Pavages dyadiques aléatoires du carré unité

Sylvain Perifel

Le 19 décembre 2003

Résumé

Nous présentons ici l'article *Random Dyadic Tilings of the Unit Square* de Svante Janson, Dana Randall et Joel Spencer [JRS02]. Il étudie les pavages dyadiques du carré unité, c'est-à-dire des pavages du carré de côté 1 par des rectangles particuliers. L'espace des pavages a une structure de treillis, et est connexe par flips. Nous représentons les pavages par des arbres binaires d'un certain type, et en déduisons deux méthodes de génération de pavages dyadiques selon la distribution uniforme. La première est un algorithme récursif, et la seconde repose sur les chaînes de Markov. Enfin, nous étudions le nombre asymptotique moyen de rectangles transversaux verticaux dans un pavage dyadique.

1 Introduction

L'article [JRS02] étudie un type particulier de pavage du carré unité. Il s'agit de pavages dyadiques, c'est-à-dire que les tuiles sont des rectangles de la forme $R = [a2^{-s}, (a+1)2^{-s}[\times[b2^{-t}, (b+1)2^{-t}[$, pour des entiers a, b, s, t. Les auteurs introduisent une fonction de hauteur, qui leur permet de montrer dans un premier temps que l'ensemble des pavages dyadiques de profondeur donnée forme un treillis distributif.

De plus, pour un tel pavage, une des deux lignes $x = 1/2$ ou $y = 1/2$ ne coupe aucune tuile. Cette propriété permet de considérer les pavages comme des arbres binaires particuliers. On en déduit un algorithme récursif pour générer des pavages selon la distribution uniforme. Les auteurs proposent également une chaîne de Markov convergeant rapidement vers la distribution uniforme. Cette chaîne de Markov repose sur des rotations de parties dyadiques du pavage.

Enfin, dans une partie assez technique, ils étudient asymptotiquement le comportement de la hauteur d'un pavage, et calculent l'espérance du nombre de rectangles transversaux verticaux.

Nous introduisons dans une première partie les notions et les premiers résultats concernant les pavages dyadiques (section 2). Dans la section 3, nous étudions la structure de l'ensemble des pavages de rang n, et montrons que la fonction de hauteur permet de munir cet ensemble d'une structure de treillis distributif. Nous montrons aussi la connexité du graphe dont les sommets sont les pavages et tel que deux pavages sont reliés lorsqu'ils se correspondent par un flip.

La section 4 est consacrée à montrer une bijection entre les pavages de rang n et les OC-arbres de profondeur n, qui sont des arbres binaires étiquetés particuliers. Dans la section 5, nous étudions un algorithme récursif engendrant un pavage (plus précisément, un OC-arbre, ce qui est équivalent) selon la distribution uniforme ; puis nous présentons une chaîne de Markov convergeant rapidement vers la distribution uniforme. Nous n'entrons pas dans les détails techniques sur les chaînes de Markov.

Enfin, la dernière partie (section 6) étudie le nombre moyen de rectangles transversaux verticaux dans un pavage de rang n, lorsque n tend vers l'infini. L'étude est moins complète que celle de l'article original, mais a le mérite d'être aussi moins technique.

2 Définitions et résultats préliminaires

On définit l'aire de tout ensemble de la forme $[a, b[\times[c, d[$, où $0 \leq a < b \leq 1$ et $0 \leq c < d \leq 1$ sont des réels, par $(b-a)(d-c)$. Le *carré unité* est l'ensemble $[0, 1[\times[0, 1[$. Remarquons que l'aire du carré unité est 1. Un *rectangle dyadique* est un ensemble de la forme

$$R = [a2^{-s}, (a+1)2^{-s}[\times[b2^{-t}, (b+1)2^{-t}[$$

où a, b, s et t sont des entiers naturels, $0 \leq a < 2^s$ et $0 \leq b < 2^t$. L'aire d'un tel rectangle est donc $2^{-(s+t)}$. Un *pavage dyadique de rang* n, ou simplement pavage de rang n (ou pavage s'il n'y a pas d'ambiguité sur l'entier n), est un ensemble de 2^n rectangles dyadiques, tous d'aire 2^{-n}, qui pavent le carré unité. C'est-à-dire que leur union est le carré unité, et qu'ils sont deux à deux disjoints. Trois exemples de tels pavages sont représentés sur la figure 1. Insistons sur le fait que selon leur taille, les pavés ne peuvent pas être "placés" n'importe où : en effet, les rectangles doivent être de la forme $[a2^{-s}, (a+1)2^{-s}[\times[b2^{-t}, (b+1)2^{-t}[$, ce qui détermine les positions possibles pour placer un rectangle de taille donnée. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des pavages de rang n. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les pavages, c'est-à-dire $\mathcal{P} = \cup_{n\geq 0}\mathcal{P}_n$.

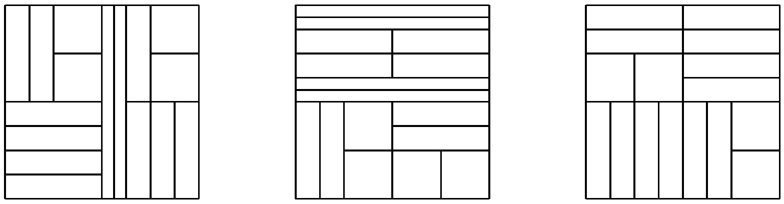

FIG. 1 – Exemples de pavages de rang 4.

