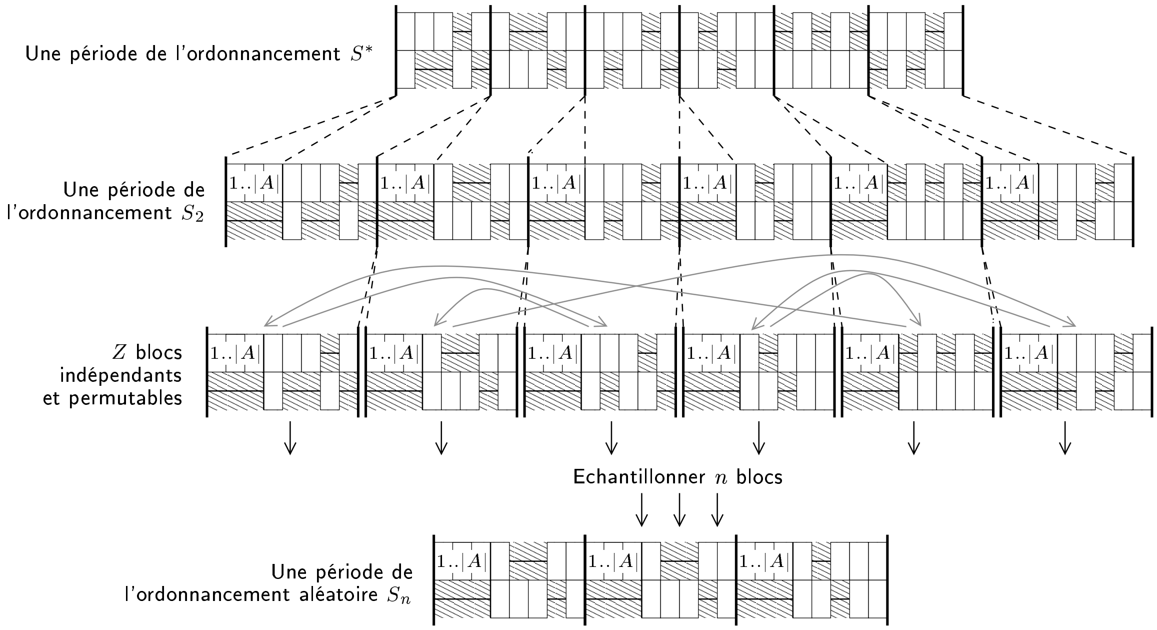


FIG. 4.4 : *Le processus d'échantillonnage de la preuve du lemme 4.5.*

Echantillonner. Soit $n = \dfrac{40 \ln(1 + 4/\varepsilon)}{3\varepsilon^3(1 - \varepsilon/6)}$. Nous construisons un ordonnancement aléatoire S_n, en concaténant n blocs tirés uniformément et indépendamment dans S_2. L'espérance du coût de chaque bloc est $\mathrm{COUT}(S_2)$. Donc l'inégalité de Markov donne d'une part que :

$$\Pr\{\mathrm{COUT}(S_n) \geqslant (1 + \varepsilon/4)\,\mathrm{COUT}(S_2)\} \leqslant \frac{1}{1 + \varepsilon/4} \tag{4.13}$$

D'autre part, l'espérance des fréquences des emplacements vides de chaque bloc vaut $(1 - \alpha(S_2))$. Et puisque les fréquences diffusions sont bornées à valeur dans $]0, 1]$, l'inégalité de Chernoff implique que :

$$\Pr\{(1-\alpha(S_n)) \leqslant (1-5\varepsilon/6)(1-\alpha(S_2))\} \leqslant e^{-(5\varepsilon/6)^2 n(1-\alpha(S_2))/2} \tag{4.14}$$

En sommant les deux inégalités (4.13) et (4.13), nous obtenons alors :

$$\Pr\Big\{\mathrm{COUT}(S_n) \geqslant (1+\varepsilon/4)\,\mathrm{COUT}(S_2) \;\text{ ou }\; (1-\alpha(S_n)) \leqslant (1-5\varepsilon/6)(1-\alpha(S_2))\Big\}$$
$$\leqslant \frac{1}{1+\varepsilon/4} + e^{-3\varepsilon^2 n(1-\alpha(S_2))/4} < 1, \quad \text{par construction de } n,$$

car $(1-\alpha(S_2)) \geqslant (1-\varepsilon/6)(1-\alpha) \geqslant (1-\varepsilon/6)\varepsilon/10$.

Nous en concluons qu'il existe un tirage pour lequel S_n a les propriétés suivantes :

1. $(1-\alpha(S_n)) \geqslant (1-\frac{5\varepsilon}{6})(1-\frac{\varepsilon}{6})(1-\alpha)$. C'est-à-dire :
$$(1-\alpha(S_n)) \geqslant (1-\varepsilon)(1-\alpha)$$
De plus, comme les fréquences de diffusion de chacun des blocs sont non nulles, nous avons bien : $\alpha(S_n) \in]0, 1[$.
2. $\mathrm{COUT}(S_n) \leqslant (1+\frac{2\varepsilon}{3})(1+\frac{\varepsilon}{5})\,\mathrm{OPT}(A,\alpha) + (1+\frac{\varepsilon}{4})\frac{\varepsilon}{6}$, c'est-à-dire :
$$\mathrm{COUT}(S_n) \leqslant (1+\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(A,\alpha) + \varepsilon/2$$
3. Enfin, S_n est par construction périodique de période $n(T + |A|)$.

C.Q.F.D. □

Ce lemme a deux conséquences essentielles pour l'obtention de notre approximation :

1. Comme A est de taille constante, nous pouvons construire en temps constant, par recherche exhaustive, un ordonnancement S quasi-optimal de A avec quasiment la bonne fréquence.
2. Et comme S est de période négligeable devant la taille des groupes de B, les trous de S sont uniformément répartis du point de vue des messages de B. Nous pourrons, par conséquent, ordonnancer efficacement les messages de B dans les trous suivant l'algorithme glouton périodique 4.3 que nous avons décrit précédemment.

4.3.3 Ordonnancer dans des emplacements réservés

L'objet de cette section est de montrer comment, à partir d'un ordonnancement de B sur un canal de fréquence 1, nous construisons un ordonnancement de B dans les trous de l'ordonnancement de A de la section précédente.

Lemme 4.7 (Dilatation) *Soient un ensemble M de messages, $B \subseteq M$, un ordonnancement S des messages de B, et une constante $\alpha > 0$. Soit S_α l'ordonnancement des messages de B construit à partir de l'ordonnancement S en dilatant le temps d'un facteur $1/\alpha$: pour tout t, S_α diffuse à la date (t/α) les messages que S diffuse à la date t, sur les mêmes canaux que S. Alors la contribution de B au coût de S_α est donné par :*

$$\mathrm{TSM}(S_\alpha, B) = 1 + \frac{1}{\alpha} \cdot \big(\mathrm{TSM}(S,B) - 1\big) \quad \textit{et} \quad \mathrm{CD}(S_\alpha, B) = \alpha \cdot \mathrm{CD}(S,B)$$

Preuve. La propriété est évidente. D'une part, la fréquence de diffusion de chaque message est multipliée par α donc le coût de diffusion est multiplié par α. Et d'autre part, l'attente moyenne des requêtes hors temps de téléchargement est multipliée par $1/\alpha$. □

Lemme 4.8 (Ordonnancer dans des emplacements réservés) *Soient M un ensemble de messages et $B \subseteq M$ un sous-ensemble de messages partitionné en q groupes $B = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$. Soient S un ordonnancement groupes-cyclique des messages de B sur un canal et Z une suite périodique d'emplacements réservés sur W canaux, de fréquence α et de période T.*

Soit S' l'ordonnancement construit en ordonnançant S dans les emplacements réservés de Z, de gauche à droite : S' ordonnance dans le $x^{\text{ième}}$ emplacement réservé de la suite Z, le message diffusé dans créneau x de S (cf. illustration Figure 4.5 page suivante).

Alors, si les groupes de B sont tous de taille supérieure à $(T \cdot W)$, la contribution de B au coût de S' est bornée par :

$$\mathrm{TSM}(S', B) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha W} \cdot \big(\mathrm{TSM}(S,B) - 1\big) + T \sum_{j=1}^{q} g_j p_j$$

$$\textit{et} \quad \mathrm{CD}(S', B) = \alpha W \cdot \mathrm{CD}(S,B)$$

Preuve. Soit $S_{\alpha W}$ l'ordonnancement obtenu en dilatant le temps de $1/(\alpha W)$. S' est obtenu à partir de $S_{\alpha W}$ en déplaçant chacune des diffusions de $S_{\alpha W}$ d'au plus T. Le coût de diffusion de S' est donc identique à celui de $S_{\alpha W}$:

$$\mathrm{CD}(S') = \alpha W \cdot \mathrm{CD}(S), \quad \text{d'après le lemme de dilatation.}$$

Etudions à présent la variation du temps de service de $S_{\alpha W}$ à S'. Pour toute date $U > 0$, notons $n_i(U)$ le nombre de diffusions du message M_i dans $S_{\alpha W}$ durant la période $[0, U]$ et $t_i^1, \ldots, t_i^{n_i(U)}$ les longueurs des intervalles entre deux diffusions consécutives de M_i

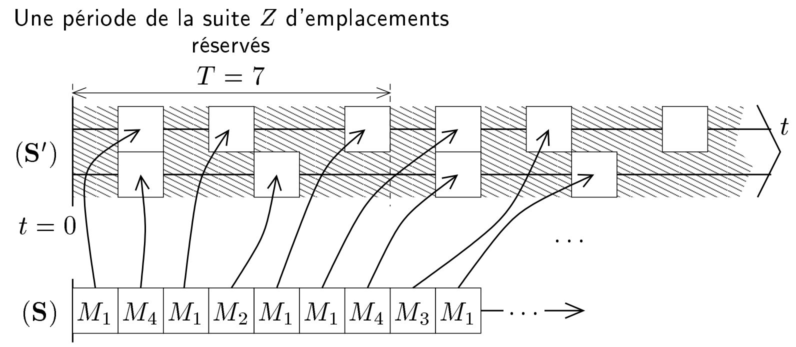


FIG. 4.5 : *Ordonnancer dans des emplacements réservés. Sur cet exemple, la suite d'emplacements réservés Z est périodique de période $T = 7$ et de fréquence $\alpha = 5/(2 \times 7)$.*

dans $S_{\alpha W}$ durant la période $[0, U]$, tels que : $\sum_{k=1}^{n_i(U)} t_i^k = U$. Nous définissons de la même façon $n'_i(U)$ et ${t'}_i^1, \dots {t'}_i^{n'_i(U)}$ dans l'ordonnancement S'.

Remarquons que par construction : ${t'}_i^k = t_i^k + x_k$, où $x_k \in [-T, T]$ et $\sum_{k=1}^{n_i(U)} x_k = 0$.

Comme $n'_i(U)$ et $n_i(U)$ diffèrent d'une constante (au plus 1, car les groupes sont de tailles $\geqslant WT$), nous avons également :

$$\mathrm{TSM}(S', M_i) \leqslant 1 + \limsup_{U \to \infty} \frac{1}{2U} \sum_{k=1}^{n_i(U)} ({t'}_i^k)^2$$

Or, nous pouvons majorer cette somme de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2U} \sum_{k=1}^{n_i(U)} ({t'}_i^k)^2 &\leqslant \frac{1}{2U} \left\{ \sum_{k=1}^{n_i(U)} (t_i^k)^2 + \sum_{k=1}^{n_i(U)} x_k (2t_i^k + x_k) \right\} \\
&\leqslant \frac{1}{2U} \left\{ \sum_{k=1}^{n_i(U)} (t_i^k)^2 + \sum_{k=1}^{n_i(U)} T(2t_i^k + x_k) + (x_{n_i(U)} - T)(2t_i^{n_i(U)} + x_{n_i(U)}) \right. \\
&\leqslant \frac{1}{2U} \sum_{k=1}^{n_i(U)} (t_i^k)^2 + T + \frac{2T^2}{U}
\end{aligned}$$

car pour tout $k < n_i(U)$, la distance entre la $k^{\text{ième}}$ et la $(k+1)^{\text{ième}}$ diffusion du messages M_i est supérieure à la taille du groupe divisé par le nombre de canaux (car S est groupes-cyclique) et donc : $t_i^k \geqslant |\text{groupe de } M_i|/W \geqslant T$.

Nous obtenons donc bien, lorsque U tend vers l'infini :

$$\mathrm{TSM}(S', M_i) \leqslant \mathrm{TSM}(S_{\alpha W}, M_i) + T \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha W}\big(\mathrm{TSM}(S, M_i) - 1\big) + T$$

□

Corollaire 4.1 (Cas des groupes de grandes tailles) *Lorsque les groupes de B sont tous de tailles supérieures à $(2T/\varepsilon)$, la contribution de B au coût de S' est bornée par :*

$$\mathrm{COUT}(S', B) \leqslant (1+\varepsilon)\left\{1 + \frac{1}{\alpha W} \cdot \big(\mathrm{TSM}(S, B) - 1\big) + \alpha W \cdot \mathrm{CD}(S, B)\right\}$$

Preuve. Immédiate car $\mathrm{TSM}(S, B) \geqslant 3/2$. □

4.3.4 Un ordonnancement quasi-optimal

Nous pouvons à présent construire un ordonnancement quasi-optimal des messages de A et B.

Notations. Posons $T(\varepsilon) =_{\text{def}} \dfrac{80\ln(1+4/\varepsilon)}{\varepsilon^4(1-\varepsilon/6)}\max(\mathcal{C}, 1)$, et $\kappa(\varepsilon) =_{\text{def}} 2WT(\varepsilon)/\varepsilon$.

Proposition 4.2 (Ordonnancer A ⊔ B) *Soient $0 < \varepsilon < 1/7$ et un ensemble de messages M partitionné en deux sous-ensembles $M = A \sqcup B$, où B est lui-même partitionné en groupes $B = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$ de tailles supérieures à $\kappa(\varepsilon)|A|$.*

Alors, l'ordonnancement S généré par l'algorithme 4.4 page ci-contre est périodique de période inférieure à $\big((9m^2 + 4\mathcal{C}m) \cdot T(\varepsilon) \cdot |A|^2\big)$, et son coût est borné par :

$$\mathrm{COUT}(S) \leqslant (1 + 5\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(M)$$

Preuve. La preuve se fait en deux étapes :

1. Nous allons utiliser le lemme 4.8 pour démontrer qu'ordonnancer les messages de B dans les trous de S_{α_0} avec l'algorithme glouton 4.3 génère un ordonnancement dont le coût est une bonne approximation de $\mathrm{COUT}(S_{\alpha_0}, A) + \mathrm{MN}_5(B, 1-\alpha_0)$.
2. Puis, nous démontrerons que $\mathrm{COUT}(S_{\alpha_0}, A) + \mathrm{MN}_5(B, 1-\alpha_0)$ est une bonne approximation du coût optimal.

Algorithme 4.4 Ordonnancer les messages de A et B

Entrées : Une constante ε et un ensemble de messages M partitionné en deux sous-ensembles $M = A \sqcup B$, où B est lui-même partitionné en groupes $B = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_q$ de tailles supérieures à $\kappa(\varepsilon)|A|$.

Pour tout $x \in \{1, \ldots, W \cdot T(\varepsilon)|A|^2 - 1\}$

Calculer l'ordonnancement périodique optimal S_α des messages de A, de fréquence $\alpha = x/(W \cdot T(\varepsilon)|A|^2)$ et de période inférieure à $T(\varepsilon)|A|^2$.

Choisir α_0 qui minimise la quantité :

$$\mathrm{COUT}(S_{\alpha_0}, A) + \mathrm{MN}_5(B, 1 - \alpha_0)$$

Calculer la solution τ^* du problème de minimisation $\mathrm{MN}_5(B, 1 - \alpha_0)$.

Soit T_A la période de S_{α_0}.

Calculer S_B l'ordonnancement glouton périodique des messages de B sur un canal avec $\tau = (\tau^*(1 - \alpha_0)W))$, et de période $T_B = \big((9m^2 + 4\mathcal{C}m) \cdot (1 - \alpha_0) \cdot W \cdot T_A\big)$.

Sortie :

Retourner l'ordonnancement S_{AB} périodique de période $(9m^2 + 4\mathcal{C}m) \cdot T_A$ obtenu en ordonnançant S_B dans les T_B emplacements vides de $(9m^2 + 4\mathcal{C}m)$ périodes de l'ordonnancement S_{α_0}.

