Réécriture de diagrammes pour les applications linéaires

P. Rannou

Institut de Mathématique de Luminy

Rencontre Géocal
15 février 2013

Le *PRO* des applications linéaires

Dans le *PRO* $\mathcal{L}(\mathbb{K})$ des applications $\mathbb{K}$-linéaires :

Le *PRO* des applications linéaires

Dans le *PRO* $\mathcal{L}(\mathbb{K})$ des applications $\mathbb{K}$-linéaires :

- un morphisme $\phi : n \to m$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, qui correspond à une matrice $A : m \times n$, c'est-à-dire une matrice à m lignes et n colonnes ;

Le *PRO* des applications linéaires

Dans le *PRO* $\mathcal{L}(\mathbb{K})$ des applications $\mathbb{K}$-linéaires :

- un morphisme $\phi : n \to m$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, qui correspond à une matrice $A : m \times n$, c'est-à-dire une matrice à m lignes et n colonnes ;
- la composition séquentielle correspond à la multiplication des matrices : $\phi \circ \psi$ correspond à AB si ϕ (resp. ψ) correspond à A (resp. B) ;

Le *PRO* des applications linéaires

Dans le *PRO* $\mathcal{L}(\mathbb{K})$ des applications $\mathbb{K}$-linéaires :

- un morphisme $\phi : n \to m$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, qui correspond à une matrice $A : m \times n$, c'est-à-dire une matrice à m lignes et n colonnes ;
- la composition séquentielle correspond à la multiplication des matrices : $\phi \circ \psi$ correspond à AB si ϕ (resp. ψ) correspond à A (resp. B) ;
- la composition parallèle correspond à la somme directe des matrices : $\phi \oplus \psi$ correspond à $A \oplus B$ si ϕ (resp. ψ) correspond à A (resp. B).

Le *PRO* des applications linéaires

Dans le *PRO* $\mathcal{L}(\mathbb{K})$ des applications $\mathbb{K}$-linéaires :

- un morphisme $\phi : n \to m$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, qui correspond à une matrice $A : m \times n$, c'est-à-dire une matrice à m lignes et n colonnes ;
- la composition séquentielle correspond à la multiplication des matrices : $\phi \circ \psi$ correspond à AB si ϕ (resp. ψ) correspond à A (resp. B) ;
- la composition parallèle correspond à la somme directe des matrices : $\phi \oplus \psi$ correspond à $A \oplus B$ si ϕ (resp. ψ) correspond à A (resp. B).

Rappel : $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

Générateurs (ou portes)

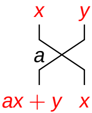
échange

$\chi_a : 2 \to 2$

Générateurs (ou portes)

échange

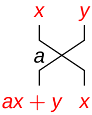
$\chi_a : 2 \to 2$



Générateurs (ou portes)

échange

$$\chi_a : 2 \longrightarrow 2$$

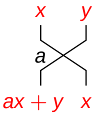


$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Générateurs (ou portes)

échange

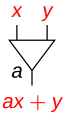
$\chi_a : 2 \to 2$



$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

somme

$\sigma_a : 2 \to 1$

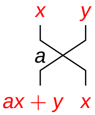


$$\begin{pmatrix} a & 1 \end{pmatrix}$$

Générateurs (ou portes)

échange

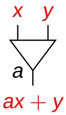
$\chi_a : 2 \to 2$



$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

somme

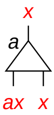
$\sigma_a : 2 \to 1$



$$\begin{pmatrix} a & 1 \end{pmatrix}$$

duplication

$\sigma_a^* : 1 \to 2$

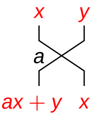


$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Générateurs (ou portes)

échange

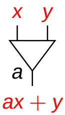
$\chi_a : 2 \to 2$



$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

somme

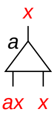
$\sigma_a : 2 \to 1$



$$\begin{pmatrix} a & 1 \end{pmatrix}$$

duplication

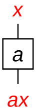
$\sigma_a^* : 1 \to 2$



$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

scalaire

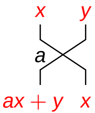
$\mu_a : 1 \to 1$



Générateurs (ou portes)

échange

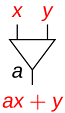
$\chi_a : 2 \to 2$



$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

somme

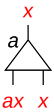
$\sigma_a : 2 \to 1$



$$\begin{pmatrix} a & 1 \end{pmatrix}$$

duplication

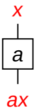
$\sigma_a^* : 1 \to 2$



$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

scalaire

$\mu_a : 1 \to 1$



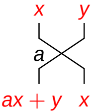
zéro

$\eta : 0 \to 1$

Générateurs (ou portes)

échange

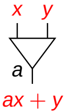
$\chi_a : 2 \to 2$



$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

somme

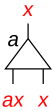
$\sigma_a : 2 \to 1$



$$\begin{pmatrix} a & 1 \end{pmatrix}$$

duplication

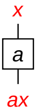
$\sigma_a^* : 1 \to 2$



$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

scalaire

$\mu_a : 1 \to 1$



zéro

$\eta : 0 \to 1$

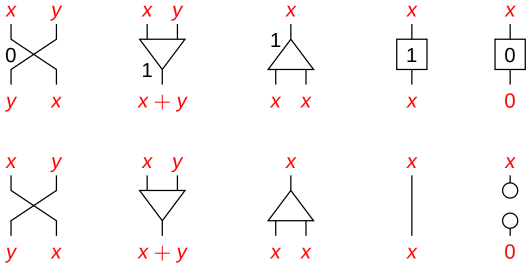
effacement

$\eta^* : 1 \to 0$

Remarques :