On dit qu'un pavage P a une *coupe verticale* si la ligne $x = \frac{1}{2}$ ne traverse l'intérieur d'aucun rectangle du pavage, c'est-à-dire

$$\{(\frac{1}{2}, y) \in \overset{\circ}{R} : y \in [0, 1[, R \in P\} = \emptyset$$

Symétriquement, il a une *coupe horizontale* si la ligne $y = \frac{1}{2}$ ne traverse l'intérieur d'aucun rectangle du pavage. Par exemple, le premier pavage de la figure 1 a une coupe verticale ; le deuxième a une coupe horizontale, et le troisième a les deux.

2.1 Proposition Tout pavage a une coupe horizontale ou une coupe verticale.

Preuve Supposons qu'un pavage n'ait ni coupe horizontale ni verticale. Alors il existe deux rectangles dyadiques R et R' du pavage tels que la ligne $y = 1/2$ intersecte l'intérieur de R, et la ligne $x = 1/2$ intersecte l'intérieur de R'. Dans ce cas, R est de la forme $I \times [0, 1[$ et R' est de la forme $[0, 1[\times J$, où I et J sont des intervalles de longueur 2^{-n}. Alors R et R' s'intersectent en $I \times J$, contradiction. $\square$

Pour $n \geq 0$, on note A_n le nombre de pavages de rang n. Alors $A_0 = 1$, $A_1 = 2$ (on peut couper le carré en deux soit par une ligne horizontale, soit par une ligne verticale). Par convention, on pose $A_{-1} = 0$. La proposition suivante donne une relation de récurrence entre les A_i.

2.2 Proposition Pour $n \geq 1$, $A_n = 2A_{n-1}^2 - A_{n-2}^4$.

Preuve Pour $n \geq 1$, considérons un pavage de rang n avec une coupe verticale. Alors à contraction $x \mapsto x/2$ près, le pavage de la moitié gauche (*i.e.* le rectangle $[0, 1/2[\times[0, 1[$) est un pavage de rang $n - 1$; de même pour la moitié droite. On a ainsi A_{n-1}^2 pavages de rang n possibles avec une coupe verticale. Le même argument montre que l'on a A_{n-1}^2 pavages de rang n possibles avec une coupe horizontale.

Dénombrons maintenant les pavages ayant à la fois une coupe verticale et horizontale. Un tel pavage est coupé en 4 carrés d'aire $1/4$. Aux contractions $x \mapsto x/2$ et $y \mapsto y/2$ près, chacun de ces carrés peut être vu comme un pavage de rang $n - 2$. Il y a donc en tout A_{n-2}^4 pavages de rang n ayant à la fois une coupe verticale et horizontale.

Ainsi, le nombre de pavages de rang n est $A_n = 2A_{n-1}^2 - A_{n-2}^4$. $\square$

Notons que $A_n \leq 2^{2^n - 1}$. En effet, $2A_n \leq (2A_{n-1})^2$, donc si l'on pose $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2$, alors $2A_n \leq u_n$, et $u_n = 2^{2^n}$. Le comportement asymptotique de A_n est étudié dans l'article technique [LSV99] ; retenons que $A_n \geq c_0 \omega^{2^n}$ où $c_0 = (\sqrt{5} - 1)/2$ et $\omega \simeq 1,845$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}(\frac{9}{5})^{2^n} \leq A_n \leq \frac{1}{2} 2^{2^n}.$$

3 Treillis des pavages

Dans cette section, nous nous intéressons à mettre une structure sur l'ensemble des pavages. Nous montrons que l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des pavages de rang n forme un treillis distributif. Pour cela nous associons à chaque pavage une fonction de hauteur.

On définit la hauteur $h(R)$ d'un rectangle dyadique R d'aire n et de taille $2^{-k} \times 2^{-l}$ (en particulier $k + l = n$), par $h(R) = n - l$. Remarquons que $0 \leq h(R) \leq n$. On définit alors la hauteur d'un pavage $P \in \mathcal{P}_n$ par la somme des hauteurs de ses rectangles, c'est-à-dire $h(P) = \sum_{R \in P} h(R)$. On remarque que $0 \leq h(P) \leq n2^n$.

Si P est un pavage, à tout point $x \in [0, 1[\times[0, 1[$, on associe sa hauteur $P(x)$ comme étant la hauteur du rectangle dans lequel x se trouve. On remarque alors que pour tout pavage P de rang n,

$$h(P) = 2^n \int_{x \in [0,1[\times[0,1[} P(x)$$

puisque l'intégrale est précisément égale à la somme pour chaque rectangle de son aire (2^{-n}) multipliée par sa hauteur. Un pavage est complètement déterminé par sa fonction de hauteur, c'est pourquoi nous nous autorisons la notation $P(x)$. Notons que P représente à la fois le pavage et sa fonction de hauteur, donc nous nous autoriserons des opérations fonctionnelles comme $M = \max(P_1, P_2)$ pour désigner la fonction définie par $M(x) = \max(P_1(x), P_2(x))$ (il n'est pas encore clair qu'il s'agisse d'une fonction de hauteur valide, *cf* la preuve du théorème 3.1).

Grâce à cette fonction de hauteur sur les pavages, on peut définir un ordre partiel sur $\mathcal{P}_n$. Soient deux pavages $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n$. Alors on note $P_1 \preceq P_2$ si et seulement si $\forall x \in [0,1[\times[0,1[$, $P_1(x) \leq P_2(x)$. Pour $0 \leq k \leq n$, lorsque n est sous-entendu, on appelle $\tilde{P}_k$ le pavage de rang n composé uniquement de rectangles dyadiques de taille $2^{-k} \times 2^{k-n}$. La fonction de hauteur $\tilde{P}_k$ est constante égale à k.

