Quelques aspects combinatoire du λ-calcul avec ressources

Jean-Baptiste Midez

Institut de Mathématiques de Luminy

Rencontre GeoCal, 15 février 2013

Définition

On définit la syntaxe du λ-calcul avec ressources comme suit en distinguant les termes simple (Δ) et les bunch $(\Delta^!)$:

$$(\Delta) \quad s ::= x \mid \lambda x\, s \mid \langle s \rangle\, T$$

$$(\Delta^!) \quad T ::= 1 \mid s.T$$

On étend la syntaxe par linéarité.

- $\lambda x\, (M + N) = \lambda x\, M + \lambda x\, N$
- $\langle M + N \rangle\, T = \langle M \rangle\, T + \langle N \rangle\, T$

Substitution

Définition (Substitution)

On note $\partial_x(s, T)$ la substitution linéaire de x par T dans s et on la définit comme suit :

$$\partial_x(s, T) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } |T| \neq deg_x(t) \\ \left\{ s[t_{\sigma(1)}/x_1, \ldots, t_{\sigma(n)}/x_n] \mid \sigma \in \Sigma_n \right\} \text{ sinon} \end{cases}$$

Substitution

Définition (Substitution)

On note $\partial_x(s, T)$ la substitution linéaire de x par T dans s et on la définit comme suit :

$$\partial_x(s, T) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } |T| \neq deg_x(t) \\ \left\{ s[t_{\sigma(1)}/x_1, \ldots, t_{\sigma(n)}/x_n] \mid \sigma \in \Sigma_n \right\} \text{ sinon} \end{cases}$$

Définition (Reduction)

La règle de réduction est la suivante :

$$\langle \lambda x\ s \rangle\ T \ \ \beta_\Delta \ \ \partial_x(s, T)$$

Approximants linéaires

Définition

On définit les approximants linéaires d'un λ-terme comme suit :

- $(x)^* = \{x\}$
- $(\lambda x\ u)^* = \{\lambda x\ s \mid s \in u^*\}$
- $((u)v)^* = \{\langle s\rangle\ T \mid s \in u^*, T \in \mathcal{M}_{fin}(v^*)\}$

Définition

On appelle cohérents deux approximants linéaire d'un même λ-terme.

Exemple

Approximants de $(z)\lambda x(x)z$:

- $\langle z \rangle\, 1$
- $\langle z \rangle\, [\lambda x \,\langle x \rangle\, 1\ .\ \lambda x\, \langle x \rangle\, z^3]$

Termes frères

Définition

$t_1, t_2 \in \Delta_{\mathcal{R}}$ sont frères si il existe $s \in \Delta_{\mathcal{R}}, T \in \Delta^!_{\mathcal{R}}, x \in \mathcal{V}$ tels que $t_1, t_2 \in \partial_x(s, T)$ et t_1, t_2 sont en forme normale.

Termes frères

Définition

$t_1, t_2 \in \Delta_{\mathcal{R}}$ sont frères si il existe $s \in \Delta_{\mathcal{R}}, T \in \Delta^{!}_{\mathcal{R}}, x \in \mathcal{V}$ tels que $t_1, t_2 \in \partial_x(s, T)$ et t_1, t_2 sont en forme normale.

Exemple

$\left\langle \langle x \rangle \, x^2 \right\rangle \langle x \rangle \, 1$ et $\langle \langle x \rangle \, 1 \rangle \, \langle x \rangle \, x^2$

Termes frères

Définition

$t_1, t_2 \in \Delta_{\mathcal{R}}$ sont frères si il existe $s \in \Delta_{\mathcal{R}}, T \in \Delta^!_{\mathcal{R}}, x \in \mathcal{V}$ tels que $t_1, t_2 \in \partial_x(s, T)$ et t_1, t_2 sont en forme normale.

Exemple

$\langle\langle x\rangle\, x^2\rangle\, \langle x\rangle\, 1$ et $\langle\langle x\rangle\, 1\rangle\, \langle x\rangle\, x^2$

un terme parent est $\langle\lambda y\, \langle y\rangle\, y\rangle\, [\langle x\rangle\, 1\, .\, \langle x\rangle\, x^2]$

Termes frères

Définition

$t_1, t_2 \in \Delta_{\mathcal{R}}$ sont frères si il existe $s \in \Delta_{\mathcal{R}}, T \in \Delta^!_{\mathcal{R}}, x \in \mathcal{V}$ tels que $t_1, t_2 \in \partial_x(s, T)$ et t_1, t_2 sont en forme normale.

Exemple

$\langle\langle x\rangle\, x^2\rangle\, \langle x\rangle\, 1$ et $\langle\langle x\rangle\, 1\rangle\, \langle x\rangle\, x^2$
un terme parent est $\langle \lambda y\, \langle y\rangle\, y\rangle\, [\langle x\rangle\, 1\ .\ \langle x\rangle\, x^2]$

Théorème

Soit $t \in \Delta_{\mathcal{R}}$. Tous les termes frères avec t sont exactement les termes qui sont cohérents avec t et qui peuvent être obtenus par permutation de sous termes cohérents à partir de t.

Termes cousins

Définition

$t_1, t_2 \in \Delta_{\mathcal{R}}$ *sont cousins si il existe* t *tel que* $t_1, t_2 \in NF(t)$.

Termes cousins

Définition

$t_1, t_2 \in \Delta_{\mathcal{R}}$ *sont cousins si il existe* t *tel que* $t_1, t_2 \in NF(t)$.

Exemple

$\langle\langle z\rangle\, z\rangle\, 1$ et $\langle\langle z\rangle\, 1\rangle\, z$

Termes cousins

Définition

$t_1, t_2 \in \Delta_{\mathcal{R}}$ sont cousins si il existe t tel que $t_1, t_2 \in NF(t)$.

Exemple

$\langle\langle z\rangle\, z\rangle\, 1$ et $\langle\langle z\rangle\, 1\rangle\, z$
un terme parent est $\langle \lambda x\, \langle x\rangle\, \langle x\rangle\, z\rangle\, [\lambda y\, \langle y\rangle\, 1\ .\ \lambda y\, \langle y\rangle\, z]$

Définition

le multiset des cardinalité d'un terme t, noté $\gamma(t)$, est définit par induction :

- $\gamma(x) = 0$
- $\gamma(\lambda x\ s) = \gamma(s)$
- $\gamma(\langle s \rangle\ t_1 ... t_n) = 1.n + \gamma(s) + \sum_{i=1}^{n} \gamma(t_i)$

Définition

On appelle terme libre un terme qui ne contient pas de lambda.

Théorème

Si t_1, t_2 *sont cousins et libres alors* $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ *et pour tout* $x \in \mathcal{V}_{t_1} \cup \mathcal{V}_{t_2}$, $deg_x(t_1) = deg_x(t_2)$.

Conjecture

la réciproque est vraie.