

2 Signaux numériques

2.1 Continu et discret

Bien que les signaux soient le plus souvent associés à des évolutions naturelles à temps continu, les conserver sous une telle forme peut présenter des inconvénients évidents, en particulier au niveau de l'archivage. Il est donc intéressant de disposer de représentations qui transforment un signal à temps continu (et donc décrit par une infinité non dénombrable de valeurs) en une collection discrète de nombres.

2.2 Échantillonnage

L'*échantillonnage* est l'opération consistant à représenter un signal sur un ensemble discret d'instants.

Le cas le plus simple est celui de l'échantillonnage *uniforme*, qui consiste à prélever des valeurs d'un signal à temps continu $x(t)$ à des instants équidistants $\{nT_e, n \in \mathbb{Z}\}$, multiples d'un intervalle élémentaire T_e appelé *période d'échantillonnage*.

On peut formaliser cette opération d'échantillonnage en écrivant :

$$x(t) \rightarrow x_e(t) = x(t) \sum_n T_e \delta(t - nT_e),$$

soit encore en disant que le signal échantillonné $x_e(t)$ résulte de l'action d'un “peigne de Dirac” sur le signal à temps continu, garantissant entre autres que l'on a :

$$\int x_e(t) dt = \sum_n T_e x(nT_e).$$

Comme la transformation de Fourier transforme une multiplication temporelle en une convolution fréquentielle, et un peigne temporel de période T_e en un peigne fréquentiel de période $1/T_e$:

$$\sum_n \delta(t - nT_e) \leftrightarrow \frac{1}{T_e} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right),$$

il s'ensuit que le spectre d'un signal échantillonné est le périodisé du spectre

du signal à temps continu :

$$\begin{aligned} X_e(f) &= \int X(f - \xi) \sum_n \delta\left(\xi - \frac{n}{T_e}\right) \\ &= \sum_n X\left(f - \frac{n}{T_e}\right). \end{aligned}$$

Cette propriété permet d'établir le *théorème d'échantillonnage* selon lequel un signal à bande limitée $[-B/2, +B/2]$ est entièrement décrit par la donnée de ses seuls échantillons $\{x(nT_e), n \in \mathbb{Z}\}$ si :

$$T_e \leq \frac{1}{B},$$

condition garantissant que la périodisation induite par l'échantillonnage n'altère pas le contenu spectral de la bande de base $[-B/2, +B/2]$ (dans le cas contraire, on parle de *repliement spectral*, ou encore d'*aliasing*, selon la terminologie anglo-saxonne, cf. `ex_sousech.m`).

Dans la mesure où cette condition est remplie, on peut écrire :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int X(f) e^{i2\pi ft} df \\ &= \int X_e(f) \mathbf{1}_{[-B/2, +B/2]} e^{i2\pi ft} df \\ &= \int x_e(u) \frac{\sin \pi B(t - u)}{\pi(t - u)} du \\ &= \int \sum_n x(nT_e) T_e \delta(u - nT_e) \frac{\sin \pi B(t - u)}{\pi(t - u)} du \\ &= \sum_n x(nT_e) T_e \frac{\sin \pi B(t - nT_e)}{\pi(t - nT_e)} \end{aligned}$$

soit encore :

$$x(t) = \sum_n x(nT_e) \frac{\sin \pi B(t - nT_e)}{\pi B(t - nT_e)}$$

à l'échantillonnage critique $T_e = 1/B$.

Ce résultat fournit une formule d'*interpolation* pour les signaux à bande limitée puisque toute valeur du signal peut se déduire des seules valeurs discrètes résultant de l'échantillonnage.

On choisit souvent de poser $T_e = 1$, c'est-à-dire de prendre comme unité de temps la période d'échantillonnage, ce qui revient à normaliser la bande spectrale d'analyse à l'intervalle de fréquences réduites $[-1/2, +1/2]$. On écrit alors la formule d'interpolation (dite encore de reconstitution) selon

$$x(t) = \sum_n x[n] \frac{\sin \pi(t - n)}{\pi(t - n)},$$

en adoptant la notation simplifiée $x[n] := x(nT_e)$, avec $T_e = 1$.

