Problèmes d'évaluation et dénombrement sur graphes

Thibaut BALABONSKI

24 Novembre 2006

1 Introduction

J'étudie ici l'article [2]. C'est un document dense qui fourmille de résultats de types très différents sur les graphes, je centrerai ici mon développement sur les aspects concernant la complexité algébrique : je partirai de ses applications en prise directe avec le cours pour explorer la théorie générale présentée par les auteurs, en explicitant certains des points qui font appel à des notions et références exterieures, de la justification de certaines petites propriétés "folkloriques" à la démonstration du résultat principal. Les autres applications et discussions de l'article seront présentées brièvement à titre d'annexes dans une dernière partie.

2 Fonctions génératrices

On va introduire une forme générale de fonction dénombrant les occurences d'une propriété donnée (comme un chemin hamiltonien) dans un graphe, ou la somme des poids de ces occurences pour un graphe à arêtes pondérées.

Une fonction génératrice est construite à partir de plusieurs paramètres :
- Un graphe $G = \langle V, E \rangle$, à n sommets.
- Une classe de graphes $\mathcal{E}$ close par isomorphisme.

On définit alors ainsi la fonction génératrice associée à ces paramètres, d'argument ω :

$$GF(G, \mathcal{E}) : \omega \longmapsto \sum \left\{ \Omega(E') : \left\langle V, E' \right\rangle \in \mathcal{E} \ et\ E' \subseteq E \right\}$$

où $\Omega(E') = \prod_{e \in E'} \omega(e)$ pour tout sous ensemble E' de E. (Ω extension de ω aux ensembles d'arêtes, qu'on notera encore ω par la suite)

ω peut être interprêté de plusieurs façons :

- C'est avant tout une fonction de pondération de E dans un corps $\mathbb{K}$
- Mais aussi :
  - Un sous-graphe pondéré de G (un poids 0 équivaut à une arête inexistante)
  - Une matrice carrée de dimension $n \times n$ (matrice d'adjacence !)
  - Un ensemble de n^2 indéterminées ($GF(G, \mathcal{E})$ devient alors un polynôme à plusieurs indéterminées)

C'est sur ce dernier point de vue que nous nous arrêterons, qui permet de se pencher sur la complexité algébrique des fonctions génératrices.

Exemples Commençons par citer quelques familles de fonctions VNP-complètes : (K_n dénote le graphe complet à n sommets)

- $GF(K_n, \mathcal{E}_{cpar})$ où $\mathcal{E}_{cpar}$ est la classe des couplages parfaits. (permanent)
- $GF(K_n, \mathcal{E}_{cham})$ où $\mathcal{E}_{cham}$ est la classe des n-cycles. (hamiltonien)
- $GF(K_n, \mathcal{E}_{clique})$ où $\mathcal{E}_{clique}$ est la classe des cliques.
- $GF(K_n, \mathcal{FA}(F))$ où $\mathcal{FA}(F)$ est la classe des graphes dont toutes les composantes connexes sont isomorphes à F (*ie* l'ensemble des unions disjointes de graphes isomorphes à F)

La suite va consister en la restriction des paramètres, pour l'obtention de fonctions génératrices dans VP. On vise plus particulièrement le théorème suivant, dont on explicitera le sens dans la section suivante :

Si $\mathcal{E}$ est définissable dans la logique MS_2 et si G_n est une famille de graphes de taille n et de largeur arborescente bornée, alors la famille $GF(G_n, \mathcal{E})$ est dans VP.

3 Notions

Cette section est consacrée à la définition des notions indispensables à la compréhension du théorème : la définition de classes de graphes par des formules logiques du second ordre, et l'évaluation de "complexité" d'un graphe qu'est la largeur arborescente.

3.1 Propriétés de graphes expressibles en logique du second ordre

On s'intéressera plus particulièrement à la logique monadique du second ordre (les variables du second ordre - des relations dans le cas général - sont limitées à l'arité 1, on les assimile à des ensembles), dont on va voir deux variantes sur les graphes.

