Traitement du Signal

Épreuve 2007
Durée : 2 heures
—les notes de cours sont autorisées —
!!! chaque partie doit être rédigé sur une copie séparée !!!

Partie I

Exercice I-1 : *Transformée de Fourier et échantillonnage*

Soit la fonction triangle (notée $\text{Tri}(t/T)$), nulle pour $|t| > T$ et égale à $1/T$ en $t = 0$.

1. Calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\text{Tri}(t/T))$.
2. Déduire la transformée de Fourier de $\text{sinc}^2(t/T)$.
3. A quelle cadence minimale faut il échantillonner $\text{sinc}^2(t/T)$ pour pouvoir reconstituer exactement ce signal?
4. On échantillonne ce signal avec 1024 points, centrés autour de 0, à la fréquence de la question précédente. On calcule ensuite sa FFT. Quelle est la distance en Hz entre deux fréquences successives?

Exercice I-2 : *Estimation et prédiction*

Soit $X(t)$ un signal aléatoire, centré, stationnaire, de fonction de covariance $\gamma_{xx}(t_1, t_2) = \mathbb{E}X(t_1)X(t_2)$. On considère une estimation $\hat{X}(t+T)$ de $X(t+T)$, que l'on suppose fonction linéaire de $X(T)$:

$$\hat{X}(t+T) = \alpha X(t) + \beta \quad . \tag{1}$$

On appelle $\epsilon(t+T)$ l'erreur d'estimation sur $X(t+T)$:
$\epsilon(t+T) = X(t+T) - \hat{X}(t+T)$.

1. Quelle est l'implication de l'hypothèse de stationnarité sur la fonction de corrélation?

2. Que définit la fonction de corrélation en $t_1 = t_2 = t$?

3. Déterminer le scalaire β qui satisfait $\mathbb{E}[\epsilon(t+T)] = 0$.

4. Déterminer le scalaire α qui minimise la variance de l'erreur d'estimation $\epsilon(t+T)$ ($\mathrm{Var}[\epsilon(t+T)]$). Interpréter la forme de l'estimation en utilisant les valeurs obtenues précédemment de β et γ.

5. On note par $\mathrm{Var}^*[\epsilon(t+T)]$ la variance de l'erreur d'estimation obtenue en remplaçant dans l'expression de $\mathrm{Var}[\epsilon(t+T)]$ les paramètres α et β des questions précédentes. Soit $\rho(T)$ le coefficient de corrélation entre $X(t)$ et $X(t+T)$: $\rho(T) = \frac{\gamma_{xx}(T)}{\gamma_{xx}(0)}$.

   Exprimer $\mathrm{Var}^*[\epsilon(t+T)]$ en fonction de $\rho(T)$ et $\gamma_{xx}(0)$. Quels sont les extrema de $\mathrm{Var}^*[\epsilon(t+T)]$? Pour quelle valeurs de T sont-ils atteints? Interpréter ce résultats en donnant la forme de l'estimation.

Partie II

Exercice II-1 : *Régression linéaire*

Soit un ensemble de mesures expérimentales $y = [6.6, 22.9, 33.8, 39.2, 50.0]$, réalisées aux points $x = [2, 5, 7, 8, 10]$, d'incertitudes (écart-type) toutes égales, $\sigma_y = 2,$. On cherche à estimer la meilleure droite $y = a + bx$ et à valider la pertinence de ce modèle.

1 - L'estimateur des moindres carrés fournit une ordonnée à l'origine et pente estimées de $\hat{a} = -4.25$ et $\hat{b} = 5.43$.
1.1 Réaliser, à l'échelle, un graphique représentant les mesures, leurs incertitudes, la droite estimée. Que peut-on en dire ?
1.2 - La somme pondérée des écarts au modèle, $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$, vaut $Q = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2/\sigma_y^2 = 6.90$. Que dire de la qualité du modèle linéaire ajusté aux données (on se servira de la table de χ^2 donnée en annexe) ?