Etape 1. Notons S_{AB} l'ordonnancement généré par l'algorithme 4.4. La contribution des messages A au coût de l'ordonnancement est $\mathrm{COUT}(S_{\alpha_0}, A)$. Considérons S_B l'ordonnancement glouton périodique sur un canal obtenu avec $\tau = (\tau^*(1-\alpha_0)W)$. L'ordonnancement S_{AB} est obtenu en ordonnançant S_B dans les trous de S_{α_0}. Comme tous les groupes ont une taille supérieure à $2WT(\varepsilon)|A|^2/\varepsilon$ et que la période de S_{α_0} est inférieure à $T(\varepsilon)|A|^2$, le lemme 4.8 assure que :

$$\mathrm{COUT}(S_{AB}, B) \leqslant (1+\varepsilon)\left\{1 + \frac{1}{(1-\alpha_0)W}\big(\mathrm{TSM}(S_B) - 1) + (1-\alpha_0)W\,\mathrm{CD}(S_B)\big)\right\}$$

Or, comme la période de l'algorithme S_B est suffisamment longue, nous avons que :

$$\mathrm{TSM}(S_B) \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{q} p_j \frac{g_j(g_j+1)}{2} \tau_j^*(1-\alpha_0)W$$
$$\text{et} \quad \mathrm{CD}(S_B) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \frac{c_j}{\tau_j^*(1-\alpha_0)W}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{COUT}(S_{AB}, B) &\leqslant (1+\varepsilon)\left\{1 + \sum_{j=1}^{q} p_j \frac{g_j(g_j+1)}{2}\tau_j^* + \sum_{j=1}^{q} \frac{c_j}{\tau_j^*}\right\} \\ &\leqslant (1+\varepsilon)\underbrace{(1 + 1/\min_j g_j)}_{\leqslant 1+1/\kappa(\varepsilon)} \mathrm{MN}_5(B, 1-\alpha_0) \\ &\leqslant (1+2\varepsilon)\,\mathrm{MN}_5(B, 1-\alpha_0)\end{aligned}$$

Nous en concluons que :

$$\mathrm{COUT}(S_{AB}) \leqslant (1+2\varepsilon)\big\{\mathrm{COUT}(S_{\alpha_0}, A) + \mathrm{MN}_5(B, 1-\alpha_0)\big\}$$

Démontrons à présent que cette estimation est proche de l'optimal.

Etape 2. Soit S^* un ordonnancement optimal de $M = A \sqcup B$ (d'après le théorème 1.3) et posons α^* la fréquence de diffusion de A dans S^*. Nous avons :

$$\mathrm{OPT}(A \sqcup B) = \mathrm{COUT}(S^*) \geqslant \mathrm{OPT}(A, \alpha^*) + \mathrm{MN}_5(B, 1-\alpha^*)$$

Le lemme 4.5 assure qu'il existe un ordonnancement S des messages de A périodique de période inférieure à $T(\varepsilon)|A|^2$ et de fréquence de diffusion $\alpha \in]0,1[$, tel que :

$$\begin{aligned} & (1-\alpha) \geqslant (1-\varepsilon)(1-\alpha^*) \\ \text{et} \quad & \mathrm{COUT}(S,A) \leqslant (1+\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(A,\alpha^*) + \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Or, par construction de α_0 :

$$\mathrm{COUT}(S_{\alpha_0},A) + \mathrm{MN}_5(B,1-\alpha_0) \leqslant \mathrm{COUT}(S,A) + \mathrm{MN}_5(B,1-\alpha)$$

Considérons donc la solution τ^* du problème de minimisation $\mathrm{MN}_5(B,1-\alpha^*)$ et posons $\tau = \tau^*/(1-\varepsilon)$. Nous avons :

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{\tau_j} \leqslant (1-\varepsilon)(1-\alpha^*)W \leqslant (1-\alpha)W$$

Donc τ satisfait les contraintes du problème de minimisation $\mathrm{MN}_5(M,1-\alpha)$, ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{MN}_(5,1-\alpha) \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{q}\left(p_j g_j^2 \tau_j + \frac{c_j}{\tau_j}\right) &\leqslant 1 + \frac{1}{1-\varepsilon}\sum_{j=1}^{q}\left(p_j g_j^2 \tau_j^* + \frac{c_j}{\tau_j^*}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\,\mathrm{MN}_5(B,1-\alpha^*) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{COUT}(S_{\alpha_0},A) + \mathrm{MN}_5(B,1-\alpha_0) &\leqslant (1+\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(A,\alpha^*) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{1-\varepsilon}\,\mathrm{MN}_5(B,1-\alpha^*) \\ &\leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\,\mathrm{OPT}(A \sqcup B) + \varepsilon\,\mathrm{OPT}(A \sqcup B), \quad \text{puisque } \mathrm{OPT}(A \sqcup B) \geqslant 3/2 \\ &\leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\mathrm{OPT}(A \sqcup B) \end{aligned}$$

Finalement, nous concluons que :

$$\begin{aligned} \mathrm{COUT}(S_{AB}) &\leqslant \frac{(1+2\varepsilon)(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\,\mathrm{OPT}(A \sqcup B) \\ &\leqslant (1+5\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(A \sqcup B), \quad \text{puisque } \varepsilon < 1/7. \end{aligned}$$

C.Q.F.D. □

La section 4.4 va démontrer comment nous pouvons introduire des messages de contribution négligeable dans l'ordonnancement que nous venons de construire.

4.4 Le cas de messages de contribution négligeable

Dans cette section nous supposons que l'ensemble des messages est partitionné en deux sous-ensembles $M = AB \sqcup C$ où C a une “contribution négligeable” $O(\varepsilon\,\mathrm{OPT})$ au coût de l'ordonnancement. Commençons par formaliser cette notion.

Definition 4.8 (Contribution négligeable) Soit M un ensemble de messages et $C \subseteq M$, nous disons que C a une *contribution négligeable* si sa contribution dans le minorant MN_5 est de l'ordre de $O(\varepsilon)$, lorsqu'il est ordonnancé avec une fréquence de diffusion de l'ordre de $O(\varepsilon/\mathcal{C})$ sur un canal, *i.e.* :

$$\mathrm{MN}_{5,W=1}(C, \varepsilon/(10\mathcal{C})) \leqslant \frac{2\varepsilon}{5}\,\mathrm{OPT}(M)$$

Les constantes $1/10$ et $2/5$ sont arbitraires et leurs valeurs sont fixées pour améliorer la lisibilité des lemmes suivants.

L'idée est que si une partie C des messages est de contribution négligeable, alors leur contribution au coût d'un ordonnancement reste négligeable même si on les ordonnance rarement. La proposition suivante démontre que l'on peut alors ordonnancer les messages de C par insertion “en force” dans l'ordonnancement des autres messages.

Proposition 4.3 (Insertion d'un ensemble de contribution négligeable) *Soit* $0 < \varepsilon < 1$, *et* M *un ensemble de message partitionné en deux sous-ensembles* $M = AB \sqcup C$, *où* C *est de contribution négligeable. Alors, pour tout ordonnancement* S *périodique des messages de* AB, *on peut construire en temps linéaire un ordonnancement* S' *périodique des messages de* M *tel que :*

$$\mathrm{COUT}(S') \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{5}\right) \mathrm{COUT}(S, AB) + \frac{4\varepsilon}{5}\,\mathrm{OPT}(M)$$

De plus, si la période de S *est supérieure à* $\frac{10\mathcal{C}}{\varepsilon}(9m^2 + 4\mathcal{C}m)$, *alors la période de* S' *est inférieure à* $(1+\varepsilon)T$.
Si $\mathrm{COUT}(S, AB) \leqslant \mathrm{OPT}(M)$, *nous obtenons alors une* $(1+\varepsilon)$*-approximation.*

Preuve. Soit T la période de S. Nous utilisons le lemme d'étirement pour construire un ordonnancement S_1 à partir de S en insérant un créneau vide tous les $(10\mathcal{C}/\varepsilon - 1)$ à partir du meilleur point dans $\{1, \ldots, 10\mathcal{C}/\varepsilon - 1\}$ (seul un nombre constant de point doivent être testés). Le lemme d'étirement assure que :

$$\mathrm{COUT}(S_1, AB) \leqslant (1 + \varepsilon/5)\,\mathrm{COUT}(S, AB)$$

Soit τ^* la solution du problème de minimisation $\mathrm{MN}_{5,W=1}(C, \varepsilon/(10\mathcal{C}))$. Quitte à considérer plusieurs périodes de S, on peut supposer que T est supérieur à $\frac{10\mathcal{C}}{\varepsilon}(9m^2 + 4\mathcal{C}m)$. Soit S_C l'ordonnancement périodique de période $T\frac{\varepsilon}{10\mathcal{C}}$ généré par l'algorithme 4.3 avec $\tau = \varepsilon\tau^*/(10\mathcal{C})$. Nous construisons S' en réordonnançant S_C dans les emplacements réservés de S_1. Comme les emplacements réservés pour l'insertion des messages de C dans S_1 sont uniformément répartis tous les $10\mathcal{C}/\varepsilon$, le lemme de dilatation nous assure que la contribution de C au coût de l'ordonnancement S' est majoré par $2\,\mathrm{MN}_{5,W=1}(C, 10\mathcal{C}/\varepsilon) \leqslant \frac{4\varepsilon}{5}\,\mathrm{OPT}(M)$, puisque C est de contribution négligeable.

Finalement, le coût de l'ordonnancement S' est borné par :

$$\mathrm{COUT}(S') \leqslant (1 + \varepsilon/5) \cdot \mathrm{COUT}(S, AB) + 4\varepsilon/5 \cdot \mathrm{OPT}(M)$$

et la période de S' est au plus $T(1 + \frac{\varepsilon}{10\mathcal{C}})$. $\square$

4.5 Un schéma d'approximation quadratique

Nous considérons à présent le cas général d'un ensemble quelconque $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ de messages.

4.5.1 Arrondir et partitionner

Nous commençons par regrouper les messages de caractéristiques similaires en utilisant des méthodes d'arrondi standard.

Lemme 4.9 (Arrondir) *Pour $0 < \varepsilon < 1$, nous pouvons sans perte de généralité supposer que les probabilités de demande (p_i) sont multiples des puissances de $1/(1+\varepsilon)$ et que les coûts de diffusion sont des multiples de ε/W :*

$$p_i = \frac{r}{(1+\varepsilon)^j}, \qquad \text{pour un certain } j \geqslant 1 \text{ et où } 1 < r \leqslant 1+\varepsilon \text{ est une constante de normalisation.}$$

$$c_i = k \cdot \frac{\varepsilon}{W}, \qquad \text{pour un certain } k \in \{0, \ldots, \mathcal{C} \cdot W/\varepsilon\}.$$

Preuve. Pour chaque message M_i, nous arrondissons :

- sa probabilité p_i à la puissance de $1/(1+\varepsilon)$ immédiatement inférieure puis nous normalisons de sorte que la somme des probabilité arrondie vaille toujours 1. Nous obtenons une probabilité arrondie $\dot{p}_i = r/(1+\varepsilon)^j$, où $j \geqslant 1$ et où $1 < r \leqslant (1+\varepsilon)$ est la constante de normalisation.
- puis son coût de diffusion c_i au multiple immédiatement inférieur de ε/W. Nous obtenons un coût arrondi $\dot{c}_i = k\varepsilon/W$, pour un certain $k \in \{0, \ldots, \mathcal{C}W/\varepsilon\}$.

Nous obtenons alors un nouvel ensemble de messages arrondis $\dot{M} = \{\dot{M}_1, \ldots, \dot{M}_m\}$ tel que :

$$\dot{p}_i \leqslant r p_i < (1+\varepsilon)\dot{p}_i \quad \text{et} \quad \dot{c}_i \leqslant c_i < \dot{c}_i + \varepsilon/W$$

Pour tout ordonnancement S des messages de M, notons $\dot{S}$ l'ordonnancement correspondant des messages arrondis de $\dot{M}$ (et réciproquement). Considérons S_1 un ordonnancement optimal de M et $\dot{S}_2$ un ordonnancement optimal de $\dot{M}$. Etudions le coût de l'ordonnancement S_2, instance non arrondie de $\dot{S}_2$. Nous avons que :

$$\begin{aligned}
r\,\mathrm{COUT}(S_2, M) &\leqslant (1+\varepsilon)\,\mathrm{TSM}(\dot{S}_2, \dot{M}) + r(\mathrm{CD}(\dot{S}_2, \dot{M}) + \varepsilon) \\
&\leqslant (1+\varepsilon)\,\mathrm{COUT}(\dot{S}_2, \dot{M}) + r\varepsilon \\
&\leqslant (1+\varepsilon)\,\mathrm{COUT}(\dot{S}_1, \dot{M}) + r\varepsilon \\
&\leqslant (1+\varepsilon)(r\,\mathrm{TSM}(S_1, M) + \mathrm{CD}(S_1, M)) + r\varepsilon \\
&\leqslant (1+\varepsilon) r\,\mathrm{COUT}(S_1, M) + r\varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\mathrm{OPT}(M) \geqslant \frac{3}{2}$:

$$\mathrm{COUT}(S_2, M) \leqslant (1+2\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(M)$$

Ainsi l'arrondi des caractéristiques des messages coûte donc un facteur $(1+2\varepsilon)$ sur le coût d'un ordonnancement optimal. □

Notations. Posons donc $G_{j,k}$ le groupe des messages qui ont probabilité $r/(1+\varepsilon)^j$ et coût de diffusion $k\varepsilon/W$. Nous noterons $g_{j,k}$ la taille du groupe $G_{j,k}$.

Le lemme suivant est la clé pour enchaîner avec succès les différents cas que nos venons d'étudier. Il partitionne l'ensemble des messages en trois sous-ensembles $M = A \sqcup B \sqcup C$ tels que : A contient un nombre constant de messages, B contient des messages appartenant à des groupes de très grande taille, et C est un ensemble de messages dont la contribution est négligeable. Le principe de la démonstration de ce lemme est que les probabilités, une fois arrondies, forment une suite exponentielle décroissante. Ainsi, sauf pour un nombre constant de groupes, les groupes soit sont de très grande taille, soit contribuent de façon négligeable au coût de l'ordonnancement.

Lemme 4.10 (Partition) *Etant donné des constantes $0 < \varepsilon < 1$, $\kappa > 0$ et $W \geqslant 1$, et un ensemble $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ de messages de coûts de diffusion bornés par $\mathcal{C}$, on peut construire en temps linéaire en m une partition des groupes $G_{j,k}$ de M, en trois ensembles A, B et C, tels que :*

1. *A contient au total un nombre constant de messages :*

$$|A| =_{\text{def}} \sum_{G_{j,k}\in A} g_{j,k} = O_{\varepsilon,\kappa,\mathcal{C},W}(1), \quad \textit{indépendant de } m,\ (p_i) \textit{ et } (c_i). \tag{4.15}$$

2. *Les groupes de B sont tous de grande taille :*

$$\textit{pour tout } G_{j,k} \in B, \quad g_{j,k} \geqslant \kappa \cdot |A|^2 \tag{4.16}$$

3. *Les messages de C ont une contribution négligeable :*

$$\mathrm{MN}_{5,W=1}(C, \tfrac{\varepsilon}{10\mathcal{C}}) \leqslant \frac{2\varepsilon}{5} \cdot \mathrm{OPT}(M) \tag{4.17}$$

Preuve. Posons $a = 1/(1+\varepsilon) < 1$.

Pour borner la contribution de l'ensemble C nous introduisons la variante $\mathrm{MN}_{5,\text{coût}=0}(X,\alpha)$ du minorant de la contribution au coût d'un sous-ensemble $X \subseteq M$ de densité $\alpha \in]0,1]$, en supposant que les coûts de diffusion (c_i) sont nuls. Comme les coûts de diffusion des messages sont bornés par la constante $\mathcal{C}$, nous avons :

$$\mathrm{MN}_{5,\text{coût}=0}(X,\alpha) \leqslant \mathrm{MN}_5(X,\alpha) \leqslant \mathrm{MN}_{5,\text{coût}=0}(X,\alpha) + \alpha\mathcal{C}W$$

En l'absence de coût de diffusion, nous savons exprimer sous forme algébrique la valeur du problème de minimisation $\mathrm{MN}_5(M)$ (*cf.* Lemme 2.2 page 72 par exemple). Nous obtenons alors l'expression suivante pour $\mathrm{MN}_{5,\text{coût}=0}(X,\alpha)$:

$$\mathrm{MN}_{5,\text{coût}=0}(X,\alpha) = \frac{1}{2\alpha W}\left(\sum_{M_i\in X}\sqrt{p_i}\right)^2 = \frac{r}{2\alpha W}\left(\sum_{G_{j,k}\in X} g_{j,k}a^{j/2}\right)^2$$

Nous allons nous servir de ces expressions pour majorer la contribution au coût de l'ensemble C.

Construction de la partition. La construction de la partition est illustrée Figure 4.6 page 175.

Commençons par considérer les indices (j,k) tels que : $g_{j,k} \leqslant a^{-j/4}$. Soit j_0, une constante que nous définirons plus tard. Nous partitionnons ces indices en deux sous-ensembles :

$$A_1 = \left\{(j,k) : j \leqslant j_0,\ g_{j,k} \leqslant a^{-j/4}\right\} \quad \text{et} \quad C_1 = \left\{(j,k) : j > j_0,\ g_{j,k} \leqslant a^{-j/4}\right\}$$

Considérons les groupes de tailles $g_{j,k} > a^{-j/4}$. Soit μ une constante que nous définirons par la suite. Nous partitionnons leurs indices en $(20\sqrt{\mathcal{C}W}/\varepsilon)$ blocs

$\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{20\sqrt{CW}/\varepsilon}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \big\{(j,k) : \mu \leqslant j < \mu^2\big\}, \\
\Lambda_2 &= \big\{(j,k) : \mu^2 \leqslant j < \mu^3\big\}, \ldots \\
\Lambda_{20\sqrt{CW}/\varepsilon} &= \big\{(j,k) : \mu^{20\sqrt{CW}/\varepsilon} \leqslant j < \mu^{1+20\sqrt{CW}/\varepsilon}\big\}.
\end{aligned}$$

Nous avons vu que :

$$\sqrt{\frac{2W}{r}\,\mathrm{MN}_{5,\text{coût}=0}(M,\alpha=1)} = \sum_{j\geqslant 1,k} g_{j,k} a^{j/2} \geqslant \sum_{h=1}^{20\sqrt{CW}/\varepsilon} \sum_{(j,k)\in\Lambda_h} g_{j,k} a^{j/2}$$

Ainsi, le principe des tiroirs [en anglais, *pingeon hole principle*] donne un indice h tel que :

$$\sum_{(j,k)\in\Lambda_h} g_{j,k} a^{j/2} \leqslant \frac{\varepsilon}{20\sqrt{\mathcal{C}W}} \sqrt{\frac{2W}{r}\,\mathrm{MN}_{5,\text{coût}=0}(M,\alpha=1)}$$

Nous définissons alors :

$$\begin{aligned}
A_2 &= \big\{(j,k) : j < \mu^h,\ g_{j,k} > a^{-j/4}\big\} \\
C_2 &= \Lambda_h
\end{aligned}$$

Nous posons finalement (*cf.* Figure 4.6) :

$$A = A_1 \cup A_2 \quad \text{et} \quad C = C_1 \cup C_2 \quad \text{et} \quad B = \{(j,k)\} \smallsetminus (A \sqcup C)$$

Analyse. Vérifions à présent que cette partition vérifie bien les propriétés annoncées. Pour cela, nous définissons les constantes j_0 et μ par :

$$j_0 = 4\log_{1/a}\left(\frac{20\mathcal{C}^{3/2}W(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2(1-a^{1/4})}\right) \quad \text{et} \quad \mu = \max\left(j_0+1, 4\log_{1/a}\left(\frac{\mathcal{C}W\kappa}{\varepsilon^2}\right)+8\right)$$

Remarquons que $j_0 = O(1)$ et $\mu = O(1)$.