Structures On considère un graphe $G = \langle V, E \rangle$ comme un structure relationnelle $\mathfrak{S}(G)$ sur un univers $\mathfrak{U}$:

- Logique MS_1 : $\mathfrak{U} = V$, muni d'une relation R_E pour les arètes ($R_E(u, v)$ *ssi* $(u, v) \in E$)
- Logique MS_2 : $\mathfrak{U} = V \cup E$, muni d'une relation (typée !) d'incidence R_i ($R_i(u, e)$ *ssi* $\exists v,\ e = (u, v)$) (dans le cas de graphes orientés, on utilise deux relations d'incidence : une "source" et une "objectif")

On a en plus de cela, dans chaque cas, un nombre fini de prédicats unaires (équivalents à autant de sous-ensembles de $\mathfrak{U}$, qu'on peut comprendre aussi comme des constantes du second ordre) et de constantes de $\mathfrak{U}$.

La première remarque à faire sur ces deux logiques est que la seconde est strictement plus expressive que la première. En effet, R_E est exprimable dans MS_2 : $R_E(u, v)$ *ssi* $\exists e,\ R_i(u, e) \wedge R_i(v, e)$. De plus, il existe des propriétés sur les graphes exprimables dans MS_2 mais pas dans MS_1, par exemple l'appartenance à $\mathcal{E}_{cpar}$.

Logique MSO Les formules de la logique monadique du second ordre se définissent ainsi :

- Les propositions atomiques sont l'application de prédicats.
- Pour ϕ et ψ deux formules, $\neg\phi$ et $\phi \vee \psi$ sont des formules.
- Pour ϕ une formule, x et X des variables du premier et second ordre (dénotant donc des éléments ou des parties de $\mathfrak{U}$), $\exists x\, \phi$ et $\exists X\, \phi$ sont des formules.

Classes de graphes associées Une formule ϕ de la logique monadique du second ordre (MS_1 ou MS_2) va définir une classe de graphes :

$$\mathcal{C}(\phi) \equiv \{G\ :\ \mathfrak{S}(G) \models \phi\}$$

où on écrit $\mathfrak{S} \models \phi$ si la formule ϕ est vraie dans la structure $\mathfrak{S}$. Intuitivement $\mathcal{C}(\phi)$ est l'ensemble des graphes vérifiant la propriété ϕ.

3.2 Largeur arborescente d'un graphe

La notion de largeur arborescente mesure la ressemblance à un arbre d'un graphe donné (on peut voir un graphe compliqué comme une très simple structure d'arbre, "épaissie" par des arêtes supplémentaires). Il s'agit de l'épaisseur minimale d'une décomposition en arbre du graphe.

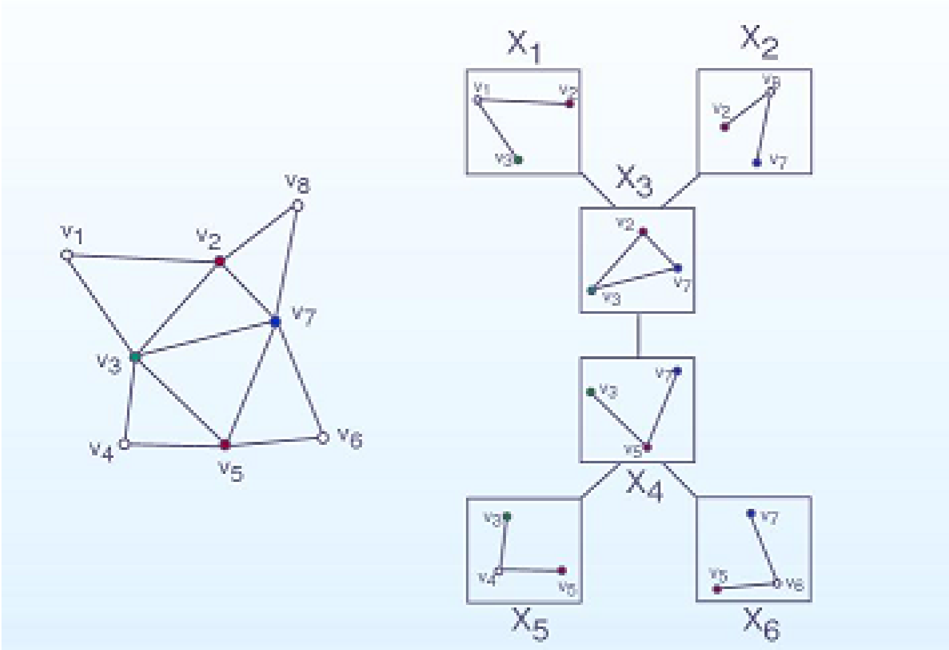
Décomposition en arbre Soit $G = \langle V, E \rangle$ un graphe. Une décomposition en arbre de G est un arbre $\langle (X_i,\ i \in I), F \rangle$ où les X_i sont des parties de G vérifiant :

