Une bien étrange caractérisation de l'adéquation complète dans les domaines de Scott

Flavien BREUVART

PPS, Paris Denis Diderot

15 Février 2013

Adéquation complète

Définition (Adéquation complète) :

L'adéquation complète est l'identité entre la équivalence dénotationnelle (induite par le modèle) et l'équivalence opérationnelle (du programmeur) :

$$[\![M]\!] = [\![N]\!] \Leftrightarrow M \equiv_0 N$$

Adéquation complète

Définition (Adéquation complète) :

L'adéquation complète est l'identité entre la équivalence dénotationnelle (induite par le modèle) et l'équivalence opérationnelle (du programmeur) :

$$[\![M]\!] = [\![N]\!] \;\Leftrightarrow M \equiv_0 N$$

Dans le cas particulier du λ-calculus non-typé (avec la réduction à une forme normal de tête comme observation) :

Équivalence contextuelle :

On dit que $M \equiv_o N$ lorsque :

$$\forall C(\!|.|\!), C(\!|M|\!) \Downarrow \Leftrightarrow C(\!|N|\!) \Downarrow$$

Divers résultats d'adéquation complète

[Abramsky et McCusker 2007]

[Hyland 1976]

[Cartwright *et.al.* 1994]

[Hyland et Ong 2000]

[Bucciarelli *et.al.* 2011]

[Wadsworth 1976]

[Harmer et McCusker 1997]

[Laird 1997]

[Plotkin 1977]

[Milner 1977]

[Laird 2003]

[Paolini 2003]

[Abramsky *et.al.* 2000]

[Abramsky *et. al.* 1998]

Caractérisation de Milner pour PCF

Théorème [Milner 1977] :

Il y a un unique domaine continu extensionnel et pleinement adéquat pour PCF.

Caractérisation de Milner pour PCF

Théorème [Milner 1977] :

Il y a un unique domaine continu extensionnel et pleinement adéquat pour PCF.

Cette caractérisation est dégénérée puisqu'elle démontre un résultat d'unicité.

Caractérisation de Milner pour PCF

Théorème [Milner 1977] :

Il y a un unique domaine continu extensionnel et pleinement adéquat pour PCF.

Cette caractérisation est dégénérée puisqu'elle démontre un résultat d'unicité.

Proposition :

Tout modèle *avec assez de points* et *définissable* est pleinement adéquat pour PCF.

Caractérisation de Milner pour PCF

Théorème [Milner 1977] :

Il y a un unique domaine continu extensionnel et pleinement adéquat pour PCF.

Cette caractérisation est dégénérée puisqu'elle démontre un résultat d'unicité.

Proposition :

Tout modèle *avec assez de points* et *définissable* est pleinement adéquat pour PCF.

Autres travaux sur la définissabilité : [Curien 2007]

Et le λ-calcul pur ?

Et le λ-calcul pur ?

Définition (modèle du λ-calcul) :

Un modèle du λ-calcul est un objet d'une catégorie cartésienne close respectant :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, bend left, "abs"] & D \Rightarrow D \arrow[l, bend left, "app"] \end{tikzcd}$$

Et tel que $app \circ abs = id_{D \Rightarrow D}$

Et le λ-calcul pur ?

Définition (modèle du λ-calcul) :

Un modèle du λ-calcul est un objet d'une catégorie cartésienne close respectant :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, bend left, "abs"] & D \Rightarrow D \arrow[l, bend left, "app"] \end{tikzcd}$$

Et tel que $app \circ abs = id_{D \Rightarrow D}$

Proposition :

Tout modèle pleinement adéquat du λ-calcul pure est extensionel (c.à.d respecte l'eta équivalence) :

$$abs \circ app = id_D$$

Caractérisarion

Théorème (Manzonetto) :

Tout modèle bien stratifié est pleinement adéquat.