1. *A est de taille constante.* Puisque la somme des probabilité vaut 1, nous avons : $\sum_{j\geqslant 1,k} g_{j,k} a^j \leqslant 1$, et donc pour tout j, $g_{j,k} \leqslant a^{-j}$. Or, $\mu^h \geqslant \mu > j_0$, donc :

$$|A| \leqslant \sum_{1\geqslant j<\mu^h,k} g_{j,k} \leqslant \frac{\mathcal{C}W}{\varepsilon} \sum_{1\leqslant j<\mu^h} a^{-j} \leqslant \frac{\mathcal{C}Wa^{-\mu^h}}{\varepsilon^2}$$

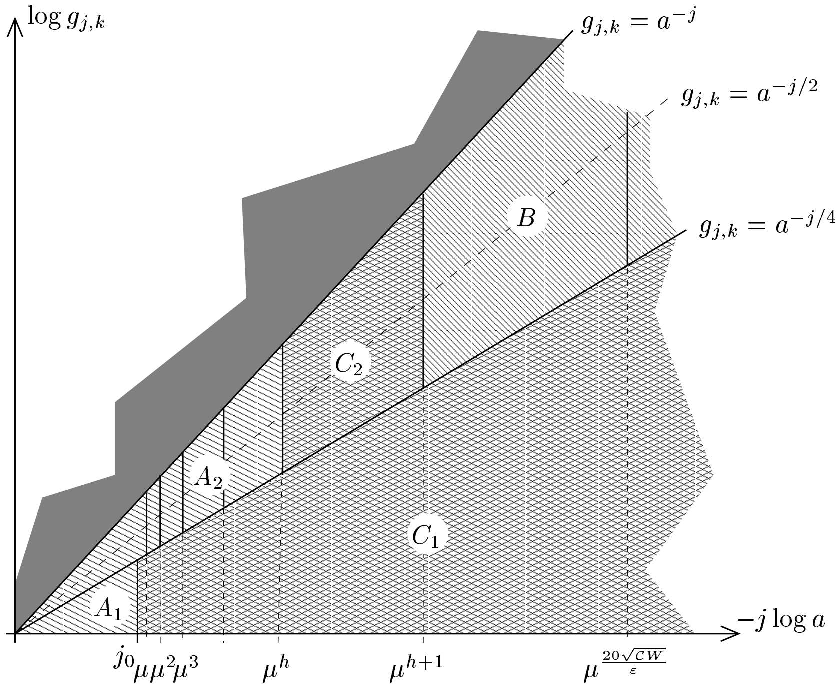


FIG. 4.6 : *Illustration de la partition.*

Ainsi comme, $h \leqslant \frac{20\sqrt{\mathcal{C}W}}{\varepsilon}$, la taille de A dépend uniquement de ε, κ, W et C, et est donc constante.

2. *Les groupes de B sont de grande taille.* Soit $(j,k) \in B$. Nous avons : $g_{j,k} \geqslant a^{-j/4} \geqslant a^{-\mu^{h+1}/4}$. Ainsi :

$$\frac{g_{j,k}}{|A|^2} \geqslant a^{-\mu^{h+1}/4} \cdot \frac{\mathcal{C}W\varepsilon^2}{a^{-2\mu^h}} \geqslant \frac{\varepsilon^2}{\mathcal{C}W} \cdot a^{2-\mu/4}, \quad \text{car } \mu \geqslant 8 \text{ et } h \geqslant 1$$

Ainsi, par construction de μ, nous avons bien que : $g_{j,k} \geqslant \kappa|A|^2$.

3. *C est de contribution négligeable.* Nous avons : $\mathrm{MN}_{5,W=1}(C, \frac{\varepsilon}{10\mathcal{C}}) \leqslant \mathrm{MN}_{5,W=1,\text{coût}=0}(C, \frac{\varepsilon}{10\mathcal{C}}) + \frac{\varepsilon}{10}$.
Par construction de C_1 et de j_0, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned}\mathrm{MN}_{5,W=1,\text{coût}=0}(C_1, \tfrac{\varepsilon}{10\mathcal{C}}) &\leqslant \frac{10\mathcal{C}r}{2\varepsilon}\Bigg(\sum_{(j,k)\in C_1} g_{j,k}a^{j/2}\Bigg)^2 \\ &\leqslant \frac{5\mathcal{C}^3W^2(1+\varepsilon)}{\varepsilon^3}\left(\frac{a^{j_0/4}}{1-a^{1/4}}\right)^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{80}\end{aligned}$$

D'autre part, par construction de Λ_h :

$$\begin{aligned}\mathrm{MN}_{5,W=1,\text{coût}=0}(C_2, \tfrac{\varepsilon}{10\mathcal{C}}) &\leqslant \frac{10\mathcal{C}r}{2\varepsilon}\Bigg(\sum_{(j,k)\in \Lambda_h} g_{j,k}a^{j/2}\Bigg)^2 \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{40}\frac{r}{2W}\Bigg(\sum_{(j,k)} g_{j,k}a^{j/2}\Bigg)^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{40}\,\mathrm{MN}_{5,\text{coût}=0}(M) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{40}\,\mathrm{OPT}(M)\end{aligned}$$

Ainsi comme $(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$, nous en concluons :

$$\begin{aligned}\mathrm{MN}_{5,W=1}(C, \tfrac{\varepsilon}{10\mathcal{C}}) &\leqslant \frac{\varepsilon}{40} + \frac{\varepsilon}{20}\,\mathrm{OPT}(M) + \frac{\varepsilon}{10} \\ &\leqslant \frac{2\varepsilon}{5}\,\mathrm{OPT}(M), \quad \text{car } \mathrm{OPT}(M) \geqslant 3/2.\end{aligned}$$

Ainsi C est bien de contribution négligeable.

C.Q.F.D. □

Algorithme 4.5 Le schéma d'approximation polynomial

Entrées : Une constante $\varepsilon > 0$, et un ensemble M de messages $M_1, \dots, M_m$ de coûts de diffusion borné par $\mathcal{C}$.

1. Arrondir les probabilités et les coûts des messages suivant le lemme 4.9. Regrouper les messages de même probabilité et même coûts. Partitionner M en trois sous-ensembles $M = A \sqcup B \sqcup C$ conformément au lemme 4.10.
2. Calculer l'ordonnancement périodique S_{AB} sur W canaux des ensembles de messages A et B, de période T_{AB} inférieure à $\big((9m^2 + 4\mathcal{C}m) \cdot T(\varepsilon) \cdot |A|^2\big) = \Theta(m^2)$ avec l'algorithme 4.4 page 167.
3. Calculer l'ordonnancement glouton périodique S_C des messages de C sur *un* canal, de période $T_C = (\varepsilon/(10\mathcal{C}) \cdot T_{AB}) = \Theta(m^2)$ avec $\tau = (10\mathcal{C}/\varepsilon \cdot \tau^*)$, où τ^* est la solution du problème de minimisation $\mathrm{MN}_{5,W=1}(C, \varepsilon/(10\mathcal{C}))$.
4. Choisir le meilleur point de départ $x \in \{1, \dots, \frac{10\mathcal{C}}{\varepsilon} - 1\}$ pour étirer l'ordonnancement S_{AB} d'un créneau tous les $(\frac{10\mathcal{C}}{\varepsilon} - 1)$. Insérer dans les trous, sur le premier canal l'ordonnancement S_C. Soit S_M l'ordonnancement périodique, de période $\Theta(m^2)$ résultant.
5. Choisir le meilleur point de départ $x \in \{1, \dots, \frac{m^2+m\mathcal{C}}{\varepsilon} - m\}$ pour étirer l'ordonnancement S_M de m créneaux tous les $(\frac{m^2+m\mathcal{C}}{\varepsilon} - m)$. Construire S'_M en insérant dans les créneaux libres de l'étiré de S_M les m messages dans un ordre fixé. S'_M se décompose de blocs indépendants de longueur $\frac{m^2+m\mathcal{C}}{\varepsilon}$ et de coût moyen $\mathrm{COUT}(S'_M)$.

Sortie :

6. Retourner l'ordonnancement périodique S dont la période est le bloc de coût minimal de S'_M.

4.5.2 Le schéma

Nous pouvons donc à présent décrire notre schéma d'approximation pour la dissémination de messages de longueurs uniformes et de coûts de diffusion bornés.

Théorème 4.1 (Schéma d'approximation polynomial) *Etant donnés un ensemble M de messages de coût borné par une constante $\mathcal{C}$ et $0 < \varepsilon < 1/27$, l'algorithme 4.5 génère en temps quadratique $\Theta(m^2)$, un ordonnancement S sur W canaux des messages de M, périodique et de période inférieure à $(m^2 + m\mathcal{C})/\varepsilon$, et dont le coût est quasi-optimal :*

$$\mathrm{COUT}(S) \leqslant (1 + 10\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(M)$$

Preuve.
Analyse des performances. Soit $\dot{M}$ l'ensemble des messages arrondis. D'après, les propositions 4.2 page 166 et 4.3 page 170, nous avons :

$$\mathrm{COUT}(S_M) \leqslant (1+\varepsilon)(1+5\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(\dot{M})$$

Or, le lemme 4.9 indique que :

$$\mathrm{OPT}(\dot{M}) \leqslant (1+2\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(M)$$

Ainsi,

$$\mathrm{COUT}(S_M) \leqslant (1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)(1+5\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(M)$$

Enfin, le lemme d'étirement 4.6 donne que :

$$\mathrm{COUT}(S) \leqslant \mathrm{COUT}(S'_M) \leqslant (1+\varepsilon)\,\mathrm{COUT}(S_M)$$

Et donc, pour $\varepsilon < 1/27$:

$$\mathrm{COUT}(S) \leqslant (1+10\varepsilon)\,\mathrm{OPT}(M)$$

Complexité en temps. L'étape 1 s'exécute en $O(m)$ et chacune des étapes 2–6 s'exécutent en $\Theta(m^2)$. Le temps de calcul est donc quadratique.
C.Q.F.D. □

Conclusions et Perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté un schéma d'approximation polynomial pour la dissémination de messages de longueurs uniformes et de coûts de diffusion bornés. Le meilleur algorithme polynomial avant nos travaux était une approximation à $9/8$ de l'optimum. Remarquons en particulier qu'avec notre approche, ordonnancer sur un canal ou plusieurs revient essentiellement au même pour des messages de longueurs uniformes (*cf.* Lemme 4.8 page 164). Ceci est à opposer avec les exemples que nous avons donnés aux chapitre 2 page 61 et page 72 pour le cas des longueurs très hétérogènes. Il existe donc bien une grande différence de complexité entre ces deux variantes de la dissémination.

Notons que la dépendance en ε du temps de calcul de notre algorithme est largement exponentielle. Aussi, ce résultat est essentiellement d'intérêt théorique. Cependant les principes pourraient se révéler très utiles en pratique : seul un nombre constant de messages sont importants par eux-mêmes ; ces messages peuvent être ordonnancés de façon quasi-optimale avec une petite période ; les autres messages doivent être regroupés par similarités et peuvent être diffusés quasi-optimalement par un algorithme glouton. Nous obtenons alors un ordonnancement quasi-optimal en recherchant les bonnes fréquences de diffusion pour ces deux catégories de messages. Des heuristiques performantes en pratique pourraient être dégagées de ces idées.

Il serait intéressant d'étudier également si ces principes pourraient être portés avec succès sur les différentes variantes de la dissémination. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le cas où les messages sont de longueurs non-uniforme semble très différent des autres variantes, aussi nous ne pensons pas que cela soit possible pour cette variante. Une autre extension naturelle est l'étude des coûts non-bornés. Nous avons cependant utilisé à de nombreuses reprises le fait que les coûts étaient bornés, tout particulièrement pour les points clé (*e.g.* pour borner par une constante la période d'un ordonnancement quasi-optimal des messages de A). Notre méthode est notamment incapable de résoudre le cas où tous les messages ont les mêmes probabilités mais des coûts de diffusion très différents. Cette extension nécessitera donc une étude particulière de l'influence des coûts. En revanche, l'étude de la portabilité de notre schéma au cas de la dissémination préemptive nous semble être un axe raisonnable de recherche à court terme.

Enfin une question très intéressante reste ouverte : le problème de la dissémination sans coûts de diffusion est-il NP-difficile ? La preuve donnée par Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber dans [BNBNS98] de la NP-dureté en présence de coût de diffusion utilise les coûts (en particulier la réduction est faite sur les instances où tous les messages ont les mêmes probabilités). Cette question reste un axe très intéressant de recherche, de même que l'appartenance de ce problème à NP. En effet, nous ne savons toujours pas s'il existe un ordonnancement optimal pour ce problème dont la taille est polynomiale en le nombre de messages.

CHAPITRE

5 Résolution des problèmes de minimisation définissant nos minorants

Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons rencontré des problèmes de minimisation non-linéaires (MN_1 page 35, $\mathrm{MN}_{2\,\mathrm{bis}}$ page 116, MN_4 page 117) dont la forme générique est :

$$(A)\begin{cases} \displaystyle\min_{\tau>0} \sum_{i=1}^{m} a_i\tau_i + \frac{b_i}{\tau_i} \\ \text{Sur le domaine:} \quad (i) \quad (\forall i),\ \tau_i \geqslant 1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad (ii) \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i} \leqslant W \end{cases} \tag{5.1}$$

où $a_1, \ldots, a_m$ et W sont des nombres strictement positifs, et $b_1, \ldots, b_m$ sont des nombres quelconques. Nous avons également rencontré une forme relaxée (A') de ce problème (A) (MN_2 page 70, MN_3 page 75) où la contrainte (i) est éliminée :

$$(A')\begin{cases} \displaystyle\min_{\tau>0} \sum_{i=1}^{m} a_i\tau_i + \frac{b_i}{\tau_i} \\ \text{Sur le domaine:} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i} \leqslant W \end{cases} \tag{5.2}$$

Nous avons affirmé que chacun de ces problèmes admet une solution unique. Ce fait est à la base de nos résultats pour deux raisons. Tout d'abord, la conception de nos algorithmes d'approximations repose sur la résolution de ces problèmes : leurs solutions proposent en effet des fréquences "idéales" pour la diffusion des messages, qui lorsqu'on les suit nous donnent des heuristiques avec garantie de performances (parfois excellentes, *cf.* Chapitre 4). Ensuite, l'unicité de la solution donne des informations sur l'ordonnancement optimal. Ces informations sont essentielles pour nos preuves de NP-dureté. Dans ce chapitre nous nous proposons de démontrer l'existence d'une solution unique aux problèmes (A) et (A').

Nous avons vu au chapitre 1 que Bar-Noy, Bathia, Noar et Schieber avaient résolu ces problèmes lorsque les coefficients (b_i) étaient positifs. L'objet de ce chapitre est d'étendre leur méthode au cas où les (b_i) ont des signes arbitraires. La difficulté est que la fonction objectif n'est plus convexe et l'unicité n'est plus immédiate. La méthode consiste donc à commencer par démontrer que la solution existe, puis à démontrer à l'aide du problème relaxé (A') qu'elle est unique. Cette méthode aboutit à un algorithme de calcul de la solution qui nécessite la résolution d'équations algébriques, ce pourquoi nous donnerons brièvement une méthode numérique.

5.1 Résolution du problème relaxé

Le principe de la relaxation Lagrangienne. D'après le théorème des extrema liés, lorsqu'on cherche à minimiser une fonction $f(\vec{x})$ sous la contrainte $g(\vec{x}) = 0$, si le minimum est atteint en $\vec{x}^*$ à l'intérieur du domaine, alors les gradients de f et g sont colinéaires en $\vec{x}^*$:

$$\mathrm{grad}\, f(\vec{x}^*) = \lambda\, \mathrm{grad}\, g(\vec{x}^*), \quad \text{pour un certain } \lambda.$$

La Il s'agit alors d'introduire le paramètre λ comme une nouvelle variable du problème de minimisation en posant $F(\vec{x}, \lambda) =_{\text{def}} \big(f(\vec{x}) - \lambda g(\vec{x})\big)$. Nous sommes alors ramenés à la recherche des couples $(\vec{x}^*, \lambda^*)$ tels que :

$$\mathrm{grad}\, f(\vec{x}^*) = \lambda^*\, \mathrm{grad}\, g(\vec{x}^*) \quad \text{et} \quad g(\vec{x}^*) = 0,$$

ce que l'on peut réécrire de façon équivalente : $\mathrm{grad}\, F(\vec{x}^*, \lambda^*) = 0$. Cette méthode permet de réduire la recherche du minimum $\vec{x}^*$ et du paramètre λ^* correspondant, à la résolution d'un système d'équations.