3.1 Théorème $\preceq$ induit sur $\mathcal{P}_n$ une structure de treillis distributif.

Preuve Notons dans un premier temps que $\tilde{P}_n$ constitue l'unique élément maximal, puisque sa fonction de hauteur est constante égale à n. De même, $\tilde{P}_0$ constitue l'unique élément minimal.

Si P_1 et P_2 sont deux pavages, définissons

$$P_1 \vee P_2 = \max(P_1, P_2) \text{ et } P_1 \wedge P_2 = \min(P_1, P_2).$$

Ils nous faut montrer que ces nouveaux pavages sont valides. Montrons-le par exemple pour $Q = P_1 \wedge P_2$. Chaque point x est couvert dans Q par la tuile contenant x dans P_1 ou P_2 de hauteur minimale. Il suffit donc de montrer que deux tuiles ne se recouvrent pas.

Supposons que x soit recouvert par deux tuiles T_1 et T_2 dans Q. Puisque l'on travaille avec des rectangles dyadiques, T_1 et T_2 ont des hauteurs différentes (sinon ce serait la même tuile), et proviennent de pavages différents (puisqu'elles s'intersectent) : on peut supposer que T_1 est une tuile de P_1, T_2 de P_2, et que $h(T_1) > h(T_2)$.

Par construction de Q ($= \min(P_1, P_2)$), puisque la tuile T_1 a été retenue dans Q, elle contient un point y tel que $P_1(y) \leq P_2(y)$. Ainsi, la tuile T de P_2 contenant y vérifie $h(T) \geq h(T_1) > h(T_2)$. On note I_1, I_2, I et J_1, J_2, J les intervalles tels que $T_1 = I_1 \times J_1$, $T_2 = I_2 \times J_2$ et $T = I \times J$. Tous ces intervalles sont dyadiques.

Puisque $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$, et que $h(T_1) > h(T_2)$, on a $I_1 \subset I_2$ et $J_2 \subset J_1$. De même, puisque $T_1 \cap T \neq \emptyset$, et que $h(T) \geq h(T_1)$, on a $I \subseteq I_1$ et $J_1 \subseteq J$. Ainsi, $I \subset I_2$ et $J_2 \subset J$, ce qui contredit le fait que T_2 et T ne se recouvrent pas dans P_2. Donc x est recouvert par une seule tuile. Un argument semblable montre que le pavage $P_1 \vee P_2$ est valide.

Le treillis ainsi obtenu est distributif, car c'est un sous-treillis du treillis distributif des fonctions de $[0,1[^2$ dans $\{0, 1, \ldots, n\}$ (où $\wedge = \min$ et $\vee = \max$) lorsque l'on regarde les pavages comme des fonctions de hauteur. $\square$

3.2 Lemme $P \in \mathcal{P}_n$ a une coupe horizontale si et seulement si $P \preceq \tilde{P}_{n-1}$. P a une coupe verticale si et seulement si $P \succeq \tilde{P}_1$.

Preuve P a une coupe verticale si et seulement s'il ne contient pas de rectangle de taille $2^0 \times 2^{-n}$ si et seulement si $\forall x \in [0,1[\times[0,1[, P(x) \geq 1$ si et seulement si $P \succeq \tilde{P}_1$. L'autre assertion se prouve de manière analogue. $\square$

3.3 Lemme Soient $n \geq 2$ et $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n$. Si $P_1 \preceq P_2$ et P_1 a une coupe horizontale et P_2 a une coupe verticale, alors il existe $P_3 \in \mathcal{P}_n$ tel que $P_1 \preceq P_3 \preceq P_2$ et P_3 a à la fois une coupe horizontale et verticale.

Preuve Soit $P_3 = P_1 \vee \tilde{P}_1$. Par le lemme 3.2, $P_2 \succeq \tilde{P}_1$. Comme de plus $P_2 \succeq P_1$, on en déduit que $P_2 \succeq P_3 \succeq P_1$. En appliquant le lemme 3.2 encore, on a cette fois $P_1 \preceq \tilde{P}_{n-1}$, et bien sûr $\tilde{P}_1 \preceq \tilde{P}_{n-1}$ puisque $n \geq 2$. Donc $\tilde{P}_1 \preceq P_3 \preceq \tilde{P}_{n-1}$. Par le lemme 3.2, P_3 a donc une coupe horizontale et verticale. $\square$

Sur un pavage, on peut effectuer la rotation de $\pi/2$ d'un rectangle dyadique qui est l'union de plusieurs tuiles. Lorsque ce rectangle n'est pas carré, on effectue les dilatations nécessaires pour que la nouvelle surface coïncide avec la place disponible. Lorsque le rectangle dyadique ne contient que 2 tuiles, on obtient la notion de flip.

3.4 Définition Soit un entier $n \geq 1$, et $P \in \mathcal{P}_n$. Soit R un rectangle dyadique d'aire 2^{1-n} qui est l'union de deux tuiles de P. On appelle ***flip de*** R la transformation qui à P associe le pavage P' égal à P en dehors de R, et pour lequel R a une coupe horizontale s'il avait une coupe verticale dans P, et inversement.