La condition à remplir pour un échantillonnage correct (appelée condition de Shannon ou encore de Nyquist) est une cadence minimum liée à l'encombrement spectral du signal à analyser. Il est clair que, si un signal de bande spectrale $[-B/2, +B/2]$ est correctement échantillonné à la fréquence de Shannon $1/B$, il l'est également à toute fréquence supérieure puisque

$$X(f) = \mathbf{1}_{[-B/2, +B/2]} X(f) = \mathbf{1}_{[-B'/2, +B'/2]} X(f)$$

pour tout $B' \geq B$.

On en déduit par transformation de Fourier que

$$x(t) = \int x(u) \frac{\sin \pi B'(t - u)}{\pi B'(t - u)} du$$

si $B' \geq B$, ce qui signifie que, dans l'espace des signaux à bande limitée $[-B/2, +B/2]$, tout "sinus cardinal" $\sin \pi B'(t - u)/\pi B'(t - u)$ est unité de convolution (c'est-à-dire, a une action équivalente à celle de la distribution de Dirac) si $B' \geq B$.

2.3 Fourier

2.3.1 Temps continu et fréquence discrète

Soit un signal à temps continu $x(t)$, défini sur l'intervalle $[-T/2, +T/2]$ et supposé périodique de période T . On vérifie alors que les fonctions

$$\{\psi_k(t) := e^{i2\pi kt/T}, k \in \mathbb{Z}\}$$

sont orthogonales sur $[-T/2, +T/2]$ dans la mesure où

$$\begin{aligned}
\langle \psi_k, \psi_l \rangle &= \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i2\pi(k-l)t/T} dt \\
&= \left[\frac{T}{i2\pi(k-l)} e^{i2\pi(k-l)t/T} \right]_{-T/2}^{+T/2} \\
&= \frac{T}{\pi(k-l)} \frac{1}{2i} [e^{i\pi(k-l)} - e^{-i\pi(k-l)}] \\
&= \frac{1}{T} \frac{\sin \pi(k-l)}{\pi(k-l)} \\
&= \frac{1}{T} \delta_{k,l}
\end{aligned}$$

car $k-l \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $x(t)$ admet la décomposition (en *série de Fourier*)

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_k e^{i2\pi kt/T},$$

avec

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-i2\pi kt/T} dt.$$

2.3.2 Temps discret et fréquence continue

Le spectre $X(f)$ d'un signal à temps discret étant périodique, il est possible de le développer en série de Fourier. Supposons que le spectre “fondamental”, associé au signal non-échantillonné, occupe la bande $[-B/2, +B/2]$ et que l'échantillonnage soit critique, on a la décomposition

$$X(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k e^{i2\pi kf/B},$$

avec

$$\begin{aligned}
x_k &= \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{+B/2} X(f) e^{-i2\pi kf/B} df \\
&= \frac{1}{B} x\left(-\frac{k}{B}\right).
\end{aligned}$$

Si l'on adopte la convention selon laquelle l'échantillonnage critique ($T_e = 1/B$) est arbitrairement pris comme unité, on a $B = 1$ et, en écrivant $x[n] = x(nT_e)$ lorsque $T_e = 1$, on est conduit à la représentation

$$X(f) = \sum_n x[n] e^{-i2\pi n f}, |f| \leq 1/2$$

dans laquelle les échantillons $x[n]$ sont définis par

$$x[n] = \int_{-1/2}^{+1/2} X(f) e^{i2\pi n f} df.$$

Cette paire d'équations constitue une transformation de Fourier des signaux à temps discret.