Nous allons voir que cette méthode permet d'obtenir une expression algébrique pour la solution du problème relaxé (A').

5.1.1 Expression algébrique

Proposition 5.1 (Résolution du problème relaxé) *Etant donné des réels strictement positifs $a_1, \ldots, a_m$ et W, et des réels arbitraires $b_1, \ldots, b_m$, le problème de minimisation :*

$$(A') \begin{cases} \displaystyle\min_{\tau>0} \sum_{i=1}^{m} a_i\tau_i + \frac{b_i}{\tau_i} \\ \text{Sur le domaine:} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\tau_i} \leqslant W \end{cases}$$

admet une unique solution τ', telle que :

$$\tau'_i = \sqrt{\frac{b_i + \lambda'}{a_i}}, \quad \textit{pour un certain } \lambda' \geqslant 0, \tag{5.3}$$

avec : si pour tout i, $b_i > 0$ et $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{a_i/b_i} \leqslant W$, alors $\lambda' = 0$; et sinon, λ' est l'unique solution positive de : $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{a_i/(b_i + \lambda')} = W$.

Preuve. Soit $f(\tau) =_{\text{def}} \sum_{i=1}^{m}(a_i\tau_i + b_i/\tau_i)$ la fonction objectif. Notons tout d'abord que : $\lim_{||\tau||\to\infty} f(\tau) = \infty$, ainsi la fonction continue f admet un minimum sur le domaine fermé défini par les contraintes. Nous allons considérer deux cas :

1. *les (b_i) sont tous positifs,* [BNBNS98]. Dans ce cas la fonction f est convexe, et n'est constante sur aucun segment, donc f admet un unique minimum τ' sur le domaine convexe et fermé défini par les contraintes. Notons que chacun des termes $(a_i\tau_i + b_i/\tau_i)$ admet un unique minimum $\tau_i^{\#} = \sqrt{b_i/a_i}$ sur $[0, \infty[$. Ainsi deux cas sont à envisager :
   1.a) $\tau^{\#}$ appartient au domaine défini par la contrainte : alors $\tau' = \tau^{\#}$.
   1.b) $\tau^{\#}$ ne vérifie pas la contrainte. Comme chacun des termes $(a_i\tau_i + b_i/\tau_i)$ est unimodulaire[1], rapprocher chacune des coordonnées τ_i de $\tau_i^{\#}$ diminue strictement la valeur de $f(\tau)$ et donc le minimum τ' de f est atteint sur la frontière du domaine : $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau'_i = W$. Nous trouvons alors le minimum τ' de f sur la surface $g(\tau) =_{\text{def}} W - \sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i = 0$, en introduisant le paramètre Lagrangien λ tel que $\operatorname{grad} f(\tau') = \lambda \operatorname{grad} g(\tau')$, comme nous l'avons vu au début de cette section. Remarquons qu'en $\tau = \tau'$, g et f augmentent lorsque τ entre dans le domaine $g(\tau) > 0$, ainsi $\lambda \geqslant 0$. La résolution du système $\operatorname{grad} F(\tau', \lambda') = 0$ donne que $\tau'_i = \sqrt{(b_i + \lambda')/a_i}$, où λ' est l'unique solution de l'équation $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{a_i/(b_i + \lambda')} = W$.

[1]Une fonction est dite *unimodulaire* si elle change de sens de variation au plus une fois.

2. *Il existe* i_0*, tel que* $b_{i_0} < 0$. Alors nous n'avons plus directement l'unicité du minimum de f sur le domaine $g(\tau) = 0$. Soit τ' un minimum de f, si $\sum_{i=1}^{m} 1/\tau_i' < W$, alors diminuer τ_{i_0} diminuerait strictement la valeur de f. Ainsi les minima de f appartiennent à la frontière du domaine. Nous obtenons alors l'expression algébrique et l'unicité de la solution du problème de minimisation en procédant de même que précédemment par relaxation Lagrangienne.

□

5.1.2 Résolution numérique du problème

La résolution de ce problème de minimisation nécessite de trouver l'unique solution positive de l'équation suivante en λ :

$$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{\frac{a_i}{b_i + \lambda}} = W, \quad \text{avec } \lambda \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} -b_i \tag{5.4}$$

Cette équation peut se réécrire comme la recherche du zéro positif d'un polynôme de degré 2^m. Cependant, cette fonction est clairement convexe et strictement décroissante en λ. Un algorithme très performant consiste à utiliser la méthode de Newton. Pour démontrer que l'algorithme produit en temps polynomial (en fait sous-logarithmique) une approximation à ε près de λ', il suffit donc de borner la valeur de la solution λ'. Or :

$$W \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\frac{a_i}{\lambda' + \min_i b_i}},$$

$$\text{Ainsi,} \quad \lambda' \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} -b_i + \frac{1}{W^2}\left(\sum_{i=1}^{m} \sqrt{a_i}\right)^2 \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} -b_i + \frac{m}{W^2}$$

Ainsi l'algorithme de Newton permet de trouver la solution en temps sous-logarithmique (en $O(\log\log\{1/\varepsilon, \max_i(-b_i), W, m\})$).

On obtient ainsi une approximation $\tilde{\tau}$ de la solution τ' à ε près. La valeur du problème de minimisation en $\tilde{\tau}$ est alors à ε près de la valeur optimale pour ε suffisamment petit, puisque :

$$f(\tilde{\tau}) = \sum_{i=1}^{m}\left(a_i\tilde{\tau}_i + \frac{b_i}{\tilde{\tau}_i}\right) \leqslant f(\tau^*) + \sum_{i=1}^{m}\left(a_i\varepsilon + \frac{|b_i|}{\tau_i^2}\varepsilon\right) \leqslant f(\tau^*) + \varepsilon\left(\mathcal{A} + \mathcal{B}W^2\right)$$

où $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{m} a_i$ et $\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{m} |b_i|$.

5.2 Résolution du problème fort

La résolution de (A) utilise le problème relaxé précédent.

Remarquons tout d'abord que comme précédemment, f est continue et vérifie $\lim_{||\tau||\to\infty} f(\tau) = \infty$. Ainsi, f admet bien un minimum sur le domaine fermé défini par les contraintes (i) et (ii) de (A). L'unicité du minimum de f vient du lemme suivant :

Lemme 5.1 *Soient τ^*,* une *solution du problème de minimisation (A) et τ' la solution du problème relaxé (A') et soit $1 \leqslant i_0 \leqslant m$. Si $\tau'_{i_0} < 1$, alors $\tau^*_{i_0} = 1$.*

Preuve. Cette propriété a été proposée par Bar-Noy, Bhatia, Noar et Schieber dans [BNBNS98] pour trouver *la* solution du problème (A) lorsque les (b_i) sont tous positifs. Nous allons montrer ici que cette propriété est toujours vraie et permet de prouver l'*unicité* de la solution de (A), lorsque les (b_i) ont des signes arbitraires.

Supposons que la solution τ' de (A') et i_0 tel que $\tau'_{i_0} < 1$. Sans perte de généralité, considérons que $i_0 = 1$. D'après la proposition 5.1, il existe $\lambda' \geqslant 0$ tel que : pour tout i, $\tau'_i = \sqrt{(b_i + \lambda')/a_i}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe une solution τ^* de (A) telle que : $\tau^* \neq 1$, ainsi $\tau^*_1 > 1$. Remarquons que la contrainte (ii) est alors une égalité $\sum_{i=1}^m 1/\tau^*_i = W$, car sinon on peut diminuer τ^*_1 et améliorer strictement la solution puisque : 1) si $b_1 \geqslant 0$, le terme $(a_1\tau_1 + b_1/\tau_1)$ est unimodulaire de minimum $\sqrt{b_1/a_1} \leqslant \tau'_1 < 1$; 2) si $b_1 < 0$, le terme $(a_1\tau_1 + b_1/\tau_1)$ est strictement croissant en τ_1. Ainsi, comme $\sum_{i=1}^m 1/\tau'_i \leqslant W = \sum_{i=1}^m 1/\tau^*_i$, il existe un indice i_1, sans perte de généralité $i_1 = 2$, tel que : $\tau^*_2 < \tau'_2$.

Considérons donc le problème de minimisation (B) suivant :

$$(B)\left\{\begin{array}{lll} & \displaystyle\min_{\tau>0} \sum_{i=1}^m a_i\tau_i + \frac{b_i+\lambda'}{\tau_i} & \\ \text{Sur le domaine:} & (i) & (\forall i),\ \tau_i \geqslant 1 \\ & (ii) & \displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i} \leqslant W \end{array}\right. \tag{5.5}$$

Pour tout i, $(b_i + \lambda') \geqslant 0$, donc chaque terme $(a_i\tau_i + (b_i + \lambda')/\tau_i)$ de la fonction objectif est unimodulaire et admet $\tau_i = \sqrt{(b_i + \lambda')/a_i} = \tau'_i$ pour minimum sur $[0, \infty[$. Du fait de leurs unimodularités, chacun des termes est minimisé *indépendamment* sur le domaine défini par les contraintes (i) et (ii) de (B), au point τ''_i le plus proche du minimum τ'_i : $\tau''_i = \max(1, \tau'_i)$ (notons que : $\sum_{i=1}^m 1/\max(1, \tau'_i) \leqslant \sum_{i=1}^m 1/\tau'_i \leqslant W$). Ainsi, (B) admet pour *unique* solution $\tau'' = \max(1, \tau')$.

Ainsi comme $\tau^* \neq \tau''$ ($\tau^*_1 > 1 = \tau''_1 > \tau'_1$ et $1 \leqslant \tau^*_2 < \tau'_2 = \tau''_2$), τ^* n'est pas solution de (B). De plus, chacun des termes $(a_i\tau_i + (b_i + \lambda')/\tau_i$ est unimodulaire, donc n'importe quelle variation $\delta_1 < 0$ (*resp.* $\delta_2 < 0$) de τ_1^* (*resp.* τ_2^*) telle que la contrainte (ii) soit vérifiée, rapproche τ^* du minimum τ'' du problème (B) et améliore donc la valeur de la fonction objectif. Considérons donc $\delta_1 < 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que : $\delta_1/\tau_1^{*2} + \delta_2/\tau_2^{*2} = 0$, de sorte que (ii) soit vérifiée en $(\tau^* + \delta)$. La variation de la valeur de la fonction objectif de (B) de τ^* à $(\tau^* + \delta)$ est donc strictement négative et vaut :

$$a_1\delta_1 + a_2 + \delta_2 - \left(\frac{b_1 + \lambda'}{\tau_1^{*2}}\,\delta_1 + \frac{b_2 + \lambda'}{\tau_2^{*2}}\,\delta_2\right) < 0$$

Or, cela se simplifie en : $a_1\delta_1 + a_2 + \delta_2 - \left(b_1\delta_1/\tau_1^{*2} + b_2\delta_2/\tau_2^{*2}\right) < 0$. Ainsi la fonction objectif du problème (A) diminue strictement de τ^* à $(\tau^*+\delta)$, ce qui contredit la minimalité de τ^*. □

Proposition 5.2 *Le problème de minimisation* (A) *admet une unique solution* τ^* *que l'algorithme 5.1 calculé en temps polynomial.*

Preuve. Considérons une solution τ^* de (A). Soit τ' l'unique solution du problème relaxé (A'). S'il existe un indice i_0 tel que que $\tau'_{i_0} < 1$, alors nous avons $\tau^*_{i_0} = 1$. On retire donc cette variable du problème (A) en fixant sa valeur à 1, et on itère. Sinon, pour tout i, $\tau'_i \geqslant 1$ et donc la solution τ' du problème relaxé (A') est aussi *la* solution de (A) qui est donc unique : $\tau^* = \tau'$. D'où l'algorithme 5.1. □

Algorithme 5.1 Calcul de la solution du problème de minimisation (5.1), [BNBNS98]

Entrées : $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m, W$, où $a_1, \ldots, a_m$ et W sont des nombres strictement positifs.

Répéter

Calculer la solution τ' du problème relaxé (A').

Test := $\top$, $\quad \mathcal{I} := \{1, \ldots, m\}$.

Pour tout $i \in \mathcal{I}$ **tel que** $\tau'_i < 1$

$\tau_i^* := 1, \quad \mathcal{I} := \mathcal{I} \setminus \{i\}, \quad W := W - 1, \quad$ Test := $\perp$.

Jusqu'à ce que Test = $\top$.

Pour tout $i \in \mathcal{I}$

$\tau_i^* := \tau'_i$

Conclusions et perspectives

Nous avons vu dans ce chapitre comment résoudre les problèmes de minimisation que nous avons rencontrés dans notre étude de la dissémination de données. Une extension intéressante de ces problèmes de minimisation serait d'ajouter des contraintes de délai de service maximal afin d'éviter que certains utilisateurs attendent trop longtemps avant d'être servis lorsqu'ils demandent les messages les moins populaires. Dans les chapitres précédents nous avons vu que nous pouvions garantir un délai de service maximal en générant des ordonnancements périodiques, de période quadratique en le nombre des messages et indépendante de la popularité des messages. Il serait cependant intéressant d'inclure ces contraintes directement dans le calcul des fréquences des messages. Ajouter une troisième contrainte du type $\tau_i \leqslant T_i$ dans le problème de minimisation guarantirait qu'en moyenne les requêtes sont servies au plus tard avant T_i, indépendamment des popularités des messages. La difficulté est alors d'obtenir la solution du problème de minimisation (relaxer cette contrainte ne permet pas de déduire la solution du problème initial en temps polynomial). Une solution serait alors d'utiliser des méthodes de minimisation numériques génériques et non plus dédiées au problème. Ces méthodes permettraient ainsi de résoudre les cas où la fonction est convexe, mais pas, à notre connaissance, le cas général où certains des (b_i) peuvent être négatifs.

Conclusions et perspectives

Dans la première partie de cette thèse, nous avons étudié le problème de l'ordonnancement pour la dissémination de données dans les réseaux sans fil, ou plus généralement dans les réseaux asymétriques. Nous avons défini un modèle simple, offrant de nombreuses variantes et unifiant les différentes approches précédentes issues de différents domaines (disques diffusants, maintenance de machines, ...). Le principal outil de cette unification est le théorème de réversibilité du calcul du coût (Théorèmes 1.1 et 3.1).

Nous avons défini et exploré différentes extensions naturelles du problème initial de la dissémination de messages de longueurs uniformes. Nous avons démontré que lorsque les messages sont de longueurs non-uniformes, ordonnancer les messages est un problème NP-difficile, avec ou sans préemption (Théorèmes 2.1 et 3.2). Nous avons également proposé différentes heuristiques avec garantie de performances à un facteur constant de l'optimal et générant des ordonnancements de taille polynomiale (Algorithmes 2.3 et 3.6).

Enfin, nous avons proposé un schéma d'approximation polynomial pour le problème initial (Algorithme 4.5). Bien que cet algorithme ne soit pas utilisable en l'état du fait de sa dépendance largement exponentielle en ε, les principes que nous avons présentés permettront peut-être de développer des heuristiques non garanties mais affichant de bonnes performances en pratique.

Les perspectives pour la poursuite de ces travaux sont nombreuses. Nous les avons détaillées à chaque fin de chapitre, rappelons ici les plus intéressantes. Tout d'abord, nous avons vu que le cas des messages de longueur non-uniforme sans préemption reste largement mal compris, particulièrement lorsque la dissémination a lieu sur plusieurs canaux. Nous aimerions réussir à garantir les performances d'heuristiques pour la dissémination sur plusieurs canaux. Ensuite, nous avons vu que notre minorant du cas préemptif suggère de ne pas préempter, alors que d'une part il est impossible de l'approcher à un facteur constant sans préempter les messages dans le cas général, et que d'autre part nos heuristiques réalisent un facteur constant d'approximation en préemptant systématiquement les messages.

Nous pouvons donc espérer améliorer soit les heuristiques en préemptant plus prudemment, soit le minorant en le modifiant pour tenir compte de la nécessité de la préemption. L'étude de l'adaptation au cas préemptif des idées utilisées pour la conception du schéma d'approximation du problème initial pourrait être également une possibilité intéressante. Rappelons que le problème préemptif modélise aussi un cas particulier d'une autre variante du problème initial où les requêtes ne demandent plus un message, mais un lot de messages. Le cas préemptif est le cas où ces lots sont disjoints. L'étude de cas plus généraux est une perspective intéressante qui fait partie de nos projets de recherche à court terme. Enfin, la NP-dureté du problème initial sans coûts de diffusion ainsi que son appartenance à NP, restent ouvertes et leurs déterminations permettraient de mieux comprendre la complexité "intrinsèque" du problème.

Bibliographie Dissémination de données

[AAB+98] D. Aksoy, M. Altinel, R. Bose, U. Cetintemel, M. Franklin, J. Wang, et S. Zdonik. Research in data broadcast and dissemination. In *Proc. of the International Conference on Advanced Multimedia Content Processing (AMSP)*, Osaka, Nov. 1998. Disponible à //www.cs.brown.edu/research/ddg/.

[AAFZ95] S. Acharya, R. Alonso, M. J. Franklin, et S. Zdonik. Broadcast disks : data management for asymetric communications environment. In *Proc. of ACM International Conference on Management of Data (SIGMOD'95)*, Santa Cruz, CA, Juin 1995. Disponible à //www.cs.brown.edu/research/ddg/.