On appelle flip une transformation qui est un flip de R pour un certain rectangle dyadique R d'aire 2^{1-n} qui est l'union de deux tuiles.

Un exemple de flip est illustré sur la figure 2.

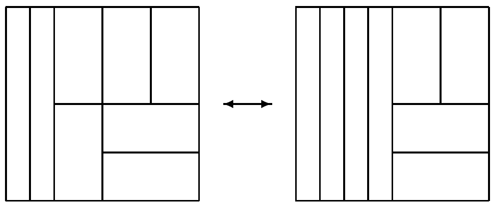

FIG. 2 – Exemple de flip.

On oriente les flips grâce à l'ordre $\preceq$. Soient P et Q deux pavages de rang n. Un ***flip montant*** de P à Q est un flip qui transforme P en Q et tel que $P \preceq Q$. On note par $\mathcal{G}_n$ le graphe orienté dont les sommets sont les pavages de rang n, et tel qu'il y a un arc de P à Q si et seulement s'il existe un flip montant de P à Q. Nous montrons dans ce qui suit quelques propriétés de ce graphe ; on en déduit en particulier qu'il est connexe lorsque l'on oublie les orientations. Ce résultat nous servira par la suite pour une chaîne de Markov.

3.5 Proposition Soient $n \geq 0$ et P et Q deux pavages de rang n. Si $P \preceq Q$ alors il existe un chemin orienté de P à Q dans $\mathcal{G}_n$.

Preuve Par récurrence sur n. Si $n = 0$, le résultat est clair puisque le graphe n'a qu'un sommet. Si $n = 1$, il n'y a que deux sommets $\tilde{P}_0 \preceq \tilde{P}_1$, et un flip sur $\tilde{P}_0$ mène à $\tilde{P}_1$.

Soient maintenant $P \preceq Q$ deux pavages de rang $n \geq 2$. Si P a une coupe verticale, alors par le lemme 3.2, Q a aussi une coupe verticale. Appelons P_1, P_2 (resp. Q_1, Q_2) les moitiés gauche et droite respectivement de P (resp. de Q). Alors $P_1 \preceq Q_1$, et $P_2 \preceq Q_2$, donc par récurrence on passe de P_1 à Q_1 par une suite de flips montants, puis de P_2 à Q_2 par une suite de flips montants, donc P et Q sont reliés dans $\mathcal{G}_n$. Si P et Q ont tous deux une coupe horizontale, on considère de même les deux moitiés séparément.

Si P a une coupe horizontale et Q n'en a pas, par le lemme 3.3, il existe un pavage P' ayant à la fois une coupe horizontale et verticale, et tel que $P \preceq P' \preceq Q$. Alors par les cas précédents, il existe un chemin orienté de P à P', et de P' à Q, donc P et Q sont reliés. □

3.6 Corollaire Pour tout entier n, le graphe $\mathcal{G}_n$ pour lequel on oublie les orientations est connexe.

Preuve Soient P et Q deux pavages de rang n. Par la proposition 3.5, il y a un chemin orienté de P à $P \vee Q$ et de Q à $P \vee Q$. On en déduit un chemin non orienté de P à Q. □

4 Représentation des pavages par des arbres

La proposition 2.1 permet de considérer naturellement les pavages comme des arbres binaires étiquetés. En effet, dans un pavage de rang n, une coupe définit deux moitiés qui peuvent être vues, à dilatation près, comme des pavages de rang $n-1$. Ce qui engendre la construction inductive de l'arbre. Il faut toutefois prêter attention aux pavages qui admettent à la fois une coupe verticale et horizontale, car à chaque pavage on souhaite associer un unique arbre. La convention est de privilégier les coupes orthogonales à la coupe précédente. Dans ce qui suit, nous formalisons la notion d'arbre associé à un pavage. Nous prenons la convention que l'arbre vide a pour profondeur 0, et que l'arbre réduit à un sommet a pour profondeur 1. Nous appelons arbre binaire complet un arbre dont tout nœud a zéro ou deux fils, et tel que toutes les feuilles sont à la même profondeur.

4.1 Définition Un OC-arbre est un arbre binaire complet dont les sommets sont étiquetés par O (Orthogonal) ou par C (Colinéaire), et tel qu'aucun nœud étiqueté par C n'a ses deux fils étiquetés par O.

Soient P un pavage de rang n, et $d \in \{H, V\}$ une direction (Horizontale ou Verticale). On associe au couple (P, d) l'arbre $\mathcal{A}$ défini inductivement comme suit. Si $n = 0$, $\mathcal{A}$ est vide. Supposons $n \geq 1$. Si P a une coupe dans la direction orthogonale à d (c'est-à-dire une coupe horizontale si $d = V$, et une coupe verticale si $d = H$), alors on définit $d' \in \{H, V\}$ tel que $\{d, d'\} = \{H, V\}$; sinon on pose $d = d'$. Si $d \neq d'$, alors on étiquette la racine de $\mathcal{A}$ par O, sinon on l'étiquette par C. Cette coupe de direction d' sépare le carré unité en deux moitiés P_1 et P_2, P_1 étant la moitié du bas dans le cas d'une coupe horizontale, et la moitié gauche dans le cas d'une coupe verticale. P_1 et P_2 peuvent être considérés comme des pavages de rang $n-1$, en effectuant la dilatation $y \mapsto 2y$ ou $x \mapsto 2x$. Inductivement, on associe ainsi à (P_1, d') et (P_2, d') deux arbres $\mathcal{A}_1$

et $\mathcal{A}_2$ respectivement. $\mathcal{A}_1$ constitue alors le fils gauche de la racine dans $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}_2$ son fils droit.

