

# Simulation de champs fractionnaires

Céline LACAUX

[celine.lacaux@iecn.u-nancy.fr](mailto:celine.lacaux@iecn.u-nancy.fr)

École des Mines de Nancy

Institut Élie Cartan de Nancy

Travail en collaboration avec Serge COHEN et Michel LEDOUX (Université Toulouse III)

## Plan de l'exposé

- ➡ Champs fractionnaires et intégrale stochastique
- ➡ Séries de bruits généralisés
- ➡ Approximation gaussienne

La plupart des champs fractionnaires  $X$  ont une représentation stochastique du type :

$$X^f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) \Lambda(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

avec  $\Lambda(d\xi)$  une mesure aléatoire indéfiniment divisible.

- ➡ Nous nous intéressons à la partie non-gaussienne de  $\Lambda(d\xi)$ .
- ➡  $\Lambda(d\xi)$  définie au moyen d'une mesure aléatoire de Poisson  $N(d\xi, du)$ .

### Cas Particuliers

- ➡  $\Lambda(d\xi) = M_\alpha(d\xi)$  mesure aléatoire  $\alpha$ -stable symétrique ( $0 < \alpha < 2$ ).
- ➡  $\Lambda(d\xi) = L(d\xi)$  mesure aléatoire de Lévy au sens de BENASSI, COHEN, ISTAS (2004).

Soit  $N(d\xi, dv)$  une mesure aléatoire de Poisson sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  d'intensité  $n(d\xi, dv) = d\xi \nu(dv)$ .

### Notations

- $a \vee b = \max(a, b)$ .
- $a \wedge b = \min(a, b)$ .

### Hypothèses

- $\nu(dv)$  est symétrique.
- $\int_{\mathbb{R}} v^2 \wedge 1 \nu(dv) < +\infty$ .

La mesure aléatoire  $\Lambda(d\xi)$  est définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) \Lambda(d\xi) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} g(\xi) v (N(d\xi, dv) - (|g(\xi)v| \vee 1)^{-1} n(d\xi, dv))$$

où  $g$  vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} (g(\xi)^2 v^2) \wedge 1 n(d\xi, dv) < +\infty.$$

## Exemples

☞ **Mesure aléatoire de Lévy réelle** (BENASSI, COHEN, ISTAS 2004) :

**Hypothèse** •  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_{\mathbb{R}} |v|^p \nu(dv) < +\infty$ .

Alors  $\Lambda(dv) = M(dv)$  partie non gaussienne d'une mesure aléatoire de Lévy réelle.

**Moving Average Fractional Lévy Motions :**

$$X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \|x - \xi\|^{H-d/2} - \|\xi\|^{H-d/2} \right) \Lambda(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

avec  $0 < H < 1$ .

☞ **Mesure aléatoire  $\alpha$ -stable symétrique** (SAMORODNISTKY ET TAQQU 1994) :

$$0 < \alpha < 2 \quad \text{et} \quad \nu(dv) = \frac{dv}{|v|^{1+\alpha}}.$$

**Moving Average Fractional Stable Motions :**

$$X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \|x - \xi\|^{H-d/\alpha} - \|\xi\|^{H-d/\alpha} \right) \Lambda(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

avec  $0 < H < 1$ .

## Représentation en série

Supposons  $0 < \nu(\mathbb{R}) < +\infty$ .

### Notations

- $(V_n)_{n \geq 1}$  i.i.d.  $V_n \sim \frac{\nu(dz)}{\nu(\mathbb{C})}$ .
- $T_n$   $n^{\text{ème}}$  temps de saut d'un processus de Poisson d'intensité 1.
- $(U_n)_{n \geq 1}$  i.i.d.  $U_n \sim \mathcal{U}(S^{d-1})$
- $\xi_n = \left( \frac{T_n}{c_d \nu(\mathbb{R})} \right)^{1/d} U_n$ , où  $c_d = \text{vol. de la boule unité de } \mathbb{R}^d$ .

**Proposition 1** Soit  $x \in \mathbb{R}^d$ . Alors presque sûrement,

$$Y_N^f(x) = \sum_{n=1}^N f(x, \xi_n) V_n$$

converge vers  $Y^f$  et  $\{X^f(x) : x \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{Y^f(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ .

## Vitesse de convergence

☞ Dépend de l'asymptotique de  $f$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$  (car  $T_n/n \rightarrow 1$  p.s.)

