Traitement du Signal

Épreuve 2008

Durée : 2 heures

—Les notes de cours sont autorisées —

!!! Chaque exercice doit être rédigée sur une copie séparée !!!

Partie I

Exercice I : *Transformée de Fourier et échantillonnage*

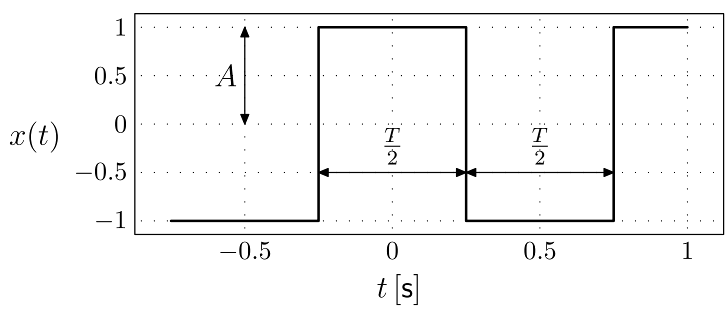

Figure 1: Signal carré périodique

I Soit un signal carré périodique de période T d'amplitude A, sans composante continue (cf. figure 1).

1) Calculez et représentez la série de Fourier de ce signal.
2) Donnez les fréquences pour lesquelles la série de Fourier s'annule.
3) Quelle est l'amplitude de la fréquence fondamentale ? Quel est le signal que l'on obtient si on filtre toutes les fréquences autre que la fondamentale ? Représentez ce signal avec le signal de départ.

On rappelle la définition des coefficients de Fourier d'une fonction périodique f : $X[k] = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i2\pi kt/T}dt$.

II Soit un système numérique dont la fréquence d'échantillonnage est fixée à 10 kHz. Représenter précisément dans la bande de fréquence 0-5 kHz, le module du spectre après échantillonnage des signaux suivants :

1) Une composante sinusoïdale pure de fréquence 3.5 kHz, additionnée d'une composante sinusoïdale pure de fréquence 7 kHz.
2) Un signal rectangulaire à 2 kHz.

Dans les 2 cas, on précisera si le théorème d'échantillonnage est respecté ou non. Pour chacun des cas, que resterait-il en sortie d'un système numérique (situé après l'échantillonnage) si celui-ci constitue un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure 3.8 kHz ?

III Soit un signal $f(t)$ que l'on échantillonne à $f = 100$ Hertz pendant 4 secondes. On calcule ensuite sa FFT (transformée de Fourier rapide). Quelle est la résolution fréquentielle de son spectre de Fourier?

Exercice II : *Tests de* χ^2

Soit un ensemble de mesures expérimentales $y = [-0.20, 0.23, 0.49, 0.89, 2.85, 3.02]$, réalisées aux points (déterministes) $x = [0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25]$, d'incertitudes (écart-type) toutes égales, $\sigma_y = 0.4$. On suposera que les y sont des variables aléatoires normales et indépendantes.

On s'intéresse à deux modèles :

M1 : $y = ax$.

M2 : $y = bx^2$.

1) Calculer l'estimateur des moindres carrés pour a ? Que vaut l'estimateur par maximum de vraisemblance ? Calculer $\hat{a}$ pour les données de l'énoncé.

2) Calculer l'estimateur des moindres carrés pour b ? Que vaut l'estimateur par maximum de vraisemblance ? Calculer $\hat{b}$ pour les données de l'énoncé.

3) Réaliser, à l'échelle, un graphique représentant les mesures et leurs incertitudes, ainsi que les modèles 1 et 2 estimés.

4) Quel est le meilleur modèle ? (Utiliser le test de χ^2 pour justifier vos réponses).

5) Un deuxième expérimentateur a réalisé les mêmes mesures mais estime leur incertitude à $\sigma_y = 1$. Que deviennent les estimées $\hat{a}$ et $\hat{b}$ (répondre brièvement mais de façon précise et justifiée) ? Quelles conclusions sont données par les tests de modèles ?

Exercice III : *Loi de Poisson*

La loi de Poisson est souvent utilisée en physique. Elle est définie par : $P(x = n) = a^n/n\,!\exp(-a)$, où $a \in \mathbb{R}^{*+}$ est le paramètre de la loi.

I Loi univariée : La première fonction caractéristique de la loi de Poisson univariée s'écrit :

$$\Phi_X(k) = \exp\left(a(\exp(ik) - 1)\right).$$

1) Calculez les cumulants de la loi de Poisson (indice : utiliser la seconde fonction caractéristique).

2) Calculez la skewness et la kurtosis de la loi de Poisson. Qu'en conclure ?

3) Pourquoi dit-on souvent que la loi de Poisson tend vers une loi normale quand $a \to +\infty$? (indice : il faut calculer les cumulants de la variable centrée réduite $(x - c_1)/\sqrt(c_2)$ et utiliser le développement de Graam-Hedgeworth)

II Loi bivariée : les variables x_1 et x_2 suivent une loi de Poisson bivariée si leur fonction caractéristique bivariée $\Phi_{X_1,X_2}(k_1,k_2) = \mathbb{E}\exp i(k_1x_1 + k_2x_2)$ s'écrit :

$$\Phi_{X_1,X_2} = \exp\left(a_1(\exp(ik_1) - 1) + a_2(\exp(ik_2) - 1) + a_{12}(\exp(ik_1)\exp(ik_2) - 1)\right)$$

On admettra que $\Phi_{X_1}(k_1) = \Phi_{X_1,X_2}(k_1, 0)$ et $\Phi_{X_2}(k_2) = \Phi_{X_1,X_2}(0, k_2)$.

1) Justifier que les lois marginales de X_1 et X_2 sont des lois de Poisson monovariées, en préciser les paramètres.

2) Calculer $\mathbb{E}X_1 = -\imath(\partial/\partial k_1 \Phi_{X_1,X_2}(k_1,k_2))_{k_1=0,k_2=0}$. Vérifiez le résultat de la question précédente.

3) Calculer $\mathbb{E}X_1X_2$. Indice : on pourra utiliser une extension de la formule liant les moments à la fonction caractéristique:

$$\mathbb{E}X_1X_2 = -(\partial/\partial k_2 \partial/\partial k_1 \Phi_{X_1,X_2}(k_1,k_2))_{k_1=0,k_2=0}.$$

4) Calculer le coefficient de corrélation

$$\rho = (\mathbb{E}X_1X_2 - \mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2)/\sqrt{\sigma_{X_1}^2\sigma_{X_2}^2}$$

5) Si X_1 et X_2 sont décorrélées, c'est-à-dire si $\rho = 0$, que devient $\Phi_{X_1,X_2}(k_1,k_2)$? Qu'en conclure vis-à-vis de la dépendance de X_1 et X_2 ?

6) Prouver : $\Phi_{X_1}(k_1) = \Phi_{X_1,X_2}(k_1, 0)$ et $\Phi_{X_2}(k_2) = \Phi_{X_1,X_2}(0, k_2)$.