[Ach98] Swarup Acharya. *Broadcast Disks : Dissemination-based Management for Assymmetric Communication Environments*. Thèse, Brown University, Mai 1998. Disponible à //www.bell-labs.com/~acharya/.

[AFZ96] A. Acharya, M. Franklin, et S. Zdonik. Prefetching from a broadcast disk. In *Proc. of the Conference on Data Engineering*, New Orleans, 1996. Disponible à //www.cs.brown.edu/research/ddg/.

[AFZ97] A. Acharya, M. Franklin, et S. Zdonik. Balancing push and pull for data broadcast. In *Proc. of ACM International Conference on Management of Data (SIGMOD97)*, Tuscon, Arizona, Mai 1997. Disponible à //www.cs.brown.edu/research/ddg/.

[AGH94] S. Anily, C. A. Glass, et R. Hassin. Scheduling of maintenance services to three machines. Prépublication OR58, Faculty of Mathematical Sciences, Southampton University, 1994.

[AGH95] S. Anily, C. A. Glass, et R. Hassin. The scheduling of maintenance service. Disponible à //www.math.tau.ac.il/~hassin/, Juil. 1995.

[Air97] Airmedia Inc., 1997. //www.airmedia.com/.

[Amm87] Mostafa H. Ammar. Response time in a teletext system : An individual user's perspective. *IEEE Transactions on Communications*, COM-35,11 :1159–1170, Nov. 1987. Page d'accueil à //www.cc.gatech.edu/fac/Mostafa.Ammar/.

[AW85] M. H. Ammar et J. W. Wong. The design of teletext broadcast cycles. In *Performance Evaluation*, volume 5(4), pages 235–242, 1985. Page d'accueil à //www.cc.gatech.edu/fac/Mostafa.Ammar/.

[AW87] M. H. Ammar et J. W. Wong. On the optimality of cyclic transmission in teletext systems. In *IEEE Trans. on Comm.*, volume COM-35(11), pages 1159–1170, 1987. Page d'accueil à //www.cc.gatech.edu/fac/Mostafa.Ammar/.

[BB97] S. Baruah et A. Bestavros. Pinwheel scheduling for fault-tolerant broadcast disks in real-time database systems. In *Proc. of IEEE International Conference on Data Engineering (ICDE'97)*, Birmingham, England, Avr. 1997. Disponible à //cs-www.bu.edu/∼best/.

[BC96] A. Bestavros et C. Cunha. Server-initiated document dissemination for the www. *IEEE Data Engineering Bulletin*, 19(3) :3–11, Sept. 1996. Disponible à //cs-www.bu.edu/∼best/.

[Bes96] Azer Bestavros. Speculative data dissemination and service to reduce server load, network traffic and service time in distributed information systems. In *Proc. of the 1996 International Conf. on Data Engineering (ICDE'96)*, Mars 1996. Disponible à //cs-www.bu.edu/∼best/.

[BGH+92] T. G. Bowen, G. Gopal, G. E. Herman, T. M. Hickey, K. C. Lee, W. H. Mansfield, J. Raitz, et A. Weinrib. The Datacycle architecture. *Communications of the ACM*, 35(12) :71–81, Déc. 1992.

[BNBNS98] A. Bar-Noy, R. Bhatia, J. Naor, et B. Schieber. Minimizing service and operation costs of periodic scheduling. In *Proc. of the 9th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA'98)*, pages 11–20, 1998. Disponible à //www.eng.tau.ac.il/∼amotz/.

[BNS99] Amotz Bar-Noy et Yaron Shilo. Optimal broadcasting of two files over an asymmetric channel. In *Proc. of Infocom*, 1999. Disponible à //www.eng.tau.ac.il/∼amotz/.

[CC92] M. Y. Chan et F. Chin. General schedulers for the pinwheel problem based on double-integer reduction. *IEEE Transaction on Computers*, 41(6) :755–768, Jun. 1992.

[CC93] M. Y. Chan et F. Chin. Schedulers for larger classes of pinwheel instances. *Algorithmica*, 9 :425–462, Juin 1993.

[Dir97] DirecPC Inc., 1997. //www.direcpc.com/.

[Ent99] EntryPoint Inc., Août 1999. //www.entrypoint.com/.

[FZ97] M. Franklin et S. Zdonik. A framework for scalable dissemination-based systems. In *Proc. of the International Conference Object Oriented Programming Languages Systems*, pages 94–105, 1997. Disponible à //www.cs.brown.edu/research/ddg/.

[FZ98] M. Franklin et S. Zdonik. 'Data in your face' : Push technology in perspective. In *Invited paper to ACM International Conference on Management of Data (SIGMOD'98)*, Seattle, WA, Juin 1998. Disponible à //www.cs.brown.edu/research/ddg/.

[Gec83] J. Gecsei. *The architecture of Videotex Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1983.

[Gif90] D. K. Gifford. Polychannel systems for mass digital communications. *Communications of the ACM*, 30(2) :141–151, Fév. 1990.

[GJ79] M. R. Garey et D. S. Johnson. *Compters and intractability, A guide to the theory of NP-completeness*. W. H. Freeman and co., 1979.

[Gui95] M. Guignard. Lagrangean relaxation : A short course. *Belgian Journal of Operation Research, Special Issue Francoro*, 35(3–4) :5–21, 1995. Page d'accueil à //www.upenn.edu/.

[HGLW87] G. E. Herman, G. Gopal, K. C. Lee, et A. Weinrib. The datacycle architecture for very large high throughput database systems. In *Proc. of ACM International Conference on Management of Data (SIGMOD'87)*, pages 97–103, San Fransisco, CA, Mai 1987.

[HMR+89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, et D. Varvel. The pinwheel : A real-time scheduling problem. In *Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Science*, pages 693–702, Kaillua-Kona, Jan. 1989.

[HR87] M. Hofri et Z. Rosberg. Packet delay under the golden ratio weighted TDM policy in a multiple-access channel. In *IEEE Trans. on Information Theory*, volume 11(33), pages 341–349, Mai 1987.

[HV99] S. Hammeed et N. H. Vaidya. Efficient algorithms for scheduling data broadcast. *ACM-Baltzer Wireless Networks Journal (WINET)*, 1999. A paraître, disponible à//www.cs.tamu.edu/faculty/vaidya/Vaidya.html/.

[HW63] G. Hadley et T. M. Whitin. *Analysis of inventory systems*. Prentice-Hall, 1963.

[IB94] T. Imielinski et B. Badrinath. Mobile wireless computing : Challenges in data management. *Communications of the ACM*, 37(10) :18–28, Oct. 1994. Disponible à //www.cs.rutgers.edu/∼imielins/.

[IR84] A. Itai et S. Rosberg. A golden ratio control policy for a multiple-access channel. *IEEE Transactions on Autom. Contr.*, AC-29 :712–718, Août 1984.

[IVB94a] T. Imielinski, S. Viswanathan, et B. Badrinath. Energy efficient indexing on air. In *Proc of ACM International Conference on Management of Data (SIGMOD'94)*, Mai 1994. Disponible à //www.cs.rutgers.edu/∼imielins/.

[IVB94b] T. Imielinski, S. Viswanathan, et B. R. Badrinath. Power filtering of data on air. In *Proc. of International Conference on Extending Database Technology (EDBT)*, Cambridge, Mar. 1994. Disponible à //www.cs.rutgers.edu/∼imielins/.

[IVH94] Intelligent vehicle highway systems projects. Rapport de recherche, Department of Transportation, Minnesota, Mars 1994.

[KL98] S. Khanna et V. Liberatore. On broadcast disk paging. In *Proceedings of 30th Symp. on Theory of Computing (STOC'98)*, volume 30, pages 634–643, 1998. Disponible à //cm.bell-labs.com/∼sanjeev/.

[Knu73] D. E. Knuth. *The art of computer programming*. Addison-Wesley, 1973. Reading.

[KS99] C. Kenyon et N. Schabanel. The data broadcast problem with non-uniform transmission times. In *Proc. of the 10th Symp. on Discrete Algorithms (SODA'99)*, pages 547–556, Jan. 1999. Disponible à //www.ens-lyon.fr/∼nschaban/.

[KSY00] C. Kenyon, N. Schabanel, et N. E. Young. Polynomial-time approximation scheme for Data Broadcast. In *Proc. of the 32nd ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2000)*, Mai 2000. A paraître. Disponible à //www.ens-lyon.fr/∼nschaban/.

[KZ98] S. Khanna et S. Zhou. On indexed data broadcast. In *Proceedings of 30th Symp. on Theory of Computing (STOC'98)*, volume 30, pages 463–472, 1998. Disponible à //cm.bell-labs.com/∼sanjeev/.

[Mar97] Marimba Inc., 1997. //www.marimba.com/.

[Poi97] Pointcast Inc., 1997. //www.pointcast.com/.

[Sch00] N. Schabanel. The databroadcast problem with preemption. In *LNCS 1770 Proc. of the 17^{th} Symp. on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'2000)*, pages 181–192, Lille, Fév. 2000. Rapport de recherche LIP RR1999-49 disponible à //www.ens-lyon.fr/LIP/.

[Sig80] E. Sigel. *Videotext : The coming revolution in Home/Office Information Retrieval*. Knowledge Industry Publications, White Plains, 1980.

[SL96] S. Shekhar et D. Liu. Genesis : An approach to data dissemination in Advanced Traveler Information Systems (ATIS). *IEEE Data Engineering Bulletin, Special issue on Data Dissemination*, 19(3), Sept. 1996. Disponible à //www.cs.umn.edu/∼shekhar.

[ST97a] C.-J. Su et L. Tassiulas. Broadcast scheduling for information distribution. In *Proc. of IEEE INFOCOM*, 1997. Disponible à //www.ece.umd.edu/∼leandros.

[ST97b] C. J. Su et L. Tassiulas. A method to design broadcast schedules for information dissemination through broadcasting. In *Proc. of IEEE InfoCom*, 1997. Disponible à //www.ece.umd.edu/∼leandros.

[ST99] C.-J. Su et L. Tassiulas. Joint broadcast scheduling and user's cache management for efficient information delivery. *ACM Journal on Wireless Networks*, 1999. Disponible à //www.ece.umd.edu/∼leandros.

[SV96] N. Shivakumar et S. Venkatasubramanian. Energy-efficient indexing for information dissemination in wireless systems. *ACM-Baltzer Journal of Mobile Networks and Nomadic Applications (NOMAD)*, Déc. 1996. Disponible à www.stanford.edu/∼shiva.

[TS99] L. Tassiulas et C.-J. Su. Optimal memory management strategies for a mobile user in a broadcast delivery system. *IEEE Journal on selected areas in communications*, 1999. Disponible à //www.ece.umd.edu/∼leandros.

[TX96] K. Tan et J. Xu. Energy efficient filtering of nonuniform broadcast. In *Proc. of the 16^{th} Int. Conf. in Distributed Computing System*, pages 520–527, 1996.

[VH96] N. H. Vaidya et S. Hameed. Data broadcast in asymetric environments. In *Proc. of the first International Workshop on Satellite-based Information Services (WOSBIS)*, Nov. 1996. Disponible à //www.cs.tamu.edu/faculty/vaidya/Vaidya.html/.

[VH97] N. H. Vaidya et S. Hameed. Log time algorithms for scheduling single and multiple channel data broadcast. In *Proc. of the 3rd ACM/IEEE Conf. on Mobile Computing and Networking (MOBICOM)*, Sept. 1997. Disponible à //www.cs.tamu.edu/faculty/vaidya/Vaidya.html/.

[VH99] N. H. Vaidya et S. Hammeed. Scheduling data broadcast in asymetric communication environments. *ACM-Baltzer Wireless Networks Journal (WINET)*, 1999. A paraître, disponible à //www.cs.tamu.edu/faculty/vaidya/Vaidya.html/.

[Vis94] S. Viswanathan. *Publishing in wireless and wireline environments*. Thèse, Rutgers University, 1994.

[WL83] W. Wei et C. Liu. On a periodic maintenance problem. *Operation Research Letters*, 2 :90–93, 1983.

[YTO91] N. E. Young, R. E. Tarjan, et J. B. Orlin. Faster parametric shortest path and minimum balances algorithms. In *Networks*, volume 21(2), Mars 1991.

[ZFAA94] S. Zdonik, M. Franklin, R. Alonso, et S. Acharya. Are 'disks in the air' just pie in the sky ? In *Proc. of IEEE Workshop on Mobile Computing Systems and Application*, Santa Cruz, CA, Déc. 1994. Disponible à //www.cs.brown.edu/research/ddg/.

[Zip49] G. K. Zipf. *Human Behaviour and the Principle of Least Effort*. Addison-Wesley, 1949.

Index
Dissémination de données

Index des citations Dissémination de données

Deuxième partie

Allocation statique de fréquences

CHAPITRE

6 Allocation statique de fréquences sur la grille triangulaire

Introduction

Dans ce chapitre qui constitue la seconde partie du document, nous abordons le problème de l'*allocation statique de fréquences* en proposant un algorithme d'approximation pour les sous-graphes induits de la grille triangulaire.

La problématique

Nous avons vu dans l'introduction de ce document (pages 14–20) que le problème d'allocation de fréquences dans un réseau cellulaire se modélise par un graphe dont les sommets sont les transmetteurs et dont les arêtes représentent les possibilités d'interférence entre les transmetteurs. Chaque transmetteur doit recevoir suffisamment de fréquences pour satisfaire la demande des utilisateurs dans son domaine de couverture. Les fréquences allouées doivent vérifier des contraintes d'interférence afin d'éviter que des communications différentes ne se brouillent entre elles. En particulier deux fréquences affectées à un même transmetteur ou à deux transmetteurs voisins ne doivent pas être trop proches. Les fréquences sont codées par des entiers et les contraintes d'interférence sont représentées par une suite décroissante d'entiers $c_0 \geqslant c_1 \geqslant c_2 \geqslant \dots$: c_0, appelée contrainte d'interférence *co-site*, est l'écart minimal imposé entre deux fréquences allouées à un même transmetteur, et les c_i, pour $i \geqslant 1$, appelées contraintes *inter-site*, sont les écarts minimaux entre deux fréquences affectées à des émetteurs à distance i l'un de l'autre dans le graphe d'interférence. Le premier indice D tel que $c_D = 0$, appelé *distance de réutilisation*, est la distance à partir de laquelle deux transmetteurs n'entrent plus en interférence. L'objet de l'allocation de fréquences est d'optimiser l'utilisation du spectre de fréquences. Nous recherchons donc une affectation des fréquences sur les sommets du graphe qui minimise la taille totale de la *plage* de fréquences utilisée [en anglais, *span*], c'est-à-dire la différence entre les fréquences maximale et minimale allouées aux transmetteurs. En considérant que chaque fréquence est une couleur au sens habituel de la théorie des graphes, nous sommes ramenés à une généralisation du problème de coloriage de graphes, que nous appellerons le *multi-coloriage sous contraintes*.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'allocation de fréquences pour les sous-graphes induits de la *grille triangulaire* $\mathcal{T}$ définie comme le réseau (au sens mathématique) du plan engendré par les vecteurs $(0,1)$, $(-1,\sqrt{3})/2$ et $(1,\sqrt{3})/2$ (*cf.* illustration Figure 6.1). Cette classe de graphes est fréquente dans les réseaux cellulaires réels (voir par exemple [Hal80, Mac79, KN96]) car elle correspond à un positionnement des transmetteurs dans le plan qui maximise la couverture du réseau tout en limitant les interférences. McDiarmid et Reed ont démontré dans [MR97] que le problème du multi-coloriage sous les contraintes $c_0 = c_1 = 1$ ($c_i = 0$ pour $i \geqslant 2$) est NP-difficile pour cette classe de graphes.

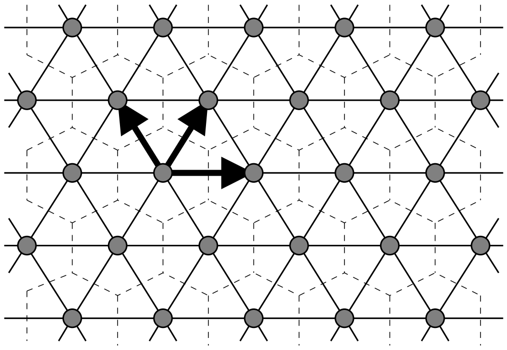


FIG. 6.1 : *Définition la grille triangulaire $\mathcal{T}$. Nous représentons en pointillé son graphe dual (la grille hexagonale) qui correspond au graphe de couverture des transmetteurs placés selon la grille $\mathcal{T}$.*

Nous étudions dans ce chapitre le cas où la distance de réutilisation vaut 2 ($c_i = 0$ pour $i \geqslant 2$) et les contraintes co-site et inter-site vérifient : $c_0 \geqslant c_1 = 1$. Nous proposons une approximation à un facteur $4/3$ de l'optimum lorsque la contrainte co-site vaut $c_0 = 1$ ou 2 et une 1-approximation[1] lorsque $c_0 \geqslant 3$ (Théorèmes 6.1, 6.3 et 6.4). Nous démontrons également que nous pouvons améliorer le facteur de performance de notre heuristique lorsque $c_0 = 1$ sous une certaine contrainte d'uniformité des demandes des différents transmetteurs que nous verrons au Théorème 6.2.

[1] C'est-à-dire une approximation optimale à une constante additive près.