Caractérisarion

Théorème (Manzonetto) :

Tout modèle bien stratifié est pleinement adéquat.

intuition de la bonne stratification :

$$p^{k+1}(a) \bullet b = p^k(a \bullet p^k(b))$$
$$p^0(a) \bullet b = p^0(a \bullet \perp)$$

$$id = \bigvee_k p^k$$

Caractérisarion

Théorème (Manzonetto) :
Tout modèle bien stratifié est pleinement adéquat.

intuition de la bonne stratification :

$$p^{k+1}(a) \bullet b = p^k(a \bullet p^k(b))$$
$$p^0(a) \bullet b = p^0(a \bullet \perp)$$

$$id = \bigvee_k p^k$$

$\rightsquigarrow$ **Condition non nécéssaire.**

Caractérisarion

Théorème (Manzonetto) :
Tout modèle bien stratifié est pleinement adéquat.

intuition de la bonne stratification :

$$p^{k+1}(a) \bullet b = p^k(a \bullet p^k(b))$$
$$p^0(a) \bullet b = p^0(a \bullet \perp)$$

$$id = \bigvee_k p^k$$

$\leadsto$ **Condition non nécéssaire.**

Théorème (Caractérisation) :
Un K-modèle est pleinement adéquat si et seulement si il est sensible et hyperimmune.

Définition de K-modèles

Catégorie :

On se place dans la catégorie des treillis complets premiers algébriques et des fonctions continues.

Définition de K-modèles

Catégorie :

On se place dans la catégorie des treillis complets premiers algébriques et des fonctions continues.

Définition (K-trame) :

Une K-trame extentionnelle est un préordre $(D, \leq)$ munie d'une bijection $i : \mathcal{P}_f(D) \times D \to D$ telle que :

- $\mathcal{P}_f(D)$ est muni du preordre $\sqsubseteq$,défini par :
$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow \forall \alpha \in a, \exists \beta \in b, \alpha \leq \beta$$
- $i(a, \alpha) \leq i(b, \beta) \;\Leftrightarrow\; a \sqsupseteq b \;\wedge\; \alpha \leq \beta$

Définition de K-modèles

Catégorie :

On se place dans la catégorie des treillis complets premiers algébriques et des fonctions continues.

Définition (K-trame) :

Une K-trame extentionnelle est un préordre $(D, \leq)$ munie d'une bijection $i : \mathcal{P}_f(D) \times D \to D$ telle que :

- $\mathcal{P}_f(D)$ est muni du preordre $\sqsubseteq$,défini par :
$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow \forall \alpha \in a, \exists \beta \in b, \alpha \leq \beta$$
- $i(a, \alpha) \leq i(b, \beta) \;\Leftrightarrow\; a \sqsupseteq b \;\wedge\; \alpha \leq \beta$

Définition (K-modèle) :

Un K-modèle extentionnel est l'ensemble des segments initiaux d'une K-trame.

Définition de K-modèles

Catégorie :

On se place dans la catégorie des treillis complets premiers algébriques et des fonctions continues.

Définition (K-trame) :

Une K-trame extentionnelle est un préordre $(D, \leq)$ munie d'une bijection $i : \mathcal{A}_f(D) \times D \to D$ telle que :

- $\mathcal{A}_f(D)$ est muni du preordre $\sqsubseteq$,défini par :
$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow \forall \alpha \in a, \exists \beta \in b, \alpha \leq \beta$$
- $i(a, \alpha) \leq i(b, \beta) \ \Leftrightarrow \ a \sqsupseteq b \ \wedge \ \alpha \leq \beta$

Définition (K-modèle) :

Un K-modèle extentionnel est l'ensemble des segments initiaux d'une K-trame.

Définition de K-modèles

Catégorie :

On se place dans la catégorie des treillis complets premiers algébriques et des fonctions continues.

Définition (K-trame) :

Une K-trame extentionnelle est un préordre $(D, \leq)$ munie d'une bijection $\rightarrow : \mathcal{A}_f(D) \times D \rightarrow D$ telle que :

- $\mathcal{A}_f(D)$ est muni du preordre $\sqsubseteq$,défini par :
$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow \forall \alpha \in a, \exists \beta \in b, \alpha \leq \beta$$
- $(a \rightarrow \alpha) \leq (b \rightarrow \beta) \;\Leftrightarrow\; a \sqsupseteq b \;\wedge\; \alpha \leq \beta$

Définition (K-modèle) :

Un K-modèle extentionnel est l'ensemble des segments initiaux d'une K-trame.

