Réseaux d'interaction

Olivier Laurent
olivier.laurent@ens-lyon.fr

cours M2 ENS Lyon

1 Formalisme

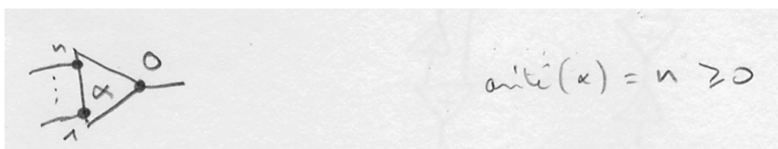
1.1 Statique

On suppose fixé un ensemble de *noms/symboles* de cellules avec pour chacun une arité ($n \geq 0$).

Un *réseau d'interaction* est donné par :

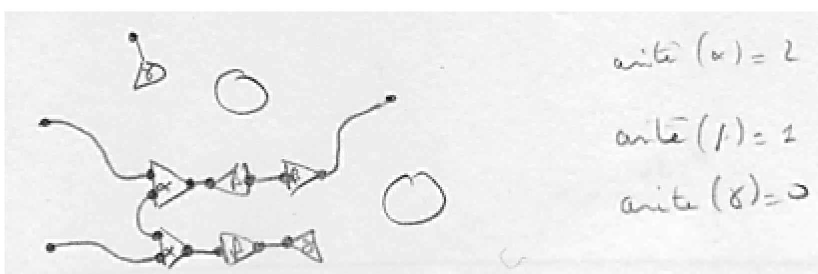
- un ensemble de cellules (avec leur symbole),
- un ensemble de ports *libres*.

Les *ports* du réseaux sont $n+1$ ports pour chaque cellule dont l'arité (associée au symbole) est n, plus les ports libres.



Attention, les ports de chaque cellule sont numérotés : 0 est le port *principal*, puis 1, 2, ..., n (l'ordre est fixé et important) sont les ports *auxiliaires*.

On donne également un ensemble de fils qui forment une pseudo-partition (*i.e.* on autorise des ensembles vides) des ports en paquets de 2 ou de 0. Les paquets vides sont les *boucles*.



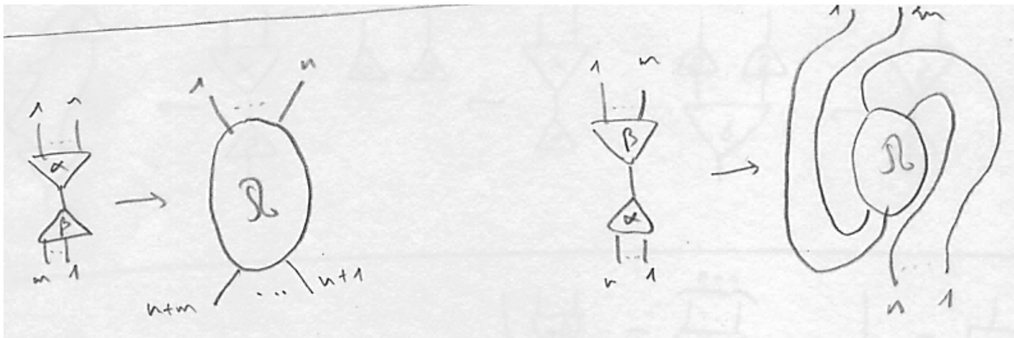
1.2 Dynamique

Une *règle d'interaction* est la donnée de deux symboles de cellules d'arités n et m et d'un réseau d'interaction ayant $n+m$ ports libres (ordonnés).

Un *système d'interaction* est donné par :

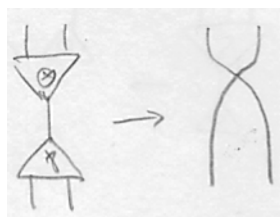
- un ensemble de symboles de cellules avec leur arité,
- au plus une règle d'interaction par couple (α, β) de symboles de cellules.

De manière à ce que si $\mathcal{R}$ est le réseau obtenu par application de la règle associée à (α, β), alors on a aussi la règle $(\beta, \alpha) \mapsto \mathcal{R}'$ (où $\mathcal{R}'$ est obtenu à partir de $\mathcal{R}$ en effectuant la permutation appropriée des ports). Ceci implique une symétrie du réseau obtenu pour une règle (α, α).



