

Éléments de Traitement du Signal

Patrick Flandrin

1 Signaux et information

1.1 Qu'est-ce qu'un signal ?

Par définition, un signal est le *support physique d'une information*. Il s'agit donc d'une notion tout à fait générale que l'on peut rencontrer dans des domaines aussi variés que l'électricité, l'électronique, l'acoustique, l'optique, la mécanique, l'astronomie, la biologie, l'économie, etc. En fait, il y a signal dès qu'il y a mesure et/ou transmission d'information d'une source vers un destinataire.

Traiter un signal, c'est essentiellement en extraire l'information que l'on juge utile, la mettre en forme pour mieux l'analyser, la transmettre ou la stocker, la nettoyer de parasites éventuels.

L'usage veut que l'on fasse généralement la distinction entre le signal, qui porte l'information utile, et le bruit qui le parasite, ce dernier étant par nature inconnu et, dans une certaine mesure imprévisible.

1.2 Structure d'une chaîne de traitement

Le signal matérialise le voyage d'une information. On peut alors distinguer un certain nombre d'opérations ou de situations qui sont communes à tout chaîne de traitement. On peut en tout premier lieu distinguer les opérations de

1. *pré-traitement*, qui sont essentiellement relatives à la prise d'information elle-même, aux capteurs et à leurs propriétés ;
2. *traitement* proprement dit, qui mettent en jeu des transformations et/ou modifications ;
3. *post-traitement*, qui incluent davantage des actions (on parle alors plutôt d'automatique) ou des méthodes symboliques ou de contexte (vision, intelligence artificielle, etc.).

D'une manière un tout petit peu plus formelle, on peut résumer une chaîne de Traitement du Signal par le schéma de la Figure 1, mettant en jeu plusieurs espaces et des applications entre ces espaces.

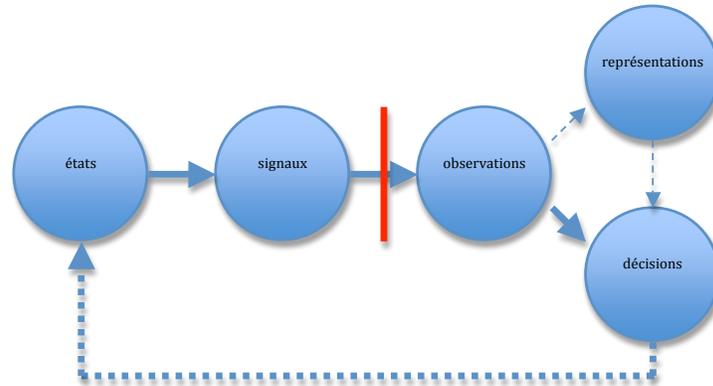


Figure 1: Chaîne de Traitement du Signal

Les espaces sont ceux des

- *états* : c'est là que se trouve l'information utile.
- *signaux* : ce sont eux qui matérialisent les états possibles.
- *observables* : ce sont les seules grandeurs disponibles pour l'utilisateur.
- *décisions* (isomorphe à l'espace des états) : c'est là que se matérialisent les opérations relatives aux signaux.
- *représentations* : elles permettent de changer la façon dont on "regarde" un signal et peuvent soit aider à l'analyse seule, soit constituer un détour utile pour construire une décision.

Les liens entre ces différents espaces correspondent à des opérations de

- *codage* entre états et signaux.
- *transmission* (au sens large) entre signaux et observables : on parle de canal.
- *règles de décision* entre observables et décisions.

On peut donc formuler une problématique générale du Traitement du Signal de la façon suivante :

Il s'agit d'élaborer la meilleure règle de décision, c'est-à-dire celle qui, à partir des seules données observables, permet de caractériser au mieux une information utile véhiculée par un signal.

Il est clair qu'un tel objectif nécessite de préciser ce que l'on entend par "meilleure" et par "au mieux". Il faudra donc définir des critères qu'il s'agira d'optimiser. Par ailleurs, l'objectif ne pourra être atteint que si un certain nombre d'informations (a priori) supplémentaires sont disponibles. Celles-ci pourront concerner

- la nature ou les états possibles d'un système.
- le type de codage.
- des informations relatives au canal de transmission et au bruit d'observation.
- ...

Ceci étant supposé, le schéma décrit ci-dessus permet d'englober plusieurs des tâches essentielles que l'on rencontre en Traitement du Signal :

- la *détection* : l'espace des états est alors discret (voire binaire) et le problème posé est de savoir si une observation donnée correspond à un signal utile mélangé à du bruit ou à du bruit seul.
- l'*estimation* (de paramètres) : il s'agit cette fois, et toujours à partir d'une observation imparfaite, de caractériser un signal par un jeu de paramètres qui le définissent.
- le *filtrage* : il s'agit alors d'estimer un signal dans son ensemble et non par l'intermédiaire d'un petit nombre de paramètres caractéristiques.

Ces tâches élémentaires apparaissent souvent couplées, les problèmes réels faisant fréquemment intervenir simultanément des opérations de filtrage et/ou de détection-estimation (par exemple en poursuite).

1.3 Classes de signaux

1.3.1 Signaux 1D, multi-D et images

Un signal se présente le plus souvent sous la forme d'une grandeur de dimension 1 évoluant en fonction du temps : on parle alors de signal temporel et l'on note $x(t), t \in \mathbb{R}$. C'est typiquement la situation que l'on rencontre en sortie d'un microphone, d'un accéléromètre, etc.

La variable dont dépend un signal n'est cependant pas nécessairement le temps. Ce peut être par exemple une variable d'espace, que ce soit directement (imagerie) ou indirectement (comme dans le cas du balayage spatio-temporel d'une image de télévision). Ce peut également être une variable de fréquence (spectromètre) : on notera alors le signal $X(f)$.

Lorsque plusieurs capteurs temporels sont utilisés simultanément, la collection des différents signaux scalaires fournit un signal multidimensionnel ou vectoriel. C'est en particulier le cas des antennes formées de microphones (acoustique aérienne), d'hydrophones (acoustique sous-marine) ou de géophones (sismique).

Si les dimensions qui constituent un signal multidimensionnel sont maintenant de même nature, on parle d'image, que ce soit en 2D ou 3D. Un certain nombre de problèmes de Traitement d'Image, dits "bas niveau" (filtrage, segmentation, etc.) se transposent directement à partir du cas 1D. Certains autres, dits "haut niveau" sont spécifiques aux images et requièrent des concepts d'interprétation, de "vision", voire d'intelligence artificielle.

1.3.2 Déterministe et aléatoire

Une distinction importante, car elle est souvent liée à la différence existant entre signal et bruit, est celle que l'on peut faire entre déterministe et aléatoire.

La notion de signal déterministe est étroitement liée au concept de reproductibilité exacte, et celle de signal aléatoire à celui d'épreuve et de reproductibilité statistique. En supposant qu'il soit possible de rejouer les conditions expérimentales ayant donné naissance à un signal, le caractère déterministe se manifeste par une reproduction à l'identique de la situation observée. Ceci contraste avec le caractère aléatoire pour lequel chaque épreuve nouvelle réserve une part, imprévisible, de variations, seules les propriétés d'ensemble (i.e., les lois statistiques qui régissent le signal) ayant une permanence. Lorsque l'on veut expliciter le caractère aléatoire d'un signal et mettre en avant sa dépendance vis-à-vis d'une épreuve ω , on note $x(t, \omega)$.

D'une certaine façon, un signal déterministe (on dit encore certain), n'est qu'un cas particulier de signal aléatoire pour lequel la densité de probabilité est une masse ponctuelle.

Plusieurs remarques peuvent être faites quant à la distinction entre déterministe et aléatoire :

- dans un mélange “signal + bruit”, le terme “signal” n'est pas nécessairement déterministe. On peut très bien s'intéresser à un bruit dans un bruit : c'est le cas par exemple des sons non-voisés en parole bruitée.
- la notion de signal déterministe ou aléatoire est souvent liée à une propriété de système générateur d'un signal : l'un crée de l'ordre, l'autre du désordre. Si déterministe est lié à reproductibilité, aléatoire se trouve implicitement lié à imprédictibilité.
- aléatoire et imprédictible ne sont cependant pas équivalents. Un système déterministe (au sens qu'il est régi par des équations déterminées fournissant des solutions théoriques reproductibles) mais présentant une dépendance sensitive aux conditions initiales peut générer des signaux certains (en théorie) mais imprédictibles (en pratique) : on parle alors de chaos déterministe.

1.3.3 Continu et discret

Les capteurs physiques fournissent souvent une information dépendant d'un “temps” continu. Il peut arriver cependant que ce dernier soit discret, que ce soit par échantillonnage (prélèvement de valeurs à certains instants, ou à certaines positions spatiales, seulement) ou par nature. On parle dans ce dernier cas de séries temporelles (“time series”) ou séries chronologiques : on les rencontre par exemple en économie. On note un signal à temps discret $x[n], n \in \mathbb{Z}$.

D'une façon analogue, les valeurs prises par un signal peuvent être continues ou discrètes. Là encore, le caractère discret (en amplitude) d'un signal peut provenir soit d'une quantification (le capteur ne délivre qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable de valeurs), soit de la nature même de l'information considérée (par exemple une population).

Bien entendu, les différentes situations peuvent se mélanger, un signal pouvant être à temps continu ou discret, quantifié ou non.

2 Signaux déterministes

Lorsqu'aucun caractère aléatoire n'entre dans sa génération ou son observation, un signal est décrit par une fonction *déterministe* du temps $x(t) \in \mathbb{R}$, à laquelle peuvent être rattachées un certain nombre de grandeurs.

On définit ainsi, lorsqu'il est de carré sommable, son *énergie* :

$$E_x := \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt,$$

la quantité $x^2(t)$ s'interprétant comme sa *puissance instantanée*. Si ce n'est pas le cas (on rencontrera cette situation pour les *trajectoires* des signaux aléatoires stationnaires), une classe utile de signaux est celle dite à *puissance moyenne finie*, pour laquelle

$$P_x := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt < \infty.$$

En ce qui concerne les signaux d'énergie finie, une description duale particulièrement importante est fournie par leur *représentation de Fourier* :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt,$$

que l'on peut voir comme la projection du signal analysé $x(t)$ sur une famille d'ondes monochromatiques $e_f(t) := \exp\{i2\pi ft\}$:

$$X(f) = \langle x, e_f \rangle,$$

avec la formule de reconstruction

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x, e_f \rangle e_f(t) df.$$

La transformation de Fourier des signaux $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ étant une isométrie, on a (formule de Plancherel)

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df = \langle X, Y \rangle,$$

d'où l'on déduit (Théorème de Parseval) que l'énergie d'un signal admet la décomposition spectrale équivalente :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df,$$

la quantité $\Gamma_x(f) := |X(f)|^2$ étant naturellement appelée *densité spectrale d'énergie*.

Par transformation de Fourier inverse, il est facile de voir que l'on a :

$$\begin{aligned}\gamma_x(\tau) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(f) e^{i2\pi f\tau} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t - \tau) dt.\end{aligned}$$

Cette fonction $\gamma_x(\tau)$ est appelée *fonction de corrélation* : elle mesure, au sens du produit scalaire des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, le degré de ressemblance qui existe entre un signal et ses translatées. Par définition, elle est *symétrique* ($\gamma_x(-\tau) = \gamma_x(\tau)$) et, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, *maximale à l'origine* ($|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0) = E_x$).

Exemple — Si un signal $x(t)$ est composé de la superposition d'une forme d'onde de référence $y(t)$ et d'un "écho", c'est-à-dire d'une copie retardée et atténuée :

$$x(t) = y(t) + \alpha y(t - T),$$

le caractère bilinéaire de la fonction de corrélation conduit à :

$$\gamma_x(\tau) = (1 + \alpha^2) \gamma_y(\tau) + \alpha \gamma_y(\tau - T) + \alpha \gamma_y(\tau + T).$$

3 Signaux aléatoires

Une propriété importante des signaux aléatoires est la dépendance temporelle de leurs lois d'ensemble. Si l'on voit un signal aléatoire $x(t, \omega)$ comme la collection de l'infinité possible de ses *épreuves* ou *réalisations* (cf. Figure 2), sa description se rattache aux liens statistiques entre les valeurs de celles-ci à différents instants.

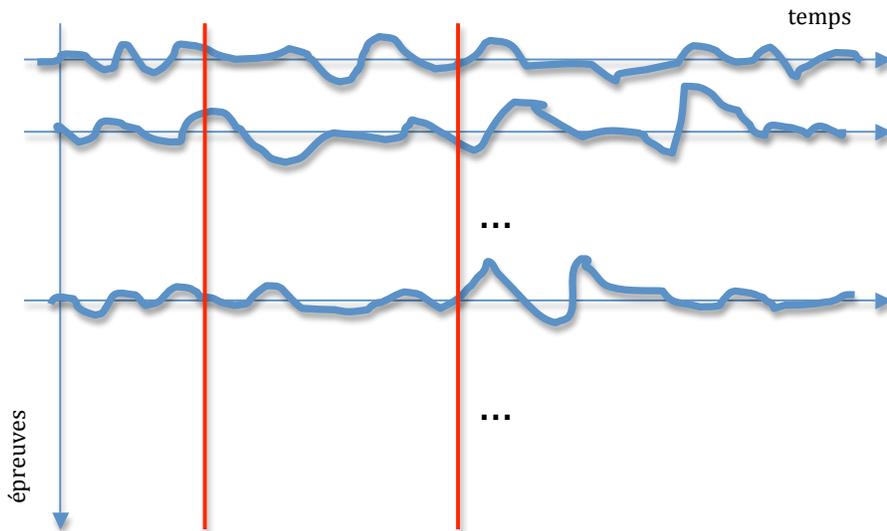


Figure 2: Signal aléatoire

3.1 Description à un instant

Pour un instant donné t , l'ensemble des valeurs possibles de $x(t, \omega)$ est distribué selon une certaine densité de probabilité $p_X(x; t)$, définie par (on supposera qu'elle existe) :

$$p_X(x; t) := \frac{\partial F_X(x; t)}{\partial t},$$

avec :

$$F_X(x; t) := \Pr \{x(t) \leq x\}.$$

Remarque — Cette densité n'est pas nécessairement la même à tout instant. Ainsi, un signal gaussien peut être à moyenne $m(t)$ variable dans le temps, sa densité instantanée prenant la forme

$$p(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - m(t))^2\right\}.$$

On déduit de la densité $p_X(x; t)$ une première caractéristique importante, du premier ordre, qui est la moyenne d'ensemble, définie par

$$\mu_x(t) := \mathbb{E}\{x(t)\} = \int x p_X(x; t) dx,$$

et la quantité de second ordre associée, qui est la variance définie par

$$\sigma_x^2(t) := \mathbb{E}\{(x(t) - \mu_x(t))^2\} = \int (x - \mu_x(t))^2 p_X(x; t) dx.$$

(On vérifie aisément que, dans l'exemple gaussien précédent, on a bien $\mu_x(t) = m(t)$ et $\sigma_x^2(t) = \sigma^2$.)

De manière plus générale, on calcule la moyenne d'ensemble d'une quantité donnée $f(x)$, fonction du signal analysé, selon

$$\mathbb{E}\{f\} = \int f(x) p_X(x; t) dx.$$

3.2 Description à plusieurs instants

Si l'on s'intéresse maintenant à la description du signal $x(t, \omega)$ relativement à un ensemble $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ d'instantants distincts, il faut avoir la connaissance de la densité conjointe $p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$, définie par

$$p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) := \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n},$$

avec

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) := \Pr \{x(t_1) \leq x_1, x(t_2) \leq x_2, \dots, x(t_n) \leq x_n\}.$$

La moyenne d'ensemble d'une quantité $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s'en déduit selon

$$\mathbb{E}\{F\} = \int \int \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_n) p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Avec $n = 2$, le choix

$$F(x_1, x_2) := (x_1 - \mu_x(t_1))(x_2 - \mu_x(t_2))$$

conduit ainsi à la *fonction de covariance*, définie par

$$r_x(t_1, t_2) := \mathbb{E}\{(x(t_1) - \mu_x(t_1))(x(t_2) - \mu_x(t_2))\},$$

dont la variance est le cas particulier lorsque $t_1 = t_2 = t$:

$$\sigma_x^2(t) = r_x(t, t).$$

3.3 Stationnarité

Si les descriptions précédentes sont invariantes par translation temporelle, c'est-à-dire si elles ne dépendent pas d'un temps absolu mais ne sont relatives qu'à des différences de temps, on parle de *stationnarité*. Bien que la stationnarité puisse être définie à tous les ordres, c'est la *stationnarité de second ordre* qui est la plus importante en pratique. Elle stipule d'une part que

$$\mathbb{E}\{x(t)\} = m_x,$$

c'est-à-dire que la valeur moyenne soit une constante indépendante du temps, et d'autre part que

$$r_x(t_1, t_2) = \gamma_x(t_1 - t_2),$$

c'est-à-dire que la covariance stationnaire soit une fonction, appelée aussi *fonction de corrélation*, qui ne dépend que de la différence des dates considérées, avec pour conséquence que la variance qui s'en déduit devient une quantité indépendante du temps :

$$\sigma_x^2(t) = r_x(t, t) = \gamma_x(0).$$

On peut alors montrer que la fonction de corrélation normalisée

$$\tilde{\gamma}_x(\tau) := \frac{\gamma_x(\tau)}{\gamma_x(0)}$$

est maximale à l'origine (où elle prend la valeur $\gamma_x(0) = 1$) et telle que $|\tilde{\gamma}_x(\tau)| \leq 1$. Pour montrer cette dernière propriété, il suffit de construire, pour un t et un τ fixés, les deux variables $x_1 := x(t)$ et $x_2 := x(t + \tau)$. On est alors assuré que, pour tout nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\{(\alpha x_1 + x_2)^2\} \geq 0$, ce qui conduit (en supposant le signal stationnaire centré) à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(\alpha x_1 + x_2)^2\} &= \alpha^2 \mathbb{E}\{x_1^2\} + 2\alpha \mathbb{E}\{x_1 x_2\} + \mathbb{E}\{x_2^2\} \\ &= \alpha^2 \mathbb{E}\{x^2(t)\} + 2\alpha \mathbb{E}\{x(t)x(t + \tau)\} + \mathbb{E}\{x^2(t + \tau)\} \\ &= \alpha^2 \gamma_x(0) + 2\alpha \gamma_x(\tau) + \gamma_x(0). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\alpha^2 + 2\tilde{\gamma}_x(\tau)\alpha + 1 \geq 0$$

pour tout α , ce qui impose au discriminant (réduit) Δ d'être toujours négatif, soit

$$\Delta = \tilde{\gamma}_x^2(\tau) - 1 \leq 0,$$

d'où le résultat.