Cas particulier :

Notation usuelle :

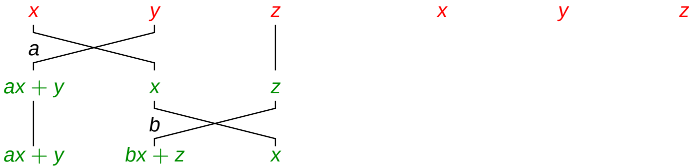


Diagrammes équivalents

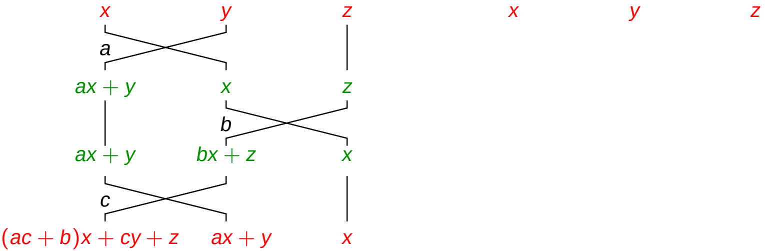
$x \qquad y \qquad z \qquad\qquad x \qquad y \qquad z$

Diagrammes équivalents

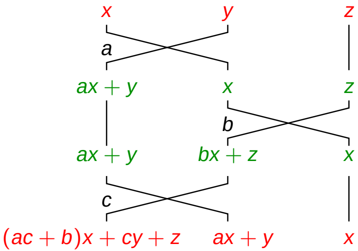
Diagrammes équivalents

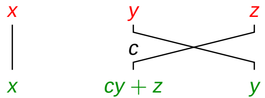


Diagrammes équivalents

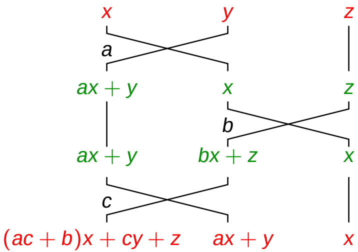


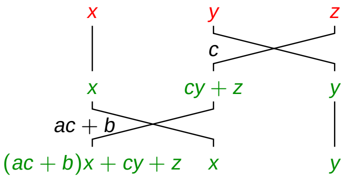
Diagrammes équivalents



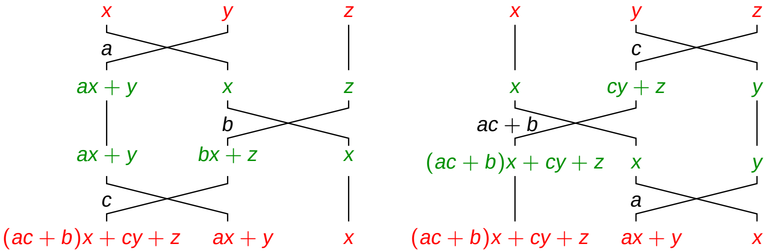


Diagrammes équivalents

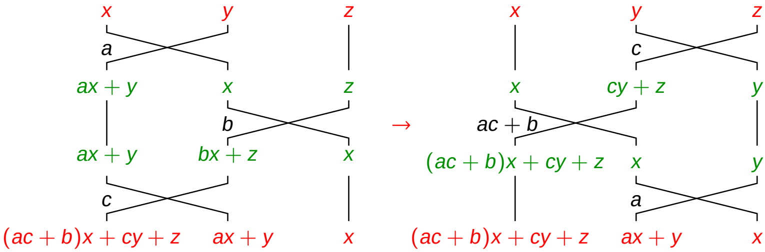




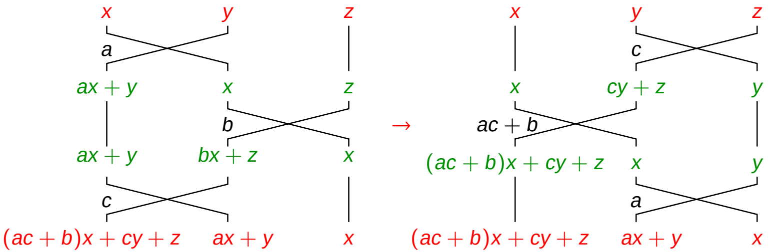
Diagrammes équivalents



Diagrammes équivalents

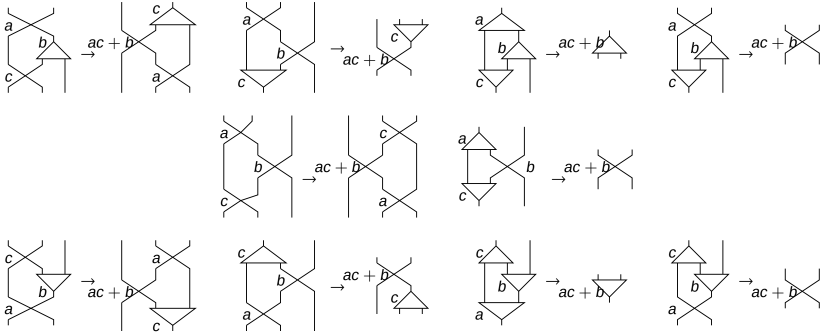


Diagrammes équivalents



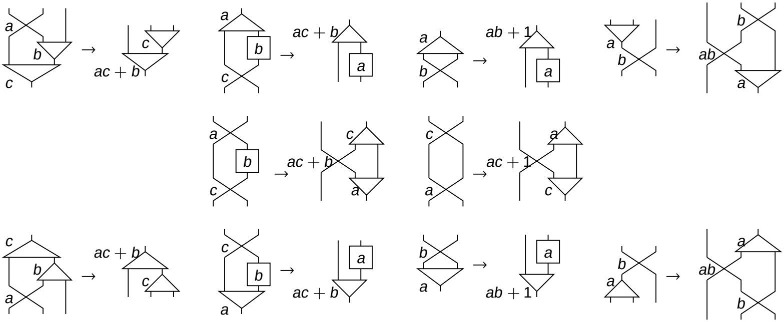
Autrement dit, ces diagrammes correspondent à la même matrice 3×3.

Relations (I)

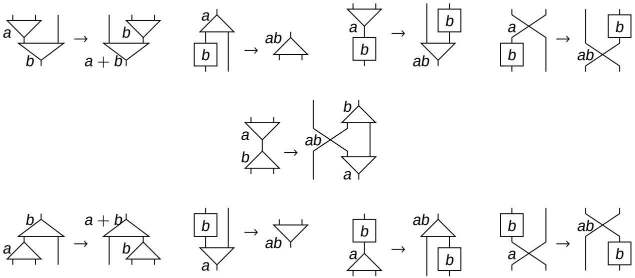


a b c → ac + b c a
a b c → ac + b c
a b c → ac + b
a b c → ac + b
a b c → ac + b c a
a c b → ac + b
c b a → ac + b a c
c b a → ac + b c
c b a → ac + b
c b a → ac + b

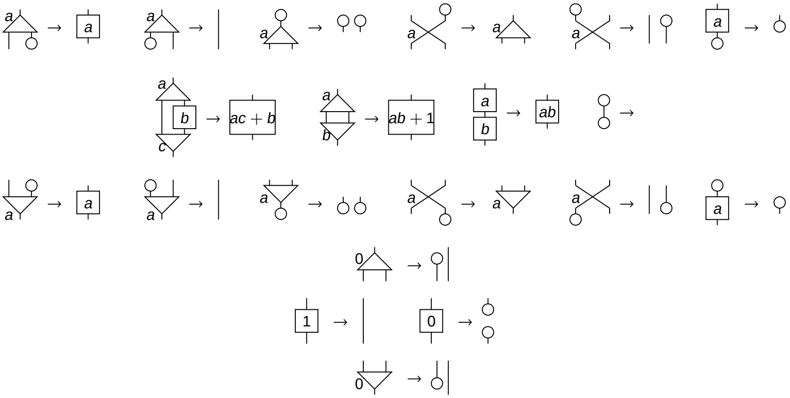
Relations (II)



Relations (III)



Relations (IV)



Théorème (convergence, et complétude)

