Rapport : A quadratic bound for the determinant and permanent problem.

Martin Delacourt

9 décembre 2006

1 Introduction, définitions

L'article présente une borne inférieure pour la complexité du permanent, en utilisant des outils d'algèbre linéaire et de complexité fondée sur le calcul du déterminant, les auteurs donnent une nouvelle borne inférieure. Celle-ci est pour la première fois polynomiale et présente donc une réelle avancée sur la question. De nombreux outils sont présentés avant de pouvoir démontrer ce résultat. Mais la preuve se scinde surtout en deux parties, des cas particuliers que l'on traitera en premier, et le cas général qui viendra ensuite.

On commence par quelques définitions.

Définition 1 *La* taille *d'une formule arithmètique est le nombre de symboles* $+$ *ou* $\times$ *qu'elle contient.*

Définition 2 *La* complexité *d'un polynôme défini sur un corps* $\mathbb{K}$*, est la taille minimale d'une formule définissant ce polynôme.*

On cherche à calculer une borne inférieure de la complexité du *permanent* :

$$Perm_n(M) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}.$$

Une méthode de travail sur ce problème est d'utiliser la *complexité déterminantale*, que l'on va maintenant introduire.

Définition 3 *Un polynôme* $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_m]$ *est une projection affine d'un déterminant de taille* n *s'il existe une fonction affine* $F : \mathbb{K}^m \to M_n(\mathbb{K})$*, telle que* $P = det \circ F$*.*

On peut montrer que si P est un polynôme de complexité c, alors c'est une projection affine d'un déterminant de taille $2c$. Cela nous permet de définir la *complexité déterminantale* :

Définition 4 *La* complexité déterminantale *d'un polynôme P sur $\mathbb{K}$ est le plus petit entier n tel que P soit la projection affine d'un déterminant de taille n. On la note dc(P).*

Clairement, la complexité déterminantale est donc inférieure ou égale au double de sa complexité.

Deux conjectures ont été proposées à ce sujet,

Conjecture 1 *La fonction $dc(Perm_n)$ n'est pas polynomiale en n.*

et la suivante qui en découle :

Conjecture 2 *La complexité de $Perm_n$ n'est pas bornée par une fonction polynomiale de n.*

Plusieurs bornes inférieures ont été historiquement démontrées pour $dc(Perm_n)$, toutes linéaires, on va ici présenter une borne inférieure quadratique.

2 Faible dimension ou degré.

On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps algèbriquement clos dans cette section. Pour V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note $\mathbb{K}(V)$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur V. Et $[f]_k$ sa composante de degré k. On ne considère ici que des polynômes homogènes (dont tous les monômes sont de même degré), et pour des raisons de degré, on a

$$dc(f) \geq deg(f).$$

On va montrer une première proposition :

Proposition 1 *Si $dim(V) \leq 3$ ou $deg(f) = 1$, alors f a une complexité déterminantale linéaire et $deg(f) = dc(f)$.*

On admet cette première proposition fondée sur des résultats hors de l'article, et dont certains cas sont triviaux.

On s'intéresse maintenant aux polyômes quadratiques, et on a le résultat suivant :

Théoreme 1 *Pour $\mathbb{K}$ un corps algèbriquement clos, si q est un polynôme de degré 2 définissant une forme quadratique de rang r, alors :*

$$dc(q) = \begin{cases} 2 & si\ r \leq 4 \\ \lceil \frac{r+1}{2} \rceil & sinon \end{cases}.$$

La démonstration utilise le théorème de Gauss sur la décomposition en produits et somme de formes linéaires, et est essentiellement une disjonction de cas. On ne la présente pas ici.

3 Complexité déterminantale du permanent

On suppose ici que $\mathbb{K}$ est de plus de caractèristique 0.

3.1 Tangente

On considère un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension N sur $\mathbb{K}$. On note E son espace vectoriel associé et E^* le dual de E.
Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow E^*$, on note Tf la *fonction tangente* de f :

$$\begin{array}{rccc} Tf : & \mathcal{E} & \rightarrow & E^* \\ & x & \mapsto & T_x f \end{array}$$

En considérant une base de E et sa base duale dans E^*, on a $Tf = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Puis on s'intéresse à la fonction tangente $T^2 f$ de Tf :

$$\begin{array}{rccc} T^2 f : & \mathcal{E} & \rightarrow & Hom(E, E^*) \\ & x & \mapsto & T_x^2 f \end{array}$$

En prenant les mêmes bases, on obtient :$T^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq N}$.
On va maintenant s'intéresser à un sous espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, F son espace vectoriel associé et F^* le dual de celui ci. Si g est la restriction de f sur $\mathcal{F}$, on a me résultat suivant :

Lemme 1 *Pour tout x de $\mathcal{F}$, le rang de $T^2 g$ est plus petit que celui de $T^2 f$.*

Pour prouver cela, il suffit de regarder la fonction $\rho : E^* \rightarrow F^*$ qui fait la restriction. Cette fonction est linéaire, et comme Tg est la restriction de $\rho \circ Tf$ à $\mathcal{F}$ pour tout $x \in \mathcal{F}$, $T_x^2 g$ est la restriction à $\mathcal{F}$ de $\rho \circ T_x^2 f$.