- $\bigcup_{i \in I} X_i = V$

– $\forall u, v \in E$, $\exists i \in I \ : \ u, w \in X_i$
– $\forall i, j, k \in I$ Si j est sur le chemin de i à k (dans T), alors $X_i \cap X_k \subseteq X_j$

L'épaisseur d'une telle décomposition est $max_{i \in I} \left(|X_i| - 1\right)$

La largeur arborescente de G est le minimum des épaisseurs de ses décompositions en arbre. (on remarquera que $\langle V, \emptyset \rangle$ est une décomposition triviale de G, d'épaisseur $|V| - 1$)



4 Notions abordées dans la démonstration du théorème

Je vais dans cette partie aborder les notions utilisées dans la preuve du théorème principal de l'article que j'étudie, dont le théorème sur les fonctions génératrices de la section 2 se déduit. Ceci concerne les formules de Hintikka, les décompositions de graphes selon certaines opération structurelles et le théorème de Ferferman-Vaught sur les sommes disjointes de structures. Je donnerai ensuite les étapes de la démonstration.

4.1 Formules de Hintikka

Rang de quantification Le rang de quantification d'une formule logique est le nombre maximum de quantificateurs imbriqués qu'elle comporte. On le définit formellement ainsi (a désigne une formule atomique, *ie* l'application d'un prédicat, et ϕ et ψ des formules quelconques)
– $qr(a) = 0$

- $qr(\neg\phi) = qr(\phi)$
- $qr(\phi \vee \psi) = max(qr(\phi), qr(\psi))$
- $qr(\exists x\, \phi) = qr(\exists X\, \phi) = qr(\phi) + 1$

On note $MS_i^l(\vec{x}, \vec{X})$ l'ensemble des formules de MS_i de rang de quantification au plus l, dont les variables libres forment les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{X}$.

Formules de Hintikka On définit les ensembles $H_i^l(\vec{x}, \vec{X})$ des formules de Hintikka de la manière suivante :

$$h \in H_i^l(\vec{x}, \vec{X}) \quad ssi \quad \begin{cases} h \in MS_i^l(\vec{x}, \vec{X}) \\ h \text{ est satisfaisable} \\ \forall \phi \in MS_i^l(\vec{x}, \vec{X}), \\ \quad h \wedge \phi \text{ est} \quad \text{soit non satisfaisable} \\ \qquad\qquad\qquad \text{soit équivalente à } h \end{cases}$$

Premières propriétés Deux formules de Hintikka distinctes sont incompatibles.

$$\forall h_1, h_2 \in H_i^l(\vec{x}, \vec{X}), (h_1 \neq h_2 \rightarrow h_1 \wedge h_2 \equiv false)$$

Toute formule est disjonction de formules de Hintikka.

$$\forall \phi \in MS_i^l(\vec{x}, \vec{X}), (\exists I \subseteq H_i^l(\vec{x}, \vec{X}), (\phi \equiv \bigvee_{h \in I} h))$$

4.2 Décomposition de graphes

On considère des graphes k-colorés (chaque sommet se voit attribuer une unique couleur parmi k), sur lesquels on définit plusieurs opérations permettant de combiner des graphes. Notation standard $G = \langle V, E, V_1, \cdots, V_k \rangle$ où V_i est l'ensemble des sommets de la i^{eme} couleur, et donc où les V_i forment une partition de V.