1.3 Les réseaux multiplicatifs

Les structures de preuve multiplicatives peuvent être représentées comme des réseaux d'interaction. Les liens axiomes et coupures deviennent des fils. On utilise pour cela 2 symboles $\otimes$ et $\parr$ d'arité 2, avec comme règle d'interaction :

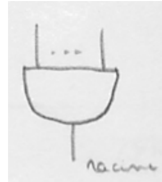


1.4 Zoologie

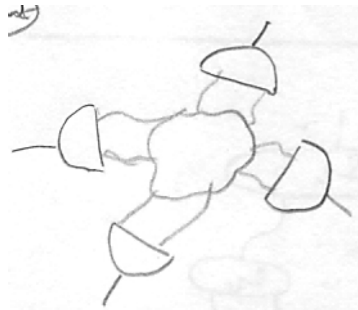
On introduit un peu de terminologie :

- Un fil qui connecte deux ports principaux de cellules est une *coupure*.
- Un fil qui connecte deux ports dont aucun n'est un port principal de cellule (*i.e.* ce sont des ports libres ou des ports auxiliaires) est un *axiome*.
- Une coupure est *réductible* s'il existe une règle d'interaction associée aux deux symboles des cellules connectées à la coupure. Elle est *irréductible* sinon.
- Un *chemin* est une suite de ports telle que deux ports consécutifs appartiennent à la même cellule ou au même fil (et où ces deux cas alternent).
- Un *cycle vicieux* est un chemin fermé qui alterne port auxiliaire de cellule et port principal de cellule. On considère une boucle comme un cercle vicieux de longueur 0.
- Un réseau est *réduit* s'il ne contient ni coupure ni cycle vicieux.
- Un système d'interaction est *complet* s'il existe une règle d'interaction pour tout couple de symboles. Dans un tel système d'interaction, il n'y a pas de coupure irréductible.
- Un *câblage* est un réseau d'interaction ne contenant que des fils (pas de cellule).
- On définit par induction les réseaux d'interaction avec un port distingué qu'on appelle *arbres* (le port distingué est appelé *racine*, et les autres : *ports auxiliaires* de l'arbre) :
  - un fil avec un port distingué est un arbre ;
  - en connectant les racines de n arbres aux ports auxiliaires d'une cellule d'arité n, on obtient un arbre dont la racine est le port principal de la nouvelle cellule.

  On les représente sous la forme :



Lemme 1 (Structure des réseaux réduits)**.** *Un réseau réduit se décompose en une famille d'arbres connectés par un câblage (sans boucle), les racines des arbres sont connectées à des ports libres du réseau :*



Démonstration. Par récurrence sur le nombre de cellules dans le réseau. S'il n'y en a pas, le résultat est immédiat. S'il y en a une, on montre qu'il y en a une dont le port principal est connecté à un port libre. En effet, on part d'une cellule quelconque, soit son port principal est connecté à un port libre et on a terminé, soit il est connecté à un port auxiliaire d'une cellule (pas à un port principal de cellule puisque le réseau est sans coupure) et on peut construire un chemin en continuant à partir du port principal de la cellule en question. On obtient un chemin qui alterne port principal et port auxiliaire de cellule. En prolongeant un tel chemin on arrive nécessairement sur un port libre puisque le réseau est fini (sinon on construirait un cycle vicieux). On peut alors considérer une cellule dont le port principal est connecté à un port libre, retirer cette cellule du réseau, et appliquer l'hypothèse de récurrence. □

Quelques remarques :

- On « préfère » les règles dont le membre droit est un réseau réduit.
- La réduction d'un réseau sans cycle vicieux (resp. boucle) peut contenir des cycles vicieux (resp. boucles).
- La réduction d'un réseau avec cycle vicieux (resp. boucle) contient un cycle vicieux (resp. une boucle).
- La réduction d'un réseau avec coupure irréductible contient une coupure irréductible.

1.5 Typage

On suppose donné un ensemble de *types* muni d'un involution : $\overline{\overline{\tau}} = \tau$.

On associe à chaque port de chaque symbole un type. Un réseau est bien typé si deux ports connectés sont de types duaux. On peut associer des types aux fils *orientés* : si on oriente le fil $\{p, q\}$ de p vers q, il a le type de p.

Une règle d'interaction est bien typée si les ports principaux des symboles sont de types duaux, si les types des ports auxiliaires sont les mêmes que ceux des ports correspondants dans le membre droit, et si le membre droit est bien typé.

Appliquer une règle d'interaction à un réseau bien typé donne un réseau bien typé.

On peut alors demander à avoir une règle d'interaction définie pour chaque couple de symboles dont les ports principaux ont des types duaux. On parle alors de système d'interaction typé *complet.*

En généralisant un peu la notion de typage, on pourrait typer les réseaux d'interaction pour les structures de preuve multiplicatives à l'aide des formules de la logique linéaire multiplicative et obtenir un système d'interaction typé complet.

1.6 Confluence

Les systèmes d'interaction satisfont une propriété de confluence particulièrement forte :

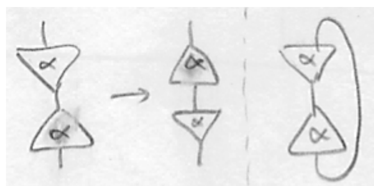
Théorème 1 (Propriété du diamant)**.** *Si un réseau d'interaction $\mathcal{R}$ se réduit en une étape en deux réseaux distincts $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ alors il existe un réseau $\mathcal{R}_0$ tel que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ se réduisent tous les deux en une étape en $\mathcal{R}_0$.*

Démonstration. Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont différents, ils sont obtenus en réduisant deux coupures différentes c_1 et c_2 de $\mathcal{R}$. Or c_2 est encore présente dans $\mathcal{R}_1$ et c_1 est encore présente dans $\mathcal{R}_2$. En réduisant c_2 dans $\mathcal{R}_1$ ou c_1 dans $\mathcal{R}_2$, on obtient le même réseau $\mathcal{R}_0$. □

En particulier toutes les réductions d'un réseau $\mathcal{R}$ à un réseau $\mathcal{R}'$ ont la même longueur.