Si P est un pavage, on définit *l'arbre de P* comme étant l'arbre $\mathcal{A}$ associé à (P, V) (on prend la convention que la "coupe numéro zéro" est verticale). Voir la figure 3 pour un exemple.

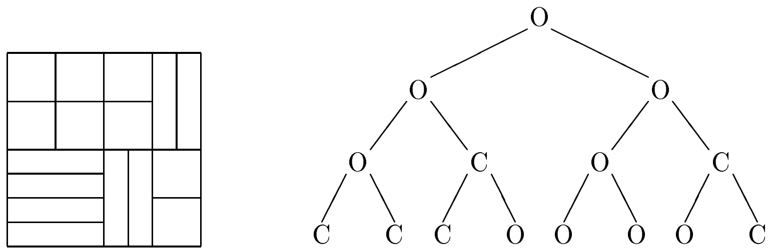

FIG. 3 – Un pavage et son arbre.

Montrons par récurrence que l'arbre $\mathcal{A}$ ainsi construit est un OC-arbre. Pour $n = 0$, $\mathcal{A}$ est vide donc est un OC-arbre. Supposons maintenant que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ soient des OC-arbres. Si P a une coupe horizontale, il est clair par induction que $\mathcal{A}$ est un OC-arbre, puisqu'il n'y a pas de condition sur les fils des nœuds étiquetés par O. Si P n'a pas de coupe horizontale, alors P_1 et P_2 ne peuvent pas avoir tous deux une coupe horizontale (sinon ces deux coupes induiraient une coupe horizontale de P), donc $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$ a sa racine étiquetée par C. Ainsi, $\mathcal{A}$ est un OC-arbre.

De plus, l'arbre $\mathcal{A}$ est défini de manière unique, puisque le procédé inductif est déterministe. Enfin, à tout OC-arbre $\mathcal{A}$ et toute direction $d \in \{H, V\}$, on associe inductivement comme suit un pavage P. Si $\mathcal{A}$ est vide, on associe le pavage de rang 0. Sinon, si la racine est étiquetée par O, on place la ligne $y = 1/2$ si $d = V$ ou $x = 1/2$ si $d = H$, et on définit $d' \in \{H, V\}$ de sorte que $\{d, d'\} = \{H, V\}$. Si la racine est étiquetée par C, on place la ligne $y = 1/2$ si $d = H$ ou $x = 1/2$ si $d = V$, et on pose $d' = d$. On appelle moitié 1 la moitié contenant le carré $[0, 1/2[\times[0, 1/2[$, et moitié 2 l'autre moitié. Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les fils gauche et droit de la racine respectivement. On appelle P_1 le pavage associé récursivement à $(\mathcal{A}_1, d')$ et P_2 le pavage associé récursivement à $(\mathcal{A}_2, d')$. On pave alors la moitié 1 par P_1, et la moitié 2 par P_2. On obtient ainsi un pavage dyadique, uniquement déterminé. Maintenant, à tout arbre $\mathcal{A}$, on associe le pavage P associé à $(\mathcal{A}, V)$. Par induction, $\mathcal{A}$ est l'arbre de P. On en déduit la proposition suivante.

4.2 Proposition L'ensemble $\mathcal{P}$ des pavages dyadiques du carré unité est en bijection avec l'ensemble des OC-arbres. Plus précisément, pour tout entier $n \geq 0$, $\mathcal{P}_n$ est en bijection avec l'ensemble des OC-arbres de profondeur n.

5 Deux méthodes de génération aléatoire

Par la proposition 4.2, on déduit que générer des pavages dyadiques de rang n selon la distribution uniforme (chaque pavage a la probabilité $1/A_n$) revient à générer des OC-arbres de profondeur n selon la distribution uniforme. Nous allons voir deux méthodes pour générer des OC-arbres selon la distribution uniforme. La première repose sur le dénombrement de la proposition 2.2, et la seconde est fondée sur les chaînes de Markov.

5.1 Algorithme récursif

On pose $p_n = \frac{A_{n-1}^2}{A_n}$, la probabilité qu'un pavage de rang n ait une coupe horizontale. Par la proposition 2.2, en divisant par A_{n-1}^2, on obtient

$$\frac{A_n}{A_{n-1}^2} = 2 - \frac{A_{n-2}^4}{A_{n-1}^2}$$

soit $p_n^{-1} = 2 - p_{n-1}^2$, donc $p_n = (2-p_{n-1}^2)^{-1}$. Notons que $1-p_n$ est la probabilité que le pavage ait une coupe verticale mais pas de coupe horizontale.

Nous présentons un algorithme récursif pour générer un OC-arbre selon la distribution uniforme. La condition sur les nœuds C nous empêche de faire une récursion immédiate. En effet, on doit respecter la contrainte selon laquelle un nœud C n'a pas deux fils O. Pour cela, on ajoute de l'information (un *type*) à chaque nœud.

5.1.1 Définition Soit $\mathcal{A}$ un OC-arbre. Un nœud de $\mathcal{A}$ est de type O s'il est étiqueté par O ; il est de type C_{CC} si c'est une feuille étiquetée par C, ou s'il est étiqueté par C et ses deux fils sont étiquetés par C ; il est de type C_{CO} s'il est étiqueté par C et si son fils gauche est étiqueté par C et son fils droit par O ; enfin, il est de type C_{OC} s'il est étiqueté par C et si son fils gauche est étiqueté par O et son fils droit par C.