Remarque — Tout comme dans le cas déterministe, la fonction de corrélation stationnaire $\gamma_x(\tau)$ mesure encore un degré de ressemblance entre un signal (cette fois-ci aléatoire) et ses translatées temporelles, mais au sens du produit scalaire défini par l'espérance mathématique.

Une autre propriété importante des fonctions de corrélation stationnaires est leur caractère défini non négatif. En effet, si l'on considère un signal stationnaire $x(t)$ à divers instants t_n et une famille quelconque de nombres complexes $\lambda_n \in \mathbb{C}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E} \left\{ \left| \sum_n \lambda_n x(t_n) \right|^2 \right\} \\ &= \sum_n \sum_m \lambda_n \lambda_m^* \mathbb{E}\{x(t_n)x(t_m)\} \\ &= \sum_n \sum_m \lambda_n \lambda_m^* \gamma_X(t_n - t_m). \end{aligned}$$

Par suite, le fonction de corrélation $\gamma_X(\tau)$ a pour transformée de Fourier

une quantité garantie d'être partout non négative : c'est (théorème de Wiener-Khintchine) la *densité spectrale de puissance* définie par :

$$\Gamma_x(f) := \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau.$$

Bien que prendre la transformée de Fourier d'une fonction aléatoire nécessite des précautions que l'on ne détaillera pas, on peut donner de ce résultat une vision alternative. En effet, en écrivant formellement que :

$$\begin{aligned} \gamma_x(\tau) &= \mathbb{E} \left\{ \iint X(f') X^*(f) e^{i2\pi f't} e^{-i2\pi f(t-\tau)} df' df \right\} \\ &= \int e^{i2\pi f\tau} \left(\int \mathbb{E}\{X(f')X^*(f)\} e^{i2\pi(f'-f)t} df' \right) df, \end{aligned}$$

on en déduit par identification que

$$\Gamma_x(f) = \int \mathbb{E}\{X(f')X^*(f)\} e^{i2\pi(f'-f)t} df'.$$

Le membre de gauche devant être indépendant de t , il faut nécessairement que l'intégrale de droite ne mette en jeu de valeurs de l'intégrand que pour la diagonale $f = f'$, soit encore $\mathbb{E}\{X(f')X^*(f)\} = \Gamma_x(f) \delta(f - f')$. On en conclut, toujours formellement, que les contributions spectrales d'un signal stationnaire sont décorréélées pour des fréquences différentes, et que la densité spectrale se comporte comme $\Gamma_x(f) = \mathbb{E}\{|X(f)|^2\}$.

Les notions de fonction de corrélation et de densité spectrale, propriétés de second ordre relatives à un même signal, peuvent s'étendre à deux signaux différents. On définit ainsi la fonction d'*intercorrélation* entre deux signaux *conjointement stationnaires* $x(t)$ et $y(t)$:

$$\gamma_{x,y}(\tau) := \mathbb{E}\{x(t)y(t-\tau)\},$$

d'où l'on déduit l'*interspectre* :

$$\Gamma_{x,y}(f) := \int \gamma_{x,y}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau.$$

Il est à noter que, contrairement à une densité spectrale qui est une quantité réelle non négative, un interspectre est à valeurs complexes. Une mesure

liée de la dépendance statistique entre deux signaux, fréquence par fréquence, est la *fonction de cohérence*, définie par :

$$C_{x,y}(f) := \frac{|\Gamma_{x,y}(f)|}{\sqrt{\Gamma_x(f)\Gamma_y(f)}},$$

en notant par simplicité $\Gamma_x(f) := \Gamma_{x,x}(f)$. On y reviendra lors de l'étude du filtrage linéaire.

3.4 Ergodisme

Si l'on voit le signal aléatoire $x(t, \omega)$ comme un tableau où le temps t court horizontalement et où les différentes épreuves ω s'alignent en parallèle (cf. Figure 2), les descriptions considérées jusqu'à présent sont "verticales" au sens où elles opèrent des moyennes sur les réalisations possibles pour un (ou des) temps fixé(s). En pratique cependant, une telle approche n'est que très rarement applicable dans la mesure où l'observateur ne dispose en général que d'une seule réalisation.

Dans le cas stationnaire, le fait que les propriétés statistiques soient invariantes dans le temps suggère qu'en ne considérant qu'une seule trajectoire pendant suffisamment longtemps, on devrait pouvoir visiter tous les états possibles du signal et accéder, en les moyennant "horizontalement", à un résultat analogue à celui que l'on obtiendrait en moyennant toutes les réalisations "verticalement". La formalisation de cette intuition correspond à la notion d'*ergodisme*.

Dans les cas de la moyenne et de la corrélation, l'hypothèse d'ergodisme (car il s'agit en général d'une hypothèse qu'il est très difficile de valider en pratique) conduit aux identifications respectives :

$$\mathbb{E}\{x(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt;$$

$$\mathbb{E}\{x(t)x(t \pm \tau)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t \pm \tau) dt.$$

Ceci revêt une importance particulière lorsqu'il s'agit d'estimer les quantités en question.

3.5 Décomposition de Karhunen-Loève

3.5.1 Principe

Soit $b(t)$ une fonction aléatoire

1. définie sur un intervalle fermé $[0, T]$;
2. continue en moyenne quadratique, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E} \{ [b(t + \Delta t) - b(t)]^2 \} = 0,$$

soit encore, dans le cas stationnaire pour lequel

$$r_b(t, s) := \mathbb{E}\{b(t)b^*(s)\} =: \gamma_b(t - s),$$

telle que la fonction d'autocorrélation $\gamma_b(\tau)$ soit continue à l'origine :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\gamma_b(0) - \gamma_b(\Delta t)] = 0.$$

La *décomposition de Karhunen-Loève* se propose alors de représenter la fonction aléatoire $b(t)$ par une *combinaison linéaire de fonctions certaines dont les poids sont aléatoires*. Si l'on écrit explicitement la fonction aléatoire $b(t, \omega)$ pour signifier sa dépendance vis-à-vis des épreuves ω (ce que l'on ne fera pas dans la suite pour alléger les notations), la décomposition recherchée revient à "séparer les variables" selon :

$$b(t, \omega) = \sum_i b_i(\omega) \varphi_i(t).$$

La spécificité supplémentaire de la décomposition de Karhunen-Loève est d'être associée à une propriété de *double orthogonalité* garantissant :

1. la *décorrélation* entre les coefficients de la décomposition :

$$\mathbb{E} \{ b_i b_j^* \} = \mathbb{E} \{ |b_i|^2 \} \cdot \delta_{ij};$$

2. l'*orthogonalité* au sens des fonctions de $L^2([0, T])$ des fonctions de base de la décomposition :

$$\int_0^T \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \delta_{ij}.$$

Ceci permet d'obtenir les poids b_i comme projections de $b(t)$ sur les fonctions $\varphi_i(t)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T b(t) \varphi_i^*(t) dt &= \int_0^T \left[\sum_j b_j \varphi_j(t) \right] \varphi_i^*(t) dt \\
 &= \sum_j b_j \left[\int_0^T \varphi_j(t) \varphi_i^*(t) dt \right] \\
 &= \sum_j b_j \delta_{ji} \\
 &= b_i.
 \end{aligned}$$

De façon à trouver les fonctions $\varphi_i(t)$ permettant la double orthogonalité, on part de la décomposition

$$b(t) = \sum_j b_j \varphi_j(t)$$

et, par multiplication par b_i^* , on forme

$$\begin{aligned}
 b(t) b_i^* &= \left[\sum_j b_j \varphi_j(t) \right] b_i^* \\
 &= \sum_j b_j b_i^* \varphi_j(t).
 \end{aligned}$$

En en prenant l'espérance mathématique, il vient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \{ b(t) b_i^* \} &= \mathbb{E} \left\{ \sum_j b_j b_i^* \varphi_j(t) \right\} \\
 &= \sum_j \mathbb{E} \{ b_j b_i^* \} \varphi_j(t) \\
 &= \sum_j \mathbb{E} \{ |b_j|^2 \} \delta_{ji} \varphi_j(t) \\
 &= \mathbb{E} \{ |b_i|^2 \} \varphi_i(t)
 \end{aligned}$$

si les b_i sont mutuellement décorrélés. Or, on a par ailleurs :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \{b(t) b_i^*\} &= \mathbb{E} \left\{ b(t) \left[\int_0^T b(u) \varphi_i^*(u) du \right]^* \right\} \\ &= \int_0^T \mathbb{E} \{b(t) b^*(u)\} \varphi_i(u) du \\ &= \int_0^T r_b(t, u) \varphi_i(u) du.\end{aligned}$$

Par suite, les fonctions $\varphi_i(t)$ permettant la décomposition doublement orthogonale de Karhunen-Loève sont celles pour lesquelles

$$\int_0^T r_b(t, u) \varphi_i(u) du = \lambda_i \varphi_i(t); t \in [0, T],$$

avec

$$\lambda_i = \mathbb{E} \{|b_i|^2\}.$$

Ce sont donc les *fonctions propres* de la covariance, la puissance des coefficients associés se mesurant quant à elle par la valeur propre correspondante.

3.5.2 Quelques propriétés

Propriété 1 (résolution de l'identité). Comme

$$b_i = \int_0^T b(t) \varphi_i^*(t) dt,$$

on en déduit que

$$b_i \varphi_i(u) = \int_0^T b(t) \varphi_i^*(t) \varphi_i(u) du$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\sum_i b_i \varphi_i(u) &= b(u) \\ &= \sum_i \int_0^T b(t) \varphi_i^*(t) \varphi_i(u) du \\ &= \int_0^T b(t) \left[\sum_i \varphi_i^*(t) \varphi_i(u) \right] dt.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_i \varphi_i^*(t) \varphi_i(u) = \delta(t - u).$$

Propriété 2 (Théorème de Mercer). Sachant que

$$\lambda_i \varphi_i(t) = \int_0^T r_b(t, v) \varphi_i(v) dv,$$

il vient :

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_i \varphi_i(t) \varphi_i^*(u) &= \sum_i \left[\int_0^T r_b(t, v) \varphi_i(v) dv \right] \varphi_i^*(u) \\ &= \int_0^T r_b(t, v) \left[\sum_i \varphi_i^*(u) \varphi_i(v) \right] dv \\ &= \int_0^T r_b(t, v) \delta(u - v) dv \end{aligned}$$

d'après la Propriété 1. On en déduit (*Théorème de Mercer*) que :

$$r_b(t, u) = \sum_i \lambda_i \varphi_i(t) \varphi_i^*(u).$$

Propriété 3 (trace invariante). Partant du théorème de Mercer, on obtient directement

$$r_b(t, t) = \sum_i \lambda_i |\varphi_i(t)|^2$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_0^T r_b(t, t) dt &= \sum_i \lambda_i \int_0^T |\varphi_i(t)|^2 dt \\ &= \sum_i \lambda_i, \end{aligned}$$

soit la propriété de *trace invariante* :

$$\sum_i \lambda_i = \int_0^T r_b(t, t) dt.$$

On montre également que :

$$\sum_i \lambda_i^2 = \iint_0^T r_b(t, u) dt du.$$

Propriété 4 (bruit blanc stationnaire). Dans le cas particulier où $b(t)$ est *stationnaire*, l'équation de Karhunen-Loève devient :

$$\int_0^T \gamma_b(t - u) \varphi_i(u) du = \lambda_i \varphi_i(t).$$

Par suite, dans le cas d'un *bruit blanc* de densité spectrale de puissance γ_0 , on obtient :

$$\int_0^T \gamma_0 \delta(t - u) \varphi_i(u) du = \lambda_i \varphi_i(t),$$

soit encore :

$$\gamma_0 \varphi_i(t) = \lambda_i \varphi_i(t).$$

Ce résultat signifie que, dans le cas d'un bruit blanc stationnaire :

1. toute base est de Karhunen-Loève ;
2. toutes les valeurs propres sont *égales* et ont pour valeur la densité spectrale de puissance du bruit :

$$\lambda_i = \mathbb{E} \{ |b_i|^2 \} = \gamma_0.$$

En conséquence, dans le cas d'un bruit *gaussien*, centré, blanc et stationnaire, la *variance* de ses coefficients de Karhunen-Loève s'identifie à la *densité spectrale de puissance* : la connaissance de cette dernière est donc suffisante pour expliciter la densité de probabilité associée.

Propriété 5 (covariance inverse). En considérant la covariance $r_b(t, u)$ comme le noyau d'un opérateur intégral, on peut envisager de lui associer le noyau $\sigma_b(t, u)$ de l'*opérateur inverse*, défini par :

$$\int_0^T \sigma_b(t, u) r_b(u, v) du = \delta(t - v).$$

On vérifie alors que :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sigma_b(t, u) \varphi_i(u) du &= \int_0^T \sigma_b(t, u) \left[\frac{1}{\lambda_i} \int_0^T r_b(u, v) \varphi_i(v) dv \right] du \\
&= \frac{1}{\lambda_i} \int_0^T \left[\int_0^T \sigma_b(t, u) r_b(u, v) du \right] \varphi_i(v) dv \\
&= \frac{1}{\lambda_i} \int_0^T \delta(t - v) \varphi_i(v) dv \\
&= \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(t).
\end{aligned}$$

Ceci signifie que l'opérateur inverse de la covariance vérifie :

$$\int_0^T \sigma_b(t, u) \varphi_i(u) du = \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(t),$$

c'est-à-dire que ses fonctions propres sont les mêmes que celles de l'opérateur de covariance, ses valeurs propres étant par contre inverses de celles de l'opérateur direct. On en déduit en particulier (par application du Théorème de Mercer) que l'opérateur inverse de la covariance admet la décomposition :

$$\sigma_b(t, u) = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(t) \varphi_i^*(u).$$

3.5.3 Exemples

Exemple 1 (bruit à bande limitée). Supposons que le bruit $b(t)$ soit à bande limitée $[-B/2, +B/2]$ et blanc dans cette bande, c'est-à-dire tel que sa densité spectrale de puissance s'écrive :

$$\Gamma_b(f) = \gamma_0 \mathbf{1}_{[-B/2, +B/2]}(f).$$

Par transformation inverse de Fourier, on en déduit que sa fonction d'auto-corrélation (stationnaire) $\gamma_b(\tau)$ a pour valeur :

$$\gamma_b(\tau) = \gamma_0 \frac{\sin \pi B \tau}{\pi \tau}$$

et qu'il admet une décomposition sur une base de Karhunen-Loève dont les fonctions sont solutions de l'équation propre? :

$$\int_0^T \frac{\sin \pi B(t - u)}{\pi(t - u)} \varphi_i(u) du = \lambda_i \varphi_i(t); t \in [0, T].$$

De telles fonctions sont connues sous le nom de *foctions sphéroïdales aplaties* (“prolate spheroidal wave functions” en anglais). Celle associée à la plus grande valeur propre permet en particulier de maximiser l’énergie d’un signal à bande limitée B donnée sur un support temporel T fixé.