1.7 Terminaison

Il existe des systèmes d'interaction dans lesquels il y a des suites infinies de réduction :



Lemme 2. *Dans tout système d'interaction, un réseau est faiblement normalisant (* i.e. *peut être réduit en un réseau sans coupure réductible) si et seulement si il est fortement normalisant (* i.e. *n'a que des suites de réductions finies).*

Démonstration. On montre, par récurrence sur n, que si $\mathcal{R}$ a une suite de réductions de longueur $n \geq 1$ ($\mathcal{R} \to \mathcal{R}_1 \to \cdots \to \mathcal{R}_n$) et si $\mathcal{R}$ se réduit en $\mathcal{R}'$, alors $\mathcal{R}'$ a une réduction de longueur $n-1$.

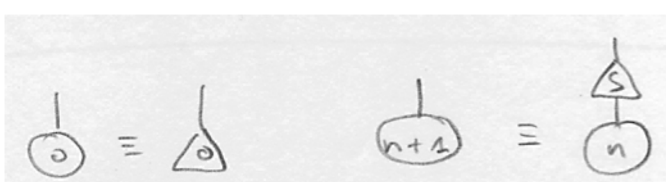
Si $n = 1$, le résultat est immédiat. Si $\mathcal{R}$ a une suite de réductions de longueur $n+1$, soit $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_1$ et le résultat est immédiat, soit $\mathcal{R}' \neq \mathcal{R}_1$ et, par le théorème 1, il existe un réseau $\mathcal{R}''$ tel que $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}''$ et $\mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}''$. Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{R}''$ a une suite de réductions de longueur $n-1$, donc $\mathcal{R}'$ a une suite de réductions de longueur n.

On en déduit que si $\mathcal{R}$ a une suite de réductions infinie alors tous les réduits de $\mathcal{R}$ également, et donc $\mathcal{R}$ ne peut pas se réduire en un réseau sans coupure réductible. □

2 Représentation des fonctions récursives

Il est possible de donner, pour chaque machine de Turing, un système d'interaction qui la représente. On va ici faire ce travail pour les fonctions récursives.

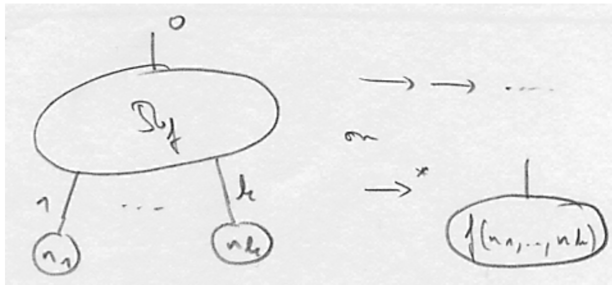
On considère le symbole O d'arité 0 et le symbole S d'arité 1. On peut représenter les entiers unaires par des arbres clos (*i.e.* sans ports auxiliaires) :



On pourrait alors s'intéresser aux différentes manières de représenter la fonction « successeur » (voir par exemple en section 2.3 avec S, en section 2.9 avec s, ou encore une version en temps linéaire de cette dernière, ...), et regarder comment les typer.

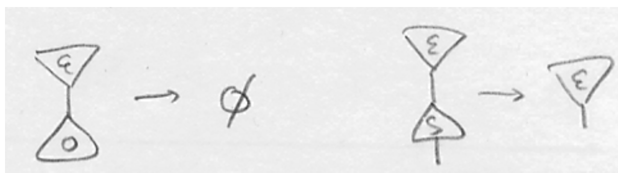
On va se concentrer sur le cas général des fonctions récursives.

Théorème 2 (Représentation)**.** *Pour toute (définition de) fonction récursive f d'arité k, il existe un système d'interaction fini contenant les symboles O (d'arité 0) et S (d'arité 1) et un réseau d'interaction $\mathcal{R}_f$ à $k+1$ ports libres (numérotés 0, 1, ..., k) tels que le réseau obtenu en connectant les représentations de n_1, ..., n_k sur les ports 1, ..., k de $\mathcal{R}_f$ a une réduction infinie si $f(n_1, \ldots, n_k)$ diverge, et se réduit en la représentation de n si $f(n_1, \ldots, n_k) = n$.*

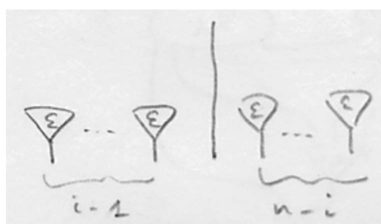


2.1 Projections

On se donne un symbole ε d'arité 0, avec comme règles :



La i^{e} projection d'arité k ($1 \leq i \leq k$) est représentée par :