### Hypothèses

- $\forall \xi \neq 0, |f(x, \xi)| \leq \frac{C}{\|\xi\|^\beta}$  avec  $\beta > d/2$  et  $C > 0$ .
- $\exists r \in (d/\beta, 2], \int_0^{+\infty} |v|^r \nu(dr) < +\infty$ .

### Théorème 2 Alors

1.  $\forall \varepsilon \in (0, \beta/d - 1/r), \sup_{N \geq 1} N^\varepsilon \left| Y^f(x) - Y_N^f(x) \right| < +\infty$  p.s.
2.  $\mathbb{E} \left( \left| Y_N^f(x) - Y^f(x) \right|^r \right) \leq \frac{C(r, \beta)}{N^{r\beta/d - 1}}$ , pour tout entier  $N > r\beta/d$  et avec  $C(r, \beta)$  connue.

### Idée de la preuve

- Pour l'erreur p.s., on établit le lemme suivant (représentation en série des lois  $\alpha$ -stable)

**Lemme 3** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  suite de variables i.i.d. symétriques réelles, indépendante de  $(T_n)_{n \geq 1}$  et  $(Y_n)_{n \geq 1}$ . Supposons  $|Y_n| \leq CT_n^{-1/\gamma}$  avec  $\gamma \in (0, 2)$  et  $\mathbb{E}(|X_n|^r) < +\infty$  avec  $r > \gamma$ . Alors,

$$\forall \varepsilon \in (0, 1/\gamma - 1/(r \wedge 2)), \sup_{N \in \mathbb{Z}_+} N^\varepsilon \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} Y_n X_n \right| < +\infty \text{ p.s..}$$

- Pour l'erreur  $L^r$ , inégalité de Khintchine (ou Jensen).

## Convergence Uniforme

**Hypothèses** Soit  $K$  un compact et  $\beta_1 > d \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_p > d/2$ .

- $\forall x \in K, \forall \xi \neq 0, \left| f(x, \xi) - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{a_j(x) b_j(\xi/\|\xi\|)}{\|\xi\|^{\beta_j}} \right| \leq \frac{b_p(\xi/\|\xi\|)}{\|\xi\|^{\beta_p}}$  avec  $a_j$  continues.
- $\exists r \in (d/\beta_1, 2], \int_0^{+\infty} |v|^r \nu(dr) < +\infty$  et  $\mathbb{E}(|b_j(U_n)|^r) < +\infty$ .

**Théorème 4** Alors pour tout  $\varepsilon \in (0, \min(\beta_1/d - 1/r, \beta_p/d - 1/(1 \wedge r)))$ ,

$$\sup_{N \geq 1} N^\varepsilon \sup_{x \in K} \left| Y^f(x) - Y_N^f(x) \right| < +\infty \text{ p.s.}$$

### Moving Average Fractional Lévy Motions

$$X_H(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \|x - \xi\|^{H-d/2} - \|\xi\|^{H-d/2} \right) \Lambda(d\xi)$$

avec  $\int_{\mathbb{R}} |v|^p \nu(dv) < +\infty$ ,  $0 < H < 1$  et  $H \neq d/2$ .

☞ Accroissements stationnaires.

☞ Localement autosimilaire d'exposant  $H$ , champ tangent FBM.

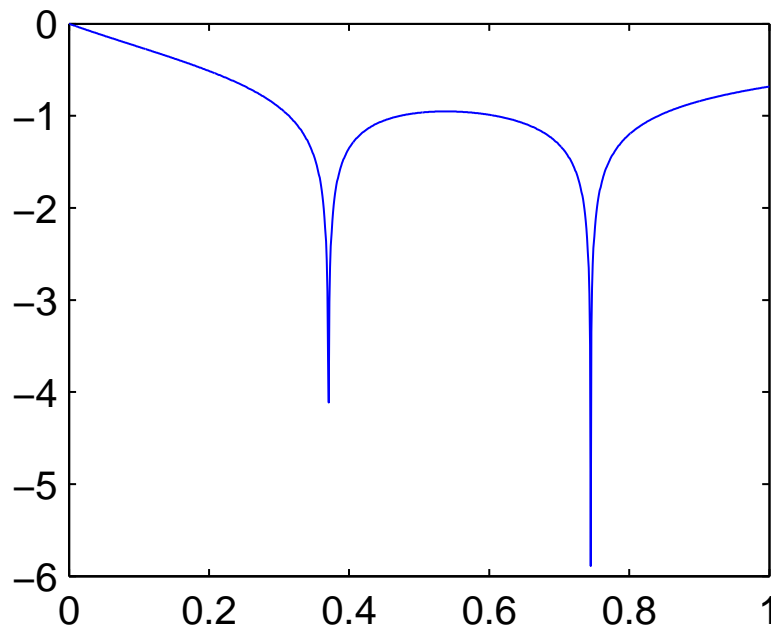
Sous l'hypothèse  $0 < \nu(\mathbb{R}) < +\infty$ ,