Union disjointe ($\oplus$) On colle deux graphes côte à côte.

$$G \oplus G' = \left\langle V \cup V', E \cup E', V_i \cup V_i' \right\rangle$$

Recoloriage ($\rho_{i\to j}$) Tous les sommets de couleur i prennent la couleur j.

$$\rho_{i\to j}(G) = \left\langle V, E, V_1, \cdots, V_i' = \emptyset, \cdots, V_j' = V_i \cup V_j, \cdots, V_n \right\rangle = G'$$

Fusion ($Fusion_i$) Tous les sommets de couleur i sont fusionnés en un seul, qui collecte toutes les arêtes. En posant $G' = Fusion_i(G)$, v_i un sommet neuf (hors de V), et en assimilant pour E' une arête à un élément de V^2 :

- $V' = (V \setminus V_i) \cup \{v_i\}$
- $V_i' = \{v_i\}$ et $\forall j \neq i,\, V_j' = V_j$
- $E' = \left(E \cap V'^2\right) \cup \{(u, v_i),\, \exists v \in V_i,\, (u, v) \in E\} \cup \{(v_i, u),\, \exists v \in V_i,\, (v, u) \in E\}$

Connexion croisée ($\eta_{i\to j}$) Tous les sommets de couleur i sont liés à tous les sommets de couleur j. On pose toujours $G' = \eta_{i\to j}(G)$ et on a la définition formelle :

- $V' = V$
- $\forall i,\ V'_i = V_i$
- $E' = E \cup \{(u, v),\ u \in V_i \ et\ v \in V_j\}$

Largeurs Les auteurs ont prouvé dans un article ultérieur [1] que les graphes de largeur arborescente au plus k étaient la clôture par union disjointe, recoloriage et fusion des graphes $k+1$-colorés à au plus $k+1$ sommets, ce qui rendra mon dévoleppement plus direct.

La clôture des graphes k-colorés à un sommet par union disjointe, recoloriage et connexion croisée, donne quant à elle la classe des graphes de largeur de clique au plus k, propriété qu'on discutera dans la dernière section.

4.3 Théorème de Feferman-Vaught

Ce théorème concerne les unions disjointes de graphes. On considère donc dans cette partie un graphe $G = G_1 \oplus G_2$, sa structure associée $\mathfrak{S}$(G) d'univers $\mathfrak{U}$ (on étend la notation aux indices 1 et 2), et on parlera de $MS_i^l(\vec{x}, \vec{y}, \vec{X})$ plutôt que de $MS_i^l(\vec{x}, \vec{X})$. (on fera correspondre dans les interprétations $\vec{x}$ à G_1 et $\vec{y}$ à G_2)

Interprétation On appelle interprétation une fonction des variables du premier ordre dans $\mathfrak{U}$.

Soit z une interprétation envoyant les x_i dans $\mathfrak{U}_1$ et les y_i dans $\mathfrak{U}_2$. On lui associe les interprétations z_1 et z_2 définies comme suit :

- $z_i(X_j) = z(X_j) \cap V_i$
- $z_i(x_j) = z(x_j)$ et $z_i(y_j) = z(y_j)$

Ainsi z_i est identique à z excepté qu'elle restreint l'interprétation des variables du second ordre à G_i.