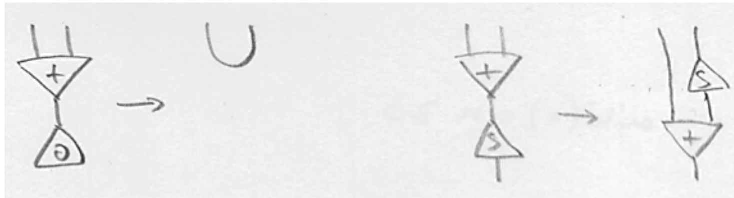


2.2 Zéro

2.3 Successeur

2.4 Somme

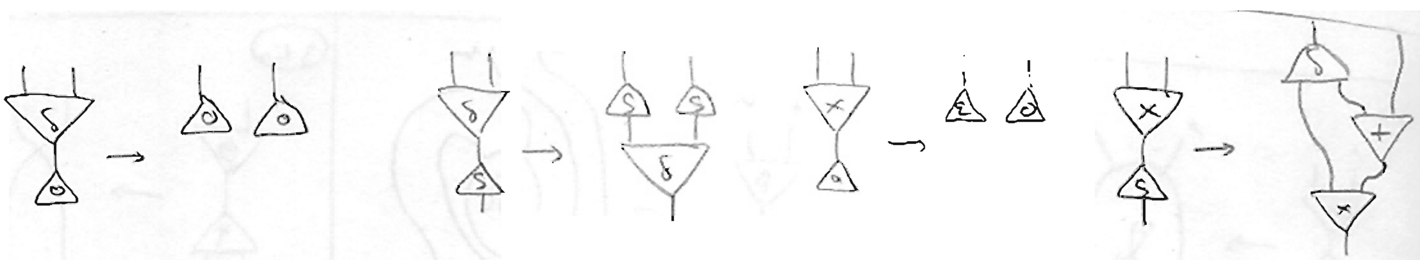
On se donne un symbole $+$ d'arité 2, avec comme règles :



La fonction $x, y \mapsto x + y$ est représentée par :

2.5 Produit

On se donne deux symboles δ et $\times$ d'arité 2, avec comme règles :



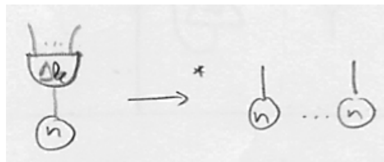
La fonction $x, y \mapsto x \times y$ est représentée par :

2.6 Composition

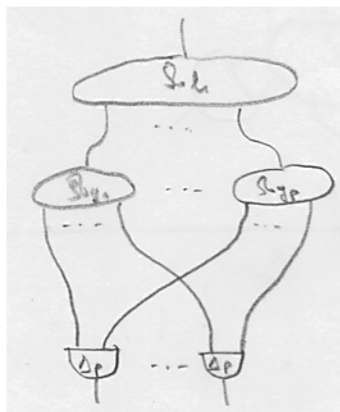
Si f d'arité k est obtenue par composition de h d'arité p et de g_1, ..., g_p d'arité k, on considère le système d'interaction obtenu en faisant l'union de ceux associés à h, g_1, ..., g_p. On vérifie, que les règles pour un symbole donné étant les mêmes dans les différents systèmes d'interaction considérés, l'union est encore un système d'interaction.

Si $n \geq 1$ est un entier, on définit le réseau Δ_n, qui est un arbre formé de cellules δ, par récurrence sur n :

Lemme 3 (Copie)**.** *Si n est un entier, on a la réduction :*

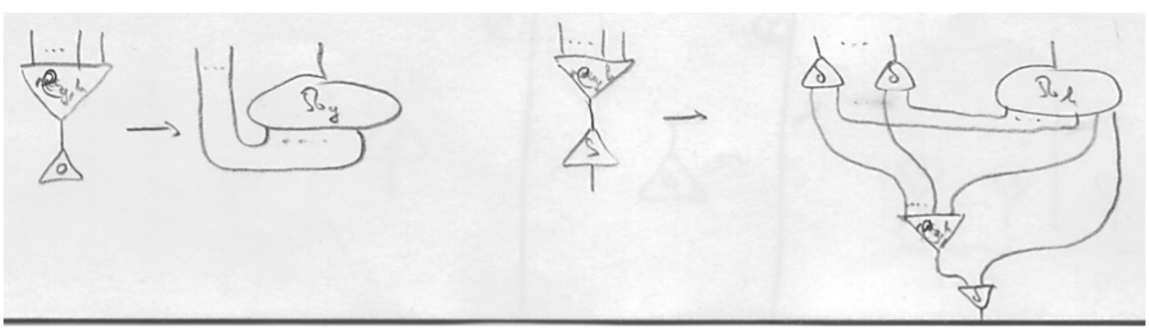


f est représentée par :