Ce système de réécriture est *convergent*, c'est à dire qu'il satisfait les propriétés de *confluence* et de *terminaison*.

Théorème (convergence, et complétude)

Ce système de réécriture est *convergent*, c'est à dire qu'il satisfait les propriétés de *confluence* et de *terminaison*.
De plus il est *complet* pour l'algèbre $\mathbb{K}$-linéaire :

Théorème (convergence, et complétude)

Ce système de réécriture est *convergent*, c'est à dire qu'il satisfait les propriétés de *confluence* et de *terminaison*.
De plus il est *complet* pour l'algèbre $\mathbb{K}$-linéaire :

- toute application $\mathbb{K}$-linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ correspond à un diagramme $n \to m$;

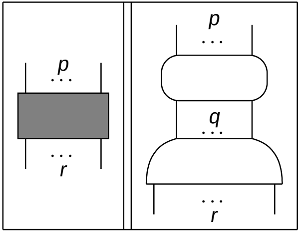
Théorème (convergence, et complétude)

Ce système de réécriture est *convergent*, c'est à dire qu'il satisfait les propriétés de *confluence* et de *terminaison*.
De plus il est *complet* pour l'algèbre $\mathbb{K}$-linéaire :

- toute application $\mathbb{K}$-linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ correspond à un diagramme $n \to m$;
- deux tels diagrammes définissent la même application $\mathbb{K}$-linéaire si et seulement s'ils ont la même forme réduite.