Définition du modèle étudié dans ce chapitre

Dans ce chapitre, nous considérons le multi-coloriage dans le cas où les contraintes d'interférence vérifient : $c_0 \geqslant c_1 = 1$ et $c_i = 0$ pour $i \geqslant 2$. Le modèle est alors le suivant :

Definition 6.1 (Multi-coloriage sous contrainte) Soient un graphe[2] $G = (V, E)$, un entier $c_0 \geqslant 1$ et une fonction $d : V \to \mathbb{N}$ représentant les demandes en fréquences des différents transmetteurs placés sur les sommets du graphe G. Un *multi-coloriage* (ou *allocation de fréquences*) du graphe G sous la contrainte co-site c_0 (et la contrainte inter-site $c_1 = 1$) est une application[3] $F : V \to \wp(\mathbb{N})$, telle que :

$$\begin{array}{rlr} (i) & (\forall u \in V) \quad |f(u)| = d(u), & \text{Satisfaction de la demande en } u, \\ (ii) & (\forall u \in V)\ (\forall f, f' \in F(u)) \quad f \neq f' \Rightarrow |f - f'| \geqslant c_0, & \text{Contrainte co-site,} \\ (iii) & (\forall uv \in E) \quad f \in F(u) \text{ et } f' \in F(v) \Rightarrow f \neq f', & \text{Contrainte inter-site.} \end{array}$$

$F(u)$ est l'ensemble des fréquences allouées au sommet u. La *plage* $P(F)$ de la fonction d'allocation F [en anglais, *span*] est définie comme la taille de la plage totale de fréquences utilisée :

$$P(F) = \max F(V) - \min F(V) + 1, \quad \text{où } F(V) = \bigcup_{u \in V} F(u).$$

La *plage minimale* $P(G, d, c_0)$ du graphe G muni d'une demande d sous la contrainte co-site c_0 est alors définie comme la valeur optimale de la plage d'un multi-coloriage de G :

$$P(G, d, c_0) = \min_{F \text{ multi-coloriage de } G} P(F)$$

L'objectif de l'allocation statique de fréquences est donc de trouver une allocation de fréquence F de *plage minimale* qui satisfasse les contraintes d'interférence.

Remarque 6.1 Si on cherchait à minimiser seulement le nombre de fréquences et non la taille de la plage de fréquence, la valeur de c_0 serait sans importance, puisque l'on obtiendrait une solution optimale pour le problème sous contrainte c_0 à partir d'une solution optimale au problème sous contrainte $c_0' = 1$ en multipliant toutes les fréquences par c_0.

Le problème étant NP-difficile pour la classe de graphes que nous allons considérer, l'obtention d'un minorant de la plage minimale de G nous sera utile pour évaluer les perfor-

[2]Les définitions et propriétés élémentaires des graphes ne sont pas redéfinies systématiquement dans ce document, aussi en cas de doute nous conseillons au lecteur de se référer aux ouvrages [BM76, Wes96] par exemple.

[3]On désigne par $\wp(X)$ l'ensemble des parties de l'ensemble X.

mances des algorithmes que nous allons proposer. Remarquons que la plage minimale d'un graphe G est minoré par la plage minimale de ses sous-graphes induits. Aussi, un minorant naturel de la plage minimale d'un graphe est la valeur maximale de la plage minimale d'une de ses cliques[4]. La valeur de la plage minimale d'une clique a fait l'objet de nombreuses études. Gamst propose en particulier dans [Gam86] une longue liste de valeurs pour ce paramètre en fonction des demandes et des contraintes. Nous rappellerons ces résultats au Lemme 6.2.

Definition 6.2 (Plage maximale des cliques) Pour tout graphe G, nous définissons la *plage maximale des cliques* de G de demande d sous la contrainte co-site c_0 (et la contrainte $c_1 = 1$), notée $\omega(G, d, c_0)$, comme le maximum des plages minimales des cliques de G. Ainsi :

$$\omega(G, d, c_0) = \max_{K \text{ clique de } G} P(K, d_{|K}, c_0)$$

où $d_{|K}$ désigne la restriction de la fonction de demande d aux sommets de K.

La plage maximale des cliques de G muni d'une demande d est un minorant de la plage minimale de G :

$$P(G, d, c_0) \geqslant \omega(G, d, c_0)$$

En l'absence d'ambiguïté sur la fonction de demande d ou la contrainte c_0, nous noterons simplement $P(G)$ et $\omega(G)$ pour la plage minimale de G et pour la plage maximale de ses cliques respectivement.

Nous évaluons les performances de nos algorithmes en fonction de la plage maximale des cliques du graphe. Comme les cliques de $\mathcal{T}$ ont toutes taille 1, 2 ou 3, ce minorant est facile à calculer pour les sous-graphes induits de $\mathcal{T}$. Ce paramètre peut cependant être à un facteur constant de la plage minimale du graphe. En effet considérons un cycle C_9 de longueur 9 et de demande uniforme[5] $d \equiv n$ sous la contrainte $c_0 = 1$. Les cliques maximales de C_9 ont taille 2 et la plage maximale des cliques de C_9 vaut $\omega(C_9) = n + n = 2n$. Nous pouvons cependant minorer la plage minimale du cycle en remarquant qu'elle est nécessairement supérieure au rapport du nombre total de fréquences à allouer ($9n$ fréquences) sur le nombre maximum de fois que l'on peut réutiliser une fréquence dans le cycle (4 fois au plus). Ainsi, $P(C_9) \geqslant \frac{9n}{4} \geqslant \frac{9}{8}\omega(C_9)$. Il existe donc des graphes pour lesquels :

$$P(G, d, c_0 = 1) \geqslant \frac{9}{8}\, \omega(G, d, c_0 = 1)$$

[4]Une *clique* d'un graphe G est un ensemble de sommets de G tous connectés entre eux dans G.

[5]On note $f \equiv$ Cte pour signifier que f est la fonction constante de valeur Cte.

Le cycle de longueur 9 est un sous-graphe induit de la grille triangulaire $\mathcal{T}$ (*cf.* Figure 6.2). Aussi $9/8$ est le meilleur facteur d'approximation que l'on puisse espérer obtenir en utilisant cette minoration pour le multi-coloriage des sous-graphes induits de $\mathcal{T}$. Havet a démontré récemment dans [Hav99] que l'on pouvait trouver un multi-coloriage sous contrainte $c_0 = 1$ de plage $\frac{7}{6}\omega(G, d, 1)$ pour les sous-graphes *sans triangle* de $\mathcal{T}$. Et, faute de contre-exemples, McDiarmid et Reed conjecturent que la plage minimale des sous-graphes induits de $\mathcal{T}$ pourrait être majorée par $\frac{9}{8}\omega(G, d, c_0 = 1) +$ Cte. Cependant, à notre connaissance, la meilleure borne à ce jour pour ce cas est $\frac{4}{3}\omega(G, d, c_0 = 1) + 1$.

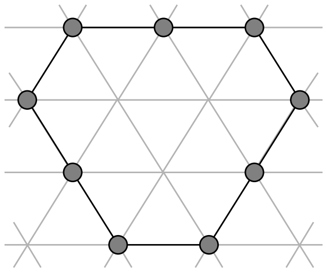


FIG. 6.2 : *Le cycle de longueur* 9 *est un sous-graphe induit de la grille triangulaire* $\mathcal{T}$.

Un premier exemple : Multi-coloriage optimal des graphes bipartis

Le cas des graphes bipartis[6] est élémentaire et nous servira par la suite. Considérons donc en guise d'introduction, un graphe $G = (X, Y, E)$ biparti de demande d. Puisqu'il n'y a pas de triangles, les seules cliques de G sont les arêtes de G.
Si $c_0 = 1$, la plage maximale des cliques $\omega(G)$ de G est la valeur maximale de la somme des demandes des extrémités d'une arête de G. L'affectation de fréquences qui consiste à attribuer aux sommets u de X les fréquences $\{1, \ldots, d(u)\}$ et aux sommets v de Y les fréquences $\{\omega(G) - d(v) + 1, \ldots, \omega(G)\}$, est bien un multi-coloriage de G qui satisfait toutes les contraintes et dont la plage est optimale. Nous avons donc :

$$P(G_{\text{biparti}}) = \omega(G), \quad \text{lorsque } c_0 = 1$$

Supposons à présent que $c_0 \geqslant 2$. L'idée est d'*entrelacer* les fréquences que nous allons affecter à des sommets voisins. Notons $d_{\max} = \max_{u \in V} d(u)$. S'il existe deux sommets adjacents de demande $d_{\max}$, alors l'arête qui les relie est la clique de plage minimale maximale et : $\omega(G) = c_0(d_{\max} - 1) + 2$. Sinon, toute arête partant d'un sommet de demande

[6] Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles $V = X \sqcup Y$ tels que que toutes les arêtes de G relient un sommet de X à un sommet de Y.

maximale est de plage minimale maximale et : $\omega(G) = c_0(d_{\max}-1)+1$. Or, on peut prouver de manière immédiate que si X contient un sommet de demande maximale, l'affectation de fréquences qui attribue aux sommets u de X les fréquences $\{1, 1+c_0, \ldots, 1+(d(u)-1)c_0\}$ et aux sommets v de Y les fréquences $\{2, 2+c_0, \ldots, 2+(d(v)-1)c_0\}$ est un multi-coloriage optimal qui satisfait les contraintes. Ainsi :

$$\omega(G) \leqslant P(G_{\text{biparti}}) \leqslant \omega(G) + 1, \quad \text{lorsque } c_0 \geqslant 2$$

A la dernière étape de notre algorithme 6.1, le graphe à multi-colorier est biparti. Nous utiliserons alors ce résultat.

Plan du chapitre

Après une première section préliminaire présentant les méthodes utilisées pour construire notre algorithme, nous présenterons Section 6.2 notre $4/3$-approximation pour $c_0 = 1$, que nous étendrons Section 6.3 au cas où $c_0 = 2$. Nous proposerons enfin une 1-approximation Section 6.4 pour le cas où $c_0 \geqslant 3$. Le théorème 6.2 démontre que l'on peut améliorer l'algorithme pour obtenir une $(4-\alpha)/3$-approximation lorsque $c_0 = 1$ sous une certaine condition d'uniformité des demandes entre les nœuds du graphe, où $\alpha \in [0, 1]$ est le rapport de la demande minimale sur la demande maximale des nœuds du graphe.

Nous ne considérerons à présent que des sous-graphes induits de la grille triangulaire $\mathcal{T}$.

6.1 Préliminaires

Dans cette section, nous définissons deux opérations qui nous seront fort utiles par la suite, le coloriage Rouge-Vert-Bleu et l'emprunt de couleurs. Nous verrons sur un exemple très simple comment ces opérations permettent de calculer un multi-coloriage efficace. La dernière section présente les valeurs de la plage maximale des cliques pour notre problème en fonction de la contrainte co-site. Ces valeurs nous permettront d'établir les rapports de performance de nos heuristiques dans les sections suivantes.

6.1.1 Coloriage Rouge-Vert-Bleu et emprunt de fréquences

Si le multi-coloriage de la grille triangulaire $\mathcal{T}$ est NP-difficile, son coloriage optimal en trois couleurs Rouge, Vert et Bleu est immédiat (*cf.* illustration Figure 6.3 page suivante). Nous référerons à cette partition des sommets en trois couleurs, lorsque nous dirons qu'un sommet de $\mathcal{T}$ est rouge, vert ou bleu.

Definition 6.3 (Coloriage Rouge-Vert-Bleu) Nous dirons par la suite que nous effectuons x *coloriages Rouge-Vert-Bleu* (*RVB* en abrégé) si nous construisons trois ensembles or-

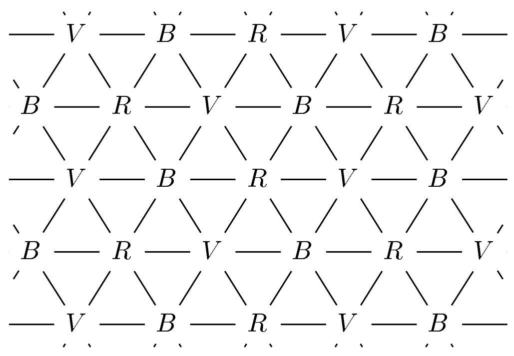


FIG. 6.3 : 3-*coloriage de la grille triangulaire* $\mathcal{T}$.

donnés et disjoints R, V, et B de cardinal x et contenant des fréquences respectivement “rouges”, “vertes” et “bleues” et si nous attribuons à tous les sommets u rouges (*resp.* verts, bleus) du graphe $\min(x, d(u))$ premières fréquences de l'ensemble R (*resp.* V, B).

Une telle affectation respecte les contraintes d'interférence inter-site et réduit les demandes de chaque sommet du graphe de x. L'opération suivante va nous permettre de réutiliser les fréquences qui n'ont pas été utilisées lors d'une étape de coloriages RVB.

Definition 6.4 (Emprunt) Après une étape de x coloriages RVB, nous dirons qu'un sommet u de couleur rouge (par exemple) *satisfait sa demande en empruntant* à ses voisins de couleur vert (par exemple) lorsqu'il lui est alloué $\max(0, d(u) - x)$ fréquences de V parmi celles qui n'ont pas été attribuées à ses voisins verts lors de l'étape de coloriages RVB.

Ces outils vont nous permettre de réduire la complexité du graphe comme l'illustre l'exemple suivant.

6.1.2 Un premier exemple : $\mathbf{c_0 = 1}$ et $\boldsymbol{\omega}\mathbf{(G) = 3}$

Lemme 6.1 (Exemple) *Soit G un sous-graphe induit de $\mathcal{T}$. Si $c_0 = 1$ et $\omega(G) = 3$, alors la plage minimale de G satisfait : $P(G) \leqslant 4$.*

Preuve. Comme la plage maximale des cliques de G vaut 3, après une étape de coloriage RVB, le graphe H induit par les sommets de G dont les demandes restent insatisfaites après cette étape, n'a plus de triangle. Ce graphe est même constitué uniquement de sommets isolés (sinon il existerait deux sommets adjacents de demande supérieure à 2 dans G ce qui contredirait $\omega(G) = 3$).

Un sommet de H dont la demande insatisfaite vaut 2, était isolé dans G et sa demande peut donc être satisfaite en empruntant les deux fréquences non-attribuées à ses voisins lors de l'étape de coloriage RVB.

Enfin, les sommets de H dont les demandes insatisfaites valent 1, sont isolés, et leur demande peut donc être satisfaite en leur attribuant tous une même quatrième et dernière couleur. □

Notons que cette borne est optimale comme le démontre le graphe Figure 6.4.

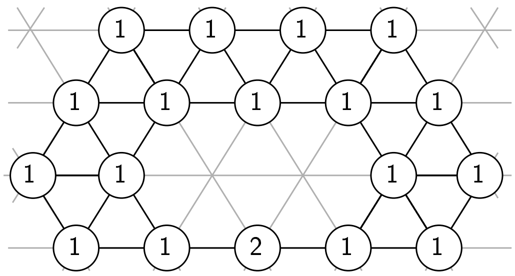


FIG. 6.4 : *Un exemple de graphe G avec 18 sommets pour lequel $\omega(G) = 3$ et $P(G) = 4$. Les sommets et les arêtes de G sont représentés en gras. Les demandes des sommets sont représentées à l'intérieur de chaque sommet: G compte un sommet de demande 2 et 17 sommets de demande 1.*

6.1.3 Expression de la plage maximale des cliques de G

Les valeurs de la plage minimale d'une clique pour les contraintes que nous considérons ont été calculées par Gamst dans [Gam86]. Les seules cliques d'un sous-graphe induit de $\mathcal{T}$ sont les sommets isolés, les arêtes et les triangles. Quitte à rajouter des sommets de demande nulles, nous pouvons supposer que ce sont toutes des triangles. Notons donc T l'ensemble des triangles de G.

Lemme 6.2 (Plage maximale des cliques, [Gam86]) *Soit G un sous-graphe induit de $\mathcal{T}$, muni de demande d. Notons $d_{\max} = \max_{u \in V} d(u)$. Alors :*

- *Si $c_0 = 1$,* $\quad \omega(G, d, 1) = \max\limits_{uvw \in T}(d(u) + d(v) + d(w)).$
- *Si $c_0 = 2$,* $\quad \omega(G, d, 2) = \max\bigl(2d_{\max} - 1, \max\limits_{uvw \in T}(d(u) + d(v) + d(w))\bigr).$

- *Et si $c_0 \geqslant 3$,*

$$\omega(G,d,c_0) = \begin{cases} c_0(d_{\max}-1)+1, & \textit{si les nœuds de demande } d_{\max} \textit{ sont isolés.} \\ c_0(d_{\max}-1)+2, & \textit{si la plus grande clique de nœuds de} \\ & \quad \textit{demande } d_{\max} \textit{ est de taille } 2. \\ c_0(d_{\max}-1)+3, & \textit{s'il existe un triangle de nœuds de} \\ & \quad \textit{demande } d_{\max}. \end{cases}$$

Preuve. Nous présentons rapidement la preuve élémentaire de cette propriété car elle nous permettra d'expliquer comment nous définissons les ensemble de fréquences Rouge, Vert et Bleu par la suite.