Exemples (D_∞)

Scott's D_∞ :

$$
\begin{aligned}
D_0 &= \{*\} \\
D_{n+1} &= D_n \cup (\mathcal{A}_f(D_n) \times \mathrm{D_n}) - \{(\emptyset, *)\} \\
D_\infty &= \bigcup_n D_n
\end{aligned}
$$

Exemples (D_∞)

Scott's D_∞ :

$$
\begin{aligned}
D_0 &= \{*\} \\
D_{n+1} &= D_n \cup (\mathcal{A}_f(D_n) \times \mathrm{D_n}) - \{(\emptyset, *)\} \\
D_\infty &= \bigcup_n D_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a, \alpha) &= (a \to \alpha) && \text{si } a \neq \emptyset \text{ or } \alpha \neq * \\
* &= (\emptyset \to *)
\end{aligned}
$$

Exemples (D_∞)

Scott's D_∞ :

$$D_0 = \{*\}$$
$$D_{n+1} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(D_n) \times \mathrm{D_n}) - \{(\emptyset, *)\}$$
$$D_\infty = \bigcup_n D_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } a \neq \emptyset \text{ or } \alpha \neq *$$
$$* = (\emptyset \to *)$$

Exemples (D_∞)

Scott's D_∞ :

$$D_0 = \{*\}$$
$$D_{n+1} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(D_n) \times \mathrm{D_n}) - \{(\emptyset, *)\}$$
$$D_\infty = \bigcup_n D_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } a \neq \emptyset \text{ or } \alpha \neq *$$
$$* = (\emptyset \to *)$$

Exemples (D_∞)

Scott's D_∞ :

$$D_0 = \{*\}$$
$$D_{n+1} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(D_n) \times \mathrm{D_n}) - \{(\emptyset, *)\}$$
$$D_\infty = \bigcup_n D_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } a \neq \emptyset \text{ or } \alpha \neq *$$
$$* = (\emptyset \to *)$$

Proposition :

D_∞ est pleinement adéquat pour le λ-calcul.

Exemples (bien stratifiés)

K-modèles bien stratifiés :

Soit A un ensemble non vide et σ une permutation de A :

$$U_0^{A,\sigma} = A$$
$$U_{n+1}^{A,\sigma} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(U_n^{A,\sigma}) \times U_n^{A,\sigma}) - \{(\emptyset, \mu) | \mu \in A\}$$
$$U_\infty^{A,\sigma} = \bigcup_n U_n^{A,\sigma}$$

$(a, \alpha) = (a \to \alpha)$ si $a \neq \emptyset$ or $\alpha \notin A*$

$\mu = (\emptyset \to \sigma(\mu))$ pour $\mu \in A$

Exemples (bien stratifiés)

K-modèles bien stratifiés :

Soit A un ensemble non vide et σ une permutation de A :

$$U_0^{A,\sigma} = A$$
$$U_{n+1}^{A,\sigma} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(U_n^{A,\sigma}) \times U_n^{A,\sigma}) - \{(\emptyset, \mu) | \mu \in A\}$$
$$U_\infty^{A,\sigma} = \bigcup_n U_n^{A,\sigma}$$

$(a, \alpha) = (a \to \alpha)$ si $a \neq \emptyset$ or $\alpha \notin A*$

$\mu = (\emptyset \to \sigma(\mu))$ pour $\mu \in A$

Proposition :

Les $U_\infty^{A,\sigma}$ sont pleinement adéquat pour le λ-calcul.

Exemples (P_∞)

Park's P_∞ :

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \{*\} \\
P_{n+1} &= P_n \cup (\mathcal{A}_f(P_n) \times P_n) - \{\{*\}, *\} \\
P_\infty &= \bigcup_n P_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a, \alpha) &= (a \to \alpha) \qquad \text{si } a \neq \{*\} \text{ or } \alpha \neq * \\
* &= (\{*\} \to *)
\end{aligned}
$$

Exemples (P_∞)

Park's P_∞ :

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \{*\} \\
P_{n+1} &= P_n \cup (\mathcal{A}_f(P_n) \times P_n) - \{\{*\}, *\} \\
P_\infty &= \bigcup_n P_n
\end{aligned}
$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } a \neq \{*\} \text{ or } \alpha \neq *$$

$$* = (\{*\} \to *)$$

Proposition :

P_∞ n'est pas pleinement adéquat pour le λ-calcul.