Exemple 2 (processus de Wiener). Un *processus de Wiener* $w(t)$ peut se voir comme la limite à temps continu d’une marche aléatoire. C’est un processus *non stationnaire* dont on peut montrer qu’il a pour fonction de covariance :

$$r_w(t, s) = \alpha \min(t, s); (t, s) \in [0, T]^2.$$

Reportant cette covariance dans l’équation de Karhunen-Loève, on obtient :

$$\alpha \int_0^t u \varphi_i(u) du + \alpha t \int_t^T \varphi_i(u) du = \lambda_i \varphi_i(t); t \in [0, T].$$

On vérifie alors que $\varphi_i(0) = 0$ et, en dérivant par rapport à t , on obtient :

$$\alpha \int_t^T \varphi_i(u) du = \lambda_i \dot{\varphi}_i(t).$$

On en déduit que $\dot{\varphi}_i(T) = 0$ et, en dérivant une seconde fois par rapport à t , on aboutit à l’équation différentielle :

$$\ddot{\varphi}_i(t) + \frac{\alpha}{\lambda_i} \varphi_i(t) = 0,$$

dont les solutions sont des fonctions circulaires de pulsations :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_i}}.$$

Des conditions aux bords trouvées précédemment, on déduit d’une part que

$$\varphi_i(0) = 0 \Rightarrow w(t) \propto \sin \omega_i t$$

et d’autre part que

$$\dot{\varphi}_i(T) = 0 \Rightarrow \omega_i T = (2i + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Imposant en outre aux fonctions solutions d'être de norme unité, on obtient finalement la décomposition de Karhunen-Loève du processus de Wiener sur $[0, T]$ qui s'écrit :

$$w(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_i w_i \sin \frac{(2i+1)\pi t}{2T},$$

expression dans laquelle les coefficients w_i sont *décorrélés* et de variance λ_i , soit encore :

$$\text{var}\{w_i\} = \frac{4\alpha\pi^2/T^2}{(2i+1)^2}.$$

4 Signaux numériques

4.1 Continu et discret

Bien que les signaux soient le plus souvent associés à des évolutions naturelles à temps continu, les conserver sous une telle forme peut présenter des inconvénients évidents, en particulier au niveau de l'archivage. Il est donc intéressant de disposer de représentations qui transforment un signal à temps continu (et donc décrit par une infinité non dénombrable de valeurs) en une collection discrète de nombres.

4.2 Échantillonnage

L'*échantillonnage* est l'opération consistant à représenter un signal sur un ensemble discret d'instant.

Le cas le plus simple est celui de l'échantillonnage *uniforme*, qui consiste à prélever des valeurs d'un signal à temps continu $x(t)$ à des instants équidistants $\{nT_e, n \in \mathbb{Z}\}$, multiples d'un intervalle élémentaire T_e appelé *période d'échantillonnage*.

On peut formaliser cette opération d'échantillonnage en écrivant :

$$x(t) \rightarrow x_e(t) = x(t) \sum_n T_e \delta(t - nT_e),$$

soit encore en disant que le signal échantillonné $x_e(t)$ résulte de l'action d'un "peigne de Dirac" sur le signal à temps continu, garantissant entre autres que l'on a :

$$\int x_e(t) dt = \sum_n T_e x(nT_e).$$

Comme la transformation de Fourier transforme une multiplication temporelle en une convolution fréquentielle, et un peigne temporel de période T_e en un peigne fréquentiel de période $1/T_e$:

$$\sum_n \delta(t - nT_e) \leftrightarrow \frac{1}{T_e} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right),$$

il s'ensuit que le spectre d'un signal échantillonné est le périodisé du spectre

du signal à temps continu :

$$\begin{aligned} X_e(f) &= \int X(f - \xi) \sum_n \delta\left(\xi - \frac{n}{T_e}\right) d\xi \\ &= \sum_n X\left(f - \frac{n}{T_e}\right). \end{aligned}$$

Cette propriété permet d'établir le *théorème d'échantillonnage* selon lequel un signal à bande limitée $[-B/2, +B/2]$ est entièrement décrit par la donnée de ses seuls échantillons $\{x(nT_e), n \in \mathbb{Z}\}$ si :

$$T_e \leq \frac{1}{B},$$

condition garantissant que la périodisation induite par l'échantillonnage n'altère pas le contenu spectral de la bande de base $[-B/2, +B/2]$ (dans le cas contraire, on parle de *repliement spectral*, ou encore d'*aliasing*, selon la terminologie anglo-saxonne, cf. `ex_sousech.m`).

Dans la mesure où cette condition est remplie, on peut écrire :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int X(f) e^{i2\pi ft} df \\ &= \int X_e(f) \mathbf{1}_{[-B/2, +B/2]} e^{i2\pi ft} df \\ &= \int x_e(u) \frac{\sin \pi B(t - u)}{\pi(t - u)} du \\ &= \int \sum_n x(nT_e) T_e \delta(u - nT_e) \frac{\sin \pi B(t - u)}{\pi(t - u)} du \\ &= \sum_n x(nT_e) T_e \frac{\sin \pi B(t - nT_e)}{\pi(t - nT_e)} \end{aligned}$$

soit encore :

$$x(t) = \sum_n x(nT_e) \frac{\sin \pi B(t - nT_e)}{\pi B(t - nT_e)}$$

à l'échantillonnage critique $T_e = 1/B$.

Ce résultat fournit une formule d'*interpolation* pour les signaux à bande limitée puisque toute valeur du signal peut se déduire des seules valeurs discrètes résultant de l'échantillonnage.

On choisit souvent de poser $T_e = 1$, c'est-à-dire de prendre comme unité de temps la période d'échantillonnage, ce qui revient à normaliser la bande spectrale d'analyse à l'intervalle de fréquences réduites $[-1/2, +1/2]$. On écrit alors la formule d'interpolation (dite encore de reconstitution) selon

$$x(t) = \sum_n x[n] \frac{\sin \pi(t - n)}{\pi(t - n)},$$

en adoptant la notation simplifiée $x[n] := x(nT_e)$, avec $T_e = 1$.

La condition à remplir pour un échantillonnage correct (appelée condition de Shannon ou encore de Nyquist) est une cadence *minimum* liée à l'encombrement spectral du signal à analyser. Il est clair que, si un signal de bande spectrale $[-B/2, +B/2]$ est correctement échantillonné à la fréquence de Shannon $1/B$, il l'est également à toute fréquence supérieure puisque

$$X(f) = \mathbf{1}_{[-B/2, +B/2]} X(f) = \mathbf{1}_{[-B'/2, +B'/2]} X(f)$$

pour tout $B' \geq B$.

On en déduit par transformation de Fourier que

$$x(t) = \int x(u) \frac{\sin \pi B'(t - u)}{\pi B'(t - u)} du$$

si $B' \geq B$, ce qui signifie que, dans l'espace des signaux à bande limitée $[-B/2, +B/2]$, tout "sinus cardinal" $\sin \pi B'(t - u)/\pi B'(t - u)$ est unité de convolution (c'est-à-dire, a une action équivalente à celle de la distribution de Dirac) si $B' \geq B$.

4.3 Fourier

4.3.1 Temps continu et fréquence discrète

Soit un signal à temps continu $x(t)$, défini sur l'intervalle $[-T/2, +T/2]$ et supposé périodique de période T . On vérifie alors que les fonctions

$$\{\psi_k(t) := e^{i2\pi kt/T}, k \in \mathbb{Z}\}$$

sont orthogonales sur $[-T/2, +T/2]$ dans la mesure où

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_k, \psi_l \rangle &= \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i2\pi(k-l)t/T} dt \\
 &= \left[\frac{T}{i2\pi(k-l)} e^{i2\pi(k-l)t/T} \right]_{-T/2}^{+T/2} \\
 &= \frac{T}{\pi(k-l)} \frac{1}{2i} [e^{i\pi(k-l)} - e^{-i\pi(k-l)}] \\
 &= \frac{1}{T} \frac{\sin \pi(k-l)}{\pi(k-l)} \\
 &= \frac{1}{T} \delta_{k,l}
 \end{aligned}$$

car $k-l \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $x(t)$ admet la décomposition (en *série de Fourier*)

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n e^{i2\pi nt/T},$$

avec

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-i2\pi kt/T} dt.$$

4.3.2 Temps discret et fréquence continue

Le spectre $X(f)$ d'un signal à temps discret étant périodique, il est possible de le développer en série de Fourier. Supposons que le spectre "fondamental", associé au signal non-échantillonné, occupe la bande $[-B/2, +B/2]$ et que l'échantillonnage soit critique, on a la décomposition

$$X(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k e^{i2\pi kf/B},$$

avec

$$\begin{aligned}
 x_k &= \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{+B/2} X(f) e^{-i2\pi kf/B} df \\
 &= \frac{1}{B} x \left(-\frac{k}{B} \right).
 \end{aligned}$$

Si l'on adopte la convention selon laquelle l'échantillonnage critique ($T_e = 1/B$) est arbitrairement pris comme unité, on a $B = 1$ et, en écrivant $x[n] = x(nT_e)$ lorsque $T_e = 1$, on est conduit à la représentation

$$X(f) = \sum_n x[n] e^{-i2\pi n f}, |f| \leq 1/2$$

dans laquelle les échantillons $x[n]$ sont définis par

$$x[n] = \int_{-1/2}^{+1/2} X(f) e^{i2\pi n f} df.$$

Cette paire d'équations constitue une transformation de Fourier des signaux à temps discret.

4.3.3 Temps discret et fréquence discrète

Considérons maintenant un signal $x(t)$ de durée finie T . Par application du théorème d'échantillonnage dans le domaine des fréquences, son spectre $X(f)$ est entièrement caractérisé par ses échantillons $X(k/T)$. Considérons alors l'échantillonnage temporel d'un tel signal avec une période T_e , ce qui fournit N échantillons $x[n] = x(nT_e)$ en supposant que $T = NT_e$. Il lui correspond un spectre périodique $X_e(f)$ de période $1/T_e$, mais celui-ci est encore caractérisé par ses échantillons

$$X[k] := X_e(k/T)$$

puisque, $x(t)$ étant de durée limitée, $x[n]$ l'est aussi. En tenant compte à la fois de la période $1/T_e$ de $X_e(f)$ et de la relation $T = NT_e$, on en déduit que le signal échantillonné, qui est constitué de N valeurs $x[n]$ en temps, est également décrit par N valeurs $X[k]$ en fréquence. Ces valeurs s'écrivent

$$X[k] = \int x_e(t) e^{-i2\pi kt/T} dt$$

et, en introduisant la définition du signal échantillonné en temps

$$x_e(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \delta(t - nT_e),$$

on obtient la définition de la transformation de Fourier discrète ou série de Fourier discrète :

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \int \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \delta(t - nT_e) e^{-i2\pi kt/T} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \int \delta(t - nT_e) e^{-i2\pi kt/T} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi knT_e/T} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi nk/N}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i2\pi nk/N} &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-i2\pi mk/N} e^{i2\pi nk/N} \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi(n-m)k/N} \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] N \delta_{nm},
 \end{aligned}$$

d'où la formule d'inversion :

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i2\pi nk/N}.$$

Il importe de noter que, si les $x[n]$ correspondent de façon exacte aux échantillons de $x(t)$ en temps, les $X[k]$ sont en fréquence des échantillons de $X_e(f)$ et ne sont donc qu'une approximation de ceux de $X(f)$. En effet, $x(t)$ étant supposé à durée limitée, $X(n)$ ne peut être à bande strictement limitée, d'où un phénomène inévitable de repliement spectral.

4.3.4 Transformée de Fourier rapide

Si l'on calcule la transformée de Fourier discrète d'un signal de N points en appliquant directement la définition, chaque point en fréquence requiert

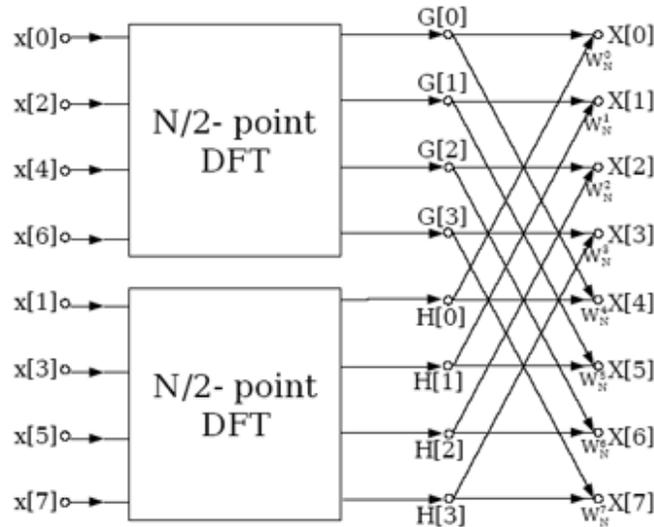


Figure 3: TFD à 8 points calculée par l'intermédiaire de 2 TFD à 4 points.

N multiplications complexes et, puisqu'il y a N points à calculer, la complexité résultante est de l'ordre de N^2 opérations. Il est cependant possible de réduire le nombre des opérations nécessaires au calcul en introduisant des algorithmes dits *rapides* tels que la *Transformée de Fourier Rapide* (TFR en français et FFT, pour Fast Fourier Transform, en anglais, cf. <http://cnx.org/content/m12107/latest/>).

Pour en expliquer succinctement le principe, réécrivons la définition de la transformée de Fourier discrète selon

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk},$$

en introduisant les racines n -ièmes de l'unité

$$W_N := e^{-i2\pi/N}.$$

Si l'on suppose, ce que l'on fera, que $N = 2^M$, on peut alors former à partir des N échantillons de $x[n]$ deux séquences, de longueur $N/2$ chacune, correspondant aux échantillons d'indices respectivement pairs et impairs. Ceci

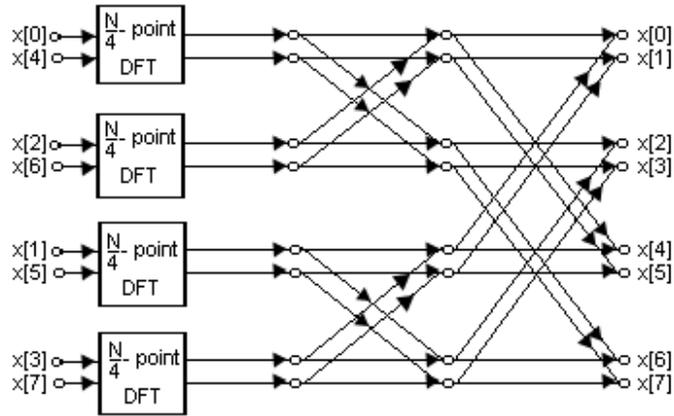


Figure 4: TFD à 8 points calculée par l'intermédiaire de 4 TFD à 2 points.

permet d'écrire

$$X[k] = \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] (W_N^2)^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] (W_N^2)^{mk},$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$X[k] =: G[k] + W_N^k H[k].$$

On reconnaît en fait dans ces sommations partielles $G[k]$ et $H[k]$ les transformées de Fourier discrètes de chacune des deux séquences (d'indices respectivement pairs et impairs) obtenues par décimation en temps puisque

$$W_N^2 = e^{-i4\pi/N} = e^{-i2\pi/(N/2)} = W_{N/2}.$$

Les séquences obtenues $G[k]$ et $H[k]$ étant par ailleurs périodiques de période $N/2$, on obtient, dans le cas $N = 8$, le diagramme de calcul de la Figure 3.

Chacune de ces transformées de Fourier discrètes étant décrite par $N/2$ échantillons seulement, il est alors possible d'itérer le processus en scindant

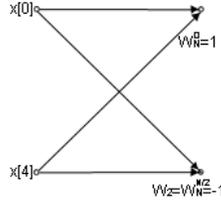


Figure 5: “Papillon” élémentaire de la TFD à 2 points.

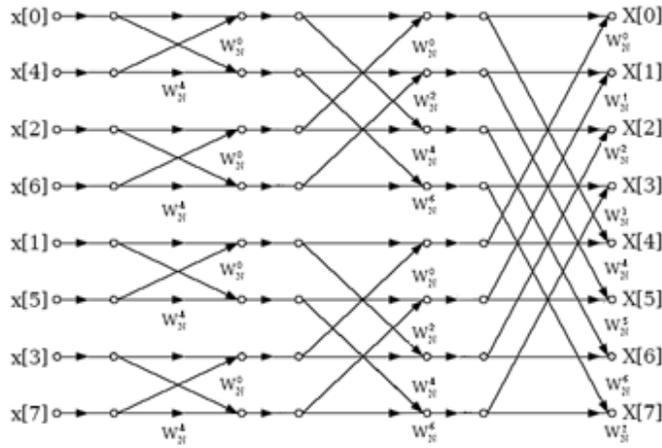


Figure 6: Schéma complet de la TFR à 8 points.

de nouveau chaque demi-séquence en deux séquences décimées de longueur $N/4$ chacune, selon le schéma de la Figure 4.

La séquence initiale $x[n]$ étant supposée être de longueur 2^M , il est alors possible d’itérer le processus jusqu’à ce qu’il ne reste plus qu’à calculer $N/2$ transformées à deux points, ce qui ne met en jeu que des coefficients $+1$ et -1 (cf. la Figure 5 dans le cas présent où $M = 3$), conduisant *in fine* au diagramme complet donné en Figure 6..

Cet algorithme ne requiert donc au total que $M = \log_2 N$ étapes, chacune reposant sur N multiplications complexes. Sa complexité totale est de l’ordre de $N \log_2 N$ opérations, au lieu de N^2 par l’application directe de la définition.

Ainsi, si l'on prend $N = 1024$, soit $M = 10$, le calcul d'une transformée de Fourier rapide met en jeu environ 10^4 opérations, contre environ 10^6 pour le calcul direct : le facteur de gain est donc de l'ordre de 100, soit deux ordres de grandeur.

5 Filtrage linéaire

5.1 Définition

D'une manière générale, un système linéaire transforme une entrée $x(t)$ en une sortie $y(t)$ selon une relation intégrale de la forme

$$y(t) = \int h(t, s) x(s) ds.$$

Un tel opérateur linéaire est appelé *filtre linéaire* s'il est en outre covariant vis-à-vis des translations temporelles, c'est-à-dire si la filtrée d'une entrée décalée est la décalée de la filtrée. Ceci implique que

$$\begin{aligned} \int h(t - \tau, s) x(s) ds &= \int h(t, s) x(s - \tau) ds \\ &= \int h(t, s + \tau) x(s) ds. \end{aligned}$$

Cette égalité devant être vérifiée pour tout signal, on a nécessairement, pour tout s , $h(t, s + \tau) = h(t - \tau, s)$. En particulier, le choix de la valeur $s = 0$ montre que $h(t, \tau) = h(t - \tau, 0)$, ce qui veut dire que le noyau d'un filtre linéaire est de la forme $h(t, s) = h_0(t - s)$.