Théroème (Feferman, Vaught et Shelah). Pour toute formule $\phi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{X}) \in MS_i^l(\vec{x}, \vec{y}, \vec{X})$ il existe un nombre fini de couples de formules de Hintikka $h_{1,\alpha}(\vec{x}, \vec{X}) \in H_i^l(\vec{x}, \vec{X}),\ h_{2,\alpha}(\vec{y}, \vec{X}) \in H_i^l(\vec{y}, \vec{X})$ telles que pour tout graphe $G = G_1 \oplus G_2$ et interprétation z comme ci-dessus :

$$G, z \models \phi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{X})$$

si et seulement si il existe α tel que

$$G_1, z_1 \models h_{1,\alpha}(\vec{x}, \vec{X}) \ et\ G_2, z_2 \models h_{2,\alpha}(\vec{y}, \vec{X})$$

Une preuve de ce théorème vient du lien entre les formules de Hintikka et les jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé. (les formules décrivent les positions gagnantes de ces jeux)

4.4 Étapes pour démontrer le théorème sur les fonctions génératrices

On exprime la fonction génératrice $GF(G, \mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est définissable par $\Psi(E')$ formule monadique du second ordre de rang de quantification au plus k, par

$$\sum_{\Psi(E') \wedge E' \subseteq E} \prod_{e \in E'} \omega(e)$$

Le mode d'emploi est ensuite le suivant :
- Construire l'ensemble des formules de Hintikka dont on aura besoin. Cette étape ne fait pas appel au graphe, mais uniquement à Ψ. C'est une étape très délicate.
- Pour toute formule monadique du second ordre de rang de quantification au plus k, déterminer la disjonction de formules de Hintikka équivalente. Même commentaire que précédemment.
- Regarder dans les yeux le graphe, on a besoin de sa décomposition. (pour un graphe dont on connaît la largeur arborescente, la décomposition est trouvable honnêtement)
- Calculer récursivement en suivant la décomposition.

La dernière étape est polynomiale, et on peut l'adapter afin de construire un circuit algébrique calculant la fonction génératrice. Le problème ainsi restreint est donc bien dans VP.

Entourloupe ? Remarquez l'admirable façon dont on a arrêté de parler ici du petit chiffre indiçant MS. La preuve de l'article se place dans le contexte MS_1 et ne s'inquiète pas de justifier précisément ce qui permet de passer à MS_2. Je profiterai de la discussion de la section suivante pour proposer une solution.

5 Discussion : largeur arborescente, largeur de clique

L'article étudié discute une autre évaluation de la complexité d'un graphe, la largeur de clique, qui n'est pas sans liens avec la largeur arborescente. Je vais dans cette dernière section présenter cette nouvelle notion et la comparer avec la première avant de revenir au point flou de la section précédente.

5.1 Largeur de clique

Définition La classe des graphes de largeur de clique au plus k s'obtient en utilisant les opérations précédemment définies d'union disjointe, de recoloriage et de connexion croisée à partir de sommets isolés, le tout dans un contexte où k couleurs sont utilisées.

On ne connaît pas comme pour la largeur arborescente d'autre description de ces classes pour k égal à 3 ou plus, mais on peut quand même remarquer que les cliques ont une largeur de clique égale à 2, et les arbres à 3.

En effet, donnons cet assemblage d'opérations (immédiatement extensible) pour construire une clique à 4 éléments. On note $i(v)$ le sommet isolé de couleur i.

$$\rho_{2\to 1}(\eta_{1\to 2}(2(y) \oplus \rho_{2\to 1}(\eta_{1\to 2}(2(x) \oplus \rho_{2\to 1}(\eta_{1\to 2}(2(w) \oplus 1(v))))))$$

5.2 Comparaison des largeurs

Largeur arborescente et largeur de clique peuvent se définir de façon analogue, on ne s'étonnera donc pas de trouver des relations entre les deux.

Comparaison brute On vient de voir que toute clique avait une largeur de clique au plus 2. Mais les cliques ont la largeur arborescente maximale parmi tous les graphes. (largeur de n pour une clique à $n+1$ sommets) Ainsi une classe de graphes de largeur de clique bornée n'est pas nécessairement de largeur arborescente bornée.

En revanche, un graphe de largeur arborescente k a une largeur de clique d'au plus $O(4^k)$. Une classe de largeur arborescente bornée a une largeur de clique bornée.