Contre-exemple (P_∞)

$$\mathbf{\Omega} = (\lambda x.x)(\lambda x.x)$$
$$\mathbf{\Omega'} = \lambda y.\Omega$$

Contre-exemple (P_∞)

$$\mathbf{\Omega} = (\lambda x.x)(\lambda x.x)$$
$$\mathbf{\Omega'} = \lambda y.\Omega$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : * \vdash x : *} \qquad \dfrac{}{x : * \vdash x : *}}{x : * \vdash xx : *}}{\vdash (\lambda x.xx) : *} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : * \vdash x : *} \qquad \dfrac{}{x : * \vdash x : *}}{x : * \vdash xx : *}}{\vdash (\lambda x.xx) : *}}{\vdash \Omega : *}$$

Exemple ($E_\perp^\top$)

$E_\perp^\top$:

$$E_0 = \{\perp, \top\}$$
$$E_{n+1} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(E_n) \times E_n) - \{(\emptyset, \top), (\{\top\}, \perp)\}$$
$$E_\perp^\top = \bigcup_n E_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } (a, \alpha) \in E_\perp^\top$$
$$\top = (\emptyset \to \top)$$
$$\perp = (\{\top\} \to \perp)$$

Exemple ($E_\perp^\top$)

$E_\perp^\top$:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \{\perp, \top\} \\
E_{n+1} &= D_n \cup (\mathcal{A}_f(E_n) \times E_n) - \{(\emptyset, \top), (\{\top\}, \perp)\} \\
E_\perp^\top &= \bigcup_n E_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a, \alpha) &= (a \to \alpha) && \text{si } (a, \alpha) \in E_\perp^\top \\
\top &= (\emptyset \to \top) \\
\perp &= (\{\top\} \to \perp)
\end{aligned}
$$

Proposition :

$E_\perp^\top$ est pleinement adéquat pour le λ-calcul.

Exemple (Norm)

Norm :

$$\begin{aligned} N_0 &= \{p, q\} \\ N_{n+1} &= N_n \cup (\mathcal{A}_f(N_n) \times N_n - \{(\{p\}, q), (\{q\}, p)\} \\ N_\infty &= \bigcup_n N_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a, \alpha) &= (a \to \alpha) && \text{si } (a, \alpha) \in N_\infty \\ q &= (\{p\} \to q) \\ p &= (\{q\} \to p) \end{aligned}$$

Exemple (Norm)

Norm :

$$N_0 = \{p, q\}$$
$$N_{n+1} = N_n \cup (\mathcal{A}_f(N_n) \times N_n - \{(\{p\}, q), (\{q\}, p)\}$$
$$N_\infty = \bigcup_n N_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } (a, \alpha) \in N_\infty$$
$$q = (\{p\} \to q)$$
$$p = (\{q\} \to p)$$

Proposition :

N_∞ n'est pas pleinement adéquat pour le λ-calcul.

Contre-exemple (Norm)

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}(\lambda uex.e\ (u\ x))$$
$$\mathbf{A} \to^* \lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x)$$

Contre-exemple (Norm)

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}(\lambda uex.e\ (u\ x))$$
$$\mathbf{A} \to^* \lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x)$$

$$\mathbf{A} :\ \{p\} \to p$$

Contre-exemple (Norm)

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}(\lambda uex.e\ (u\ x))$$
$$\mathbf{A} \to^* \lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x)$$

$$\mathbf{A} :\ \{p\} \to p$$

$$\mathbf{A}\ \mathbf{p} :\ p$$

Contre-exemple (Norm)

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}(\lambda uex.e\ (u\ x))$$
$$\mathbf{A} \to^* \lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x)$$

$$\mathbf{A}:\ \{p\} \to p$$

$$\mathbf{A}\ \mathbf{p}:\ p$$
$$(\lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x))\ \mathbf{p}:\ p$$

Contre-exemple (Norm)

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}(\lambda uex.e\ (u\ x))$$
$$\mathbf{A} \to^* \lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x)$$

$$\mathbf{A} : \ \{p\} \to p$$

$$\mathbf{A}\ \mathbf{p} : \ p$$
$$(\lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x))\ \mathbf{p} : \ p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x)) : \ p$$

Contre-exemple (Norm)

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}(\lambda uex.e\ (u\ x))$$
$$\mathbf{A} \to^* \lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x)$$

$$\mathbf{A} : \ \{p\} \to p$$

$$\mathbf{A}\ \mathbf{p} : \ p$$
$$(\lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x))\ \mathbf{p} : \ p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x)) : \ p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x)) : \ \{q\} \to p$$