☞ Vitesse de convergence p.s. :  $N^{-\varepsilon}$  avec  $\varepsilon < (1 - H)/d$ .

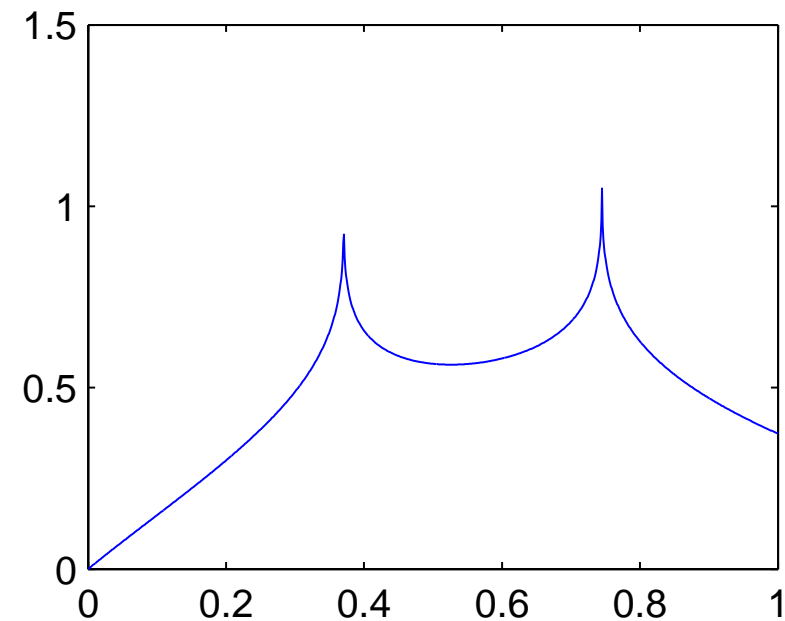
☞ Contrôle de l'erreur en norme  $L^2$ .

### Moving Average Fractional Lévy Motions

$$\nu(dv) = \frac{1}{2} (\delta_{-1} + \delta_1)$$



$H = 0.3$



$H = 0.7$

## Real Harmonizable Fractional Lévy Motions

$$X_H(x) = 2\Re \left( \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}} \frac{e^{-ix \cdot \xi} - 1}{\|\xi\|^{H+d/2}} z(N - n)(d\xi, dz) \right)$$

avec  $\int_{\mathbb{C}} |z|^p \nu(dz) < +\infty$ .

☞ Accroissements stationnaires.

☞ Localement autosimilaire d'exposant  $H$ , champ tangent FBM.

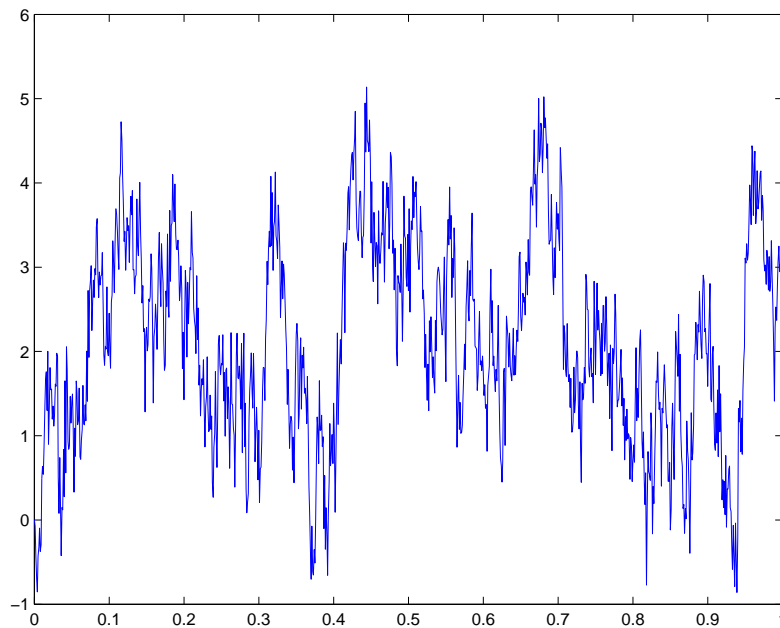
Sous l'hypothèse  $0 < \nu(\mathbb{C}) < +\infty$ ,