3.2 Résultats matriciels

On prend une matrice

$$G = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \dots & X_{1,d} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{d,1} & \dots & X_{d,d} \end{pmatrix} \in M_d(\mathbb{K}[X_{i,j}, 1 \leq i,j \leq d])$$

et $P = Perm_d G$.

On note de plus $G_{i,j}$ la matrice obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j à G, et pour $i \neq i'$ et $j \neq j'$, $G_{\{i,i'\}\{j,j'\}}$ celle obtenue en enlevant les lignes i et i' et les colonnes j et j'. On leur associe les polynômes :

$$P_{i,j} = Perm_{d-1}(G_{i,j})$$

$$P_{\{i,i'\}\{j,j'\}} = \begin{cases} 0 & si\ i = i'\ ou\ j = j' \\ Perm_{d-2}(P_{\{i,i'\}\{j,j'\}}) & sinon. \end{cases}$$

On note $e_{i,j}$ la matrice $d \times d$ avec coefficient 1 en (i,j), et 0 sinon. Les $e_{i,j}$ forment la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$, on prend aussi la base associée du dual. On a alors :

Lemme 2 *Soit J la matrice de $T^2 Perm_d$ dans les bases canoniques de $M_n(\mathbb{K})$ et $M_n(\mathbb{K})^*$, alors J est symètrique et :*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & J_{1,2} & \dots & J_{1,d} \\ J_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & J_{d-1,d} \\ J_{1,d} & \dots & J_{d-1,d} & 0 \end{pmatrix}$$

où $J_{i,i'}$ est la matrice symètrique de taille $d \times d$ suivante :

$$J_{i,i'} = \begin{pmatrix} 0 & P_{\{i,i'\},\{1,2\}} & \dots & P_{\{i,i'\},\{1,d\}} \\ P_{\{i,i'\},\{2,1\}} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & P_{\{i,i'\},\{d-1,d\}} \\ P_{\{i,i'\},\{d,1\}} & \dots & P_{\{i,i'\},\{d,d-1\}} & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve 1 *J est une matrice de taille $d^2 \times d^2$. On prend i,i',j et j', le coefficient de J en $((i-1)d + j, (i'-1)d + j')$ est $P_{\{i,i'\},\{j,j'\}}$. Donc il suffit de montrer que*

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X_{i,j} \partial X_{i',j'}} = P_{\{i,i'\},\{j,j'\}}.$$

On développe dans un premier temps par rapport à la ligne i, et on montre sans problèmes que $P_{i,j} = \frac{\partial P}{\partial X_{i,j}}$. C'est bien une constante par rapport à toutes les variables $X_{l,k}$ où $l = i$ ou $k = j$. Ensuite, en développant une deuxième fois par rapport à la ligne i', et avec le même raisonnement, on finit de démontrer le lemme.

3.3 Evaluation en un cas particulier

On suppose maintenant que $d \geq 3$, et on considère la matrice de taille $d \times d$:

$$A = \begin{pmatrix} 1-d & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche à montrer la proposition suivante :

Proposition 2 *Le permanent de A est nul et le rang de $T_A^2 Perm_d$ est d^2.*

On a clairement le résultat $Perm_d A = 0$.

On considère de plus la matrice N_k de taille $k \times k$ dont tous les coefficients sont 1. Et n_k son permanent. En développant, on a immédiatement $n_k = k!$. On montre maintenant un lemme supplémentaire :

Lemme 3 *Soient i,i',j,j' quatre entiers tels que $i \neq i'$ et $j \neq j'$, alors on a :*

$$\begin{aligned} P_{i,j}(A) &= \begin{cases} (d-1)! & si\ 1 \in \{i,j\} \\ -(d-2)! & sinon \end{cases} \\ P_{\{i,i'\},\{j,j'\}}(A) &= \begin{cases} (d-2)! & si\ 1 \in \{i,j,i',j'\} \\ -2(d-3)! & sinon \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve 2 *Pour $P_{i,j}(A)$, si 1=i ou j, $P_{i,j}(A)$ est le permanent de la matrice N_{d-1} donc $(d-1)!$. Sinon, on développe par rapport à la première ligne et on trouve $(1-d)n_{d-2} + (d-2)n_{d-2} = -(d-2)!$. On applique la même méthode pour $P_{\{i,i'\},\{j,j'\}}(A)$, et on tombe sur le résultat.*

Avec les lemmes précedents, on peut maintenant exprimer la matrice $J(A)$.

Lemme 4

$$J(A) = (d-3)! \begin{pmatrix} 0 & B & B & \dots & B \\ B & 0 & C & \dots & C \\ B & C & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C \\ B & C & \dots & C & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$B = (d-2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & d-2 & d-2 & \dots & d-2 \\ d-2 & 0 & -2 & \dots & -2 \\ d-2 & -2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -2 \\ d-2 & -2 & \dots & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour finir la démonstration de la proposition, il faut montrer que le rang de $T_A^2 Perm_d$ est d^2, or on a vu que la matrice $T_A^2 Perm_d$ est de dimension $d^2 \times d^2$, donc cela revient à montrer qu'elle est inversible.