2.3.3 Temps discret et fréquence discrète

Considérons maintenant un signal $x(t)$ de durée finie T . Par application du théorème d'échantillonnage dans le domaine des fréquences, son spectre $X(f)$ est entièrement caractérisé par ses échantillons $X(k/T)$. Considérons alors l'échantillonnage temporel d'un tel signal avec une période T_e , ce qui fournit N échantillons $x[n] = x(nT_e)$ en supposant que $T = NT_e$. Il lui correspond un spectre périodique $X_e(f)$ de période $1/T_e$, mais celui-ci est encore caractérisé par ses échantillons

$$X[k] := X_e(k/T_e)$$

puisque, $x(t)$ étant de durée limitée, $x[n]$ l'est aussi. En tenant compte à la fois de la période $1/T_e$ de $X_e(f)$ et de la relation $T = NT_e$, on en déduit que le signal échantillonné, qui est constitué de N valeurs $x[n]$ en temps, est également décrit par N valeurs $X[k]$ en fréquence. Ces valeurs s'écrivent

$$X[k] = \int x_e(t) e^{-i2\pi kt/T_e} dt$$

et, en introduisant la définition du signal échantillonné en temps

$$x_e(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \delta(t - nT_e),$$

on obtient la définition de la transformation de Fourier discrète ou série de Fourier discrète :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi nk/N}.$$

En utilisant d'une façon analogue les mêmes arguments de périodicité et d'échantillonnage, on peut montrer que cette transformée admet une formule d'inversion qui s'écrit

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i2\pi nk/N}.$$

Il importe de noter que, si les $x[n]$ correspondent de façon exacte aux échantillons de $x(t)$ en temps, les $X[k]$ sont en fréquence des échantillons de $X_e(f)$ et ne sont donc qu'une approximation de ceux de $X(f)$. En effet, $x(t)$ étant supposé à durée limitée, $X(n)$ ne peut être à bande strictement limitée, d'où un phénomène inévitable de repliement spectral.

2.3.4 Transformée de Fourier rapide

Si l'on calcule la transformée de Fourier discrète d'un signal de N points en appliquant directement la définition, chaque point en fréquence requiert N multiplications complexes et, puisqu'il y a N points à calculer, la complexité résultante est de l'ordre de N^2 opérations. Il est cependant possible de réduire le nombre des opérations nécessaires au calcul en introduisant des algorithmes dits *rapides* tels que la *Transformée de Fourier Rapide* (TFR en français et FFT, pour Fast Fourier Transform, en anglais, cf. <http://cnx.org/content/m12107/latest/>).

Pour en expliquer succinctement le principe, réécrivons la définition de la transformée de Fourier discrète selon

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk},$$

en introduisant les racines n -ièmes de l'unité

$$W_N := e^{-i2\pi/N}.$$

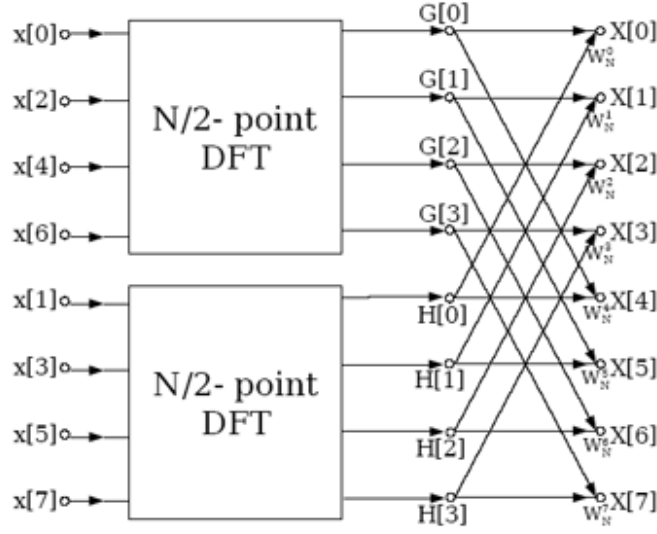


Figure 1: TFD à 8 points calculée par l'intermédiaire de 2 TFD à 4 points.