☞ Vitesse de convergence p.s. :  $N^{-\varepsilon}$  avec  $\varepsilon < H/d$ .

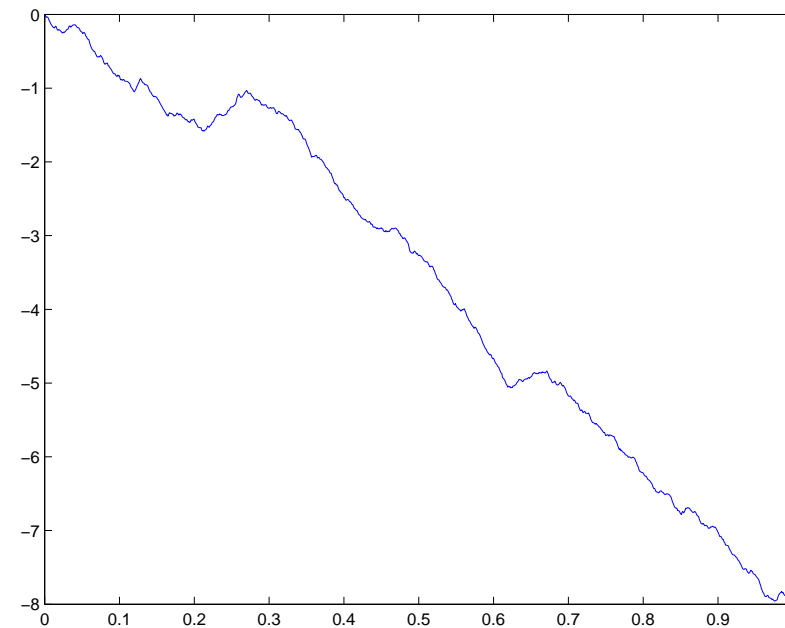
☞ Contrôle de l'erreur en norme  $L^2$ .

## Real Harmonizable Fractional Lévy Motions

$\nu(dz)$  = probabilité uniforme sur  $\mathcal{C}(0, 1)$ .



$H = 0.3$



$H = 0.8$

## Approximation gaussienne

Supposons  $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$ . Alors,  $X^f = X_{\varepsilon,1}^f + X_{\varepsilon,2}^f$  avec

$$X_{\varepsilon,1}^f(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} f(x, \xi) v \mathbf{1}_{|v| < \varepsilon} (N(d\xi, dv) - (|f(x, \xi)v| \vee 1)^{-1} n(d\xi, dv))$$

et

$$X_{\varepsilon,2}^f(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} f(x, \xi) v \mathbf{1}_{|v| \geq \varepsilon} (N(d\xi, dv) - (|f(x, \xi)v| \vee 1)^{-1} n(d\xi, dv)).$$

Alors

$$X_{\varepsilon,i}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) \Lambda_{\varepsilon,i}(d\xi)$$

avec  $\Lambda_{\varepsilon,i}$  associée à une mesure de Poisson  $N_{\varepsilon,i}$ .

☞  $n_{\varepsilon,1}(dv) = \mathbf{1}_{|v| < \varepsilon} n(dv)$  et  $n_{\varepsilon,2}(dv) = \mathbf{1}_{|v| \geq \varepsilon} n(dv)$ .

☞  $X_{\varepsilon,1}$  et  $X_{\varepsilon,2}$  indépendants.

☞  $X_{\varepsilon,2} \rightsquigarrow$  Série de bruits généralisés.