Le type de l'arbre vide est C_{CC} ; le type d'un arbre non vide est le type de sa racine.

Pour chaque symbole τ parmi O, C_{CC}, C_{CO} et C_{OC}, on appelle $\tau(n)$ le nombre de OC-arbres de type τ et de profondeur n (ne confondons pas $O(n)$ avec la notation $\mathcal{O}(n)$ désignant "grand o" de n...). On notera aussi $C(n) = C_{CC}(n) + C_{CO}(n) + C_{OC}(n)$. On considère des OC-arbres $\mathcal{A}$ non vides de profondeur n, et $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les fils gauche et droit de leur racine respectivement.

5.1.2 Remarque

- Il y a $O(n) = A_{n-1}^2 = p_n A_n$ OC-arbres de type O, puisque dès que la racine est étiquetée par O, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ peuvent être choisis arbitrairement.
- Pour que $\mathcal{A}$ soit de type C_{CC}, il faut et il suffit que la racine soit C et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ ne soient pas de type O, donc il y en a $C_{CC}(n) = (A_{n-1} - O(n-1))^2 = (A_{n-1} - A_{n-2}^2)^2 = p_n(1-p_{n-1})^2 A_n$.
- Pour que $\mathcal{A}$ soit de type C_{CO}, il faut et il suffit que la racine soit C et que $\mathcal{A}_1$ ne soit pas de type O, et que $\mathcal{A}_2$ soit de type O, donc il y en a $C_{CO}(n) = (A_{n-1} - O(n-1))O(n-1) = (A_{n-1} - A_{n-2}^2)A_{n-2}^2 = p_n p_{n-1}(1-p_{n-1})A_n$.
- Symétriquement, le nombre de OC-arbres de type C_{OC} est $C_{OC}(n) = C_{CO}(n) = p_n p_{n-1}(1-p_{n-1})A_n$.

Grâce à ces types, on peut décrire un algorithme permettant de générer un OC-arbre selon la distribution uniforme. On choisit le type de la racine selon les probabilités que nous venons d'établir ; puis selon ce type on choisit les fils gauche et droit de façon appropriée. Nous décrivons plus précisément cet algorithme dans la suite, à l'aide de distributions de probabilité sur les types.

Considérons la distribution de probabilité $\mathcal{D}_n$ suivante sur les types :

- la probabilité de O est p_n ;
- la probabilité de C_{CC} est $p_n(1-p_{n-1})^2$;
- la probabilité de C_{CO} est $p_n p_{n-1}(1-p_{n-1})$;
- la probabilité de C_{OC} est $p_n p_{n-1}(1-p_{n-1})$.

C'est la distribution que l'on va utiliser lorsque l'on n'a pas de contrainte sur la racine : elle donnera la distribution uniforme sur les OC-arbres. Elle correspond aux probabilités que l'on a calculées dans la remarque 5.1.2.

On définit également la distribution aléatoire $\mathcal{D}C_n$ comme $\mathcal{D}_n$ conditionnée par $\tau \neq O$:

- la probabilité de O est 0 ;
- la probabilité de C_{CC} est $p_n(1-p_{n-1})^2/(1-p_n) = (1-p_{n-1})/(1+p_{n-1})$;
- la probabilité de C_{CO} est $p_n p_{n-1}(1-p_{n-1})/(1-p_n) = p_{n-1}/(1+p_{n-1})$;
- la probabilité de C_{OC} est $p_n p_{n-1}(1-p_{n-1})/(1-p_n) = p_{n-1}/(1+p_{n-1})$.

C'est la distribution que l'on utilisera lorsque la racine doit être étiquetée par C. Elle produira uniformément des arbres de type $\tau \in \{C_{CC}, C_{CO}, C_{OC}\}$.

On définit enfin la distribution aléatoire $\mathcal{D}O_n$ comme $\mathcal{D}_n$ conditionnée par $\tau = O$: la probabilité du type O est 1. C'est la distribution que l'on utilisera lorsque la racine doit être étiquetée par O. Elle produira uniformément des arbres de type O.

On produit tout d'abord un arbre dont les nœuds sont étiquetés par des types. On utilise l'algorithme suivant : son entrée est constituée d'une distribution D sur les types, ainsi que du rang n.

`Génère-Types`(D, n) :

1. Si $n = 0$, renvoyer l'arbre vide.
2. On choisit le type τ de la racine selon la distribution D.
3. On construit le fils gauche $\mathcal{A}_1$ et le fils droit $\mathcal{A}_2$ comme suit.
   - Si $\tau = O$ alors $\mathcal{A}_1 =$ `Génère-Types`$(\mathcal{D}_{n-1},\, n-1)$, et $\mathcal{A}_2 =$ `Génère-Types`$(\mathcal{D}_{n-1},\, n-1)$.
   - Si $\tau = C_{CC}$ alors $\mathcal{A}_1 =$ `Génère-Types`$(\mathcal{D}C_{n-1},\, n-1)$; $\mathcal{A}_2 =$ `Génère-Types`$(\mathcal{D}C_{n-1},\, n-1)$.
   - Si $\tau = C_{CO}$ alors $\mathcal{A}_1 =$ `Génère-Types`$(\mathcal{D}C_{n-1},\, n-1)$; $\mathcal{A}_2 =$ `Génère-Types`$(\mathcal{D}O_{n-1},\, n-1)$.
   - Si $\tau = C_{OC}$ alors $\mathcal{A}_1 =$ `Génère-Types`$(\mathcal{D}O_{n-1},\, n-1)$; $\mathcal{A}_2 =$ `Génère-Types`$(\mathcal{D}C_{n-1},\, n-1)$.