5.2 Interprétation

La relation liant la sortie d'un filtre linéaire à son entrée est ainsi une convolution :

$$y(t) = \int h(t - s) x(s) ds$$

et la fonction $h(t)$ est appelée la *réponse impulsionnelle* du filtre du fait que

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = \int h(t - s) \delta(s) ds = h(t).$$

Par transformation de Fourier, il est immédiat de voir que la relation entrée-sortie du filtre devient multiplicative dans le domaine fréquentiel :

$$Y(f) = H(f) X(f),$$

la transformée de Fourier $H(f)$ de la réponse impulsionnelle $h(t)$ étant appelée la *fonction de transfert* ou le *gain complexe* du filtre. Celui-ci mesure,

en module et en phase, la modification introduite par le filtre sur le spectre du signal d'entrée. La relation multiplicative en fréquence permet une évaluation particulièrement simple de l'influence d'une cascade de filtres dans une chaîne : les gains (réels) se multiplient et les phases s'ajoutent.

Dans le cas où l'entrée d'un filtre linéaire est une exponentielle complexe de fréquence f_0 , la sortie vaut alors

$$\int h(t-s) e^{i2\pi f_0 s} ds = H(f_0) e^{i2\pi f_0 t},$$

ce qui n'est autre que l'entrée, à un facteur multiplicatif près. On voit ainsi que les exponentielles complexes sont *fonctions propres* des filtres linéaires, la valeur propre associée étant le gain complexe à la fréquence correspondante. Par suite, la transformation de Fourier, qui décompose un signal sur la base de telles exponentielles complexes, est naturellement adaptée aux transformations dans les filtres linéaires.

5.3 Relations entrée-sortie

Dans le cas des signaux aléatoires, les densités spectrales de puissance se transforment également de façon simple dans un filtrage linéaire. Si l'on suppose que l'entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ est un signal aléatoire stationnaire $x(t)$ de moyenne m_x et de fonction de corrélation $\gamma_x(\tau)$, il est facile de voir que la moyenne m_y de la sortie vaut :

$$\begin{aligned} m_y &:= \mathbb{E} \left\{ \int h(t-s) x(s) ds \right\} \\ &= \int h(t-s) \mathbb{E}\{x(s)\} ds \\ &= m_x \int h(t-s) ds \\ &= m_x H(0). \end{aligned}$$

Passant au second ordre, on montre (en supposant pour simplifier que $m_x = 0$) que le filtrage linéaire préserve la stationnarité et que la fonction de

corrélation $\gamma_y(\tau)$ de la sortie du filtre s'écrit

$$\begin{aligned}\gamma_y(\tau) &= \mathbb{E}\{y(t)y(t-\tau)\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\iint h(t-u)h(t-\tau-v)x(u)x(v)du dv\right\} \\ &= \int \gamma_h(\theta-\tau)\gamma_x(\theta)d\theta,\end{aligned}$$

en notant

$$\gamma_h(\tau) := \int h(t)h(t-\tau)dt$$

la fonction de corrélation *déterministe* de la réponse $h(t)$ du filtre.

Par suite, en faisant usage de l'identité de Parseval-Plancherel assurant la conservation du produit scalaire par transformation de Fourier, on peut écrire de manière équivalente :

$$\gamma_x(\tau) = \int |H(f)|^2 \Gamma_x(f) e^{i2\pi f\tau} df,$$

d'où l'on déduit la relation fondamentale de transformation des densités spectrales :

$$\Gamma_y(f) = |H(f)|^2 \Gamma_x(f).$$

Ce résultat se généralise au cas de deux filtrages en parallèle d'un même signal par deux filtres différents :

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \int h_1(t-s)x(s)ds; \\ y_2(t) &= \int h_2(t-s)x(s)ds,\end{aligned}$$

pour lequel un calcul analogue conduit au résultat :

$$\Gamma_{y_1, y_2}(f) = H_1(f)H_2^*(f)\Gamma_x(f),$$

appelé parfois *formule des interférences*.

On peut tirer de cette expression deux conséquences principales :

1. Si $h_1(t)$ et $h_2(t)$ sont deux filtres *spectralement disjoints*, on a identiquement $H_1(f)H_2^*(f) = 0$ et l'interspectre (et donc aussi l'intercorrélacion) de leurs sorties est nulle : ils ne partagent pas d'énergie (ce point rejoint la remarque faite précédemment sur la décorrélacion des contributions spectrales d'un même signal à des fréquences différentes).

2. Si deux signaux sont issus d'un même troisième par filtrage linéaire, alors leur fonction de cohérence (lorsqu'elle est définie) est toujours maximale :

$$\begin{aligned}
C_{y_1, y_2}(f) &= \frac{|\Gamma_{y_1, y_2}(f)|}{\sqrt{\Gamma_{y_1}(f) \Gamma_{y_2}(f)}} \\
&= \frac{|H_1(f) H_2^*(f) \Gamma_x(f)|}{\sqrt{|H_1(f)|^2 \Gamma_x(f) |H_2(f)|^2 \Gamma_x(f)}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dans les cas où $h_1(t) = \delta(t)$ et où $h_2(t) = h(t)$, c'est-à-dire lorsqu'un signal se déduit d'un autre par filtrage linéaire, on voit que leur cohérence est telle que $C_{x, y}(f) = C_{x, h \star x}(f) = 1$. L'examen de la fonction de cohérence est ainsi une façon de tester, fréquence par fréquence, l'existence d'une relation de filtrage linéaire entre deux signaux.

On notera enfin que le filtrage linéaire préserve aussi la *gaussiannité*. Un filtrage linéaire revenant essentiellement à sommer les entrées, on peut se convaincre de ce résultat en se restreignant à l'analyse de la somme de deux variables aléatoires conjointement gaussiennes, que l'on peut considérer comme les valeurs de l'entrée à deux instants ($x_1 := x(t_1)$ et $x_2 := x(t_2)$). La fonction de répartition de la somme $z = x_1 + x_2$ est donnée par

$$F_Z(z) = \Pr \{x_1 + x_2 \leq z\},$$

ce qui définit dans le plan (x_1, x_2) un domaine D_z borné supérieurement par la droite $x_1 + x_2 = z$ et permet d'écrire :

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x_2} p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

On en déduit par dérivation par rapport à z que la densité de probabilité associée a pour valeur

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{X}}(z-x, x) dx$$

et, dans le cas conjointement gaussien (supposé centré, mais éventuellement corrélé) pour lequel

$$p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right],$$

il est facile de voir que l'intégrale précédente ne met en jeu que l'exponentielle d'un polynôme de degré 2 en x , ce qui assure au résultat une structure de même nature en z , caractéristique de la gaussiannité.

6 Filtrage optimal

6.1 Principe d'orthogonalité

Supposons que l'on dispose d'observations $y(t)$ et que l'on veuille élaborer à partir d'elles une estimée *linéaire* d'une quantité d'intérêt $d(t)$ (il peut s'agir d'un *filtrage simple* au cas où l'on aurait $y(t) = x(t) + b(t)$, avec $b(t)$ un bruit additif de caractéristiques statistiques connues, et l'on voudrait estimer $x(t)$, ou encore d'une *prédiction* si l'on veut inférer la valeur $y(t + \tau)$ à partir de la connaissance de l'observation jusqu'au seul instant courant t , etc.).

Dans le cas général, $d(t)$ n'appartient pas nécessairement à l'espace des solutions engendré linéairement par les observations. Il en résulte que, faute de pouvoir répondre exactement à la question posée, il faut se contenter de trouver une solution qui soit la plus proche en un sens donné de ce qui est cherché. Un critère naturel en ce sens est de minimiser l'*erreur quadratique moyenne* entre $d(t)$ et son estimée $\hat{d}(t)$:

$$\mathbb{E}\{[d(t) - \hat{d}(t)]^2\} \rightarrow \min.$$

En s'appuyant sur le fait que l'opérateur d'espérance mathématique définit un produit scalaire permettant d'accéder à une mesure de distance entre les quantités aléatoires considérées, une interprétation géométrique simple du problème de minimisation posé conduit à retenir pour solution l'estimée associée à la projection orthogonale de $d(t)$ sur l'espace des observations (cf. Figure 7).

C'est le *principe d'orthogonalité*, stipulant que la solution de filtrage linéaire optimal (à erreur quadratique moyenne minimale) est obtenue en rendant l'erreur orthogonale aux observations au sens du produit scalaire retenu, c'est-à-dire en rendant erreur et observations décorréelées :

$$\mathbb{E}\{[d(t) - \hat{d}(t)]y(v)\} = 0.$$

6.2 Filtrage de Wiener

Soit $d(t)$ la quantité "désirée" et $\hat{d}(t)$ son estimée, élaborée par filtrage linéaire à partir de l'observation $y(t)$:

$$\hat{d}(t) = \int h(t - u) y(u) du. \tag{1}$$

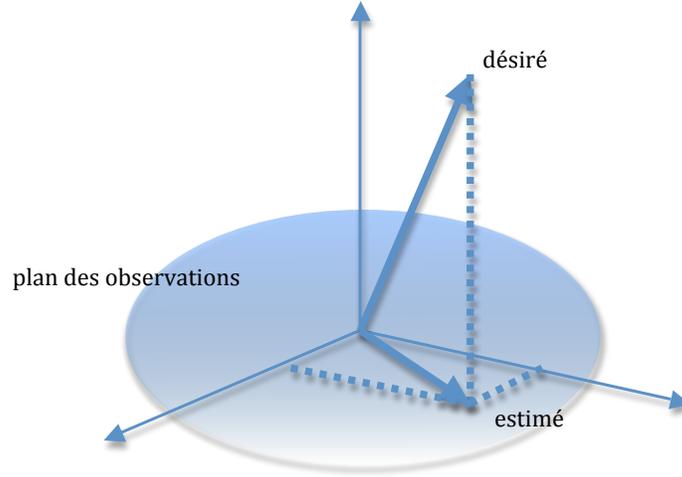


Figure 7: Principe d'orthogonalité.

On appelle *filtre de Wiener* le filtre linéaire de réponse $h_*(t)$, optimal au sens où l'erreur associée à l'estimation, c'est-à-dire la différence

$$e(t) = d(t) - \hat{d}(t),$$

est telle que sa puissance est minimisée :

$$P = \mathbb{E}\{e^2(t)\} \rightarrow \min .$$

Par application du principe d'orthogonalité discuté en Sect. 6.1, la solution est obtenue lorsque cette erreur est orthogonale aux observations :

$$\mathbb{E}\{e(t)y(v)\} = 0,$$

d'où l'on déduit, en combinant cette équation et (1) que l'on doit avoir¹ :

$$\gamma_{d,y}(\tau) = \int h(\tau - \theta) \gamma_y(\theta) d\theta.$$

¹On convient de noter $\gamma_{x,y}(\tau) := \mathbb{E}\{x(t)y(t - \tau)\}$ et d'adopter la notation simplifiée $\gamma_x(\tau) := \gamma_{x,x}(\tau)$.

On reconnaît une équation de convolution dans le domaine temporel, dont on sait qu'elle se transforme en produit dans l'espace de Fourier associé des fréquences, conduisant à l'expression du gain complexe du filtre optimal de Wiener donnée par :

$$H_*(f) = \frac{\Gamma_{d,y}(f)}{\Gamma_y(f)}. \quad (2)$$

Du fait que, par construction, l'estimée est orthogonale aux observations, l'erreur quadratique minimale P_* associée au filtre de Wiener se réduit à :

$$P_* = \mathbb{E}\{[d(t) - \hat{d}(t)]d(t)\},$$

soit encore :

$$P_* = \gamma_d(0) - \int h(\tau) \gamma_{d,y}(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Passant dans le domaine des fréquences et utilisant la propriété d'isométrie de la transformation de Fourier, on peut ré-écrire cette dernière équation selon

$$P_* = \int \Gamma_d(f) df - \int H^*(f) \Gamma_{d,y}(f) df,$$

soit encore

$$P_* = \int \Gamma_d(f) [1 - C_{d,y}^2(f)] df,$$

où $C_{d,y}(f)$ est la fonction de cohérence définie précédemment. Dans le contexte de filtrage optimal qui nous intéresse ici, on voit donc qu'une cohérence unité a pour conséquence une puissance d'erreur identiquement nulle, ce qui est en accord avec le fait que la quantité désirée appartient à l'espace engendré linéairement à partir des observations.

6.3 Filtrage inverse

Un cas particulièrement important où le filtrage de Wiener peut trouver une application est celui du *filtrage inverse* dans lequel l'observation $y(t)$ est modélisée comme la version déformée d'un signal d'intérêt $x(t)$ par une *fonction d'appareil* $h(t)$ (supposée connue) à laquelle s'ajoute un bruit $b(t)$ que l'on supposera indépendant du signal, centré, stationnaire et de densité spectrale de puissance $\Gamma_b(f)$ connue :

$$y(t) = \int g(t-u) x(u) du + b(t). \quad (4)$$

Ce modèle étant posé, le filtrage inverse consiste à remonter au signal, c'est-à-dire à considérer

$$d(t) = x(t),$$

sur la base des observations $y(t)$ disponibles et des connaissances *a priori* quant à la fonction d'appareil $g(t)$ et au bruit $b(t)$.

La solution générale au problème étant donnée par (2), on évalue dans un premier temps la corrélation croisée entre le signal à estimer et l'observation, ce qui donne :

$$\gamma_{d,y}(\tau) = \int g(\theta - \tau) \gamma_x(\theta) d\theta,$$

équation de corrélation dont la transformée de Fourier fournit directement :

$$\Gamma_{d,y}(f) = G^*(f)\Gamma_x(f).$$

Dans un deuxième temps, on calcule la densité spectrale de puissance de l'observation, ce qui se fait de manière immédiate en utilisant la relation d'entrée-sortie des filtres linéaires et l'indépendance entre signal et bruit :

$$\Gamma_y(f) = |G(f)|^2\Gamma_x(f) + \Gamma_b(f).$$

Reportant ces deux quantités dans (2), on aboutit au résultat cherché qui s'écrit :

$$H_*(t) = \frac{G^*(f)\Gamma_x(f)}{|G(f)|^2\Gamma_x(f) + \Gamma_b(f)} \quad (5)$$

et peut encore se mettre sous la forme :

$$H_*(f) = \frac{1}{G(f)} \frac{1}{1 + \rho^{-1}(f)}$$

en introduisant la quantité :

$$\rho(f) := \frac{|G(f)|^2\Gamma_x(f)}{\Gamma_b(f)}$$

dont l'interprétation physique est celle d'un *rapport signal-sur-bruit*, local en fréquence.

Reportant de la forme explicite de la corrélation croisée entre $d(t) = x(t)$ et $y(t)$, on est conduit à :

$$\begin{aligned} \int h(\tau) \gamma_{d,y}(\tau) d\tau &= \iint h(\tau) g(\theta - \tau) \gamma_x(\theta) d\theta d\tau \\ &= \int H(f) G(f) \Gamma_x(f) df. \end{aligned}$$

En reportant cette équation dans (3) et en remarquant que :

$$\gamma_x(0) = \int \Gamma_x(f) df,$$

on obtient avec (5) :

$$P_* = \int \left(1 - \frac{|G(f)|^2 \Gamma_x(f)}{|G(f)|^2 \Gamma_x(f) + \Gamma_b(f)} \right) \Gamma_x(f) df,$$

expression que l'on peut simplifier en la ré-écrivaint :

$$P_* = \int \frac{\Gamma_x(f)}{1 + \rho(f)} df.$$

6.3.1 Cas particuliers

On peut déduire des expressions générales précédentes plusieurs cas particuliers, qui en révèlent par exemple les situations limites.

Ainsi, dans le cas où le bruit devient négligeable, c'est-à-dire lorsque le rapport signal-sur-bruit $\rho(f)$ tend vers l'infini, on obtient comme attendu :

$$\lim_{\rho(f) \rightarrow \infty} H_*(f) = \frac{1}{G(f)}$$

et

$$\lim_{\rho(f) \rightarrow \infty} P_* = 0.$$

L'interprétation en est qu'en l'absence de bruit, la réponse fréquentielle du filtre inverse n'est autre que l'inverse de la fonction d'appareil, la connaissance supposée parfaite de cette dernière conduisant en outre à une erreur nulle.

À l'inverse, si l'on suppose maintenant que le bruit devient prépondérant au sens où le rapport signal-sur-bruit tend vers zéro, on obtient immédiatement que :

$$\lim_{\rho(f) \rightarrow 0} H_*(f) = 0$$

et

$$\lim_{\rho(f) \rightarrow 0} P_* = \gamma_x(0).$$

Dans ce cas où l'information utile portée par le signal est totalement noyée dans le bruit d'observation, l'effet additionnel de sa modification par

l'appareil de mesure devient négligeable et la meilleure estimation se réduit à la valeur moyenne du bruit (nulle par hypothèse), avec une erreur quadratique s'identifiant à la variance de ce bruit (valeur de la corrélation à l'origine).