Grammaire pour les formes canoniques

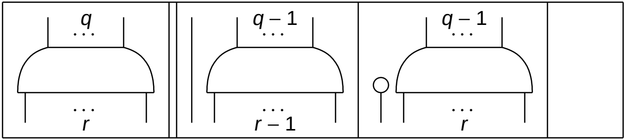
forme canonique



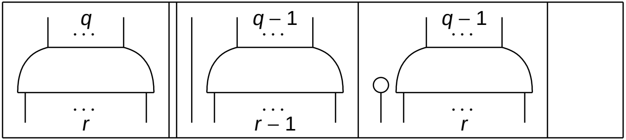
forme non dégénérée

forme dégénérée

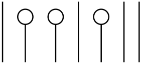
Forme dégénérée



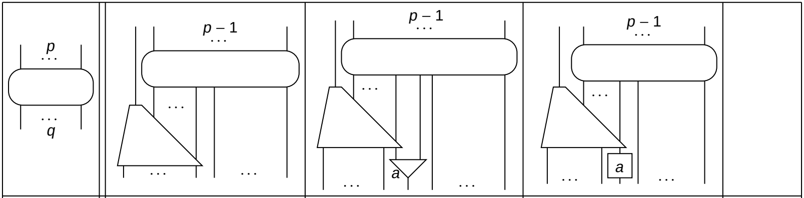
Forme dégénérée



Exemple :



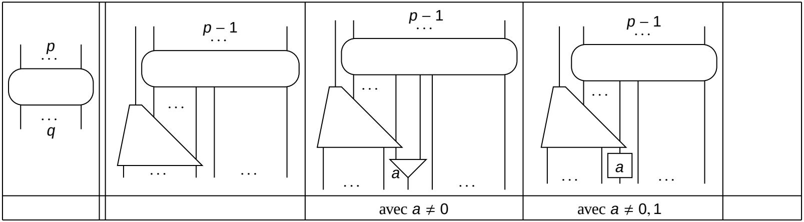
Forme non-dégénérée



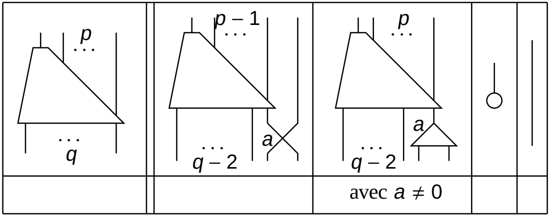
avec $a \neq 0$

avec $a \neq 0, 1$

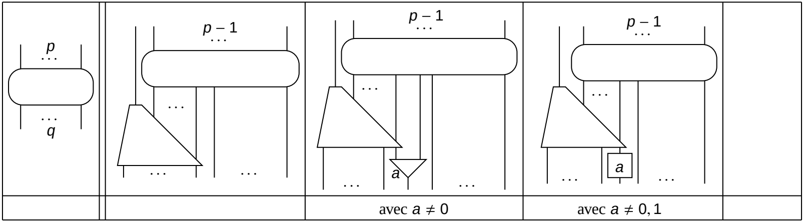
Forme non-dégénérée



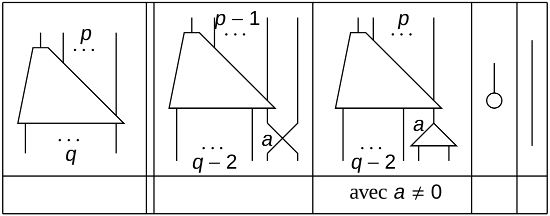
Escalier



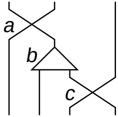
Forme non-dégénérée



Escalier



Exemple



avec $b \neq 0$

Exemple de forme canonique

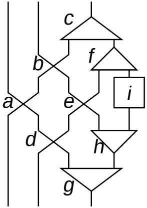
Voici des formes canoniques qui correspondent à la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Exemple de forme canonique

Voici des formes canoniques qui correspondent à la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$



$c, f, g, h \neq 0$

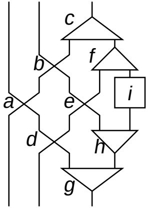
$i \neq 0, 1$

cas générique

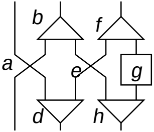
Exemple de forme canonique

Voici des formes canoniques qui correspondent à la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$



$c, f, g, h \neq 0$
$i \neq 0, 1$
cas générique

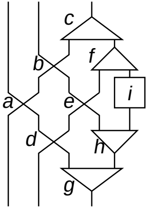


$b, f, d, h \neq 0$
$g \neq 0, 1$

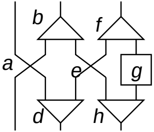
Exemple de forme canonique

Voici des formes canoniques qui correspondent à la matrice suivante :

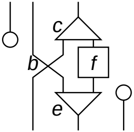
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$



$c, f, g, h \neq 0$
$i \neq 0, 1$
cas générique



$b, f, d, h \neq 0$
$g \neq 0, 1$

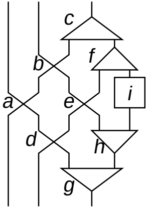


$c, e \neq 0$
$f \neq 0, 1$

Exemple de forme canonique

Voici des formes canoniques qui correspondent à la matrice suivante :

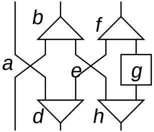
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$



$c, f, g, h \neq 0$

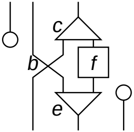
$i \neq 0, 1$

cas générique



$b, f, d, h \neq 0$

$g \neq 0, 1$



$c, e \neq 0$

$f \neq 0, 1$

deux cas dégénérés

Confluence locale

Stratégie utilisée :

Confluence locale

Stratégie utilisée :

- **lemme I** : *Tout diagramme se réduit en une forme canonique.*

Confluence locale

Stratégie utilisée :

- **lemme I** : *Tout diagramme se réduit en une forme canonique.* En particulier, tout diagramme irréductible est une forme canonique.
  La réciproque est aussi vraie : les formes canoniques sont irréductibles.