Par récurrence, et grâce au choix des distributions $\mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}C_n$ et $\mathcal{D}O_n$, à chaque étape de l'algorithme on produit un sous-arbre selon la distribution uniforme, éventuellement conditionnée par l'étiquette imposée à la racine. Ainsi, chaque arbre produit aura probabilité $1/A_n$, c'est-à-dire que l'on a obtenu la probabilité uniforme sur les OC-arbres étiquetés par les types.

Pour obtenir un OC-arbre (étiqueté par O ou C, non plus par des types), on définit l'algorithme `Génère-OC`(n) par

1. $\mathcal{A} :=$ `Génère-Types`$(\mathcal{D}_n,\, n)$;
2. étiqueter tout nœud de $\mathcal{A}$ de type O par O ; tout nœud de type C_{CC}, C_{CO} ou C_{OC} par C ;
3. renvoyer $\mathcal{A}$.

5.2 Chaînes de Markov

Nous proposons maintenant une chaîne de Markov $\mathcal{M}_n$ produisant rapidement la distribution uniforme sur les OC-arbres de profondeur n. On note V_n l'ensemble des nœuds d'un arbre binaire complet de profondeur n, et pour $v \in V_n$ et $\mathcal{A}$ un OC-arbre, on écrira $\mathcal{A}(v)$ pour désigner l'étiquette de v dans $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}(v) \in \{O, C\}$). Le processus est simple : on part d'un OC-arbre quelconque. À chaque étape, on choisit aléatoirement selon la distribution uniforme sur V_n un nœud v de l'arbre, et une orientation α parmi O et C (avec probabilité 1/2 pour chacun des cas). Si en changeant l'étiquette de v par α on obtient encore un OC-arbre, alors on effectue ce changement ; sinon on ne change rien.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont de OC-arbres, la probabilité de transition de la chaîne de Markov $\mathcal{M}_n$ est alors définie par

$$P_n(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{cases} \frac{1}{2|V_n|} & \text{s'il y a un unique } v \in V_n \\ & \quad \text{tel que } \mathcal{A}(v) \neq \mathcal{B}(v) \\ 1 - \sum_{\mathcal{B}' \neq \mathcal{A}} P_n(\mathcal{A}, \mathcal{B}') & \text{si } \mathcal{A} = \mathcal{B} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par la construction des OC-arbres, le changement d'un étiquette d'un arbre correspond à faire la rotation de $\pi/2$ d'un rectangle dyadique étant l'union de tuiles dans le pavage associé à l'arbre. On rejoint alors la construction de la section 3, et par le corollaire 3.6, on déduit que l'espace des états de la chaîne de Markov est connexe, puisque l'on peut passer d'un pavage à un autre par une suite de flips, ce qui est un cas particulier de rotation. C'est le premier pas vers la démonstration du résultat suivant, cité ici informellement.

5.2.1 Théorème La chaîne de Markov $\mathcal{M}_n$ converge vers la distribution uniforme. De plus, pour tout $\epsilon > 0$ fixé, on peut s'approcher de cette distribution à ϵ près en un temps polylogarithmique en la taille de l'espace des pavages (*i.e.* en temps $\mathcal{O}(2^{kn})$ pour une certaine constante k dépendant de ϵ).

Notons qu'un pavage de rang n contient 2^n tuiles, donc tout algorithme générant un pavage sera exponentiel en n (le temps d'écrire le pavage, au moins).

6 Étude asymptotique du nombre de rectangles transversaux verticaux

Nous consacrons cette partie à une courte étude asymptotique du nombre moyen de rectangles transversaux verticaux dans un pavage. On suppose dans la suite $n \geq 1$.

6.1 Définition On appelle *rectangle transversal vertical* dans un pavage de rang n toute tuile de hauteur n.

6.2 Lemme Le nombre de rectangles transversaux verticaux dans un pavage P est le double du nombre de chemins de la racine aux feuilles dans l'arbre de P ne contenant que des nœuds étiquetés par C.

Preuve Soit R une tuile de P. On définit récursivement la notion de chemin associé à R. Pour $n = 1$, il y a un unique chemin dans l'arbre de P, c'est le chemin associé à R. Pour $n > 1$, la coupe de P désignée par la racine de son arbre divise le carré unité en deux moitiés. Si R se trouve du côté du fils gauche, alors le chemin associé à R est celui consistant de la racine et du chemin associé à R dans le fils gauche ; si R se trouve du côté du fils droit, alors le chemin associé à R est celui consistant de la racine et du chemin associé à R dans le fils droit.

Notons que tout chemin est associé à exactement 2 rectangles dyadiques. Cela provient du cas $n = 1$, où l'unique chemin est associé aux deux tuiles du pavage. De plus, le chemin associé à R est étiqueté uniquement par C si et seulement si R est un rectangle transversal vertical. En effet, si le chemin a une coupe horizontale, alors la hauteur de R est au plus $n - 1$; réciproquement, si le chemin n'a que des coupes verticales, alors $h(R) = n$. D'où le résultat. □

Il suffit donc de compter le nombre moyen de chemins étiquetés uniquement par C dans un OC-arbre. Soit u_n ce nombre pour un arbre de profondeur n. On pose également v_n le nombre moyen de chemins étiquetés uniquement par C dans un arbre dont la racine est étiquetée par C. Pour $n = 1$, $u_1 = 1$, puisque si la racine est étiquetée par O, alors l'arbre n'a pas de rectangle transversal vertical ; et si la racine est étiquetée par C, alors l'arbre a 2 rectangles transversaux verticaux. De ce dernier cas on déduit que $v_1 = 2$.