- Lorsque $c_0 = 1$, l'unique contrainte est que les fréquences allouées aux sommets d'une clique soient toutes distinctes, d'où le résultat.
- Lorsque $c_0 = 2$, l'idée est d'entrelacer les fréquences attribuées aux différents sommets d'un triangle. Considérons un triangle $uvw \in T$ avec $d(u) \geqslant d(v) \geqslant d(w)$. Si $d(u) > d(v) + d(w)$, alors on satisfait optimalement les demandes avec une plage de fréquence de taille $(2d(u) - 1)$, en attribuant à u les fréquences impaires $\{1, 3, \ldots, 2d(u) - 1\}$, en attribuant à v les fréquences $\{2, 4, \ldots, 2d(v)\}$ et enfin les fréquences $\{2d(v) + 2, 2d(v) + 4, \ldots, 2d(v) + 2d(w)\}$ à w. Si $d(u) \leqslant d(v) + d(w)$, alors on peut satisfaire les demandes avec une plage de taille optimale $(d(u) + d(v) + d(w))$ en attribuant cycliquement les fréquences impaires puis paires : si l'on numérote les fréquences de $\{1, \ldots, d(u) + d(v) + d(w)\}$ en commençant par les nombres impairs puis les pairs, on attribue à u les $d(u)$ premières, à v les $d(v)$ suivantes et à w les $d(w)$ dernières ; le multi-coloriage obtenu satisfait bien les contraintes d'interférence.
- Enfin, si $c_0 \geqslant 3$, on obtient une plage de taille minimale en choisissant les fréquences attribuées au $x^{\text{ième}}$ sommet du triangle ($1 \leqslant x \leqslant 3$) tous les c_0 à partir de x.

□

6.2 Algorithme d'approximation pour $c_0 = 1$

Notre algorithme d'approximation, décrit page 217, construit l'allocation de fréquences en trois étapes. Une première étape élimine les triangles du graphe : à la fin de cette étape, les sommets de demande non-satisfaite forment un graphe sans triangle. La deuxième étape casse les cycles de ce nouveau graphe en éliminant au moins un sommet de chacun d'eux. Les sommets encore non-satisfaits forment alors un graphe biparti, que la troisième étape colorie avec l'algorithme que nous avons vu dans l'introduction. Notons que seule cette dernière étape n'est pas locale.

Plus précisément, l'étape 1 diminue les demandes des nœuds en effectuant plusieurs coloriages RVB de sorte à ce qu'aucun triangle ne "survive". Après cette étape, le sous-graphe H induit par les sommets dont les demandes n'ont pas été satisfaites, est donc sans triangle. Un exemple d'un tel sous-graphe induit de $\mathcal{T}$ est présenté Figure 6.5 page suivante.

L'étape 2 se propose alors de satisfaire les sommets de ce graphe H en leurs attribuant les fréquences des ensembles R, V ou B qui n'ont pas été utilisées lors des coloriages RVB de l'étape précédente. Un sommet ne peut cependant emprunter des fréquences dans l'ensemble R, par exemple, que si ses voisins rouges ont pu être satisfaits avec une partie seulement des fréquences de cet ensemble. Nous sommes donc amenés à poser la définition suivante :

Definition 6.5 (Sommet libre pour une couleur) Si γ désigne une couleur dans $\{$rouge, vert, bleu$\}$, nous dirons qu'un sommet u est *libre pour la couleur* γ dans G si u n'est pas de couleur γ dans le 3-coloriage de $\mathcal{T}$ (Figure 6.3 page 211) et que ses voisins de couleur γ dans G ont une demande nulle.

Le fait qu'un sommet soit libre pour une couleur n'est cependant pas suffisant, car il faut s'assurer qu'il reste suffisamment de fréquences de cette couleur pour satisfaire sa demande restante. En étudiant les propriétés géométriques du 3-coloriage de $\mathcal{T}$, nous verrons au Théorème 6.2 que nous pouvons garantir ce fait pour les sommets libres de degré au moins 2, que nous appellerons coins par la suite.

Definition 6.6 (Coin) Nous désignerons par *coin* tout sommet libre pour une couleur γ, de demande non-nulle et de degré au moins 2.

Du fait de la structure du 3-coloriage de $\mathcal{T}$ (Figure 6.3), une étoile formée d'un coin rouge (*resp.* vert, bleu) et de ses voisins bleus (*resp.* rouges, verts) dans $\mathcal{T}$ pointe toujours vers la gauche (*cf.* illustration Figure 6.8). De même une étoile formée d'un coin rouge (*resp.* vert, bleu) et de ses voisins verts (*resp.* bleus, rouges) dans $\mathcal{T}$ pointe toujours vers la droite.

Definition 6.7 (Orientation d'un coin) Nous distinguons donc deux types de coins (*cf.* Figure 6.8) : les *coins droits* de couleurs rouge, bleu ou vert et libres pour les couleurs bleu, vert et rouge respectivement ; et les *coins gauches* de couleurs rouge, bleu ou vert et libres pour les couleurs vert, rouge et bleu respectivement.

Nous pouvons tirer deux observations utiles à propos des coins.

Lemme 6.3 *Pour tout sous-graphe induit de la grille $\mathcal{T}$ sans triangle (cf. Figure 6.6 page suivante), l'ensemble de ses coins gauches et l'ensemble de ses coins droits de G forment*

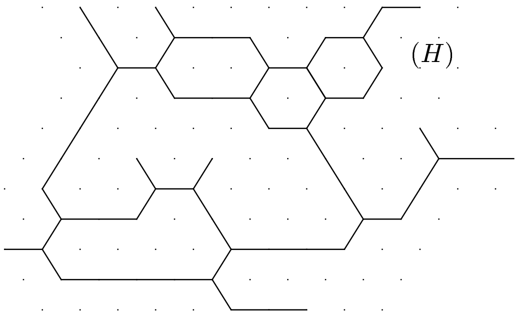


FIG. 6.5 : *A la fin de la première étape, le sous-graphe H induit par les sommets dont la demande reste insatisfaite est sans triangle.*

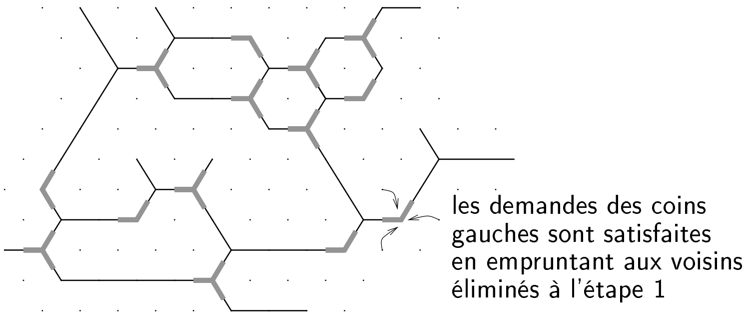


FIG. 6.6 : *L'étape 2 brise les cycles de H en satisfaisant par emprunt les demandes des coins gauches (représentés en grisé).*

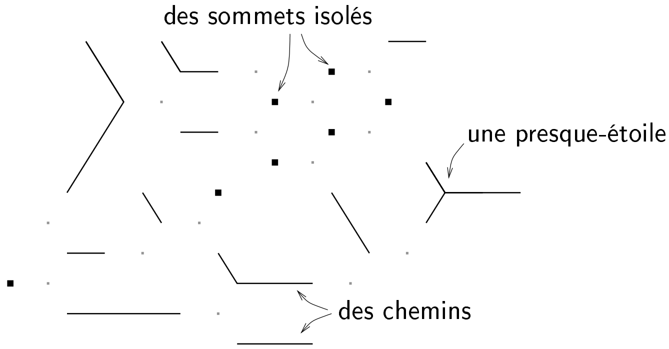


FIG. 6.7 : *A la fin de l'étape 2, le sous-graphe K induit par les sommets dont la demande reste insatisfaite, n'est plus constitué que de sommets isolés, de chemins, et de presque-étoiles.*

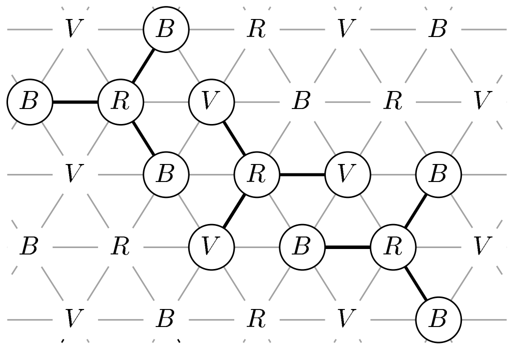


FIG. 6.8 : *Un exemple de trois étoiles centrées en un coin rouge: les deux étoiles formées avec les voisins bleues pointent vers la gauche et l'étoile formée avec les voisins verts pointe vers la droite.*

deux ensembles indépendants[7].

Lemme 6.4 *Tout cycle d'un sous-graphe induit de $\mathcal{T}$ sans triangle passe par un coin gauche.*

Dans notre algorithme 6.1, nous choisissons de satisfaire à l'étape 2 les demandes des coins gauches en empruntant des fréquences chez leurs voisins (*cf.* exemple Figure 6.6). A l'issue de l'étape 2, d'après le lemme 6.4, le sous-graphe induit par les sommets de demande non-satisfaite (*cf.* exemple Figure 6.7) n'est plus constitué que de sommets isolés, de chemins, et de presque-étoiles (une *presque-étoile* est un arbre admettant un unique sommet de degré supérieur ou égale à 3). L'étape 3 consiste donc enfin à multi-colorier des graphes bipartis disjoints.

L'algorithme complet est décrit page ci-contre.

Théorème 6.1 *L'algorithme 6.1 génère un multi-coloriage de tout sous-graphe G de $\mathcal{T}$ de demande d, dont la plage de fréquences vaut $3p + q \leqslant (4\omega(G) + 2)/3$. Cet algorithme est donc une $4/3$-approximation.*

Corollaire 6.1 *Lorsque $c_0 = 1$, nous obtenons les bornes suivantes sur la plage minimale du graphe G :*

$$\omega(G) \;\leqslant\; P(G) \;\leqslant\; \frac{4\,\omega(G) + 2}{3}$$

[7] *Un sous-ensemble X de sommets de G est dit* indépendant *si le sous-graphe de G induit par X est totalement déconnecté.*

Algorithme 6.1 Algorithme d'allocation de fréquences pour la contrainte co-site $c_0 = 1$

Entrées : Un graphe $G = (V, E)$ et une fonction de demande d sur les sommets.

Posons $p = \left\lceil \frac{\omega(G)}{3} \right\rceil$ et $q = \omega(G) - 2p$.

Définir quatre ensembles de fréquences :

$R = \{1, \ldots, p\}$, $V = \{p+1, \ldots, 2p\}$, $B = \{2p+1, \ldots, 3p\}$
et $N = \{3p+1, \ldots, 3p+q\}$.

Etape 1.

Effectuer p coloriages RVB de G avec les ensembles R, V et B. (*cf.* Définition 6.3 page 210)

Etape 2.

Pour tout coin gauche $u \in H$, où H est le sous-graphe induit par les sommets de demande non-nulle

Si u est rouge, alors on satisfait sa demande restante en empruntant à ses voisins verts. (*cf.* Définition 6.4 page 211)

De même, si u est vert, on emprunte à ses voisins bleus et si u est bleu, on emprunte à ses voisins rouges.

Etape 3.a

Pour tout sommet isolé $u \in K$, où K est le sous-graphe induit par les sommets de demande non-nulle

Attribuer à u autant de fréquences noires dans N que nécessaire et si u n'est toujours pas satisfait, satisfaire sa demande en empruntant à son voisin de demande maximale.

Etape 3.b

Soit L le sous-graphe induit par le sommets de demande encore insatisfaite. L est biparti. Soient X et Y les deux indépendants partitionnant les sommets de L.

Satisfaire les demandes des sommets $u \in X$ de demande restante x en leurs affectant les x premières fréquences noires de N, puis celles des sommets $v \in Y$ de demande restante y en leurs affectant les y dernières fréquences noires de N.

Preuve du Théorème 6.1.

Etape 1. Soit H le graphe induit par les sommets de demande non-nulle après l'étape 1. H est un graphe sans triangle, sinon il existerait un triangle dans G dont la somme des demandes serait supérieure à $\omega(G)$.

Etape 2. Comme nous l'avons observés au Lemme 6.3, deux coins gauches ne peuvent être voisins. Aussi, il nous suffit de vérifier que les fréquences allouées à chaque coin u n'entrent pas en interférence avec celles allouées à ses voisins lors de la première étape. Considérons donc le cas d'un coin gauche u de couleur rouge et donc libre pour la couleur vert. Comme u reçoit des fréquences vertes, il ne peut entrer en interférence avec ses voisins bleus. Il suffit donc de démontrer qu'il reste suffisamment de couleurs vertes pour satisfaire u. Soit v son voisin vert de demande maximale dans G. u est un coin donc il admet un voisin bleu w dans H qui est aussi adjacent à v. Par définition de p :

$$d(u) + d(v) \leqslant 2p + q - d(w) \leqslant p + q - 1$$

Ainsi $(d(u) - p) + d(v) \leqslant q - 1 \leqslant p$, et on peut allouer sans conflit les $(d(u) - p)$ dernières fréquences vertes les plus grandes au sommet u sans conflit.

Etape 3.a. Soit K le sous-graphe de G (ou de H) induit par les sommets qui ne sont pas satisfaits après l'étape 2. Soit u un sommet isolé dans K. Les fréquences noires n'ont pas encore été attribuées. Nous pouvons donc sans risque de conflit les allouer à u. Si la demande de u n'est pas encore satisfaite, alors nous avons $d(u) \geqslant p+q$ dans G. Considérons alors son voisin v de demande maximale dans G, nous avons : $d(u) + d(v) \leqslant 2p + q$ et donc $(d(u) - p - q) + d(v) \leqslant p$. En particulier v a été satisfait dès l'étape 1 et u peut se satisfaire en empruntant librement les fréquences de la couleur de v.

Etape 3.b. Soit L le sous-graphe de G induit par les sommets de demande non-nulle après l'étape 3.a. L n'admet plus de sommet isolé, ni de coin gauche. L est donc une union disjointes de chemins et de presque-étoiles dont les branches sont rectilignes.

Les fréquences noires n'ont été attribuées qu'aux sommets isolés de K. Il nous suffit donc de vérifier que les fréquences noires sont en nombre suffisant pour colorier les graphes bipartis constituant L. Or pour toute arête uv de L, nous avons : $(d(u) - p) + (d(v) - p) \leqslant q = |N|$. *C.Q.F.D.* $\square$

En fait nous pouvons améliorer les performances de cet algorithme pour peu que les demandes soient à peu près uniformes.

Definition 6.8 (Demande relativement uniforme) Etant donné un graphe G, nous dirons qu'une fonction de demande sur les sommets de G est *relativement uniforme* si la somme des demandes des extrémités de toute arête est majorée par $(\omega(G) - d_{\min})$, où $d_{\min} = \min_{u \in V} d(u)$.

Cette définition est motivée par l'étude des graphes "épais" dans lequel toute arête appartient à un triangle dont les sommets ne sont pas de demandes nulles. Tout graphe épais muni d'une fonction de demande vérifie cette propriété de relative uniformité qui suffit en fait pour améliorer les performances de notre algorithme. Nous nous étions intéressés aux graphes épais car nous avions remarqué que ce qui pose problème dans le graphe Figure 6.4 page 212 est la double arête centrale. Cette étude nous a permis d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 6.2 (Cas des demandes relativement uniformes) *Lorsque $c_0 = 1$, la plage minimale d'un sous-graphe G induit de $\mathcal{T}$ muni d'une demande d relativement uniforme vérifie :*

$$\omega(G, d) \leqslant P(G, d) \leqslant \frac{(4-\alpha)\omega(G, d) + 2}{3}$$

où $\alpha = d_{\min}/d_{\max} \in [0, 1]$.

Preuve. Nous pouvons supposer que G n'a pas de sommet isolé. Nous commençons par appliquer $d_{\min}$ coloriages RVB. Après cette étape, la plage maximale des cliques du graphe G' induit par les sommets dont les demandes n'ont pas été satisfaites, vaut : $\omega(G') = \omega(G) - 3d_{\min}$, puisque la demande est relativement uniforme. Appliquer l'algorithme 6.1 au graphe G' produit alors une allocation de fréquences de G de plage $\leqslant d_{\min} + \frac{4(\omega(G)-3d_{\min})+2}{3} \leqslant \frac{(4-\alpha)\omega(G)+2}{3}$, en utilisant que $\omega(G) \leqslant d_{\max}$. □

Notons en particulier que notre algorithme est alors optimal à une constante additive près lorsque les demandes sont uniformes et que le graphe est "épais".

6.3 Extension au cas où $c_0 = 2$

Nous allons voir que nous pouvons adapter l'algorithme 6.1 au cas où la contrainte co-site vaut $c_0 = 2$, en précisant convenablement la répartition des fréquences dans les différents ensembles de couleurs. Commençons par remarquer le fait suivant qui est une conséquence immédiate du Lemme 6.2 :

Lemme 6.5 *Lorsque $c_0 = 2$, nous avons :* $\quad d_{\max} \leqslant \left\lceil \frac{\omega(G)}{2} \right\rceil$

La difficulté est d'adapter l'étape 2 pour réussir à réutiliser les fréquences allouées mais non-utilisées lors de l'étape de coloriage RVB. Pour cela, nous proposons de partitionner les ensembles de fréquences de chaque couleur R, V et B en deux parties R_1 et R_2, V_1 et V_2, B_1 et B_2, de taille $\omega(G)/6$, que nous entrelaçons en prenant garde à ce que tout sommet rouge (*resp.* vert, bleu) puisse d'emprunter dans la partition V_2 (*resp.* B_2, R_2) sans introduire d'interférences co-site. La figure 6.9 présente un tel agencement des couleurs. Nous obtenons alors l'algorithme 6.2 page 220.

Algorithme 6.2 Algorithme d'allocation de fréquences pour la contrainte co-site $c_0 = 2$

Entrées : Un graphe $G = (V, E)$ et une fonction de demande d sur les sommets.

Poser $p = \left\lceil \frac{\omega(G)}{6} \right\rceil$.