Confluence locale

Stratégie utilisée :

- **lemme I** : *Tout diagramme se réduit en une forme canonique.* En particulier, tout diagramme irréductible est une forme canonique.
  La réciproque est aussi vraie : les formes canoniques sont irréductibles.
- **lemme II** : *À chaque matrice correspond un unique diagramme en forme canonique.*

Confluence locale

Stratégie utilisée :

- **lemme I** : *Tout diagramme se réduit en une forme canonique.* En particulier, tout diagramme irréductible est une forme canonique. La réciproque est aussi vraie : les formes canoniques sont irréductibles.
- **lemme II** : *À chaque matrice correspond un unique diagramme en forme canonique.*

$$\begin{tikzcd}
 & \delta \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\phi \arrow[d, "\text{lemme I}"', "*"] & & \psi \arrow[d, "\text{lemme I}"', "*"] \\
\hat{\phi} \arrow[rr, phantom, "=" , "\text{lemme II}"'] & & \hat{\psi}
\end{tikzcd}$$

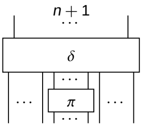
Preuve du lemme I par récurence double

$(H_{n,k})$: tout diagramme à n fils en entrée et k portes se réduit en une forme canonique.

Preuve du lemme I par récurence double

$(H_{n,k})$: tout diagramme à n fils en entrée et k portes se réduit en une forme canonique.

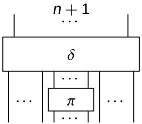
On suppose (H_n) et $(H_{n+1,k})$: montrons $(H_{n+1,k+1})$.



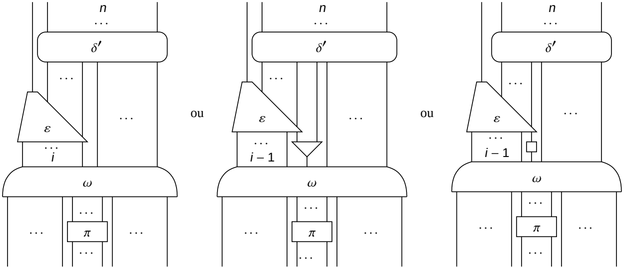
Preuve du lemme I par récurence double

$(H_{n,k})$: tout diagramme à n fils en entrée et k portes se réduit en une forme canonique.

On suppose (H_n) et $(H_{n+1,k})$: montrons $(H_{n+1,k+1})$.



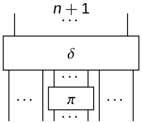
D'après $(H_{n+1,k})$, δ se réduit en forme canonique :



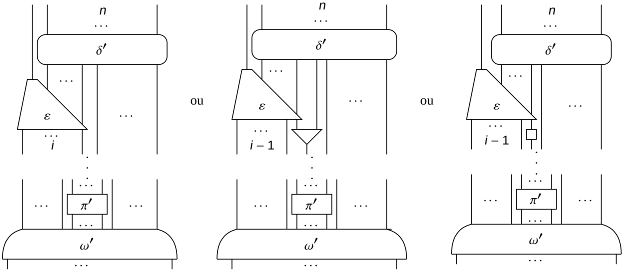
Preuve du lemme I par récurence double

$(H_{n,k})$: tout diagramme à n fils en entrée et k portes se réduit en une forme canonique.

On suppose (H_n) et $(H_{n+1,k})$: montrons $(H_{n+1,k+1})$.



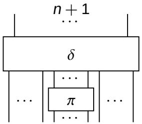
D'après $(H_{n+1,k})$, δ se réduit en forme canonique :



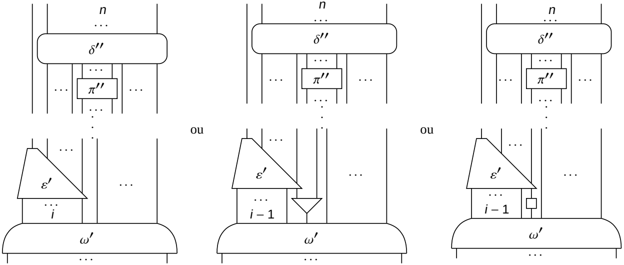
Preuve du lemme I par récurence double

$(H_{n,k})$: tout diagramme à n fils en entrée et k portes se réduit en une forme canonique.

On suppose (H_n) et $(H_{n+1,k})$: montrons $(H_{n+1,k+1})$.