On peut enfin noter que si l'on s'affranchit de l'effet d'une éventuelle fonction d'appareil et que l'on s'intéresse au seul *débruitage* d'un signal, on se place dans le cas simplifié :

$$G(f) = 1 \Rightarrow H_*(f) = \frac{\Gamma_x(f)}{\Gamma_x(f) + \Gamma_b(f)} \quad (6)$$

pour lequel les remarques précédentes relatives aux cas limites de rapports signal-sur-bruit nul ou infini continuent bien sûr à s'appliquer.

6.3.2 Exemples

Exemple 1. filter_chirp_WGN.m (Filtrage simple) — On se place dans le cas $G(f) = 1$, mais avec un signal inconnu dans un bruit inconnu. Dans sa plus grande généralité, c'est évidemment un problème mal posé mais, dans le cas où l'on dispose d'une "observation bruit seul", on peut ré-écrire (6) selon

$$H_*(f) = 1 - \frac{\Gamma_b(f)}{\Gamma_y(f)}$$

et construire une estimée de cette réponse en estimant d'une part la densité spectrale de puissance globale de l'observation et d'autre part celle du bruit à partir d'un intervalle temporel supposé "bruit seul".

Exemple 2. ex_deconv.m (Déconvolution) — On se place ici dans le cas d'images pour lesquelles la fonction d'appareil (flou gaussien, flou rectangulaire, flou de bougé en translation unidirectionnelle) est supposée parfaitement connue, mais susceptible de posséder des zéros (conduisant à une divergence du filtre inverse) ou de très faibles valeurs (conduisant à une grande instabilité de la solution en présence de bruit). L'objet de cet exemple n'est pas de fournir une solution solide à cette question mais de sensibiliser au problème et de voir l'effet *régularisant* de l'introduction d'un terme correctif ε dans le filtre inverse :

$$H_*(f) = \frac{1}{G(f)} \rightarrow \frac{1}{G(f) + \varepsilon/G^*(f)},$$

s'apparentant à la prise en compte d'un "bruit équivalent" de rapport signal-sur-bruit

$$\rho(f) = \frac{|G(f)|^2}{\varepsilon}.$$

7 Prédiction linéaire

7.1 Principe

Soit une séquence de données quelconque $x[n]$. On peut se poser le problème de décrire chacun des termes de cette séquence par une combinaison linéaire de ses p prédécesseurs (avec des poids a_1, \dots, a_p), et ceci à une erreur de prédiction près, de puissance P : il s'agit alors de trouver le "meilleur" jeu de paramètres (p, a_1, \dots, a_p, P) correspondant à ces données, c'est-à-dire celui qui minimise P . Par construction de cette *prédiction linéaire*, chaque valeur $x[n]$ est estimée par une quantité

$$\hat{x}[n] = - \sum_{k=1}^p a_k x[n-k],$$

avec une erreur de prédiction

$$\begin{aligned} e[n] &= x[n] - \hat{x}[n] \\ &= x[n] + \sum_{k=1}^p a_k x[n-k]. \end{aligned} \tag{7}$$

Puisque l'estimation $\hat{x}[n]$ est engendrée linéairement à partir de p observations, l'estimée la meilleure (c'est-à-dire celle qui minimise P) n'est autre que la projection orthogonale de $x[n]$ sur l'espace engendré par les observations. Le jeu des coefficients optimaux est donc celui pour lequel (principe d'orthogonalité) l'erreur est orthogonale aux observations :

$$\mathbb{E}\{e[n] x[n-j]\} = 0; j \geq 1 \tag{8}$$

et la puissance de l'erreur minimum associée vaut

$$P = \mathbb{E}\{e[n] (x[n] - \hat{x}[n])\} = \mathbb{E}\{e[n] x[n]\}. \tag{9}$$

Reportant la forme explicite (7) dans (8), on en déduit que le jeu de coefficients $\{a_1, \dots, a_p\}$ assurant la meilleure prédiction est solution du système linéaire (dit *de Yule-Walker*) donné par :

$$r[j] = - \sum_{k=1}^p a_k r[j-k]; j \geq 1 \tag{10}$$

(avec $r[k] := \mathbb{E}\{x[n]x[n \pm k]\}$), l'erreur minimale associée prenant la forme

$$P = r[0] + \sum_{k=1}^p a_k r[k]. \quad (11)$$

D'un point de vue purement formel, l'équation (10) dit que le jeu des coefficients de prédiction optimaux est solution d'un système linéaire à p inconnues pour lequel il suffit de disposer de p équations reposant sur la connaissance des valeurs de la fonction de corrélation pour p retards strictement positifs. L'inversion directe d'un tel système pose néanmoins plusieurs problèmes qui en limitent l'application directe :

1. *Conditionnement* — L'inversion du système linéaire (10) suppose en théorie que l'on connaisse parfaitement les échantillons $r[k]$ de la fonction de corrélation, ce qui n'est bien sûr jamais le cas en pratique. Passer des valeurs exactes $r[k]$ à des valeurs estimées $\hat{r}[k]$ est donc susceptible de poser des problèmes de mauvais conditionnement à la matrice de corrélation à inverser, ceci étant d'autant plus probable que les valeurs de $r[k]$ sont proches de zéro et/ou mal estimées, les deux phénomènes se conjuguant pour les grands retards. À cet égard, une première précaution est de considérer le système de Yule-Walker (valable en théorie pour tout $j \geq 1$) pour les seules p premières valeurs de la corrélation, c'est-à-dire, $j = 1, \dots, p$.
2. *Ordre inconnu* — Une autre hypothèse implicite est que l'on sache quel est l'ordre du filtre de prédiction à choisir, mais celui-ci est en fait aussi une variable du problème. En effet, l'idée sous-jacente est de trouver la meilleure prédiction possible, c'est-à-dire le meilleur jeu de coefficients pour un ordre donné mais aussi, pour différents ordres envisageables, celui qui fournira la plus faible des erreurs minimales. La conséquence de cette difficulté est que, en résolvant le problème sous sa forme de Yule-Walker telle qu'en (10), il faudra chercher autant de solutions que l'on testera d'ordres, les solutions pour des ordres différents nécessitant *a priori* de résoudre à chaque fois un nouveau système.
3. *Complexité* — La troisième difficulté est que, pour un ordre fixé p , l'inversion directe du système linéaire (10) est en $O(p^3)$ pour le nombre d'opérations élémentaires (additions et multiplications) mises en jeu. Si l'on conjugue cette observation avec le point précédent, on voit que

la complexité algorithmique va croissant lorsque l'on teste des ordres p de plus en plus grands, situation qui (comme mentionné au point 1) s'assortit de conditionnement de plus en plus mauvais de la matrice à inverser.

L'ensemble de ces remarques a conduit à rechercher des résolutions du système (10) qui soient meilleures que par un inversion directe, ordre par ordre. L'idée est d'exploiter la structure particulière du système linéaire considéré, qui n'est pas quelconque, afin d'obtenir une solution qui soit *récursive sur l'ordre*, de telle sorte qu'en explorant les solutions à ordre p croissant, celle à l'ordre p puisse se construire sur la base de celle à l'ordre $p-1$, moyennant la connaissance d'une valeur (estimée) supplémentaire de la fonction de corrélation.

Pour ce faire, il convient de ré-écrire les deux équations (10)-(11) en les regroupant en une seule selon ;

$$\mathbf{R}(p) \mathbf{a}(p) = \mathbf{P}(p), \quad (12)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(p) &:= \{r[i-j]\}_{i,j=1,\dots,p}, \\ \mathbf{a}(p) &:= (1 \ a_1(p) \ \dots \ a_p(p))^T, \\ \mathbf{P}(p) &:= (P(p) \ 0 \ \dots \ 0)^T. \end{aligned}$$

(Dans cette ré-écriture, la dépendance des différentes quantités par rapport à l'ordre considéré a été rendue explicite.)

Si l'on suppose maintenant connue la solution à l'ordre p , la solution à l'ordre $p+1$, qui s'écrit

$$\mathbf{R}(p+1) \mathbf{a}(p+1) = \mathbf{P}(p+1),$$

met en jeu une matrice de corrélation $\mathbf{R}(p+1)$ augmentée d'une ligne et d'une colonne par rapport à la matrice $\mathbf{R}(p)$ intervenant dans (12). Or une matrice de corrélation a une structure très particulière, dite *Toeplitz symétrique*, qui la rend entièrement déterminée par la connaissance de sa seule première ligne (ou colonne), les autres éléments s'en déduisant par translation le long de chacune de ses diagonales. Il s'ensuit que l'on retrouve la matrice $\mathbf{R}(p)$ comme sous-matrice de $\mathbf{R}(p+1)$, et ceci de deux façons différentes :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(p) &= [\mathbf{R}(p+1)]_{i,j=1,\dots,p}, \\ \mathbf{R}(p) &= [\mathbf{R}(p+1)]_{i,j=2,\dots,p+1}, \end{aligned}$$

C'est cette structure que l'on va exploiter en faisant apparaître dans le système à l'ordre $p+1$ la solution à l'ordre p . Pour ce faire, on met le vecteur qui est solution à l'ordre $p+1$ sous la forme :

$$\mathbf{a}(p+1) = \mathbf{b}_+(p) + k(p) \mathbf{b}_-(p), \quad (13)$$

avec

$$\mathbf{b}_+(p) = (\mathbf{a}(p)^T \mathbf{0})^T$$

et $\mathbf{b}_-(p)$ tel que

$$[\mathbf{b}_-(k) = \mathbf{b}_+(p+2-k)]_{k=1\dots p+1},$$

le facteur $k(p)$ étant un terme à déterminer.

Ceci permet, par identification des deux sous-systèmes qui correspondent à la solution connue à l'ordre p dans le système à l'ordre $p+1$, d'aboutir aux deux égalités :

$$\begin{aligned} P(p) + k(p) Q(p) &= P(p+1), \\ Q(p) + k(p) P(p) &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$Q(p) := r[p+1] + a_1(p)r[p] + \dots + a_p(p)r[0].$$

On en déduit les deux valeurs :

$$k(p) = -\frac{Q(p)}{P(p)} \quad (14)$$

et

$$P(p+1) = P(p) [1 - k^2(p)].$$

Revenant à la définition (13), on obtient la forme récursive pour les coefficients de prédiction :

$$a_m(p+1) = a_m(p) + k(p) a_{p+1-m}(p); 1 \leq m \leq p$$

et

$$a_{p+1}(p+1) = k(p).$$

Disposant ainsi des relations de récursion permettant de passer de la solution à l'ordre p à la solution à l'ordre $p+1$, il suffit alors d'initialiser

l'algorithme (dit de *Levinson-Durbin*) en partant de la solution à l'ordre $p = 1$ qui s'écrit trivialement

$$a_1(1) = -\frac{r[1]}{r[0]},$$

avec

$$P(1) = r[0] [1 - a_1^2(1)].$$

7.2 Vers la modélisation

Si l'on repart de l'équation (7) qui définit l'erreur de la prédiction linéaire, il est possible de lui attacher une interprétation alternative en voyant le signal $x[n]$ comme définissant la sortie d'un filtre linéaire dont l'entrée serait $e[n]$. Étant donné que la relation d'entrée-sortie de ce filtre s'écrit

$$x[n] - \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] = e[n],$$

il possède une structure récursive (la valeur de la sortie du filtre à un instant donné dépend de l'entrée à cet instant et des *valeurs passées de la sortie*) lui valant la dénomination de *filtre auto-régressif* (ou AR en abrégé) d'ordre p . Le rôle joué par la puissance de l'erreur de prédiction P est alors tenu par la variance σ^2 de l'entrée $e[n]$ (qualifiée d'*innovation*).

En ce sens, *prédire* linéairement un signal est équivalent à le *modéliser* en considérant qu'il est la sortie d'un filtre générateur de type AR.

7.3 Exemples

Exemple 1. AR_predict.m (Prédiction simple) — Étant donné un filtre auto-régressif (d'ordre maximal 4), on génère des échantillons d'une trajectoire du processus associé $x[n]$ en excitant ce filtre en entrée par un bruit blanc gaussien $e[n]$. Si l'on part maintenant de cette réalisation et qu'on la filtre en combinant linéairement, pour chaque instant n , les p échantillons passés avec les poids correspondant aux coefficients du filtre, on obtient une valeur estimée $\hat{x}[n]$ différant de la valeur vraie d'exactly $e[n]$. Si l'on ne réactualise par contre pas la prédiction à chaque instant et si l'on s'appuie, non sur les p dernières valeurs observées, mais sur celles prédites précédemment, on observe que la prédiction $\hat{x}[n]$ tend vers 0, qui est la moyenne de $x[n]$.

Exemple 2. AR_change.m et ARMA_change.m (Détection de rupture) — Étant donné un processus stationnaire, l'erreur associée à sa prédiction linéaire est de puissance constante au cours du temps, ce qui, sous hypothèse gaussienne, maintient cette puissance inférieure à un seuil avec une probabilité que l'on peut fixer. Si par contre l'observation est brutalement changée en commutant sur un nouveau processus stationnaire pour lequel la prédiction ne peut plus être assurée avec le jeu de coefficients initial, l'erreur augmente et sa puissance dépasse le seuil avec une probabilité plus grande que celle attendue dans le cas précédent. Ceci permet une détection de changement dans un processus par suivi de la puissance de son erreur de prédiction.

8 Estimation optimale

Dans beaucoup de cas, l'information utile portée par un signal se retrouve dans un (ou des) paramètre(s) affectant la forme d'onde de l'observation : retard, amplitude, décalage fréquentiel, etc. L'enjeu est alors d'*estimer* au mieux ce (ou ces) paramètre(s), au sens d'un critère permettant de juger de la proximité de l'estimation avec sa valeur vraie.

8.1 Propriétés des estimateurs

Pour une quantité à estimer a , on notera en général \hat{a} un quelconque de ses estimateurs, et on jugera des qualités de celui-ci relativement aux critères les plus courant suivants :

1. *Biais* — Un estimateur est dit *biaisé* si $\mathbb{E}\{\hat{a}\} \neq a$, et *non biaisé* dans le cas contraire.
2. *Variance* — La dispersion des valeurs estimées est mesurée au second ordre par la *variance*

$$\text{var}\{\hat{a}\} := \mathbb{E}\{[\hat{a} - \mathbb{E}\{\hat{a}\}]^2\} = \mathbb{E}\{\hat{a}^2\} - (\mathbb{E}\{\hat{a}\})^2.$$

Pour une classe d'estimateurs donnée, l'estimateur \hat{a} sera dit à *variance minimale* si sa variance est au plus égale à celle de tout autre estimateur de la classe. On verra que, dans certains cas, cette variance admet une borne inférieure. Tout estimateur dont la variance atteint cette borne est alors dit *efficace*.

3. *Consistance* — La valeur fournie par un estimateur dépend naturellement de l'observation, et il est intéressant que les valeurs estimées se rapprochent de la valeur vraie lorsque le nombre des observations augmente. Un estimateur basé sur N observations sera dit *consistant* s'il converge en probabilité vers a lorsque la taille N de l'échantillon augmente indéfiniment.

8.2 Estimation bayésienne

Évaluer la qualité d'un estimateur nécessite de disposer d'un critère à optimiser, de façon à minimiser en un sens choisi l'écart qui existe entre la valeur

vraie et la valeur estimée. La *stratégie bayésienne* consiste à définir un *coût* $C(a, \hat{a})$ associé à chaque estimation, l'estimation *optimale* étant alors celle assurant la minimisation de ce coût en un certain sens.

D'une manière générale, le coût est arbitraire et laissé à la discrétion de l'utilisateur, mais il doit vérifier quelques propriétés de bon sens :

1. $C(a, \hat{a}) \geq 0$ (un coût est nécessairement non négatif) ;
2. $C(a, a) = 0$ (une bonne estimation ne coûte rien) ;
3. $C(a, \hat{a})$ est une fonction *croissante* de $|a - \hat{a}|$.

On considère en général aussi que $C(a, a + \delta a) = C(a, a - \delta a)$, c'est-à-dire qu'une erreur d'estimation par excès ou par défaut est pénalisée de la même façon au voisinage de la valeur vraie.

Les choix les plus classiques de fonctions de coût sont alors les suivants :

1. *Coût quadratique* : $C(a, \hat{a}) = (a - \hat{a})^2$.
2. *Coût en valeur absolue* : $C(a, \hat{a}) = |a - \hat{a}|$.
3. *Coût uniforme* : $C(a, \hat{a}) = 1 - \mathbf{1}_\Delta(a - \hat{a})$.