Considérons maintenant les pavages de rang $n + 1$. En reprenant les distributions de la partie 5.1, on peut discuter sur le type de la racine. Si le type de la racine est C_{CC}, le nombre moyen de rectangles transversaux verticaux est $2v_n$. Si le type de la racine est C_{CO} ou C_{OC}, le nombre moyen de rectangles transversaux verticaux est v_n. Enfin, si le type de la racine est O, le nombre moyen de rectangles transversaux verticaux est nul. On obtient alors la relation de récurrence suivante, en utilisant la distribution $\mathcal{D}C_{n+1}$.

$$v_{n+1} = \frac{1 - p_n}{1 + p_n} 2v_n + 2\frac{p_n}{1 + p_n} v_n = \frac{2}{1 + p_n} v_n.$$

De plus, u_n est égal à v_n multiplié par la probabilité que la racine soit C, donc $u_n = (1 - p_n)v_n$.

Une étude de la suite (p_n), définie (rappelons-le) par

$$p_0 = 0 \text{ et } p_{n+1} = \frac{1}{2 - p_n^2},$$

montre qu'elle est croissante, et tend vers la plus petite racine positive de $x = (2 - x^2)^{-1}$. Cette équation se réécrit sous la forme $(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$, sa plus petite racine positive est alors $\phi - 1 = (\sqrt{5} - 1)/2$ (le nombre d'or moins 1). On en déduit que p_n tend vers $\phi - 1$. Ainsi, asymptotiquement, v_n croît comme $(2/\phi)^n$, soit $(\sqrt{5} - 1)^n$. De même, le nombre moyen de rectangles transversaux verticaux par pavage de rang n étant $2u_n = 2(1 - p_n)v_n$, il croît asymptotiquement comme $(\sqrt{5} - 1)^n$, puisque $2(1 - p_n)$ tend vers la constante $(4 - 2\phi)$.

7 Conclusion

Nous n'avons pas suivi exactement l'article original pour certains détails. Par exemple, nous définissons des intervalles dyadiques ouverts à droite pour éviter qu'ils ne se recouvrent sur les bords. Souvent, les preuves des résultats ont deux parties, une pour le cas vertical, et une pour le cas horizontal. Ces parties sont symétriques, si bien que l'article [JRS02] n'en détaille (légitimement) qu'une. Nous avons la plupart du temps choisi de détailler l'autre partie.

Nous ne présentons que les OC-arbres. Les auteurs présentent également des HV-arbres, plus naturels. Cependant, dans la chaîne de Markov que nous étudions, nous nous servons de la structure d'OC-arbres, puisque chaque transformation correspond à une rotation d'un rectangle dyadique du pavage. De plus, les auteurs ont détaillé les preuves pour les HV-arbres, mais pas celles pour les OC-arbres. Rappelons cependant qu'il y a une bijection entre ces deux ensembles d'arbres, donc une seule étude suffit. Parfois les résultats sont plus naturels dans l'une ou l'autre des visions.

Si les changements dans les sections précédentes sont mineurs, nous n'avons en revanche plus suivi l'article pour la dernière partie, trop technique. Mais nous avons essayé de présenter un des résultats de la fin de l'article original, d'une manière simplifiée. En règle général, toutefois, nous avons essayé de plus détailler les résultats que dans l'article original.

L'article a été agréable à lire, à part la fin, plus technique, qui fait intervenir trop de connaissances sur les chaînes de Markov et les probabilités. Les preuves dans les premières parties sont en général simples, souvent élégantes. La présentation n'en est toutefois pas toujours aisée. L'algorithme récursif est assez pénible à expliquer, car nous avons essayé d'être assez rigoureux. La présentation aurait été plus simple avec les HV-arbres, mais elle est déjà faite dans l'article initial.

La structure de treillis sur l'ensemble des pavages de rang n ne sert pas par la suite (ou alors on se sert de résultats beaucoup plus faibles qui en découlent, mais qui peuvent se montrer indépendemment), ce qui est peut-être dommage. Je l'ai tout de même insérée dans ce rapport, car c'est une partie assez longue et intéressante de l'article, et car le résultat de connexité du graphe $\mathcal{G}_n$ sert pour les chaînes de Markov. Répétons qu'il est cependant facile de montrer ce résultat sans avoir montré la structure de treillis. Il est amusant de constater que sur ce type de pavages on a aussi un flip, qui rend l'espace des pavages connexes.

Remarquons enfin qu'imposer des pavages dyadiques est une contrainte très forte, ce qui permet d'obtenir beaucoup de résultats. Insistons sur le fait qu'on ne peut pas placer un rectangle de la bonne taille n'importe où pour qu'il soit dyadique.

Références

[JRS02] Svante Janson, Dana Randall, and Joel Spencer. Random dyadic tilings of the unit square. *Random Structures and Algorithms*, 21(3-4):225–251, 2002.

[LSV99] J. Lagarias, J. Spencer, and J. Vinson. Dyadic equipartitions of the unit square. *Discrete Mathematics* (to appear), 1999.