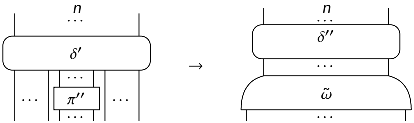


D'après $(H_{n+1,k})$, δ se réduit en forme canonique :



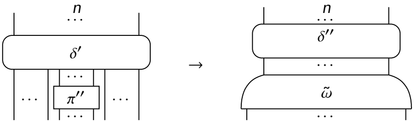
Preuve du lemme I (suite)

D'après (H_n) on a la réduction suivante :

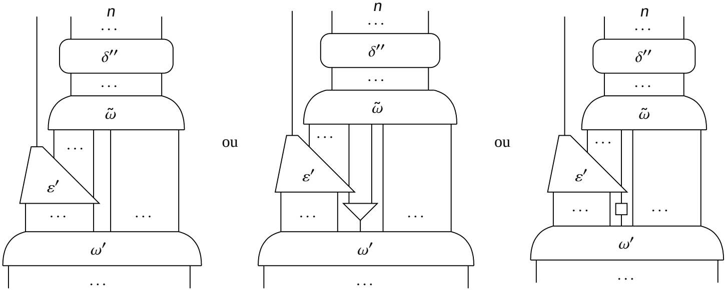


Preuve du lemme I (suite)

D'après (H_n) on a la réduction suivante :

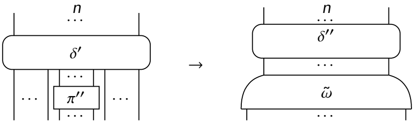


ce qui nous donne :

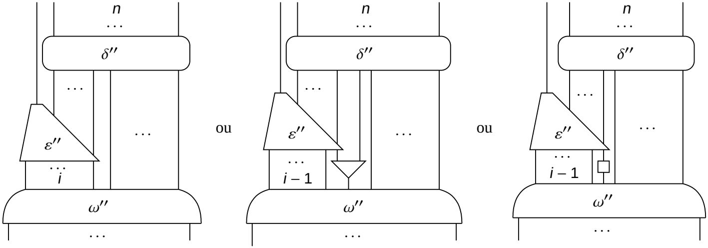


Preuve du lemme I (suite)

D'après (H_n) on a la réduction suivante :

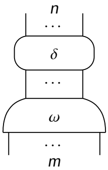


ce qui nous donne :



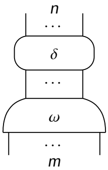
Lemme II

Soit M une matrice $m \times n$. Un diagrammes en forme canonique représentant M est de la forme suivante :

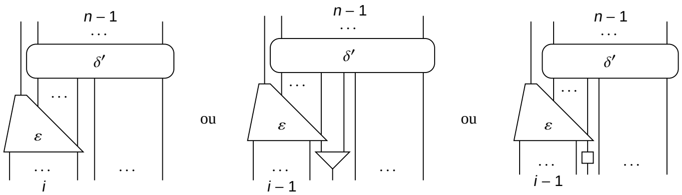


Lemme II

Soit M une matrice $m \times n$. Un diagrammes en forme canonique représentant M est de la forme suivante :

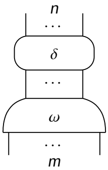


Soit N la matrice M privée de ses lignes nulles.
N correspond à δ qui est de la forme suivante :

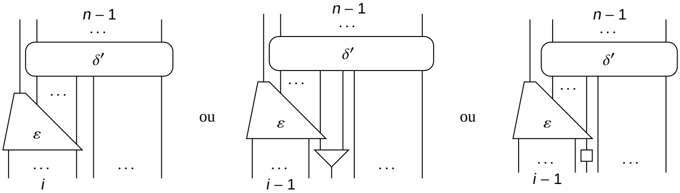


Lemme II

Soit M une matrice $m \times n$. Un diagrammes en forme canonique représentant M est de la forme suivante :



Soit N la matrice M privée de ses lignes nulles.
N correspond à δ qui est de la forme suivante :



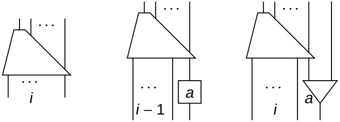
On a $N_{i,1} \neq 0$ et $N_{k,1} = 0$ pour $k > i$

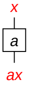
Lemme II (suite)

On appelle M' la matrice N privée de sa première colonne.

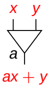
Lemme II (suite)

On appelle M' la matrice N privée de sa première colonne.
pour i :





$$N_{i,1} = a \qquad M'_{i,*} = 0$$

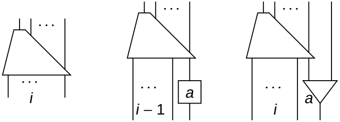


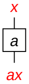
$$N_{i,1} = a \qquad M'_{i,*} \neq 0$$

Lemme II (suite)

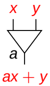
On appelle M' la matrice N privée de sa première colonne.

pour i :



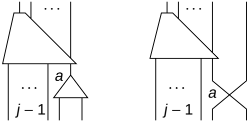


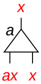
$$N_{i,1} = a \qquad M'_{i,*} = 0$$



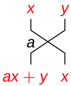
$$N_{i,1} = a \qquad M'_{i,*} \neq 0$$

pour $j < i$:





$$N_{i,1} = a \qquad M'_{i,*} = 0$$

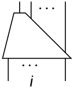


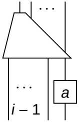
$$N_{j,1} = a \qquad M'_{j,*} \neq 0$$

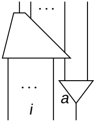
Lemme II (suite)

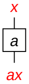
On appelle M' la matrice N privée de sa première colonne.

pour i :

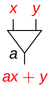






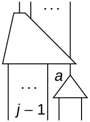


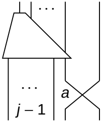
$$N_{i,1} = a \qquad M'_{i,*} = 0$$

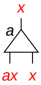


$$N_{i,1} = a \qquad M'_{i,*} \neq 0$$

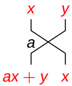
pour $j < i$:







$$N_{i,1} = a \qquad M'_{i,*} = 0$$



$$N_{j,1} = a \qquad M'_{j,*} \neq 0$$

On appelle N' la matrice M' privée de ces lignes nulles. On raisonne par induction sur N' et δ'