2.7 Récursion

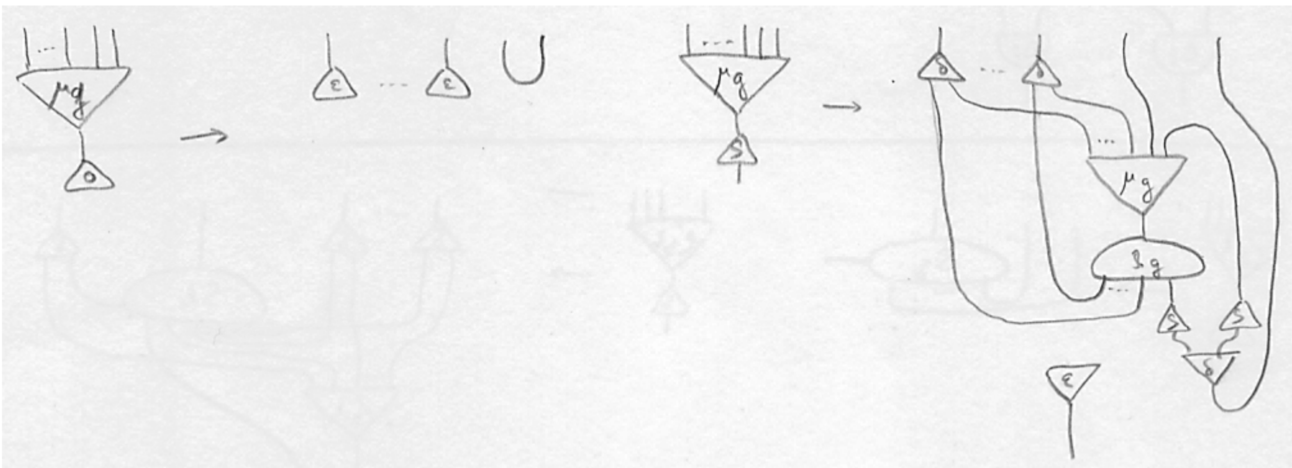
Si f d'arité $k+1$ est obtenue par définition récursive à partir de g d'arité k comme cas de base et de h d'arité $k+2$ comme étape inductive, on ajoute aux systèmes d'interaction associés à g et h, un symbole $\rho_{g,h}$ d'arité $k+1$, avec comme règles :



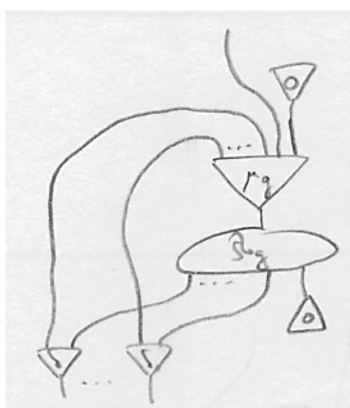
f est représentée par :

2.8 Minimisation

Si f d'arité k est obtenue par minimisation à partir de g d'arité $k+1$, on ajoute au système d'interaction associé à g, un symbole μ_g d'arité $k+2$, avec comme règles :



f est représentée par :

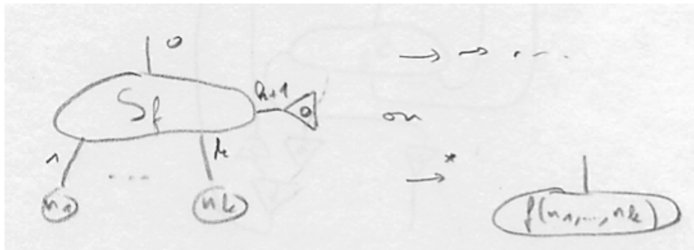


Attention, les règles d'interaction pour la minimisation peuvent avoir des membres droits qui ne sont pas des réseaux réduits. On va modifier la représentation des fonctions pour résoudre ce problème.

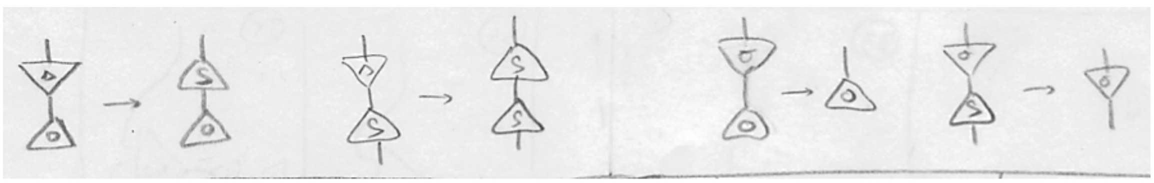
2.9 Raffinement

Nous allons modifier les systèmes d'interaction et la représentation des fonctions de manière à définir, pour toute fonction récursive f d'arité k, un réseau d'interaction *réduit* $\mathcal{S}_f$ à $k+2$ ports libres (numérotés 0, 1, ...,

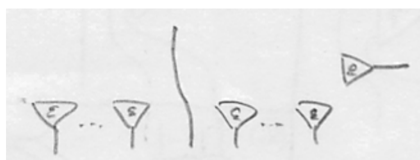
k, $k+1$) tel que le réseau obtenu en connectant les représentations de n_1, ..., n_k sur les ports 1, ..., k de $\mathcal{S}_f$ et la représentation de 0 sur le port $k+1$ a une réduction infinie si $f(n_1, \ldots, n_k)$ diverge, et se réduit en la représentation de n si $f(n_1, \ldots, n_k) = n$. De plus le port 0 de $\mathcal{S}_f$ ne sera jamais connecté au port principal d'une cellule dans $\mathcal{S}_f$.