Une estimation étant nécessairement élaborée à partir d'une observation souvent bruitée, elle hérite d'un caractère *doublement aléatoire* dû à la fois au bruit perturbateur et à la nature éventuellement aléatoire de la quantité à estimer. En rendant explicite la dépendance de l'estimation vis-à-vis de l'observation (notée y), on définit alors le *risque moyen* :

$$\bar{R} := \mathbb{E}\{C(a, \hat{a}(y))\},$$

quantité dans laquelle l'espérance mathématique est prise sur l'ensemble des réalisations de a si le paramètre à estimer est aléatoire et sur l'ensemble des estimations $\hat{a}(y)$, et donc des réalisations y :

$$\bar{R} = \int_{(A)} \int_{(Y)} C(a, \hat{a}(y)) p_{A,Y}(a, y) da dy.$$

Grâce à la formule de Bayes, la densité de probabilité conjointe $p_{A,Y}(a, y)$ intervenant dans cette équation peut se factoriser selon

$$p_{A,Y}(a, y) = p_{A|Y}(a|y) p_Y(y)$$

en introduisant la probabilité *conditionnelle* $p_{A|Y}(a|y)$ et la probabilité *a priori* $p_Y(y)$. Ce faisant, le risque moyen s'écrit

$$\bar{R} = \int_{(Y)} R_c(\hat{a}(y)) p_Y(y) dy$$

en introduisant le *risque conditionnel*

$$R_c(\hat{a}(y)) := \int_{(A)} C(a, \hat{a}(y)) p_{A|Y}(a|y) da.$$

La densité *a priori* $p_Y(y)$ étant non négative, il suffit, pour minimiser le risque moyen, de minimiser le risque conditionnel qui est lui aussi non négatif, conduisant à la définition de l'estimateur bayésien \hat{a}_B par l'équation implicite :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \hat{a}} \int_{(A)} C(a, \hat{a}) p_{A|Y}(a|y) da \right|_{\hat{a}=\hat{a}_B} = 0.$$

Si l'on spécifie ce résultat général aux exemples évoqués précédemment, on obtient les solutions particulières :

1. *Coût quadratique* — Le choix $C(a, \hat{a}) = (a - \hat{a})^2$ conduit directement à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}_c}{\partial \hat{a}} &= \frac{\partial}{\partial \hat{a}} \int_{\mathbb{R}} (a - \hat{a})^2 p_{A|Y}(a|y) da \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial \hat{a}} \int_{\mathbb{R}} (a - \hat{a}) p_{A|Y}(a|y) da, \end{aligned}$$

d'où la solution

$$\hat{a}_Q = \int_{(A)} a p_{A|Y}(a|y) da$$

que l'on identifie comme la *moyenne conditionnelle a posteriori* $\mathbb{E}(a|y)$.

2. *Coût en valeur absolue* — Si l'on fait maintenant le choix de prendre $C(a, \hat{a}) = |a - \hat{a}|$, on peut écrire le risque conditionnel comme :

$$\begin{aligned} \bar{R}_c(\hat{a}) &= \int_{\mathbb{R}} |a - \hat{a}| p_{A|Y}(a|y) da \\ &= - \int_{-\infty}^{\hat{a}} (a - \hat{a}) p_{A|Y}(a|y) da + \int_{\hat{a}}^{+\infty} (a - \hat{a}) p_{A|Y}(a|y) da \end{aligned}$$

et, par dérivation par rapport à \hat{a} , à la définition de l'estimateur correspondant \hat{a}_A comme *médiane a posteriori* :

$$\int_{-\infty}^{\hat{a}_A} p_{A|Y}(a|y) da + \int_{\hat{a}_A}^{+\infty} p_{A|Y}(a|y) da = \frac{1}{2}.$$

3. *Coût uniforme* — Dans le cas du coût uniforme enfin, le risque conditionnel s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{R}_c(\hat{a}) &= \int_{\mathbb{R}} (1 - \mathbf{1}_{\Delta}(a - \hat{a})) p_{A|Y}(a|y) da \\ &= \int_{\mathbb{R}} p_{A|Y}(a|y) da - \int_{\hat{a}-\Delta/2}^{\hat{a}+\Delta/2} p_{A|Y}(a|y) da \\ &= 1 - \int_{\hat{a}-\Delta/2}^{\hat{a}+\Delta/2} p_{A|Y}(a|y) da. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le risque conditionnel est minimisé si l'intégrale intervenant dans la dernière équation est maximisée. Dans la limite où $\Delta \rightarrow 0$, l'estimateur correspondant est dit de *maximum a posteriori* (MAP) dans la mesure où l'intégration doit être faite au voisinage du maximum de la densité de probabilité *a posteriori* :

$$\left. \frac{\partial}{\partial a} p_{A|Y}(a|y) \right|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0. \quad (15)$$

Dans la pratique, il est difficile d'évaluer la densité de probabilité *a posteriori* $p_{A|Y}(a|y)$ du paramètre conditionnée par l'observation. Il est néanmoins possible de “renverser le sens des conditionnalités” en utilisant la formule de Bayes selon laquelle :

$$p_{A,Y}(a, y) = p_{A|Y}(a|y)p_Y(y) = p_{Y|A}(y|a)p_A(a),$$

et donc :

$$p_{A|Y}(a|y) = p_{Y|A}(y|a) \frac{p_A(a)}{p_Y(y)}.$$

Maximiser $p_{A|Y}(a|y)$ selon (15) est équivalent à maximiser son logarithme (transformation monotone croissante), c'est-à-dire :

$$\log p_{A|Y}(a|y) = \log p_{Y|A}(y|a) + \log p_A(a) - \log p_Y(y).$$

La densité *a priori* $p_Y(y)$ de l'observation ne dépendant pas du paramètre à estimer a , on a :

$$\frac{\partial}{\partial a} \log p_Y(y) = 0,$$

d'où la ré-écriture de l'estimateur MAP (15) selon :

$$\frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) + \frac{\partial}{\partial a} \log p_A(a) \Big|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0. \quad (16)$$

Remarque — Les trois estimateurs considérés (coût quadratique, en valeur absolue ou uniforme) conduisent au même résultat d'estimation lorsque la densité *a posteriori* $p_{A|Y}(a|y)$ est *symétrique* par rapport à sa moyenne.

8.3 Maximum de vraisemblance

On s'est intéressé pour l'instant à l'estimation d'un paramètre a scalaire et *aléatoire*, de densité de probabilité *a priori* $p_A(a)$ donnée. Si on s'intéresse maintenant à l'estimation d'un paramètre a qui est supposé *certain* mais inconnu, on peut adopter une approche probabiliste en utilisant l'estimation MAP et *en considérant que a est la réalisation d'une variable aléatoire uniformément répartie sur un certain intervalle*. La dérivée d'une telle densité "plate" étant nulle, l'estimateur MAP (16) se réduit à son premier terme, à savoir la dérivée de la densité de probabilité de l'observation conditionnée par le paramètre (ou le logarithme de cette densité), quantité appelée *vraisemblance* (ou *log-vraisemblance*). L'estimateur résultant, défini par :

$$\frac{\partial}{\partial a} p_{Y|A}(y|a) \Big|_{a=\hat{a}_{MV}} = 0, \quad (17)$$

est appelé estimateur à *maximum de vraisemblance* ("maximum likelihood" en anglais).

8.4 Borne de Cramér-Rao

La qualité d'un estimateur peut se mesurer, entre autres, par sa précision, c'est-à-dire la dispersion des estimations possibles, telle qu'elle est chiffrée par la variance. Une question importante est alors de savoir si une telle variance peut être rendue arbitrairement petite ou si, pour un problème donné, il

existe une limite à la précision maximale atteignable, avec alors l'objectif de trouver un (ou des) estimateur(s) permettant d'atteindre cette limite.

Afin de préciser cette question, on peut partir de la vraisemblance $p_{Y|A}(y|a)$ qui, en tant que densité de probabilité, est telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} p_{Y|A}(y|a) dy = 1.$$

Par dérivation et application du théorème de Fubini, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\int_{\mathbb{R}} p_{Y|A}(y|a) dy \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial a} p_{Y|A}(y|a) dy = 0.$$

Comme, par dérivation du logarithme, on a :

$$\frac{\partial}{\partial a} p_{Y|A}(y|a) = \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \cdot p_{Y|A}(y|a),$$

on en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \cdot p_{Y|A}(y|a) dy = 0,$$

soit encore :

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \right\} = 0. \quad (18)$$

Dérivant une nouvelle fois par rapport à a , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} \log p_{Y|A}(y|a) \cdot p_{Y|A}(y|a) + \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \cdot \frac{\partial}{\partial a} p_{Y|A}(y|a) \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} \log p_{Y|A}(y|a) + \left(\frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \right)^2 \right] p_{Y|A}(y|a) dy \\ &= \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a^2} \log p_{Y|A}(y|a) \right\} + \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

d'où l'introduction de la quantité:

$$I(a) := -\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a^2} \log p_{Y|A}(y|a) \right\} = \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \right)^2 \right\}, \quad (19)$$

appelée *information de Fisher*.

Soit maintenant \hat{a} une estimation de a que l'on supposera non biaisée de telle sorte que

$$\mathbb{E}\{\hat{a}\} = \int_{\mathbb{R}} \hat{a}(y) p_{Y|A}(y|a) dy = a.$$

Par dérivation par rapport à a , on en déduit que :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{a}(y) \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \cdot p_{Y|A}(y|a) dy \\ &= \mathbb{E} \left\{ \hat{a}(y) \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ [\hat{a}(y) - a + a] \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ [\hat{a}(y) - a] \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \right\} + a \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ [\hat{a}(y) - a] \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \right\}, \end{aligned}$$

la dernière égalité faisant usage de (18). Élevant cette dernière au carré, l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à :

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\mathbb{E} \left\{ [\hat{a}(y) - a] \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \right\} \right)^2 \\ &\leq \mathbb{E} \{ [\hat{a}(y) - a]^2 \} \cdot \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

soit encore :

$$1 \leq \mathbb{E} \{ [\hat{a}(y) - a]^2 \} \cdot I(a)$$

en utilisant (19). On obtient ainsi le résultat final, appelé *inégalité de Cramér-Rao*, selon lequel la variance de tout estimateur non biaisé est *bornée inférieurement* par l'inverse de l'information de Fisher :

$$\text{var}\{\hat{a}(y)\} \geq \frac{1}{I(a)}. \quad (20)$$

La borne de Cramér-Rao fixant une limite à la précision maximale pouvant être atteinte par un estimateur quelconque, on peut se poser la question de savoir quand elle est atteinte (estimateur efficace \hat{a}_E). Cette borne

provenant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il s'ensuit que l'inégalité (20) devient une égalité lorsqu'il y a proportionnalité entre les termes mis en jeu, c'est-à-dire lorsque

$$\hat{a}_E - a = k(a) \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \quad (21)$$

pour tout a . Il s'ensuit que, si un estimateur efficace existe, alors c'est un estimateur au sens du maximum de vraisemblance. En effet, la relation (21) devant être vérifiée pour tout a , elle l'est en particulier pour $a = \hat{a}_{MV}$, d'où

$$\begin{aligned} \hat{a}_E - \hat{a}_{MV} &= \frac{1}{k(\hat{a}_{MV})} \frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) \Big|_{a=\hat{a}_{MV}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc $\hat{a}_E = \hat{a}_{MV}$.

8.5 Exemples

Maximum a posteriori — Soit une séquence de N observations supposées indépendantes :

$$y_i = a + n_i,$$

dans laquelle $a \in \mathcal{N}(m, \sigma_a)$ et $n_i \in \mathcal{N}(0, \sigma_n)$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

L'observation y étant constituée par la collections des échantillons y_i , l'hypothèse d'indépendance et de normalité de ces derniers garantit que la densité $p_{Y|A}(y|a)$ se met sous la forme :

$$\begin{aligned} p_{Y|A}(y|a) &= \prod_{i=1}^N p_{Y_i|A}(y_i|a) \\ &= \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_n^2} (y_i - a)^2 \right\} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} \right)^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (y_i - a)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Comme l'on a par ailleurs

$$p_A(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_a} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_a^2} (a - m)^2 \right\},$$

on en déduit que

$$\log p_{Y|A}(y|a) + \log p_A(a) = \text{Cte} - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (y_i - a)^2 - \frac{1}{2\sigma_a^2} (a - m)^2,$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) + \frac{\partial}{\partial a} \log p_A(a) = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N y_i - \frac{Na}{\sigma_n^2} - \frac{a}{\sigma_a^2} + \frac{m}{\sigma_a^2}.$$

D'après (15), l'estimateur au sens du MAP de a est alors obtenu en rendant nulle cette expression, d'où le résultat :

$$\hat{a}_{MAP} = \frac{1}{1 + 1/\rho} \bar{y} + \frac{1}{1 + \rho} m, \quad (22)$$

avec $\rho := N\sigma_a^2/\sigma_n^2$ le produit du nombre d'observations et d'un "rapport signal-sur-bruit" et

$$\bar{y} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

la moyenne empirique des observations.

On voit ainsi que l'estimateur \hat{a}_{MAP} au sens du MAP (22) réalise en fait une moyenne pondérée entre cette moyenne empirique \bar{y} et la moyenne *a priori* m , sa valeur tendant vers l'une ou l'autre selon que le nombre des observations et/ou le rapport signal-sur-bruit est plus fort ou plus faible :

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \hat{a}_{MAP} &= \bar{y} \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \hat{a}_{MAP} &= m. \end{aligned}$$

Maximum de vraisemblance — Si l'on suppose maintenant que le paramètre à estimer a est certain et peut prendre "n'importe quelle" valeur sur \mathbb{R} , on peut modéliser la méconnaissance que l'on en a par une fluctuation intrinsèque de grande amplitude ($\sigma_a^2 \rightarrow \infty$), ce qui conduit à une estimation au sens du maximum de vraisemblance qui se réduit à la moyenne empirique :

$$\hat{a}_{MV} = \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i.$$

Il est facile de voir que cet estimateur est non biaisé :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\hat{a}_{MV}\} &= \mathbb{E}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N y_i\right\} \\
 &= \mathbb{E}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (a + n_i)\right\} \\
 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (a + \mathbb{E}\{n_i\}) \\
 &= a.
 \end{aligned}$$

Sa variance s'écrit par suite :

$$\begin{aligned}
 \text{var}\{\hat{a}_{MV}\} &= \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^N y_i\right)^2\right\} - a^2 \\
 &= \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\left\{\left(Na + \sum_{i=1}^N n_i\right)^2\right\} - a^2 \\
 &= \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^N n_i\right)^2\right\} \\
 &= \frac{\sigma_n^2}{N}
 \end{aligned}$$

car, les n_i étant indépendants, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^N n_i\right)^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N n_i n_j\right\} \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbb{E}\{n_i n_j\} \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_n \delta_{i,j} \\
 &= N \sigma_n.
 \end{aligned}$$

Si l'on repart maintenant de l'expression de la log-vraisemblance $p_{Y|A}(y|a)$, on obtient directement que :

$$\frac{\partial}{\partial a} \log p_{Y|A}(y|a) = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (y_i - a).$$

Dérivant une nouvelle fois cette égalité, on voit que :

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \log p_{Y|A}(y|a) = -\frac{N}{\sigma_n^2},$$

ce qui, en se rapportant à (19) et (20) montre que l'estimateur à maximum de vraisemblance de la moyenne, tel qu'il est fourni par la moyenne empirique, est *efficace*.

8.6 Estimation dans le cas gaussien général

On considère la modélisation suivante :

$$y(t) = s(t, a) + b(t),$$

où

- $y(t)$ est l'observation, supposée connue sur l'intervalle $[0, T]$;
- $s(t, a)$ est le signal utile, supposé connu au paramètre a près que l'on cherche à estimer ;
- $b(t)$ est le bruit additif, supposé *gaussien* centré et de covariance $r_b(t, u)$ connue (mais pas forcément stationnaire).

8.6.1 Maximum de vraisemblance à temps continu

Ce modèle mettant en jeu des grandeurs à temps continu, on ne peut pas lui appliquer directement les résultats précédents. On peut néanmoins s'y ramener en *discrétisant* l'observation. Puisque l'on suppose connue la structure de corrélation du bruit, une façon de faire est de projeter l'observation sur les fonctions propres de la fonction de corrélation, ce qui garantit la *décorrélacion* des quantités discrètes obtenues, et ce faisant leur *indépendance* sous l'hypothèse gaussienne envisagée.

On obtient ainsi une représentation (dite *de Karhunen-Loève*) de la forme :

$$y(t) = \sum_{i=1}^N y_i \varphi_i(t),$$

les fonctions de décomposition $\{\varphi_i(t)\}$ étant solutions de l'équation propre :

$$\int_0^T r_b(t, u) \varphi_i(u) du = \lambda_i \varphi_i(t)$$

et leur nombre N fini mais aussi grand que souhaité pour permettre une représentation de précision arbitrairement grande.