**Notation**  $\sigma(\varepsilon) = \left( \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v^2 \nu(dv) \right)^{1/2}.$

**Proposition 5** *Supposons que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $f(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^d)$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty$ . Alors,*

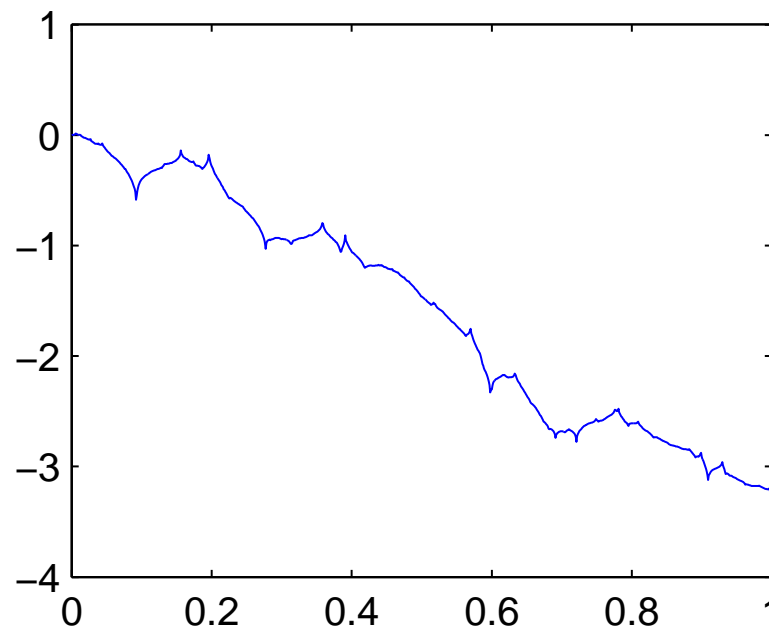
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left( \frac{X_{\varepsilon,1}^f(x)}{\sigma(\varepsilon)} \right)_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \left( W^f(x) \right)_{x \in \mathbb{R}^d},$$

avec  $W(d\xi)$  a une mesure aléatoire gaussienne et  $W^f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) W(d\xi)$ .

- ☞ Approximation de  $X_{\varepsilon,1}^f$  par  $\sigma(\varepsilon)W^f$ .
- ☞ Dans les exemples,  $W^f$  est un FBM.
- ☞ Contrôle de l'erreur : Bornes de Berry-Esseen.

### Moving Average Fractional Lévy Motions

$$\nu(dv) = |v|^{-1-\alpha} \mathbf{1}_{|v| \leq 1}, \quad 0 < \alpha < 2.$$



$$H = 0.8$$

- ☞ Vitesse de convergence de la partie série :  $N^{-\delta}$  avec  $\delta < (1 - H)/d$ .
- ☞ Approximation de  $X_{\varepsilon,1}^f$  par  $\sigma(\varepsilon)B_H$ .

### Moving Average Fractional Stable Motions

$$X_H(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \|x - \xi\|^{H-d/\alpha} - \|\xi\|^{H-d/\alpha} \right) \Lambda(d\xi)$$

avec  $\nu(dv) = \frac{1}{|v|^{1+\alpha}}$ ,  $0 < \alpha < 2$ ,  $0 < H < 1$  et  $H \neq d/\alpha$ .

☞ Accroissements stationnaires.

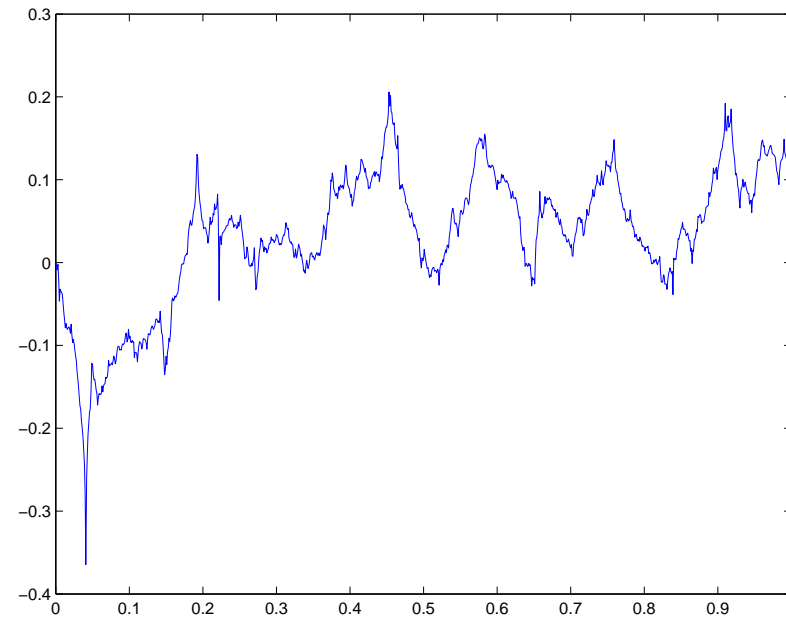
☞ Autosimilaire d'ordre  $H$ .