Terminaison(I)

On appel $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ le monoïde libre engendré par l'ensemble $\mathbb{N}$, les éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ sont 0 et les sommes formelles suivante :

$$\Sigma a_i\{b_i\}$$

avec $a_i, b_i \neq 0$ et si $i \neq j$ alors $b_i \neq b_j$

Terminaison(I)

On appel $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ le monoïde libre engendré par l'ensemble $\mathbb{N}$, les éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ sont 0 et les sommes formelles suivante :

$$\Sigma a_i\{b_i\}$$
$$\text{avec } a_i, b_i \neq 0 \text{ et si } i \neq j \text{ alors } b_i \neq b_j$$

On munit $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ de l'ordre suivant sur les monômes :

$$a\{b\} < c\{d\} \text{ si } b < d \text{ ou } b = d \text{ et } a < c\,;$$

Terminaison(I)

On appel $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ le monoïde libre engendré par l'ensemble $\mathbb{N}$, les éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ sont 0 et les sommes formelles suivante :

$$\Sigma a_i\{b_i\}$$
$$\text{avec } a_i, b_i \neq 0 \text{ et si } i \neq j \text{ alors } b_i \neq b_j$$

On munit $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ de l'ordre suivant sur les monômes :

$$a\{b\} < c\{d\} \text{ si } b < d \text{ ou } b = d \text{ et } a < c\,;$$

Soit $e, f \in \mathcal{O}(\mathbb{N})$ tel que $e \neq f$. On appelle g le plus grand monôme sur lequel e et f diffèrent.

- si g appartient à e alors $e > f$
- si g appartient à f alors $e < f$

Terminaison(II)

Soit $\delta : p \to q$ un diagramme on définit alors les trois fonctions suivantes :

- $\overline{\delta} : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^q$
- $\underline{\delta} : \mathbb{N}^q \to \mathbb{N}^p$
- $[\delta] : \mathbb{N}^{p+q} \to \mathcal{O}(\mathbb{N})$

de la manière suivante :

Terminaison(II)

Soit $\delta : p \to q$ un diagramme on définit alors les trois fonctions suivantes :

- $\overline{\delta} : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^q$
- $\underline{\delta} : \mathbb{N}^q \to \mathbb{N}^p$
- $[\delta] : \mathbb{N}^{p+q} \to \mathcal{O}(\mathbb{N})$

de la manière suivante :

$$\overline{\phi \otimes \psi}(\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2}) = \overline{\phi}(\overrightarrow{e_1}) \otimes \overline{\psi}(\overrightarrow{e_2})$$

Terminaison(II)

Soit $\delta : p \rightarrow q$ un diagramme on définit alors les trois fonctions suivantes :

- $\overline{\delta} : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}^q$
- $\underline{\delta} : \mathbb{N}^q \rightarrow \mathbb{N}^p$
- $[\delta] : \mathbb{N}^{p+q} \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{N})$

de la manière suivante :

$$\overline{\phi \otimes \psi}(\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2}) = \overline{\phi}(\overrightarrow{e_1}) \otimes \overline{\psi}(\overrightarrow{e_2})$$
$$\underline{\phi \otimes \psi}(\overrightarrow{s_1} \otimes \overrightarrow{s_2}) = \underline{\phi}(\overrightarrow{s_1}) \otimes \underline{\psi}(\overrightarrow{s_2})$$

Terminaison(II)

Soit $\delta : p \to q$ un diagramme on définit alors les trois fonctions suivantes :

- $\overline{\delta} : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^q$
- $\underline{\delta} : \mathbb{N}^q \to \mathbb{N}^p$
- $[\delta] : \mathbb{N}^{p+q} \to \mathcal{O}(\mathbb{N})$

de la manière suivante :

$$\begin{gathered}
\overline{\phi \otimes \psi}(\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2}) = \overline{\phi}(\overrightarrow{e_1}) \otimes \overline{\psi}(\overrightarrow{e_2}) \\
\underline{\phi \otimes \psi}(\overrightarrow{s_1} \otimes \overrightarrow{s_2}) = \underline{\phi}(\overrightarrow{s_1}) \otimes \underline{\psi}(\overrightarrow{s_2}) \\
[\phi \otimes \psi](\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{s_1} \otimes \overrightarrow{s_2}) = [\phi](\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{s_1}) + [\psi](\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{s_2})
\end{gathered}$$

Terminaison(II)

Soit $\delta : p \to q$ un diagramme on définit alors les trois fonctions suivantes :