On utilise le lemme suivant pour conclure :

Lemme 5 *Soient Q et R deux matrices inversibles de taille $a \times a$ où a est un entier naturel, et soit b un entier naturel. On a alors :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & Q & Q & \dots & Q \\ Q & 0 & R & \dots & R \\ Q & R & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & R \\ Q & R & \dots & R & 0 \end{pmatrix}.$$

Tout d'abord, on montre que cela permet effectivement de terminer la preuve de la proposition. On applique ce lemme à B avec des matrices de taille 1×1 pour prouver que B est non inversible, puis de même avec C. Et enfin à J(A) avec les matrices inversibles B et C. Cela termine la preuve. Il reste donc à prouver ce dernier lemme.

Preuve 3 *On commence par multiplier à droite et à gauche par la matrice diagonale par blocs ayant pour blocs diagonaux* $(Q^{-1}, I, \dots, I)$ *où* I *est l'identité de taille correspondante. On obtient alors la matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & I & I & \dots & I \\ I & 0 & R & \dots & R \\ I & R & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & R \\ I & R & \dots & R & 0 \end{pmatrix}.$$

, donc on peut remplacer Q *par* I *sans perdre de généralité. On prend maintenant un vecteur* $\begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_b \end{pmatrix}$ *dans le noyau de* M*. Tous les* U_i *sont des vecteurs colonnes de taille* a*. On obtient le système suivant :*

$$\begin{cases} & U_2 + \cdots + U_b & = 0 \\ U_1 + & RU_3 + \cdots + RU_b & = 0 \\ & \dots & \\ U_1 + & RU_2 + \cdots + RU_{b-1} & = 0 \end{cases},$$

et par suite :

$$\begin{cases} U_2 + \cdots + U_b & = 0 \\ U_1 - RU_2 & = 0 \\ & \dots \\ U_1 - RU_b & = 0 \end{cases}.$$

En multipliant la première ligne par R*, on obtient* $(b-1)U_1 = 0$ *et comme le corps est de caractèristique nulle et que* b *n'est pas 1, on a* $U_1 = 0$*. Avec les lignes suivantes, on montre le même résultat pour tous les* U_i*.*

4 Un résultat sur le déterminant

Proposition 3 *Pour toute matrice non inversible* $A \in M_n(\mathbb{K})$*, le rang de* $T_A^2 det_n$ *est inférieur ou égal à 2n.*

Preuve 4 *Soient* P *et* Q *deux matrices inversibles de taille* n*, comme la fonction* $B \to PBQ^{-1}$*multiplie le déterminant par une constante non nulle, les range de* $T_A^2 det_n$ *et* $T_{PAQ^{-1}}^2 det_n$ *sont égaux. On peut donc remplacer* A *par une matrice diagonale de coefficients diagonaux* $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$*. On finit ensuite comme dans la preuve du lemme 2.*

5 Résultat principal

On montre le théorème suivant :

Théoreme 2 $dc(Perm_d \geq \frac{d^2}{2}$

Soit $F : M_d(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ une fonction affine telle que $Perm_d = det_n \circ F$. On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 6 *F est injective.*

Preuve 5 *On suppose par l'absurde qu'il existe un vecteur non nul v dans le noyau de la partie linéaire de F. Pour tout $x \in M_d(\mathbb{K})$, on a :*

$$Perm_d(x + tv) = det_n \circ F(x + tv) = det_n \circ F(x) = Perm_d(x).$$

Donc $T_x Perm_d$ s'annule en v, et appartient à l'espace $H = \{\phi \in M_d(\mathbb{K})^* / \phi(v) = 0\}$. Comme v est non nul, H est un hyperplan. Et pour tout $y \in M_d(\mathbb{K})$, l'image de $T_y^2 Perm_d$ est dans H, puisque c'est la différentielle d'une fonction à valeurs dans H. En particulier, le rang de $T_y^2 Perm_d$ est inférieur ou égal à $d^2 - 1$, ce qui contredit la proposition 2. Donc il n'existe pas de tel vecteur v, et le noyau de la partie linéaire de F est vide, donc F est affine.

Preuve 6 (du théorème) *On note $\mathcal{F}$ l'image de F. Par le lemme précédent, la restriction g de det_n à $\mathcal{F}$ est isomorphe à $Perm_d$. Donc par la proposition 2, il existe $x \in \mathcal{F}$ tel que le rang de $T_x^2 g$ soit d^2. Mais par le lemme 1, ce rang est inférieur ou égal à celui de $T_x^2 det_n$, lui même supérieur ou égal à 2n par la proposition 3. Donc $d^2 \geq 2n$.*

6 Conclusion

L'article présente une amélioration intéressante de la borne inférieure sur la complexité du permanent, il est complet et détaillé et fait peu appel à des résultats non démontrés. L'apport théorique n'est toutefois pas très important puisque la non-linéarité du permanent ne faisait aucun doute, et que la borne reste probablement éloignée de la réalité.