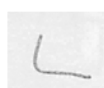
On se donne deux symboles s et o d'arité 1 avec comme règles :



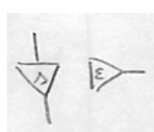
Le réseau associé à une projection est :



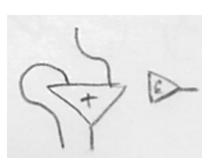
Le réseau associé à la constante 0 est :



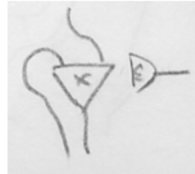
Le réseau associé à la fonction successeur est :



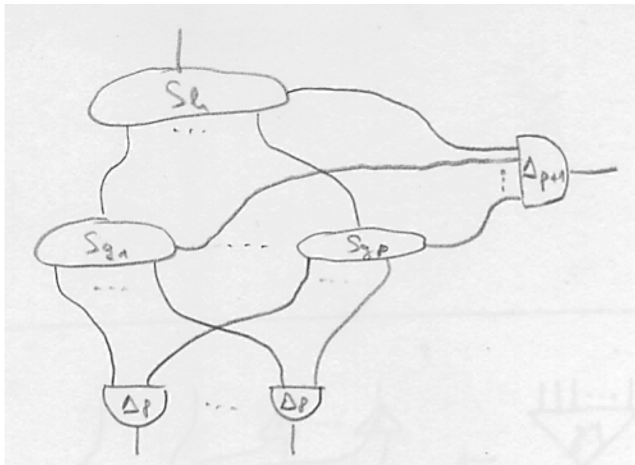
Le réseau associé à la fonction somme est :



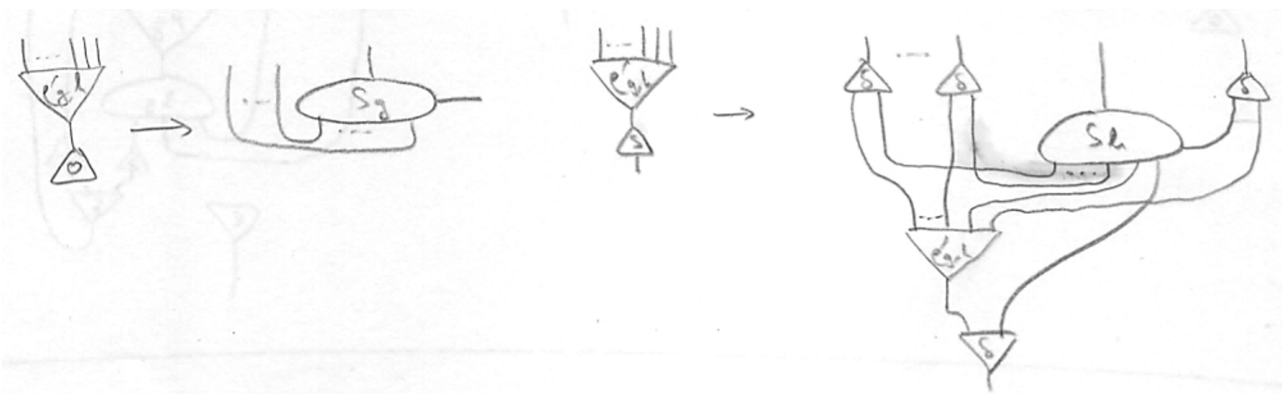
Le réseau associé à la fonction produit est :



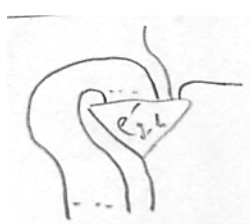
Le réseau utilisé pour la composition est :



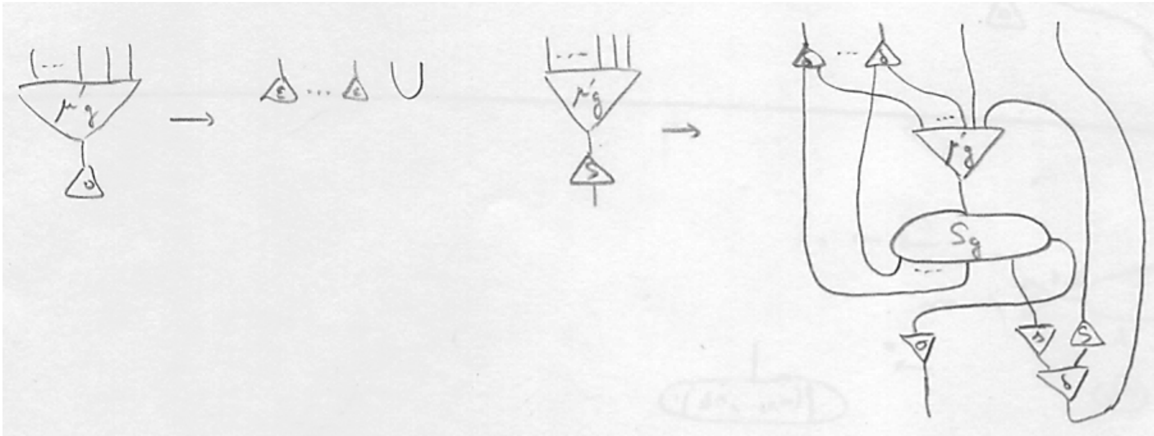
Pour la récursion, on considère un symbole $\rho'_{g,h}$ d'arité $k+2$, avec comme règles :