2 - Un deuxième expérimentateur a réalisé les mêmes mesures mais estime leur incertitude à $\sigma_y = 4$.
2.1 Refaire le graphique de la question 1.
2.2 Que deviennent les estimées $\hat{a}$ et $\hat{b}$ (répondre brièvement mais de façon précise et justifiée) ?
2.3 Que devient Q ? Que conclut-on alors de la qualité du modèle linéaire ajusté aux données (on se servira de la table de χ^2 donnée en annexe) ?

Exercice II-2 : *Moments et coefficient de corrélation d'une loi* Γ

Note : les parties et les questions dans chaque partie sont relativement indépendantes, on peut donc continuer même si on ne sait pas répondre à une en particulier.

1 - Loi Γ monovariée.
Soit X, variable aléatoire positive suivant une loi $\Gamma_{b,c}$ monovariée, $b > 0, c > 0$,

$$p_X(x) = (x/b)^{c-1} \exp(-(x/b))/(b\Gamma(c)),$$

dont la première fonction caractéristique s'écrit:

$$\Phi_X(k) = \mathbb{E}\exp(\imath kx) = (1 - \imath kb)^{-c}.$$

1.1 Calculer $\mathbb{E}X$ (on pourra utiliser la première fonction caractéristique).
1.2 Calculer la variance de X (on pourra calculer le résultat intermédiaire $\mathbb{E}X^2$, toujours à partir de la première fonction caractéristique).
1.3 Calculer les cumulants C_n de X (en fonction de b, c). On rappelle que la seconde fonction caractéristique $\Psi_X(k)$ se développe en $\Psi_X(k) = 1 + \sum_{n\geq 1} k^n/n\ !d^n/dk^n\Psi(k=0)$. Que vaut $C_n/(C_2)^{n/2}$ quand $n \to +\infty$? Que peut-on en conclure ?
1.4 Soit $Y = \lambda X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Que vaut la loi $p_Y(y)$?
1.5 Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes $\Gamma_{b,c}$. Que vaut la loi $p_Y(y)$ de $Y = X_1 + X_2$?

2- Loi Γ bivariée.
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires bivariées $\Gamma_{b_1,b_2,b_{1,2},c}$, $c > 0, b_1 >, b_2 > 0, b_1b_2 - b_{1,2} > 0$. La première fonction caractéristique bivariée s'écrit :

$$\Phi_{X_1,X_2}(k_1,k_2) = \mathbb{E}\exp(\imath(k_1x_1+k_2x_2)) = \int\int \exp(\imath(k_1x_1+k_2x_2))p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$\Phi_{X_1,X_2}(k_1,k_2) = (1 - \imath k_1b_1 - \imath k_2b_2 - b_{1,2}k_1k_2)^{-c}.$$

On admettra que $\Phi_{X_1}(k_1) = \Phi_{X_1,X_2}(k_1,0)$ et $\Phi_{X_2}(k_2) = \Phi_{X_1,X_2}(0,k_2)$.
2.1 Justifier que les lois marginales $p_{X_1}(x)$ et $p_{X_2}(x)$ sont Γ monovariées, en préciser les paramètres.
2.2 Calculer $\mathbb{E}X_1X_2$. Indice : on pourra utiliser une extension de la formule liant les moments à la fonction caractéristique:

$$\mathbb{E}X_1X_2 = (\partial/\partial k_2\partial/\partial k_1\Phi_{X_1,X_2}(k_1,k_2))_{k_1=0,k_2=0}.$$

2.3 Calculer le coefficient de corrélation

$$\rho = (\mathbb{E}X_1X_2 - \mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2)/\sqrt{\sigma^2_{X_1}\sigma^2_{X_2}}$$

2.4 Que peut-on conclure sur les valeurs prises par ρ ?
2.5 Si X_1 et X_2 sont décorrélées, c'est-à-dire si $\rho = 0$, que devient $\Phi_{X_1,X_2}(k_1,k_2)$? Qu'en conclure vis-à-vis de la dépendance de X_1 et X_2 ?
2.6 Prouver : $\Phi_{X_1}(k_1) = \Phi_{X_1,X_2}(k_1,0)$ et $\Phi_{X_2}(k_2) = \Phi_{X_1,X_2}(0,k_2)$.