Contre-exemple (Norm)

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}(\lambda uex.e\ (u\ x))$$
$$\mathbf{A} \to^* \lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x)$$

$$\mathbf{A} : \ \{p\} \to p$$

$$\mathbf{A}\ \mathbf{p} : \ p$$
$$(\lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x))\ \mathbf{p} : \ p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x)) : \ p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x)) : \ \{q\} \to p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x))\ \mathbf{q} : \ p$$

Contre-exemple (Norm)

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}(\lambda uex.e\ (u\ x))$$
$$\mathbf{A} \to^* \lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x)$$

$$\mathbf{A} :\ \{p\} \to p$$

$$\mathbf{A}\ \mathbf{p} :\ p$$
$$(\lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x))\ \mathbf{p} :\ p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x)) :\ p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x)) :\ \{q\} \to p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x))\ \mathbf{q} :\ p$$
$$\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ \mathbf{q}) :\ p$$

Contre-exemple (Norm)

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}(\lambda uex.e\ (u\ x))$$
$$\mathbf{A} \to^* \lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x)$$

$$\mathbf{A} :\ \{p\} \to p$$

$$\mathbf{A}\ \mathbf{p} :\ p$$
$$(\lambda ex.e\ (\mathbf{A}\ x))\ \mathbf{p} :\ p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x)) :\ p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x)) :\ \{q\} \to p$$
$$(\lambda x.\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ x))\ \mathbf{q} :\ p$$
$$\mathbf{p}\ (\mathbf{A}\ \mathbf{q}) :\ p$$
$$\mathbf{A}\ \mathbf{q} :\ q$$

Exemple (H^f_∞)

H^f_∞ :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$H^f_0 = \{*\} \cup \{\alpha^n_j | n \geq 0,\ 1 \leq j \leq f(n)\}$$

$$H^f_{n+1} = H^f_n \cup (\mathcal{A}_f(H^f_n) \times H^f_n) - \{(\emptyset, \alpha^n_j) | j \neq f(n)\} \cup \{(\{\alpha^{n+1}_1\}, *)\}$$

$$H^f_\infty = \bigcup_n H_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } (a, \alpha) \in H^f_\infty$$

$$* = (\emptyset \to *)$$

$$\alpha^n_j = (\emptyset \to \alpha^n_{j+1}) \qquad 1 \leq j < f(n)$$

$$\alpha^n_{f(n)} = (\{\alpha^{n+1}_1\} \to *)$$

Exemple (H^f_∞)

H^f_∞ :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$H^f_0 = \{*\} \cup \{\alpha^n_j | n \geq 0,\ 1 \leq j \leq f(n)\}$$

$$H^f_{n+1} = H^f_n \cup (\mathcal{A}_f(H^f_n) \times H^f_n) - \{(\emptyset, \alpha^n_j) | j \neq f(n)\} \cup \{(\{\alpha^{n+1}_1\}, *)\}$$

$$H^f_\infty = \bigcup_n H_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } (a, \alpha) \in H^f_\infty$$

$$* = (\emptyset \to *)$$

$$\alpha^n_1 = (\bar{\emptyset}^{f(n)-1} \to \{\alpha^{n+1}_1\} \to *)$$

Exemple (H^f_∞)

H^f_∞ :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$H^f_0 = \{*\} \cup \{\alpha^n_j | n \geq 0,\ 1 \leq j \leq f(n)\}$$

$$H^f_{n+1} = H^f_n \cup (\mathcal{A}_f(H^f_n) \times H^f_n) - \{(\emptyset, \alpha^n_j) | j \neq f(n)\} \cup \{(\{\alpha^{n+1}_1\}, *)\}$$

$$H^f_\infty = \bigcup_n H_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } (a, \alpha) \in H^f_\infty$$

$$* = (\emptyset \to *)$$

$$\alpha^n_1 = (\bar{\emptyset}^{f(n)-1} \to \{\alpha^{n+1}_1\} \to *)$$

Proposition :

l'adéquation complète pour le λ-calcul de U^f_∞ dépend des propriétés de calculabilité de f.