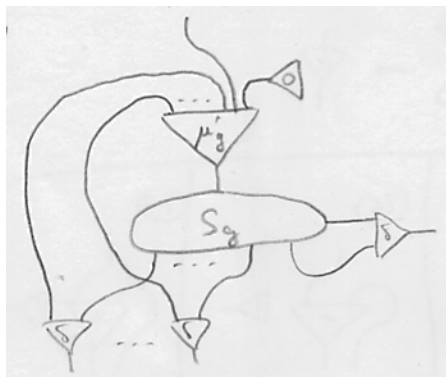
et le réseau associé à la récursion est :



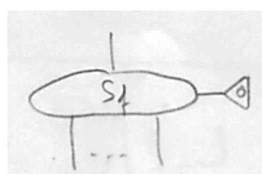
Pour la minimisation, on considère un symbole μ'_g d'arité $k+2$, avec comme règles :



et le réseau associé à la minimisation est :



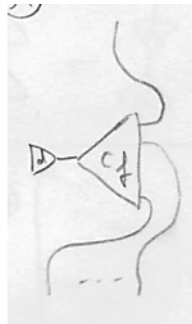
On obtient alors le théorème 2, en considérant pour $\mathcal{R}_f$ le réseau :



2.10 Discussion

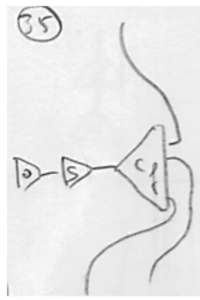
On peut essayer de renforcer le théorème 2.

- Est-il possible de construire $\mathcal{R}_f$ qui soit un réseau réduit ?
  NON, sinon pour une fonction f d'arité 0, $\mathcal{R}_f$ serait la représentation d'un entier et la fonction divergente d'arité 0 ne serait donc pas représentable.
- Est-il possible de construire $\mathcal{R}_f$ qui contienne un unique rédex entre une cellule c_f et une cellule d d'arité 0 ?

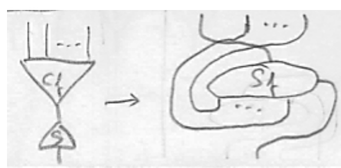


NON, sinon pour une fonction f d'arité 0, $\mathcal{R}_f$ serait le membre gauche d'une règle dont le membre droit serait un réseau réduit et on se ramène au cas précédent.

- Est-il possible de construire $\mathcal{R}_f$ qui contienne un unique rédex entre une cellule c_f et la représentation de l'entier 1 ?



OUI, avec comme unique règle pour c_f :

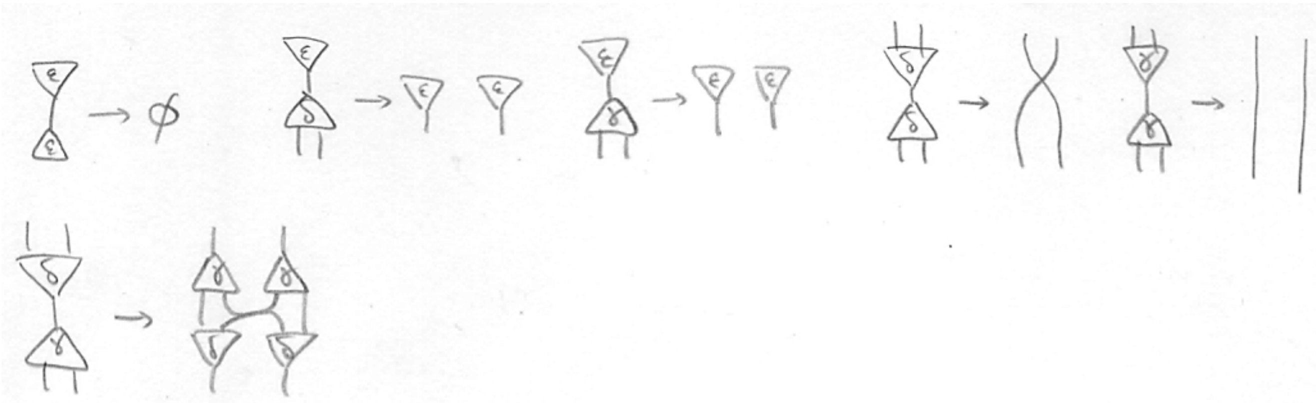


On peut typer les symboles que l'on a utilisés à l'aide de deux types $\{\texttt{nat}, \overline{\texttt{nat}}\}$ de manière à avoir un système d'interaction typé complet.