- $\overline{\delta} : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^q$
- $\underline{\delta} : \mathbb{N}^q \to \mathbb{N}^p$
- $[\delta] : \mathbb{N}^{p+q} \to \mathcal{O}(\mathbb{N})$

de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\overline{\phi \otimes \psi}(\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2}) &= \overline{\phi}(\overrightarrow{e_1}) \otimes \overline{\psi}(\overrightarrow{e_2}) \\
\underline{\phi \otimes \psi}(\overrightarrow{s_1} \otimes \overrightarrow{s_2}) &= \underline{\phi}(\overrightarrow{s_1}) \otimes \underline{\psi}(\overrightarrow{s_2}) \\
[\phi \otimes \psi](\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{s_1} \otimes \overrightarrow{s_2}) &= [\phi](\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{s_1}) + [\psi](\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{s_2})
\end{aligned}$$

$$\overline{\phi \circ \psi}(\overrightarrow{e}) = \overline{\phi}(\overline{\psi}(\overrightarrow{e}))$$

Terminaison(II)

Soit $\delta : p \rightarrow q$ un diagramme on définit alors les trois fonctions suivantes :

- $\overline{\delta} : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}^q$
- $\underline{\delta} : \mathbb{N}^q \longrightarrow \mathbb{N}^p$
- $[\delta] : \mathbb{N}^{p+q} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{N})$

de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\overline{\phi \otimes \psi}(\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2}) &= \overline{\phi}(\overrightarrow{e_1}) \otimes \overline{\psi}(\overrightarrow{e_2}) \\
\underline{\phi \otimes \psi}(\overrightarrow{s_1} \otimes \overrightarrow{s_2}) &= \underline{\phi}(\overrightarrow{s_1}) \otimes \underline{\psi}(\overrightarrow{s_2}) \\
[\phi \otimes \psi](\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{s_1} \otimes \overrightarrow{s_2}) &= [\phi](\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{s_1}) + [\psi](\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{s_2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\phi \circ \psi}(\overrightarrow{e}) &= \overline{\phi}(\overline{\psi}(\overrightarrow{e})) \\
\underline{\phi \circ \psi}(\overrightarrow{s}) &= \underline{\psi}(\underline{\phi}(\overrightarrow{s}))
\end{aligned}$$

Terminaison(II)

Soit $\delta : p \to q$ un diagramme on définit alors les trois fonctions suivantes :

- $\overline{\delta} : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^q$
- $\underline{\delta} : \mathbb{N}^q \to \mathbb{N}^p$
- $[\delta] : \mathbb{N}^{p+q} \to \mathcal{O}(\mathbb{N})$

de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
\overline{\phi \otimes \psi}(\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2}) &= \overline{\phi}(\overrightarrow{e_1}) \otimes \overline{\psi}(\overrightarrow{e_2}) \\
\underline{\phi \otimes \psi}(\overrightarrow{s_1} \otimes \overrightarrow{s_2}) &= \underline{\phi}(\overrightarrow{s_1}) \otimes \underline{\psi}(\overrightarrow{s_2}) \\
[\phi \otimes \psi](\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{s_1} \otimes \overrightarrow{s_2}) &= [\phi](\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{s_1}) + [\psi](\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{s_2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\phi \circ \psi}(\overrightarrow{e}) &= \overline{\phi}(\overline{\psi}(\overrightarrow{e})) \\
\underline{\phi \circ \psi}(\overrightarrow{s}) &= \underline{\psi}(\underline{\phi}(\overrightarrow{s})) \\
[\phi \circ \psi](\overrightarrow{e}, \overrightarrow{s}) &= [\phi](\overrightarrow{e}, \underline{\psi}(\overrightarrow{s})) + [\psi](\overline{\phi}(\overrightarrow{e}), \overrightarrow{s})
\end{aligned}
$$

Terminaison(III)

$\overline{\chi_a}(e_1 \otimes e_2) = (2e_1 + e_2) \otimes e_2$ $\underline{\chi_a}(s_1 \otimes s_2) = (2s_1 + s_2) \otimes s_2$ $[\chi_a](e_1 \otimes e_2, s_1 \otimes s_2) = \{e_1\} + \{s_1\}$	$\overline{\mu_a}(e) = 2e$ $\underline{\mu_a}(s) = 2s$ $[\mu_a](e, s) = \{e\} + \{s\}$
$\overline{\sigma_a}(e_1 \otimes e_2) = 2e_1 + e_2$ $\underline{\sigma_a}(s) = 2s \otimes s$ $[\sigma_a](e_1 \otimes e_2, s) = \{e_1\} + \{s\}$	$\overline{\eta}() = 1$ $\underline{\eta}(s) = ()$ $[\eta](s) = \{s\}$
$\overline{\sigma^*_a}(e) = 2e \otimes e$ $\underline{\sigma^*_a}(s_1 \otimes s_2) = 2e_1 + e_2$ $[\sigma^*_a] : 1(e, s_1 \otimes s_2) = \{e\} + \{s_1\}$	$\overline{\eta^*}(e) = ()$ $\underline{\eta^*}() = 1$ $[\eta^*](e) = \{e\}$

Terminaison(IV)

Théorème (Yves Guiraud) :
le système vérifie la propriété de terminaison si :

- les fonctions $\overline{\phi}, \underline{\phi}, [\phi]$ sont croissantes ;

Terminaison(IV)

Théorème (Yves Guiraud) :
le système vérifie la propriété de terminaison si :

- les fonctions $\overline{\phi}, \underline{\phi}, [\phi]$ sont croissantes ;
- et pour toutes les règles on à : $\overline{\gamma} \geq \overline{\delta}, \underline{\gamma} \geq \underline{\delta}, [\gamma] > [\delta]$ où γ est le membre gauche et δ est le membre droit.