Hyperimmune

Modèle hyperimmune

Un K-modèle est hyperimmune lorsque pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si :

- il existe $(\alpha_i)_{i \geq 0}$ tel que $\alpha_n = a_1 \to \cdots \to a_{f(n)} \to \alpha'_n$
- $\alpha_{n+1} \in a_{f(n)}$

alors f est hyperimmune, c'est à dire qu'elle n'est bornée par aucune fonction calculable.

Hyperimmune

Modèle hyperimmune

Un K-modèle est hyperimmune lorsque pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si :

- il existe $(\alpha_i)_{i \geq 0}$ tel que $\alpha_n = a_1 \to \cdots \to a_{f(n)} \to \alpha'_n$
- $\alpha_{n+1} \in a_{f(n)}$

alors f est hyperimmune, c'est à dire qu'elle n'est bornée par aucune fonction calculable.

Théorème (Caractérisation) :

Un K-modèle est pleinement adéquat si et seulement si il est sensible et hyperimmune.

Hyperimmunité et complétion

Proposition :

La completion préserve l'hyperimmunité, c.à.d qu'un complété est hyperimmune si et seulement si le K-modèle partiel l'est.

Corollaire :

La completion d'un K-modèle partiel fini est hyperimmune ssi il existe un préordre $\preceq$ sur la K-trame partielle telle que :

- $(a \to \alpha) \succeq \alpha$
- $(a \to \alpha) \succ \beta$ lorsque $\beta \in a$

Exemples (bien stratifiés)

K-modèles bien stratifiés :

Soit A un ensemble non vide et σ une permutation de A :

$$U_0^{A,\sigma} = A$$
$$U_{n+1}^{A,\sigma} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(U_n^{A,\sigma}) \times U_n^{A,\sigma}) - \{(\emptyset, \mu) | \mu \in A\}$$
$$U_\infty^{A,\sigma} = \bigcup_n U_n^{A,\sigma}$$

$$(a, \alpha) = (a \rightarrow \alpha) \qquad \text{si } a \neq \emptyset \text{ or } \alpha \notin A*$$
$$\sigma(\mu) = (\emptyset \rightarrow \mu) \qquad \text{pour } \mu \in A$$

$\rightsquigarrow$ $U_\infty^{A,\sigma}$ **(et donc D_∞) est hyperimmune avec $\mu \preceq \mu'$ pour tout $\mu, \mu' \in A$**

Exemples (P_∞)

Park's P_∞ :

$$P_0 = \{*\}$$
$$P_{n+1} = P_n \cup (\mathcal{A}_f(P_n) \times P_n) - \{\{*\}, *\}$$
$$P_\infty = \bigcup_n P_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } a \neq \{*\} \text{ or } \alpha \neq *$$
$$* = (\{*\} \to *)$$

$\rightsquigarrow$ **P_∞ n'est pas hyperimmune avec $f(n) = 1$ et $\alpha_n = *$ pour tout n**

Exemple ($E_\perp^\top$)

$E_\perp^\top$:

$$E_0 = \{\perp, \top\}$$
$$E_{n+1} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(E_n) \times E_n) - \{(\emptyset, \top), (\{\top\}, \perp)\}$$
$$E_\perp^\top = \bigcup_n E_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } (a, \alpha) \in E_\perp^\top$$
$$\top = (\emptyset \to \top)$$
$$\perp = (\{\top\} \to \perp)$$

$\rightsquigarrow$ $E_\perp^\top$ **est hyperimmune avec** $\top \prec \perp$

Exemple (Norm)

Norm :

$$N_0 = \{p, q\}$$
$$N_{n+1} = N_n \cup (\mathcal{A}_f(N_n) \times N_n - \{(\{p\}, q), (\{q\}, p)\}$$
$$N_\infty = \bigcup_n N_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } (a, \alpha) \in N_\infty$$
$$q = (\{p\} \to q)$$
$$p = (\{q\} \to p)$$

$\rightsquigarrow$ N_∞ **n'est pas hyperimmune avec** $f(n) = 1$**,** $\alpha_{2n} = p$ **et** $\alpha_{2n+1} = q$ **pour tout** n

Exemple (H^f_∞)