Définir les huit ensembles disjoints de fréquences de taille p (*cf.* Figure 6.9 page suivante) :

$$
\begin{array}{ll}
R_2 = \{1, 3, \ldots, 2p-1\} & R_1 = \{2p+1, 2p+3, \ldots, 4p-1\} \\
V_1 = \{2, 4, \ldots, 2p\} & B_2 = \{2p+2, 2p+4, \ldots, 4p\} \\
V_2 = \{4p+3, 4p+5, \ldots, 6p+1\} & N_1 = \{6p+3, 6p+5, \ldots, 8p+1\} \\
B_1 = \{4p+2, 4p+4, \ldots, 6p\} & N_2 = \{6p+4, 6p+6, \ldots, 8p+2\}
\end{array}
$$

Etape 1.

Effectuer p coloriages RVB de G avec les ensembles R_1, V_1 et B_1, puis p coloriages RVB avec les ensembles R_2, V_2 et B_2.

Etape 2.

Pour tout coin gauche $u \in H$, où H est le sous-graphe induit par les sommets de demande non-nulle

Si u est rouge, alors on satisfait sa demande restante en empruntant à ses voisins verts parmi les couleurs de V_2.

De même, si u est vert, on emprunte à ses voisins bleus dans B_2 et si u est bleu, à ses voisins rouges dans R_2.

Etape 3.

Soit K le sous-graphe induit par les sommets de demande non-nulle. K est biparti et on satisfait les demandes des sommets de K en attribuant les fréquences de N_1 aux sommets de l'une des deux partitions des sommets de K et celles de N_2 à l'autre.

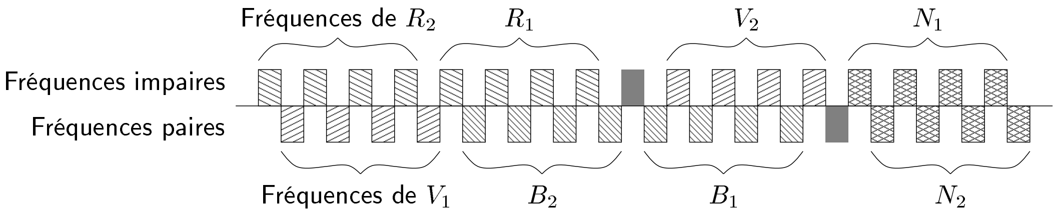


FIG. 6.9 : *Entrelacement des ensembles de fréquences pour l'algorithme 6.2.*

Théorème 6.3 *L'algorithme 6.2 génère un multi-coloriage sous la contrainte co-site $c_0 = 2$ pour tout sous-graphe G induit de $\mathcal{T}$ muni d'une demande d, dans une plage de fréquence de taille inférieure à $8\lceil \frac{\omega(G)}{6} \rceil \leqslant (4\omega(G) + 20)/3$. Cet algorithme est donc une $4/3$-approximation.*

Preuve. Remarquons que les fréquences $4p+1$ et $6p+2$ ne sont pas utilisées. Les stratégies d'emprunt et d'attribution des fréquences décrites dans l'algorithme ne peuvent donc pas introduire d'interférence co-site. Il nous suffit donc de vérifier que ces stratégies permettent effectivement de satisfaire les demandes de tous les sommets.
Etape 1. A la fin de l'étape 1, tous les sommets insatisfaits ont une demande majorée par $(d_{\max} - 2p) \leqslant p$ d'après le lemme 6.5. Et H est sans triangle.
Etape 2. Soit u un coin gauche de H, rouge par exemple. Soient v son voisin vert de demande maximale dans G, et w un sommet bleu de H adjacent à u et v. Nous avons $d(u)+d(v)+d(w) \leqslant \omega(G)$, et donc : $(d(u)-2p)+d(v) \leqslant 4p-d(w) \leqslant 2p-1 \leqslant |V_1 \cup V_2|$. Or, $(d(u) - 2p) \leqslant p \leqslant |V_2|$, ainsi u peut satisfaire sa demande en empruntant à v des fréquences de V_2 uniquement.
Etape 3. Les fréquences noires n'ont pas encore été utilisées. Comme précédemment l'étape 2 a cassé tous les cycles de H et nous sommes ramenés au multi-coloriage d'un graphe biparti où chaque sommet demande au plus p fréquences. L'étape 3 réalise donc une allocation correcte. □

La section suivante résoud le dernier pour les contraintes co-site.

6.4 Algorithme d'approximation pour le cas où $c_0 \geqslant 3$

L'allocation de fréquences est triviale pour ce dernier cas puisque nous obtenons une 1-approximation en allouant systématiquement $d_{\max}$ fréquences aux sommets de chaque couleurs :

- $\{1, 1 + c_0, \ldots, 1 + (d_{\max} - 1)c_0\}$ pour les sommets rouges.
- $\{2, 2 + c_0, \ldots, 2 + (d_{\max} - 1)c_0\}$ pour les sommets verts.
- $\{3, 3 + c_0, \ldots, 3 + (d_{\max} - 1)c_0\}$ pour les sommets bleus.

Le lemme 6.2 nous permet de conclure que :

Théorème 6.4 *Lorsque $c_0 \geqslant 3$, pour tout sous-graphe G induit de T nous avons :*

$$\omega(G) \;\leqslant\; P(G) \;\leqslant\; \omega(G) + 2$$

Ce qui termine notre étude des contraintes co-site arbitraires.

Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre qui clôt la seconde partie de cette thèse, nous avons présenté un algorithme d'approximation pour l'allocation statique de fréquences sur la grille triangulaire. Nous avons obtenu une $4/3$-approximation lorsque les contraintes co-site valent $c_0 = 1$ ou 2 et une 1-approximation pour le cas où $c_0 \geqslant 3$. Notons que des résultats similaires pour le cas où $c_0 = 1$ ont été obtenu indépendamment par Narayanan et Shende dans [NS97], et McDiarmid et Reed dans [MR97]. Nous avons également démontré que l'on pouvait améliorer le facteur d'approximation pour le porter à $(4 - \alpha)/3$, où $\alpha = d_{\min}/d_{\max} \in [0, 1]$, lorsque les demandes sont relativement uniformes (ou que le graphe est épais) et que la contrainte co-site vaut $c_0 = 1$. Cette optimisation répond en particulier aux questions qui nous ont été posées lors des présentations de ces résultats.

A la suite de nos travaux, Janssen et Narayanan ont proposé une $4/3$-approximation pour le multi-coloriage sous les contraintes générales $c_0 \geqslant c_1 \geqslant 1$. Dans [KK98], Khanna et Kumaran proposent une première étude des contraintes d'interférence avec distance de réutilisation 3 ($c_0 = c_1 = c_2 = 1$ et $c_i = 0$ pour $i \geqslant 3$), cas qui inclut quelques "Philadelphia examples" (*cf.* [And73]). De nombreux problèmes restent ouverts. Tout particulièrement, l'éventualité d'une approximation à $9/8$ pour la grille triangulaire. Dans [Hav99], Havet propose une première piste sous forme d'une approximation à $7/6$ pour les sous-graphes sans triangle. L'obtention de multi-coloriages sous contraintes générales pour les graphes bipartis et les cycles sont aussi des axes de recherches intéressants car ces graphes sont inclus dans tous les graphes élémentaires. Enfin, le choix de l'étude de la grille triangulaire était initialement guidé par un besoin réel de mieux comprendre l'allocation de fréquences sur ce graphe très utilisé en pratique. L'algorithme que nous avons proposé pour ce graphe repose sur la régularité du 3-coloriage sous-jacent de la grille triangulaire. Il serait intéressant d'étudier à présent si notre algorithme peut se porter efficacement sur d'autres graphes pour lesquels nous connaissons un k-coloriage suffisamment régulier.

Bibliographie
Allocation de fréquences

[And73] L. G. Anderson. A simulation study of some dynamic channel assignment algorithms in a high capacity mobile telecommunications system. *IEEE Transaction on Communications*, COM-21 :1294–1301, 1973.

[BM76] J. A. Bondy et U. S. R. Murty. *Graph theory with applications*. Macmillan Press Ltd, 1976.

[BP90] P. Baldi et E. C. Posner. Graph coloring bounds for cellular radio. *Computers Math. Applic.*, 19 :91–97, 1990.

[CGJ78] V. Chv́atal, M. R. Garey, et D. S. Johnson. Two results concerning multicoloring. *Annals of Discrete Math*, 2 :151–154, 1978.

[CR82] D. C. Cox et D. O. Reudink. Increasing channel occupancy in large-scale mobile radio systems : Dynamic channel reassignment. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, COM-21(11) :1302–1306, 1982.

[ERT79] P. Erdös, A. L. Rubin, et H. Taylor. Choosability in graphs. In *Proc. West-Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium XXVI*, pages 125–157, Arcata, California, 1979.

[FS98] T. Feder et S. Shende. Online channel allocation in FDMA networks with reuse constraints. *Information Processing Letters*, 67(6) :295–302, 1998.

[Gam82] A. Gamst. Homogeneous distribution of frequencies in a regular hexagonal cell system. *IEEE Transaction on Transactions on Vehicular Technology*, VT-31 :132–144, 1982.

[Gam86] A. Gamst. Some lower bounds for a class of frequency assignment problems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 35(1) :8–14, 1986.

[Ger99] S. N. T. Gerke. Colouring weighted bipartite graphs with a co-site constraint. Pré-publication, 1999.

[GGS93] G. Goodman, J. Grandhi, et A. Sudheer. Distributed channel assignment schemes. In *Proc. of the 43rd VTC*, pages 532–535, 1993.

[Hal80] W. K. Hale. Frequency assignment : Theory and applications. In *Proc. of IEEE*, volume 68(12), pages 1497–1514, 1980.

[Hav99] F. Havet. Channel assignment and multicolouring of the induced subgraphs of the triangular lattice. In *A paraître dans Discrete Math., Proc. of the 5th czech-slovak symp. on combinatorics, graph theory algorithms and applications*, Prague, 1999.

[HLS98] J. Van den Heuvel, R. A. Leese, et M. A. Sheperd. Graph labelling and radio channel assignment. *Journal of Graph Theory*, 29(4) :263–283, 1998.

[HRS73] A. J. W. Hilton, R. Rado, et S. H. Scott. A $(! \ 5)$-colour theorem for planar graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 5 :302–306, 1973.

[HŽ99] F. Havet et J. Žerovnik. Finding a five bicolouring of a triangle-free subgraph of the triangular lattice. Manuscrit, Jan. 1999.

[Ira94] S. Irani. Coloring inductive graphs online. *Algorithmica*, 11 :53–72, 1994.

[JK95] J. Janssen et K. Kilakos. Optimal multicolouring algorithms with limited recolouring. Soumis pour publication, Jul. 1995.

[JK96] J. Janssen et K. Kilakos. Polyhedral analysis of channel assignment problems : (I) tours. Manuscrit CDAM-96-17, Août 1996.

[JKM95] J. Janssen, K. Kilakos, et O. Marcotte. Fixed preference frequency allocation for cellular telephone systems. Manuscrit, 1995.

[JKNS98] J. Janssen, D. Krizanc, L. Narayanan, et S. Shende. Distributed online frequency assignment in cellular networks. In *LNCS Proc. of the 15th Symposium on Theoritical Aspects of Computer Science (STACS'98)*, volume 1373, pages 3–13, Fev. 1998.

[JN99] J. Janssen et L. Narayanan. Approximation algorithms for channel assignment with constraints. A paraître dans *Proc. of the 10th Int. Symp. on Algorithms and Computation (ISAAC'99)*, Inde, Déc. 1999.

[JT95] T. R. Jensen et B. Toft. *Graph coloring problems*. Wiley Interscience, New York, 1995.

[KK98] S. Khanna et K. Kumaran. On wireless spectrum estimation and generalized graph coloring. In *Proc of 17th joint Conf. of IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM'98)*, page A PRECISER, 1998.

[KN96] I. Katzela et M. Naghshineh. Channel assignment schemes for cellular mobile telecommunication systems : a comprehensive survey. *IEEE Personnal communications*, 1070 :10–30, 1996.

[LST89] L. Lovasz, M. Saks, et W. Trotter. An online graph coloring algorithm with sublinear performance ratio. *Discrete Math*, 75 :319–325, 1989.

[Mac79] V. H. MacDonald. The cellular concept. *The Bell System Technical Journal*, 58 :15–41, 1979.

[MR97] C. McDiarmid et B. Reed. Channel assignment and weighted colouring. Manuscrit, 1997.

[NS97] L. Narayanan et S. Shende. Static frequency assignment in cellular networks. In *Proc. of the 4th International Colloquium on structural information and communication complexity (SIROCCO'97)*, pages 215–227, 1997. A paraître dans *Algorithmica*.

[Rob91] F. S. Roberts. T-coloring of graphs : recent results and open problems. *Discrete Mathematics*, 93 :229–245, 1991.

[Rob93] F. S. Roberts. New directions in graph theory (with an emphasis on the role of applications). *Annals of Discrete Mathematics*, 55 :13–43, 1993.

[SH97] D. H. Smith et S. Hurley. Bounds for the frequency assignment problem. *Discrete Mathematics*, 167/168 :571–582, 1997.

[Sim88] H. U. Simon. The analysis of dynamic and hybrid channel assignment. Rapport de recherche 124-B1 10/1988, Universität des Saarlandes, 1988.

[SUŽ98] N. Schabanel, S. Ubéda, et J. Žerovnik. Parallel algorithm for the optimization of the span of an hexagonal frequency planing graph. In *Proc. of High Performance Computing'98 – Telepar'98*, pages 237–241, Boston, Avr. 1998.

[SUŽ99] N. Schabanel, S. Ubéda, et J. Žerovnik. A note on upper bounds for the span of the frequency planning in cellular networks. Soumis pour publication, 1999.

[Tuz97] Zsolt Tuza. Graph colorings with local constraints — A survey. *Discussiones Mathematicae – Graph Theory*, 17(2) :161–228, 1997.

[Vis92] S. Vishwanathan. Randomized online graph coloring. *Journal of Algorithms*, 13 :657–669, 1992.

[Viz76] V. G. Vizing. Coloring the vertices of a graph in prescribed colors. *Metody Diskret. Anal. v Teorii Kodov i Schem*, 29 :3–10, 1976. En Russe.

[Wes96] D. B. Wes. *Introduction to graph theory*. Prentice-Hall Inc., 1996.

Index
Allocation de fréquences

Index des citations
Allocation de fréquences

Résumé

Cette thèse étudie deux problèmes issus des télécommunications : *la dissémination de données* et *l'allocation de fréquences*.

La dissémination de données est une réponse apportée à la surcharge des réseaux et serveurs d'information. Le fait est que la plupart des clients demande la plupart du temps les mêmes informations. Aussi, afin d'éviter de saturer à la fois le serveur et le réseau avec la diffusion des pages les plus populaires, l'approche de la dissémination propose de réserver un certain nombre de canaux d'émission à la diffusion systématique des informations les plus populaires. Ces canaux (typiquement Hertzien, TV par câble,...) sont accessibles en simultané par tous les clients. Le problème est alors d'ordonnancer la diffusion des différentes pages d'information. Un client, intéressé par l'une de ces pages, n'émet pas de requête mais se connecte sur ces canaux réservés et attend que l'information qui l'intéresse soit diffusée. Il s'agit donc de trouver un ordonnancement qui minimise l'attente moyenne des clients.

Ce problème est un problème de minimisation quadratique, qui modélise également d'autres problèmes d'ordonnancement tels la planification de maintenances de machines ou le réapprovisionnement de stocks. Cette thèse démontre que trouver un ordonnancement optimal est NP-dur en général, et propose des algorithmes d'approximation avec garanties de performance prouvées : un schéma d'approximation pour le cas des messages de longueur uniforme, et deux approximations à un facteur constant pour le cas où les messages ont des longueurs différentes, avec et sans préemption.

L'allocation de fréquences consiste à allouer des fréquences aux transmetteurs d'un réseau cellulaire de sorte à ce que deux transmetteurs n'entrent jamais en interférence. Dans cette thèse, nous proposons un algorithme d'approximation avec garantie de performance pour le cas NP-dur où les transmetteurs sont disposés suivant la grille triangulaire.

Mots-clés : Algorithmique, Optimisation combinatoire, Approximation, Algorithmes randomisés et dérandomisation, Télécommunications sans fil, Dissémination de données, Multicoloriage.

Abstract

This thesis deals with two problems issued from telecommunication : *data dissemination* and *frequency planning*.

Data dissemination is an answer to reduce the load of information servers and networks. A fact is that most of the clients require most of the time the same information pages. In order to reduce the server and network loads due to the broadcast of the most popular pages, data dissemination reserves some special channels to broadcast systematically the most popular pages, obliviously from the effective requests. Those channels (typically wireless, cable TV,...) can be monitored simultaneously by all the clients. The problem is now to schedule the broadcasts of the different messages over these special channels. A client interested in one of these pages does not send a request but connects and monitors the special channels until the information he is interested in is broadcast. The problem consists in finding a schedule that minimizes the expected waiting time of the clients.

This problem is a quadratic minimization problem that also models other scheduling problems such as machine maintenance scheduling or stocks supplying. In this thesis, this problem is shown to be NP-hard in general and we give approximation algorithms with proven performance guarantees : a polynomial approximation scheme for the case where all the messages have the same length, and two constant factor approximations for the case where the messages have different lengths, with and without preemption.

Frequency planning consists in allocating frequencies to the transmitters of a cellular network so as to ensure that no pair of transmitters interferes. In this thesis, we propose an approximation algorithm with proven performance guaranty for the NP-hard case where the transmitter are placed on the triangular lattice.

Keywords : Algorithmic, Combinatorial optimization, Approximation, Randomized algorithms and derandomization, Wireless telecommunication, Data dissemination and push-based systems, Multicoloring.