☞ Vitesse de convergence p.s. de la partie série :  $N^{-\delta}$  avec  $\delta < (1 - H)/d$ .

☞ Approximation de  $X_{\varepsilon,1}^f$  par  $\sigma(\varepsilon)B_{H-d/\alpha+d/2}$ . Ce qui suppose  $1 > H > d/\alpha - d/2$ .

## Moving Average Fractional Stable Motions

Indice de stabilité :  $\alpha = 1.5$ .



$$H = 0.8$$

### Linear Fractional Stable Motions

$$X_H(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left( (x - \xi)_+^{H-1/\alpha} - (-\xi)_+^{H-1/\alpha} \right) \Lambda(d\xi)$$

avec  $\int_{\mathbb{R}} |v|^p \nu(dv) < +\infty$ ,  $0 < H < 1$  et  $H \neq 1/\alpha$ .

☞ Accroissements stationnaires.

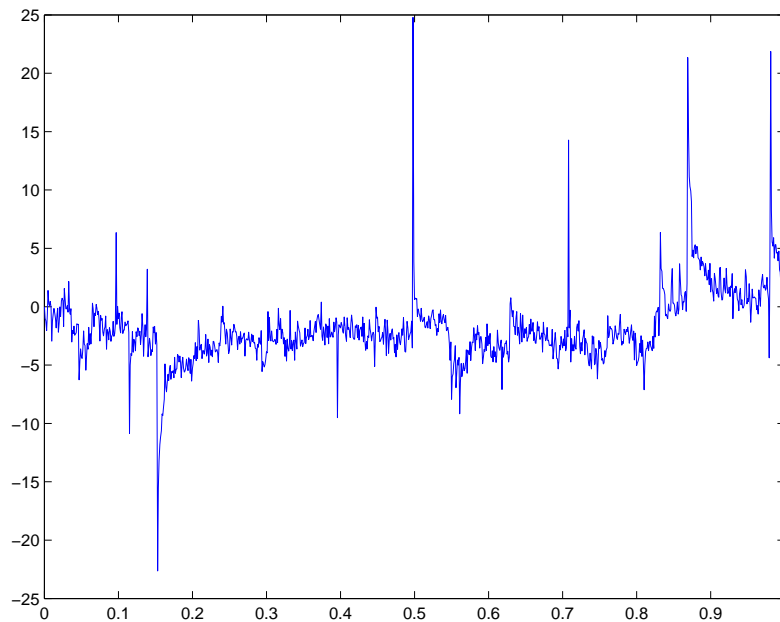
☞ Autosimilaire d'ordre  $H$ .

☞ Vitesse de convergence p.s. :  $N^{-\delta}$  avec  $\delta < (1 - H)$ .

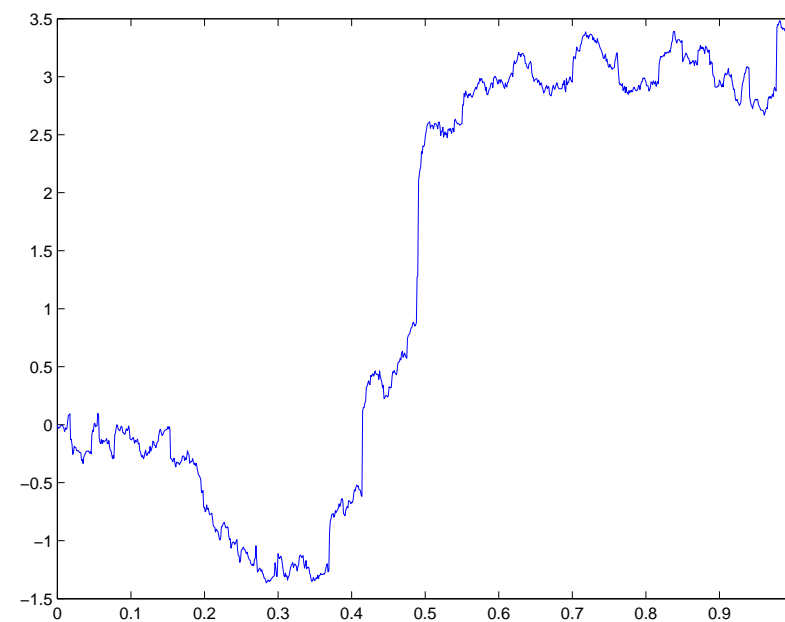
☞ Approximation gaussienne :  $\sigma(\varepsilon) B_{H-1/\alpha+1/2}$  pour  $H > 1/\alpha - 1/2$ .