H^f_∞ :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$H^f_0 = \{*\} \cup \{\alpha^n_j | n \geq 0,\ 1 \leq j \leq f(n)\}$$

$$H^f_{n+1} = H^f_n \cup (\mathcal{A}_f(H^f_n) \times H^f_n) - \{(\emptyset, \alpha^n_j) | j \neq f(n)\} \cup \{(\{\alpha^{n+1}_1\}, *)\}$$

$$H^f_\infty = \bigcup_n H_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } (a, \alpha) \in H^f_\infty$$

$$\alpha^n_1 = (\bar{\emptyset}^{f(n)-1} \to \{\alpha^{n+1}_1\} \to *)$$

Exemple (H^f_∞)

H^f_∞ :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$H^f_0 = \{*\} \cup \{\alpha^n_j | n \geq 0,\ 1 \leq j \leq f(n)\}$$

$$H^f_{n+1} = H^f_n \cup (\mathcal{A}_f(H^f_n) \times H^f_n) - \{(\emptyset, \alpha^n_j) | j \neq f(n)\} \cup \{(\{\alpha^{n+1}_1\}, *)\}$$

$$H^f_\infty = \bigcup_n H_n$$

$$(a, \alpha) = (a \to \alpha) \qquad \text{si } (a, \alpha) \in H^f_\infty$$

$$\alpha^n_1 = (\bar{\emptyset}^{f(n)-1} \to \{\alpha^{n+1}_1\} \to *)$$

Proposition :

H^f_∞ est hyperimmune si et seulement si f est hyperimmune.

Que se passe-t-il ?

$$_1 = a_1^1 \to \cdots a_{f(1)-1}^1 \to a_{f(1)}^1 \to \cdots$$

$$\Cup$$

$$\alpha_2 = a_2^1 \to \cdots \to a_{f(2)}^2 \to \cdots$$

$$\Cup$$

$$\alpha_3 = a_3^1 \to \cdots \to a_{f(3)}^3 \to \cdots$$

$$\ddots \ldots$$

Contre-exemple pour f non hyperimmune

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}\ (\lambda uex_1 \ldots .x_k.e\ (u\ x_1) \cdots (u\ x_k))$$

Contre-exemple pour f non hyperimmune

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}\ (\lambda uex_1....x_k.e\ (u\ x_1)\cdots(u\ x_k))$$

$$\mathbf{G}\ \underline{n} = \lambda vex_1...x_{g(n)}.e\ (v\ x_1)\cdots(v\ x_{g(n)})$$

Contre-exemple pour f non hyperimmune

$$\mathbf{A} \equiv_\eta \mathbf{Y}\ (\lambda u.(\lambda vex_1....x_k.e\ (v\ x_1)\cdots(v\ x_k))\ u)$$

$$\mathbf{G}\ \underline{n} = \lambda vex_1...x_{g(n)}.e\ (v\ x_1)\cdots(v\ x_{g(n)})$$

Contre-exemple pour f non hyperimmune

$$\mathbf{A_n} = \mathbf{Y}\ (\lambda uk.\mathbf{G}\ k\ (u\ (\mathbf{S}k)))\ \overline{n}$$

$$\mathbf{G}\ \underline{n} = \lambda vex_1 \ldots x_{g(n)}.e\ (v\ x_1) \cdots (v\ x_{g(n)})$$

Contre-exemple pour f non hyperimmune

$$\mathbf{A_n} = \mathbf{Y}\ (\lambda uk.\mathbf{G}\ k\ (u\ (\mathbf{S}k)))\ \overline{n}$$

$$\mathbf{G}\ \underline{n} = \lambda vex_1 ... x_{g(n)}.e\ (v\ x_1) \cdots (v\ x_{g(n)})$$

$$\mathbf{A_n} \to^* \mathbf{G}\ \overline{n}\ \mathbf{A_{n+1}}$$

Pourquoi ?

- Dégénération des domaines de Scott ?

Pourquoi ?

- Dégénération des domaines de Scott ?
  $\rightsquigarrow$ [Ehrhard 2012]

Pourquoi ?

- Dégénération des domaines de Scott ?
  $\rightsquigarrow$ [Ehrhard 2012]
- Une dégénération de notre notion de modèles ?

Pourquoi ?

- Dégénération des domaines de Scott ?
  $\rightsquigarrow$ [Ehrhard 2012]
- Une dégénération de notre notion de modèles ?
- Une conséquence de l'expressivité de la classe de modèles ?
  $\rightsquigarrow$ Il y aurait 2^ω théories entre $(H+\eta)$ et H^*...