La morale de cette histoire est que la propriété de largeur de clique bornée est plus générale, s'applique à de plus nombreuses classes de graphes. Appliquer à ce nouveau critère les mêmes théorèmes pourrait donc être intéressant, si cela est possible.

Propriétés MS_1 et MS_2 Mais l'une des deux classes étant plus large que l'autre, on peut s'attendre à ce que les problèmes auxquels elle s'applique soient moins nombreux.

On définit le graphe d'incidence $I(G)$ d'un graphe G comme le graphe biparti dont les sommets sont les sommets et arêtes de G, et dont les arêtes représentent la relation d'incidence de G. On peut voir ceci comme l'ajout d'un sommet au milieu de chaque arête. Le plus important est qu'avec la seule logique MS_1 sur $I(G)$ on obtient la puissance de MS_2 sur G.

Formellement : pour toute propriété définie par une formule MS_2 ϕ, il existe une formule MS_1 ψ telle que

$$G \models \phi \quad ssi \quad I(G) \models \Psi$$

La propriété de largeur arborescente bornée est conservée lors du passage de G à $I(G)$ (la largeur est au plus augmentée de 1). C'est à cet endroit qu'on peut voir que largeur arborescente et MS_2 font bon ménage : quand bien même les théorèmes ne sont valables que pour MS_1, il suffit de travailler sur le graphe d'incidence pour pouvoir abaisser notre formule à la puissance MS_1, et on le fait sans effet secondaire sur notre hypothèse de largeur arborescente bornée. C'est je pense un argument permettant de compléter la partie de la démonstration du gros théorème que j'ai commentée. (on peut même transposer la fonction de poids vers $I(G)$ de manière à ce que la fonction génératrice conserve la même valeur)

En revanche, ceci ne vaut pas pour la largeur de clique, notion avec laquelle on doit alors se restreindre aux propriétés définissables par MS_1, ce qui est le revers qu'on pouvait attendre de ce critère plus faible.

Où tout le monde se retrouve... On dit d'un graphe $G = \langle V, E\rangle$ qu'il est k-clairsemé si $|E| \leq k \cdot |V|$. G est uniformément k-clairsemé si tous ses sous-graphes sont k-clairsemés. On note $US(k)$ la classe des graphes k-clairsemés.

A l'intérieur de cette classe les puissances de MS_1 et de MS_2 deviennent identiques, de même qu'une classe de graphe est de largeur de clique bornée si et seulement si elle est de largeur arborescente bornée.

6 En guise de conclusion

J'ai dans ce rapport présenté l'article [2] en partant de ses implications en complexité algébrique. Ce qu'on a obtenu à la fin est un couple de notions évaluant la complexité d'un graphe, la largeur arborescente et la largeur de clique. La seconde est plus générale (car c'est une hypothèse plus faible) mais est également plus délicate d'emploi. Notamment, elle ne s'articule naturellement qu'avec la logique MS_1 qui ne quantifie que sur les sommets d'un graphe, alors que l'autre s'entend fort bien à la logique MS_2 qui, elle, autorise la quantification sur les arêtes comme sur les sommets et est strictement plus expressive.

Cependant, une fois cette distinction faite, les résultats relatifs aux deux notions se rejoignent : les dénombrements (souvent $\sharp P$-difficiles et VNP-complets) liés à des propriétés MS_2 sur une classe de graphes de largeur arborescente bornée ou à des propriétés MS_1 sur une classe de graphes de largeur de clique bornée sont polynomiaux (une fois qu'une décomposition témoignant de la largeur bornée a été trouvée, ce qui n'est pas forcément évident, pour la largeur de clique notamment).

Références

[1] B. Courcelle and J.A. Makowsky. Fusion on relational structures and the verification of monadic second order properties. *Mathematical Structures in Computer Science*, 2002.

[2] B. Courcelle, J.A. Makowsky, and U. Rotics. On the fixed paramater complexity of graph enumeration problems definable in monadic second-order logic. *Discrete Applied Mathematics*, (108) :23–52, 2001.

[3] J.A. Makowsky and K. Meer. Polynomials of bounded tree-width.