## Linear Fractional Stable Motions

Indice de stabilité :  $\alpha = 1.5$ .



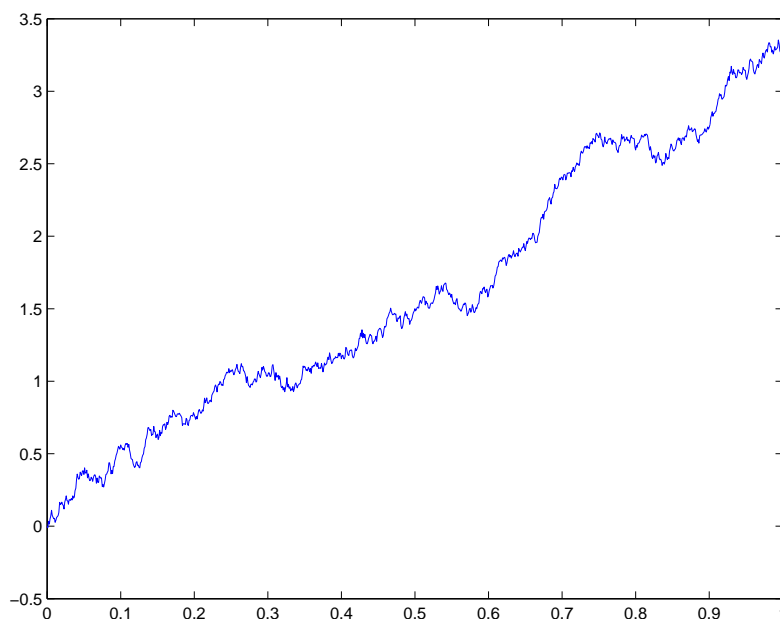
$$H = 0.2 < 1/\alpha$$



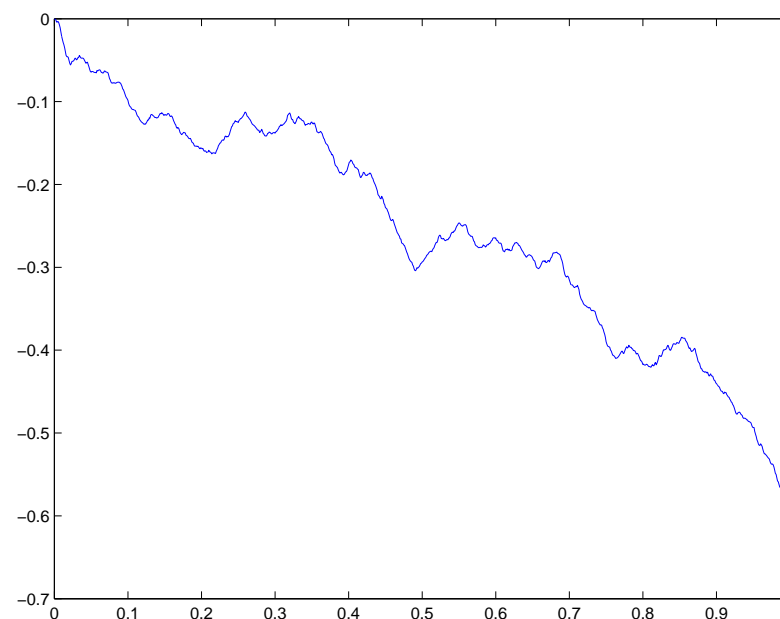
$$H = 0.7 > 1/\alpha$$

## Real Harmonizable Fractional Stable Motions

Indice de stabilité :  $\alpha = 1.5$ .



$H = 0.3$



$H = 0.7$