Si l'on suppose, ce que l'on fera, que $N = 2^M$, on peut alors former à partir des N échantillons de $x[n]$ deux séquences, de longueur $N/2$ chacune, correspondant aux échantillons d'indices respectivement pairs et impairs. Ceci permet d'écrire

$$X[k] = \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] (W_N^2)^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] (W_N^2)^{mk},$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$X[k] =: G(k) + W_N^k H[k].$$

On reconnaît en fait dans ces sommations partielles $G[k]$ et $H[k]$ les transformées de Fourier discrètes de chacune des deux séquences (d'indices respectivement pairs et impairs) obtenues par décimation en temps puisque

$$W_N^2 = e^{-i4\pi/N} = e^{-i2\pi/(N/2)} = W_{N/2}.$$

Les séquences obtenues $G[k]$ et $H[k]$ étant par ailleurs périodiques de période $N/2$, on obtient, dans le cas $N = 8$, le diagramme de calcul de la Figure 1.

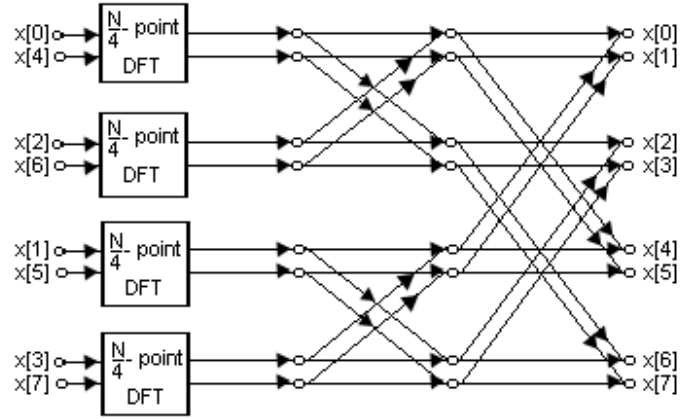


Figure 2: TFD à 8 points calculée par l'intermédiaire de 4 TFD à 2 points.

Chacune de ces transformées de Fourier discrètes étant décrite par $N/2$ échantillons seulement, il est alors possible d'itérer le processus en scindant de nouveau chaque demi-séquence en deux séquences décimées de longueur $N/4$ chacune, selon le schéma de la Figure 2.

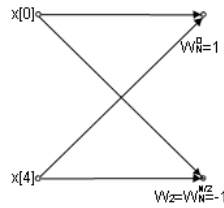


Figure 3: “Papillon” élémentaire de la TFD à 2 points.

La séquence initiale $x[n]$ étant supposée être de longueur 2^M , il est alors possible d'itérer le processus jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'à calculer $N/2$ transformées à deux points, ce qui ne met en jeu que des coefficients $+1$ et

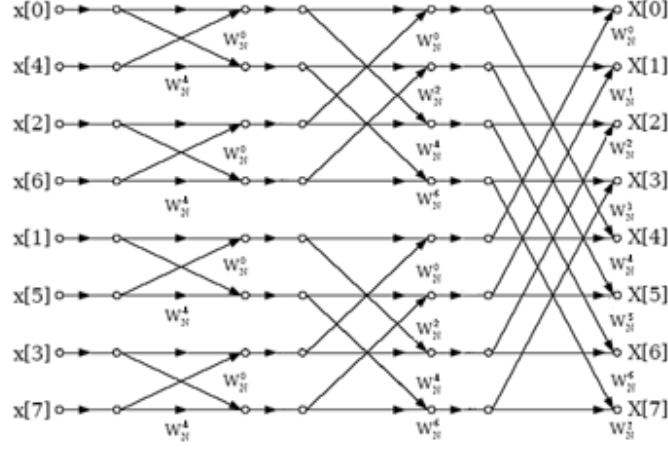


Figure 4: Schéma complet de la TFR à 8 points.

-1 (cf. la Figure 3 dans le cas présent où $M = 3$), conduisant *in fine* au diagramme complet donné en Figure 4..

Cet algorithme ne requiert donc au total que $M = \log_2 N$ étapes, chacune reposant sur N multiplications complexes. Sa complexité totale est de l'ordre de $N \log_2 N$ opérations, au lieu de N^2 par l'application directe de la définition. Ainsi, si l'on prend $N = 1024$, soit $M = 10$, le calcul d'une transformée de Fourier rapide met en jeu environ 10^4 opérations, contre environ 10^6 pour le calcul direct : le facteur de gain est donc de l'ordre de 100, soit deux ordres de grandeur.