Procédant de la même façon pour le signal utile et le bruit, il en résulte le système d'équations :

$$y_i = s_i(a) + b_i; i = 1, \dots, N$$

que l'on écrira vectoriellement

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}(a) + \mathbf{b}.$$

Conditionnellement au paramètre a , la loi *a posteriori* de l'observation est alors une loi conjointe de Gauss à N variables :

$$p_{\mathbf{y}|A}(y_1, \dots, y_N|a) = (2\pi)^{-N/2} \sqrt{|\det \mathbf{r}_b|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{y} - \mathbf{s}(a)]^T \mathbf{r}_b^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{s}(a)] \right\}.$$

L'estimateur à maximum de vraisemblance \hat{a}_{MV} étant défini par

$$\left. \frac{\partial}{\partial a} \log p_{\mathbf{y}|A}(y_1, \dots, y_N|a) \right|_{a=\hat{a}_{MV}} = 0,$$

on en déduit qu'il est tel que

$$[\mathbf{y} - \mathbf{s}(a)]^T \mathbf{r}_b^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a}(a) \right] \Big|_{a=\hat{a}_{MV}} = 0.$$

Dans la base de Karhunen-Loève, la matrice de covariance du bruit est naturellement diagonale :

$$\mathbf{r}_b = \{\lambda_i \delta_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}.$$

Il en est donc de même de son inverse qui s'écrit :

$$\mathbf{r}_b^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda_i} \delta_{ij} \right\}_{1 \leq i, j \leq N}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} Q &:= [\mathbf{y} - \mathbf{s}(a)]^T \mathbf{r}_b^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a}(a) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} [y_i - s_i(a)] \cdot \frac{\partial s_i}{\partial a}(a) \end{aligned}$$

Si l'on appelle $\sigma_b(t, u)$ le noyau de l'opérateur inverse de la covariance défini par :

$$\int_0^T \sigma_b(t, u) r_b(u, v) du = \delta(u - v),$$

on peut montrer qu'il vérifie l'équation propre

$$\int_0^T \sigma_b(t, u) \varphi_i(u) du = \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(t)$$

et donc

$$Q = \iint_0^T \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(t) \varphi_i(u) \right] [y(t) - s(t, a)] \frac{\partial s}{\partial a}(u, a) du dt.$$

D'après le théorème de Mercer, on a

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(t) \varphi_i(u) = \sigma_b(t, u)$$

et l'estimateur à maximum de vraisemblance prend finalement la forme à temps continu :

$$\iint_0^T [y(t) - s(t, a)] \sigma_b(t, u) \frac{\partial s}{\partial a}(u, a) du dt \Big|_{a=\hat{a}_{MV}} = 0.$$

On a vu que la borne de Cramér-Rao dépendait de l'information de Fisher définie par :

$$I(a) = -\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a^2} \log p_{\mathbf{Y}|A}(\mathbf{y}|a) \right\}.$$

Comme l'on a

$$\frac{\partial}{\partial a} \log p_{\mathbf{Y}|A}(\mathbf{y}|a) = [\mathbf{y} - \mathbf{s}(a)]^T \mathbf{r}_b^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a}(a) \right],$$

on en déduit que

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a^2} \log p_{\mathbf{Y}|A}(\mathbf{y}|a) \right\} = - \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a}(a) \right]^T \mathbf{r}_b^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a}(a) \right]$$

et l'inégalité de Cramér-Rao qui en découle (dans le cas non biaisé) prend alors les deux formes :

$$\text{var} \{ \hat{a}_{MV} \} \geq \left(\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a}(a) \right]^T \mathbf{r}_b^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a}(a) \right] \right)^{-1}$$

et

$$\text{var} \{ \hat{a}_{MV} \} \geq \left(\iint_0^T \frac{\partial s}{\partial a}(t, a) \sigma_b(t, u) \frac{\partial s}{\partial a}(u, a) \right)^{-1}$$

dans les cas respectivement discret et continu.

Si l'on suppose en outre que le bruit est blanc et stationnaire, on a

$$r_b(t, u) = \gamma_0 \delta(t - u)$$

et

$$\sigma_b(t, u) = \frac{1}{\gamma_0} \delta(t - u).$$

On en déduit que l'estimation au sens du maximum de vraisemblance est alors caractérisée par

$$\int_0^T [y(t) - s(t, a)] \frac{\partial s}{\partial a}(t, a) dt \Big|_{a=\hat{a}_{MV}} = 0,$$

avec pour borne de Cramér-Rao la quantité :

$$CR = \gamma_0 \left(\int_0^T \left[\frac{\partial s}{\partial a}(t, a) \right]^2 dt \right)^{-1}.$$

8.6.2 Exemples

Estimation d'amplitude — On considère l'observation

$$y(t) = a s(t) + b(t),$$

où $b(t)$ est un bruit blanc stationnaire centré de densité spectrale de puissance γ_0 . Par rapport aux notations précédentes, on a :

$$s(t, a) := a s(t) \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial a}(t, a) = s(t)$$

et l'estimateur à maximum de vraisemblance, défini par :

$$\int_0^T [y(t) - a s(t)] s(t) dt \Big|_{a=\hat{a}_{MV}} = 0,$$

s'écrit simplement

$$\hat{a}_{MV} = \frac{1}{E_s} \int_0^T y(t) s(t) dt.$$

On vérifie sans peine que cet estimateur est non biaisé et efficace.

Estimation de retard — On considère dans ce cas l'observation

$$y(t) = s(t - a) + b(t),$$

où le signal utile $s(t)$ est supposé de durée T_s finie et d'énergie E_s finie. L'observation $y(t)$ est supposée connue sur un support temporel $[0, T]$ tel que toutes les translatées envisageables du signal soient encore contenues dans ce même support.

Partant de

$$s(t, a) := s(t - a),$$

on en déduit que

$$\frac{\partial s}{\partial a}(t, a) = -\dot{s}(t - a),$$

d'où l'équation de l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance :

$$\int_0^T [y(t) - s(t - a)] \dot{s}(t - a) dt \Big|_{a=\hat{a}_{MV}} = 0.$$

En tenant compte du fait que

$$\begin{aligned} \int_0^T s(t-a) \dot{s}(t-a) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \dot{s}(t) dt \\ &= i2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f |S(f)|^2 df \\ &= 0, \end{aligned}$$

on voit que l'estimateur à maximum de vraisemblance est caractérisé par :

$$\left. \int_0^T y(t) \dot{s}(t-a) dt \right|_{a=\hat{a}_{MV}} = 0,$$

soit encore :

$$\left. \frac{\partial}{\partial a} \int_0^T y(t) s(t-a) dt \right|_{a=\hat{a}_{MV}} = 0,$$

ce qui revient à :

$$\hat{a}_{MV} = \arg \max_a q(a),$$

avec

$$q(a) := \int_0^T y(t) s(t-a) dt,$$

quantité qui n'est autre que la *corrélation* de l'observation avec le signal utile.

La transformation mise en jeu étant linéaire, on peut la scinder en deux parties correspondant respectivement à une partie *signal* et à une partie *bruit* :

$$q(a) = g(a) + h(a),$$

avec

$$h(a) := \int_0^T b(t) s(t-a) dt$$

et

$$g(a) := \int_0^T s(t) s(t-a) dt$$

en se ramenant par commodité à un retard à estimer nul, ce qui ne réduit en rien la généralité du problème qui est invariant par translation.

La partie signal correspondant à l'autocorrélation du signal, on peut évaluer les performances (biais et variance) de \hat{a}_{MV} par développement limité de $g(a)$ autour de 0. On obtient ainsi :

$$g(a) \approx g(0) + a \dot{g}(0) + \frac{a^2}{2} \ddot{g}(0),$$

soit encore

$$g(a) \approx E_s \left(1 - \frac{1}{2} \beta_s^2 a^2 \right)$$

en posant :

$$\beta_s^2 := \frac{4\pi^2}{E_s} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |S(f)|^2 df,$$

la quantité β_s représentant une *largeur de bande effective*.

Puisque, dans le cadre de cette approximation, \hat{a}_{MV} annule la dérivée de

$$q(a) = E_s \left(1 - \frac{1}{2} \beta_s^2 a^2 \right) + h(a)$$

et que

$$\frac{dh}{da}(a) = - \int_0^T b(t) \dot{s}(t-a) dt,$$

on en déduit que l'estimateur vérifie

$$\hat{a}_{MV} = - \frac{1}{\beta_s^2 E_s} \int_0^T b(t + \hat{a}_{MV}) \dot{s}(t) dt.$$

Le bruit étant supposé stationnaire et centré, on a

$$\mathbb{E}\{\hat{a}_{MV}\} = 0,$$

ce qui prouve que l'estimateur est *non biaisé*.

Pour le calcul de la variance, on écrit

$$\begin{aligned} \text{var}\{\hat{a}_{MV}\} &= \frac{1}{(\beta_s^2 E_s)^2} \mathbb{E} \left\{ \iint_0^T b(t + \hat{a}_{MV}) b(u + \hat{a}_{MV}) \dot{s}(t) \dot{s}(u) dt du \right\} \\ &= \frac{1}{(\beta_s^2 E_s)^2} \iint_0^T \gamma_0 \delta(t-u) \dot{s}(t) \dot{s}(u) dt du \\ &= \frac{\gamma_0}{(\beta_s^2 E_s)^2} \int_0^T \dot{s}^2(t) dt, \end{aligned}$$

d'où, en utilisant la relation de Parseval

$$\begin{aligned}\int_0^T \dot{s}^2(t) dt &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |S(f)|^2 df \\ &= \beta_s^2 E_s,\end{aligned}$$

on déduit le résultat final :

$$\text{var} \{ \hat{a}_{MV} \} = \frac{1}{\beta_s^2 (E_s/\gamma_0)}.$$

Ce résultat, qui est connu sous le nom de *formule de Woodward*, montre que la précision dans une mesure de retard est d'autant meilleure que :

- le spectre de fréquences du signal est plus large et/ou l'énergie est davantage concentrée vers les hautes fréquences;
- le rapport signal-sur-bruit est plus élevé.

Pour calculer l'information de Fisher, on part de

$$I(a) = \frac{1}{\gamma_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s}{\partial a}(t, a) \right]^2 dt$$

et on en déduit que :

$$CR = \frac{1}{\beta_s^2 (E_s/\gamma_0)},$$

ce qui prouve que l'estimateur de retard au sens du maximum de vraisemblance est *efficace*.

9 Détection optimale

Le problème de la détection optimale s'attache à décider si un signal, dont tout ou partie des caractéristiques sont connues, est présent ou non dans une observation donnée. Il ne prend de sens que lorsque l'observation en question est bruitée et si l'on dispose d'un minimum d'informations *a priori* sur les propriétés statistiques du bruit perturbateur.

9.1 Filtrage adapté

Une première approche au problème de la détection peut se formuler en termes de *filtrage*, l'idée étant de “faire sortir” le signal du bruit (s'il est présent). D'une manière plus précise, on suppose que l'on dispose d'une observation de la forme

$$y(t) = s(t) + b(t),$$

où $s(t)$ est le signal, supposé connu, dont on souhaite tester la présence éventuelle et $b(t)$ est le bruit d'observation, que l'on supposera stationnaire, centré, blanc et de variance connue γ_0 :

$$\mathbb{E}\{b(t)b(s)\} = \gamma_0 \delta(t - s)$$

de telle sorte que, sans traitement, la limite de détection est *a priori* fixée par la *valeur-crête* du signal à détecter.

Afin de quantifier la possibilité de “voir” le signal émerger du bruit après traitement, on peut introduire une mesure de *contraste* entre l'hypothèse H_0 où l'observation est formée du bruit seul et l'hypothèse H_1 où elle résulte du mélange signal + bruit :

$$d(z) := \frac{|\mathbb{E}\{z(t)|H_1\} - \mathbb{E}\{z(t)|H_0\}|}{\sqrt{\text{var}\{z(t)|H_0\}}},$$

expression dans laquelle on suppose que l'on a filtré l'observation au moyen d'un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$.

La quantité d'intérêt devenant :

$$z(t) = \int h(t - u) y(u) du,$$

on peut alors se poser de savoir si le choix judicieux d'un tel filtre permettrait d'obtenir un contraste maximum entre les deux hypothèses H_0 et H_1 . En

raisonnant de façon instantanée, on a $\mathbb{E}\{z(t)|H_0\} = 0$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{z^2(t)|H_0\} &= \mathbb{E}\left\{\int\int h(t-u)h(t-v)b(u)b(v)du dv\right\} \\ &= \int\int h(t-u)h(t-v)\gamma_0\delta(u-v)du dv \\ &= \gamma_0\int h^2(t-u)du \\ &= \gamma_0 E_h,\end{aligned}$$

en notant E_h l'énergie du filtre de réponse $h(t)$, d'où il suit directement que

$$\text{var}\{z(t)|H_0\} = \gamma_0 E_h.$$

Comme, par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{z(t)|H_1\} &= \mathbb{E}\left\{\int h(t-u)[s(u)+b(u)]du\right\} \\ &= \int h(t-u)s(u)du,\end{aligned}$$

car le signal $s(t)$ est supposé certain et le bruit $b(t)$ centré, on obtient

$$d^2(z) = \frac{\left|\int h(t-u)s(u)du\right|^2}{\gamma_0 E_h}.$$

Le contraste ainsi obtenu peut alors être maximisé en faisant usage de l'inégalité de Cauchy-Schwarz selon laquelle

$$\left|\int h(t-u)s(u)du\right|^2 \leq \int h^2(t-u)du \cdot \int s^2(u)du = E_h E_s,$$

d'où le résultat central :

$$d(z) \leq \sqrt{\frac{E_s}{\gamma_0}}.$$

On voit ainsi que ce contraste maximal après traitement fait intervenir une grandeur *intégrée* (l'énergie) et non pas *instantanée* (la puissance-crête). Il y a ainsi un gain potentiel évident dans la mesure où, pour une même valeur-crête, une augmentation de la durée du signal suffira à améliorer sa

possibilité de détection. À titre d'exemple, on peut prendre pour $s(t)$ la fonction :

$$s(t) = a \mathbf{1}_{[0,T]}(t)$$

pour laquelle

$$d(z) \leq \frac{a\sqrt{T}}{\sqrt{\gamma_0}}.$$

Ceci met en évidence le rôle conjoint joué par la durée et l'amplitude, cette dernière pouvant rester inférieure au niveau de bruit (on ne "voit" pas le signal qui est "noyé" dans le bruit) sans que cela nuise à sa détection à condition qu'elle soit maintenue suffisamment longtemps.

Si l'on revient au cas général, la valeur maximale du contraste est atteinte dès lors que les conditions pour garantir que l'inégalité de Cauchy-Schwarz devienne une égalité sont remplies, c'est-à-dire lorsqu'il y a colinéarité entre les facteurs du produit scalaire :

$$h(t - u) \propto s(u),$$

soit encore

$$h(u) \propto s(t - u).$$

Il faut voir cette relation comme relative à la variable de temps courante u de façon à garantir une valeur maximale au contraste en sortie du filtre à l'instant t . Si l'on renverse la perspective en considérant t comme la variable de temps courante, la réponse impulsionnelle $h(t)$ n'est autre que le signal à détecter *renversé dans le temps* :

$$h(t) = s(-t)$$

et on parle alors de *filtre adapté*.

Le filtrage adapté revient à effectuer l'inter-corrélation entre l'observation et le signal à détecter puisque l'on a

$$z(t) = \int y(u) s(u - t) du.$$

Remarque — D'un point de vue pratique, on considère en général le signal à détecter comme défini sur un support temporel limité. Si l'on convient de noter ce support $[0, T]$ et l'on souhaite opérer le filtrage *en ligne*, la détection

ne pourra être effective qu'avec un retard (connu) lié à la durée T du signal. La réponse impulsionnelle du filtre adapté prend alors la forme

$$h(t) = s(T - t)$$

et sa sortie s'écrit

$$z(t) = \int_{t-T}^t y(u) s(u - (t - T)) du.$$

Du fait que le bruit additif est supposé centré, la sortie du filtre adapté se comporte en moyenne comme

$$\mathbb{E} \{z(t)|H_1\} = \gamma_s(t)$$

en notant γ_s la fonction d'auto-corrélation déterministe du signal, quantité qui est par définition maximale en $t = 0$ et prenant la valeur E_s à cette date. Si l'on raffine alors le modèle d'observation initial en introduisant un retard inconnu t_0 pour le signal à détecter :

$$y(t) = s(t - t_0) + b(t),$$

il vient immédiatement que

$$\mathbb{E} \{z(t)|H_1\} = \gamma_s(t - t_0)$$

et le problème de détection se double de la possibilité d'une *estimation* du retard selon

$$\hat{t}_0 = \arg \max_t z(t),$$

la question en suspens étant de déterminer dans quelle mesure la valeur maximale de la sortie du filtre adapté est significativement au-dessus du niveau des fluctuations du bruit.

Exemple 1. FA_chirp2.m (Filtrage adapté) —

Exemple 1. pulse_comp.m et pulse_comp2.m (Compression d'impulsion) —

9.2 Rapport de vraisemblance

Avec la notion de filtrage adapté, on a fait deux hypothèses :

1. le traitement visant à maximiser le contraste est un *filtrage linéaire*, faisant du détecteur qui en résulte un détecteur à *structure imposée* (en l'occurrence, linéaire) ;
2. le signal à détecter est noyé dans un bruit *blanc*.

On peut alors se poser la question de relâcher ces deux hypothèses, en se contentant de dire que l'observation $y(t)$ est transformée en une quantité $z(t)$ au moyen d'une opération \mathcal{S} :

$$z = \mathcal{S}(y)$$

dont on ne spécifie pas la nature *a priori* (détecteur à *structure libre*), conduisant au contraste

$$d(\mathcal{S}(y)) = \frac{|\mathbb{E}\{\mathcal{S}(y)|H_1\} - \mathbb{E}\{\mathcal{S}(y)|H_0\}|}{\sqrt{\text{var}\{\mathcal{S}(y)|H_0\}}}.$$

En remarquant que ce contraste est invariant par toute transformation affine, c'est-à-dire que

$$d(\lambda\mathcal{S}(y) + \mu) = d(\mathcal{S}(y))$$

pour tout λ et tout μ , on peut supposer que $\mathbb{E}\{\mathcal{S}y|H_0\} = 0$ sans perte de généralité, et donc réduire l'étude du contraste à celle de

$$d(\mathcal{S}(y)) = \frac{|\mathbb{E}\{\mathcal{S}(y)|H_1\}|}{\sqrt{\mathbb{E}\{\mathcal{S}^2(y)|H_0\}}}.$$

Si l'on exprime alors le numérateur de ce contraste en fonction des seules lois de probabilités des observations suivant l'une et l'autre des hypothèses, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{S}(y)|H_1\} &= \int \mathcal{S}(y) p_{Y|H_1}(y|H_1) dy \\ &= \int \mathcal{S}(y) \frac{p_{Y|H_1}(y|H_1)}{p_{Y|H_0}(y|H_0)} p_{Y|H_0}(y|H_0) dy \\ &= \mathbb{E}\{\mathcal{S}(y) \Lambda(y)|H_0\} \end{aligned}$$

en introduisant la quantité

$$\Lambda(y) := \frac{p_{Y|H_1}(y|H_1)}{p_{Y|H_0}(y|H_0)}$$

appelé *rapport de vraisemblance* (“likelihood ratio” en anglais).