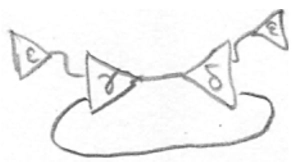
3 Combinateurs d'interaction

Les *combinateurs d'interaction* sont un système d'interaction complet particulier défini avec trois symboles : δ et γ d'arité 2 et ε d'arité 0.

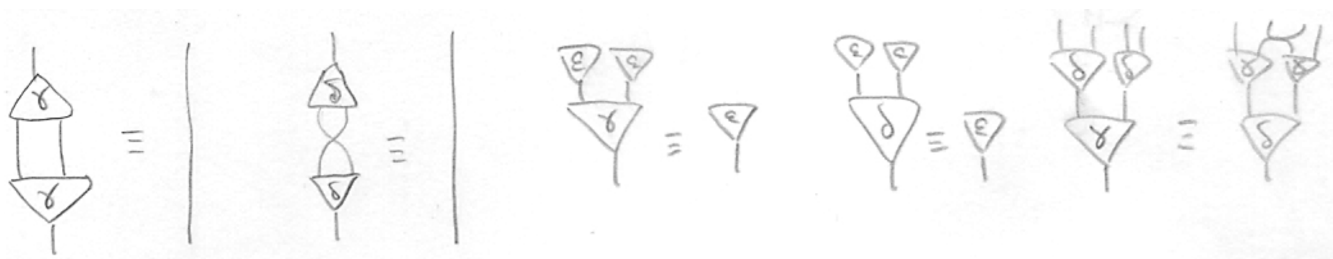
Les règles d'interaction sont :



Il existe des réseaux avec des suites de réductions infinies dans ce système :



On peut définir une notion d'équivalence observationnelle sur les réseaux d'interaction et montrer que les équivalences suivantes sont incluses dans l'équivalence observationnelle (ce sont des sortes d'η-règles).



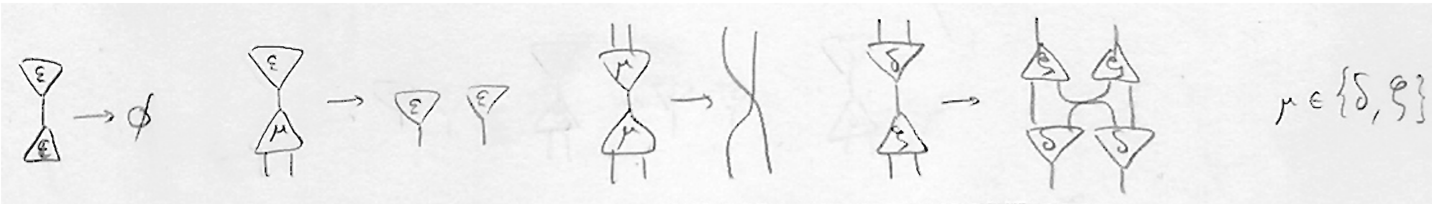
Un réseau réduit connexe ayant exactement un port libre connecté à un port principal est appelé un réseau *principal.* Un tel réseau est de la forme :

i.e. un arbre dont les ports auxiliaires sont soit connectés entre eux soit connectés à des ports libres. On appelle *arité* d'un réseau principal son nombre de ports libres moins 1.

Une traduction Φ d'un système d'interaction $\mathcal{S}$ dans un système d'interaction $\mathcal{S}'$ est obtenue en associant, à chaque symbole α de $\mathcal{S}$, un réseau principal $\Phi(\alpha)$ de $\mathcal{S}'$ de même arité. La traduction d'un réseau de $\mathcal{S}$ est alors obtenue en substituant chaque cellule de symbole α par $\Phi(\alpha)$. On demande alors que si $\mathcal{S}$ contient une règle pour le couple (α, β), le réseau obtenu en connectant $\Phi(\alpha)$ et $\Phi(\beta)$ par leurs ports principaux se réduise (en un nombre arbitraire d'étapes) en la traduction du membre droit.

Théorème 3 (Universalité)**.** *Tout système d'interaction admet une traduction dans le système des combinateurs d'interaction.*

Le système des combinateurs symétriques est lui-aussi Turing complet mais ne satisfait pas le théorème d'universalité. Il est défini avec trois symboles : δ et ζ d'arité 2 et ε d'arité 0, et comme règles :



Références

[Laf90] Yves Lafont. Interaction nets. In *Proceedings of the 1990 Principles of Programming Languages Conference*, pages 95–108. IEEE, IEEE Computer Society Press, 1990.

[Laf97] Yves Lafont. Interaction combinators. *Information and Computation*, 137(1):69–101, 1997.

[Lip02] Sylvain Lippi. *Théorie et pratique des réseaux d'interaction.* Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, June 2002.

[Maz06] Damiano Mazza. *Interaction Nets: Semantics and Concurrent Extensions.* Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II / Università degli Studi Roma Tre, 2006.