En appliquant alors l’inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$|\mathbb{E}\{\mathcal{S}(y)\Lambda(y)|H_0\}| \leq \sqrt{\mathbb{E}\{\Lambda^2(y)|H_0\}}\sqrt{\mathbb{E}\{\mathcal{S}^2(y)|H_0\}},$$

d’où l’on déduit que le contraste est maximisé selon

$$d(\mathcal{S}(y)) \leq \sqrt{\mathbb{E}\{\Lambda^2(y)|H_0\}},$$

la borne étant atteinte lorsque

$$\mathcal{S}(y) \propto \Lambda(y),$$

c’est-à-dire lorsque le détecteur est construit en calculant le rapport de vraisemblance.

Les deux approches, filtrage adapté et rapport de vraisemblance, proviennent d’hypothèses différentes mais qui ne sont pas nécessairement sans recouvrement, permettant de retrouver les résultats de la première à partir de certaines configurations de la seconde. Ainsi, si l’on se place pour simplifier dans un contexte discret permettant de calculer les densités de probabilité mises en jeu dans le rapport de vraisemblance, on peut montrer que le résultat essentiel du filtrage adapté, à savoir la structure de *corrélacion* du détecteur, est la conséquent naturelle d’une hypothèse de gaussiannité des observations.

Supposons en effet que l’observation soit de la forme

$$\begin{cases} H_0 : y_i = b_i \\ H_1 : y_i = b_i + s_i \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots, N$, avec s_i les échantillons du signal à détecter et b_i ceux du bruit supposés tels que $\mathbb{E}\{b_i\} = 0$ et $\mathbb{E}\{b_i b_j\} = \sigma^2 \delta_{ij}$.

Si l’on suppose alors que les b_i sont aussi *gaussiens*, la décorrélation se prolonge en indépendance et le rapport de vraisemblance global se factorise selon

$$\Lambda(y_1, \dots, y_N) = \prod_{i=1}^N \Lambda(y_i).$$

Comme l'on a

$$p_{Y|H_1}(y|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - s_i)^2 \right\}$$

et

$$p_{Y|H_0}(y|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} y_i^2 \right\},$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \Lambda(y_i) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(y_i - s_i)^2 - y_i^2] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ \frac{y_i s_i}{\sigma^2} \right\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\log \Lambda(y) \propto \sum_{i=1}^N y_i s_i,$$

ce qui est explicitement la forme d'une corrélation (à retard nul) entre l'observation et le signal à détecter utilisé comme référence.

9.3 Performances

Si l'on revient au principe de la détection formulée comme test d'hypothèses binaire, la situation est qu'il existe en moyenne un *écart* (maximisé au sens du critère de contraste retenu) entre les distributions de la quantité sur laquelle est basé le test, selon que l'on est dans le cas bruit seul (H_0) ou signal + bruit (H_1). Il en résulte que la détection proprement dite revient à comparer la statistique de test (typiquement, le rapport de vraisemblance) à un *seuil* γ situé quelque part "entre" les deux hypothèses, ce que l'on note symboliquement :

$$\Lambda(y) \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \gamma.$$

$$\begin{array}{c} H_1 \\ \\ H_0 \end{array}$$

Afin de préciser la notion de "entre" et la façon de choisir le seuil, on prendra l'exemple le plus simple possible, à savoir celui qui a été utilisé au paragraphe précédent, mais en se plaçant dans le cas où $N = 1$, c'est-à-dire

lorsqu'on ne dispose que d'une seule observation y . Il est facile d'établir dans ce cas que le rapport de vraisemblance a pour valeur

$$\Lambda(y) = \exp \left\{ \frac{s}{\sigma^2} \left(y - \frac{s}{2} \right) \right\}.$$

Le logarithme étant une transformation monotone croissante, la stratégie de détection peut s'écrire de manière équivalente

$$\begin{array}{c} H_1 \\ \log \Lambda(y) > \\ < \log \gamma, \\ H_0 \end{array}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{array}{c} H_1 \\ y > \\ < \eta := \frac{s}{2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{s^2} \log \gamma \right) \\ H_0 \end{array}.$$

Le test de détection consiste ainsi simplement à comparer la valeur de l'observation à un seuil η qui est lié à la *moyenne* $s/2$ des deux valeurs moyennes 0 et s relatives aux deux hypothèses.

Pour une variable d'ajustement $\log \gamma$ fixée (dont on discutera le rôle ensuite), on voit que le paramètre important est le rapport σ/s qui précise la dispersion de l'observation relativement à l'écart entre les valeurs moyennes. En particulier, si cette dispersion relative est faible, elle concourt de façon négligeable au terme correctif et le seuil se réduit à la valeur moyenne $s/2$ qui est le "milieu" de l'écart entre les hypothèses.

D'une manière générale cependant, la quantité $\log \gamma$ permet de régler le seuil de façon à contrôler les performances de la détection. En effet, dans la mesure où il y a deux décisions possibles en sortie du détecteur pour deux hypothèses effectivement réalisées, il y a quatre éventualités, dont deux correspondent à des erreurs et deux à de bonnes décisions :

1. la première possibilité d'erreur consiste à déclarer qu'un signal est présent alors qu'on est dans l'hypothèse H_0 de bruit seul. Ceci correspond à une situation dite de *fausse alarme* dont la probabilité P_F est chiffrée par :

$$P_F = \int_{\eta}^{\infty} p_{Y|H_0}(y|H_0) dy.$$

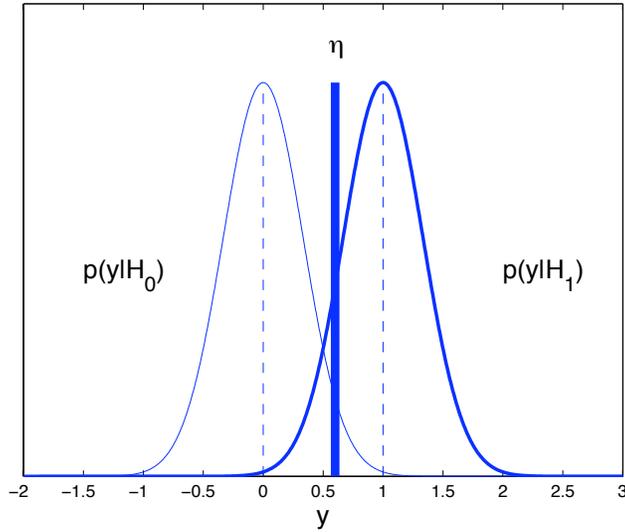


Figure 8: Schéma de principe du test d'hypothèses binaire.

- la deuxième possibilité d'erreur consiste inversement à décider qu'il n'y a pas de signal présent dans l'observation alors qu'on est objectivement dans l'hypothèse H_1 d'un mélange signal + bruit. On parle alors d'une situation de *non-détection*, dont la probabilité P_M est chiffrée par :

$$P_M = \int_{-\infty}^{\eta} p_{Y|H_1}(y|H_1) dy.$$

- si l'on s'intéresse maintenant aux bonnes décisions, la première possibilité est celle de la *détection* proprement dite, pour laquelle on déclare avec raison qu'un signal est présent dans l'hypothèse H_1 , la probabilité associée P_D valant alors :

$$P_D = \int_{\eta}^{\infty} p_{Y|H_1}(y|H_1) dy.$$

- la dernière possibilité enfin, qui n'est guère utilisée en pratique, s'intéresse au cas où l'on décide avec raison qu'il n'y a que du bruit lorsqu'on est effectivement dans l'hypothèse H_0 . On parle alors de *non-détection*

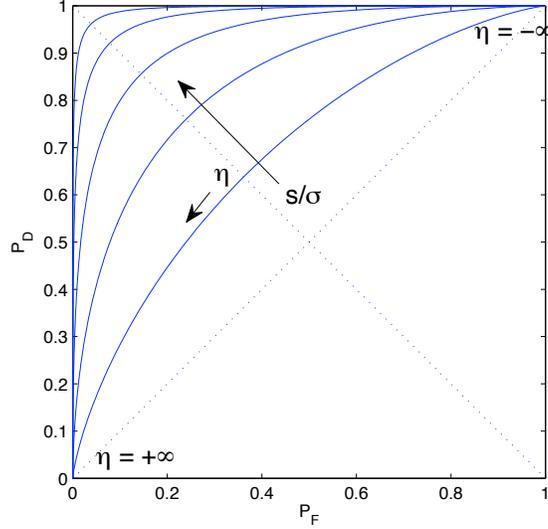


Figure 9: Courbes COR.

vraie, avec la probabilité associée P_N :

$$P_N = \int_{-\infty}^{\eta} p_{Y|H_0}(y|H_0) dy.$$

Il est clair que ces différentes probabilités satisfont aux relations :

$$\begin{aligned} P_M + P_D &= 1; \\ P_F + P_N &= 1. \end{aligned}$$

Deux de ces quatre probabilités suffisent alors à caractériser les performances du système de détection. En général, on fait usage de la probabilité de détection P_D et de la probabilité de fausse alarme P_F , ce qui permet de caractériser le point de fonctionnement d'un détecteur par la position du couple (P_F, P_D) dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Un détecteur idéal serait caractérisé par le point $(0, 1)$, évidemment inatteignable en pratique.

Lorsque l'on fait varier les paramètres libres du problème (ici, le "rapport-signal-sur-bruit" s/σ et le seuil η), on obtient un réseau de courbes appelées *courbes COR* (pour "Caractéristiques Opérationnelles de Récepteur") grâce

auquel on peut régler le détecteur ou en évaluer *a priori* les performances vis-à-vis du compromis entre la probabilité de détection P_D et celle de fausse alarme P_F . Ainsi :

- (situation *passive*) pour un rapport signal-sur-bruit donné et une probabilité de fausse alarme imposée, on peut connaître la probabilité de détection maximale atteignable, et avec quel seuil ;
- (situation *active*) réciproquement, si l'on impose un critère de performance *via* un couple (P_F, P_D) donné, on peut savoir à partir de quel rapport signal-sur-bruit (et avec quel seuil) une telle performance peut être obtenue.

9.4 L'exemple de la détection de ruptures

La détection de *ruptures* dans les signaux et systèmes est un problème particulièrement important dans la mesure où, souvent, c'est précisément dans le changement brusque que se concentre une part prépondérante de l'information. Parmi quelques applications, on peut citer tous les problèmes de *segmentation* (reconnaissance de début et fin d'événement, par exemple en parole ou en bio-médical, tri en zones homogènes, détection de contours ligne par ligne en vidéo, ...) ainsi que ceux de *surveillance* (changement de modes vibratoires, apparition de chocs, ...).

Le problème de changement le plus simple est celui du saut de moyenne, mais on peut encore envisager le cas d'un saut de variance ou encore tout type de variation dans les paramètres d'un modèle.

9.4.1 Structure de détection

Une formulation "hors-ligne" du problème de détection de rupture est la suivante : on dispose de N observations y_1, \dots, y_N et on désire tester l'homogénéité de la séquence ou, en d'autres termes, détecter si un changement (au plus) a eu lieu en un échantillon de la séquence que l'on notera y_r .

On peut donc écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : y_i \in p_0 \quad ; \quad 1 \leq i \leq N \\ H_1 : y_i \in p_0 \quad ; \quad 1 \leq i \leq r-1 \\ \quad \quad y_i \in p_1 \quad ; \quad r \leq i \leq N \end{array} \right.$$

en appelant p_0 la densité de probabilité des observations *avant* changement et p_1 celle *après* changement.

En supposant les échantillons y_i indépendants, on a :

$$p(y_1, \dots, y_N | H_0) = \prod_{i=1}^N p_0(y_i)$$

et

$$p(y_1, \dots, y_N | H_1) = \prod_{i=r-1}^N p_0(y_i) \cdot \prod_{i=r}^N p_1(y_i).$$

Le rapport de vraisemblance s'écrit par suite :

$$\Lambda(y_1, \dots, y_N) = \prod_{i=r}^N \frac{p_1(y_i)}{p_0(y_i)},$$

d'où la règle de décision générale :

$$\prod_{i=r}^N \frac{p_1(y_i)}{p_0(y_i)} \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \begin{array}{l} H_1 \\ H_0 \end{array} \eta.$$

Si l'on suppose maintenant que l'on spécialise le problème au *saut de moyenne* (à variance inchangée) d'un processus *gaussien* en posant

$$p_k = \mathcal{N}(\mu_k, \sigma); k = 0, 1,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \Lambda(y_1, \dots, y_N) &= \prod_{i=r}^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(y_i - \mu_1)^2 - (y_i - \mu_0)^2] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=r}^N [(y_i - \mu_1)^2 - (y_i - \mu_0)^2] \right\}, \end{aligned}$$

d'où la log-vraisemblance :

$$\log \Lambda(y_1, \dots, y_N) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \sum_{i=r}^N \left(y_i - \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \right).$$

De façon à mettre l'accent sur le changement éventuel par rapport à la moyenne initiale μ_0 , il est commode d'introduire la quantité :

$$S_k^l(\mu_0, \nu) := \nu \sum_{i=k}^l \left(y_i - \mu_0 - \frac{\nu}{2} \right)$$

selon laquelle :

$$\log \Lambda(y_1, \dots, y_N) = \frac{1}{\sigma^2} S_r^N(\mu_0, \nu).$$

L'instant de changement r étant *a priori* inconnu, on peut le remplacer par son estimation au sens du maximum de vraisemblance :

$$\hat{r} = \arg \max_{1 \leq r \leq N} \Lambda(y_1, \dots, y_N)$$

et donc à :

$$\hat{r} = \arg \max_{1 \leq r \leq N} S_r^N(\mu_0, \nu).$$

Ceci implique que le test de détection de saut de moyenne s'écrit :

$$g_N := \max_r S_r^N(\mu_0, \nu) \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \eta. \begin{array}{c} H_1 \\ H_0 \end{array}$$

Il s'agit dans ce cas d'un test *hors-ligne* et *rétrograde* relatif à l'écart entre les observations et la moyenne (demi-somme) de μ_0 et μ_1 . Il est néanmoins possible de transformer ce test rétrograde en un test *progressif* en remarquant que :

$$\max_r S_r^N(\mu_0, \nu) = S_1^N(\mu_0, \nu) - \min_k S_1^k(\mu_0, \nu).$$

En remplaçant l'indice *fixe* N par un indice *courant* n , ceci permet de reformuler le test en une version *séquentielle* pouvant opérer *en ligne* (test dit "de Page-Hinkley").

La détection de saut de moyenne a lieu lorsque

$$g_n = S_1^n(\mu_0, \nu) - \min_{1 \leq k \leq n} S_1^k(\mu_0, \nu) > \eta,$$

l'estimée de l'instant de rupture étant alors fournie par le *dernier indice* pour lequel la valeur minimum de $S_1^n(\mu_0, \nu)$ a été atteinte.

Lorsque le saut de moyenne attendu est inconnu (en valeur algébrique), une possibilité est :

1. de définir *a priori* un *saut minimum* d'amplitude ν_m ;
2. d'utiliser *deux tests* en parallèle :
 - l'un pour une *augmentation* :

$$\begin{aligned}
 U_0 &= 0 \\
 U_n &= \sum_{k=1}^n \left(y_k - \mu_0 - \frac{\nu_m}{2} \right); n \geq 1 \\
 m_n &= \min_{0 \leq k \leq n} U_k,
 \end{aligned}$$

avec détection si $U_n - m_n > \eta$.

- l'autre pour une *diminution* :

$$\begin{aligned}
 T_0 &= 0 \\
 T_n &= \sum_{k=1}^n \left(y_k - \mu_0 + \frac{\nu_m}{2} \right); n \geq 1 \\
 M_n &= \max_{0 \leq k \leq n} T_k,
 \end{aligned}$$

avec détection si $M_n - T_n > \eta$.

9.4.2 Performances

Dans le cas d'une détection séquentielle, deux types de performances sont recherchées :

1. la minimisation du *retard moyen à la détection* R , c'est-à-dire du temps qui sépare l'instant effectif de changement de la prise de décision correspondante ;
2. la maximisation du *temps moyen entre fausses alarmes* F .

Ces deux exigences sont évidemment contradictoires et, en pratique, on cherchera par exemple à construire des tests optimaux en ce sens qu'ils minimisent R pour un F donné. Le test de Page-Hinkley est précisément optimal en ce sens. On montre alors que le comportement asymptotique de R est de la forme :

$$R \sim \frac{2\sigma^2}{\nu^2} \log F$$

lorsque $F \rightarrow \infty$.

9.4.3 Exemples

`mean_change.m` (test de Page-Hinkley) —