

Décomposition Modale Empirique
et filtres équivalents,
de l'interprétation à quelques applications

Patrick Flandrin*
CNRS — École Normale Supérieure de Lyon
flandrin@ens-lyon.fr

GdR ISIS — 1er avril 2004

*collaboration avec
Paulo Gonçalves (INRIA Alpes & IST Lisbonne) et Gabriel Rilling (ENS Lyon)

demo

Décomposition Modale Empirique

Problème posé — Sur la base d'une observation $x(t)$, obtenir une représentation de la forme :

$$x(t) = \sum_{k=1}^K a_k(t) \psi_k(t),$$

où les $a_k(t)$ mesurent des “modulations d'amplitude” et les $\psi_k(t)$ des “oscillations”.

Idée — “signal = oscillations rapides sur oscillations lentes”.

Mise en œuvre (“Empirical Mode Decomposition” (EMD), Huang *et al.*, '98) — (1) identifier (localement) l'oscillation la plus rapide ; (2) soustraire celle-ci au signal de départ ; (3) itérer sur le résidu.

demo

L'algorithme de Huang

1. identifier les maxima et minima locaux du signal
2. en déduire une enveloppe supérieure et une enveloppe inférieure par interpolation (splines cubiques)
 - (a) soustraire l'enveloppe moyenne du signal
 - (b) itérer jusqu'à ce que "enveloppe moyenne = 0"
3. soustraire le mode ainsi obtenu du signal
4. itérer sur le résidu

demo

La décomposition

Processus itératif — Extraction *séquentielle*, localement “fine to coarse” :

$$\begin{aligned}x(t) &= d_1(t) + m_1(t) \\ &= d_1(t) + d_2(t) + m_2(t) \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=1}^K d_k(t) + m_K(t).\end{aligned}$$

Modes — Sélection automatique de *modes* ou “Intrinsic Mode Functions” (IMF), *centrés* et *de type AM-FM* (au sens large).

Hypothèse implicite — Modes “permanents” : $a_k(t) > 0$.

demo

Quelques caractéristiques

Pas de définition analytique — La décomposition est définie comme la sortie d'un algorithme \Rightarrow évaluation des performances par recours intensif à des *simulations numériques* dans des situations bien contrôlées.

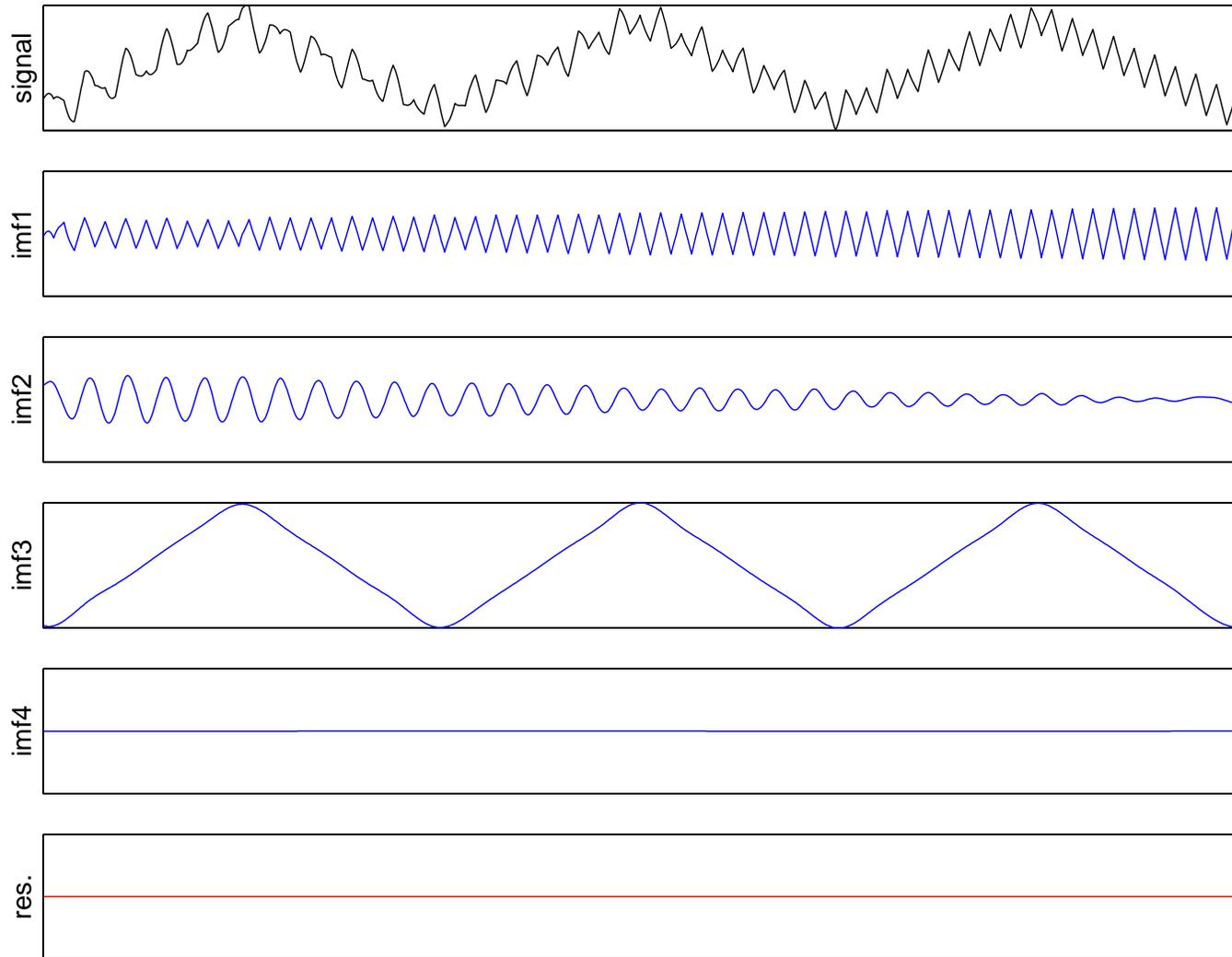
Localité — La méthode opère à l'échelle d'*une* oscillation.

Adaptativité — La décomposition est entièrement *pilotée par les données*.

Multirésolution — Le processus itératif explore *séquentiellement* les échelles constitutives “naturelles” d'un signal.

Oscillation quelconque — Pas de présupposé sur le caractère *harmonique* des oscillations \Rightarrow 1 oscillation *non linéaire* = 1 mode.

Empirical Mode Decomposition



La DME comme filtre — 1.

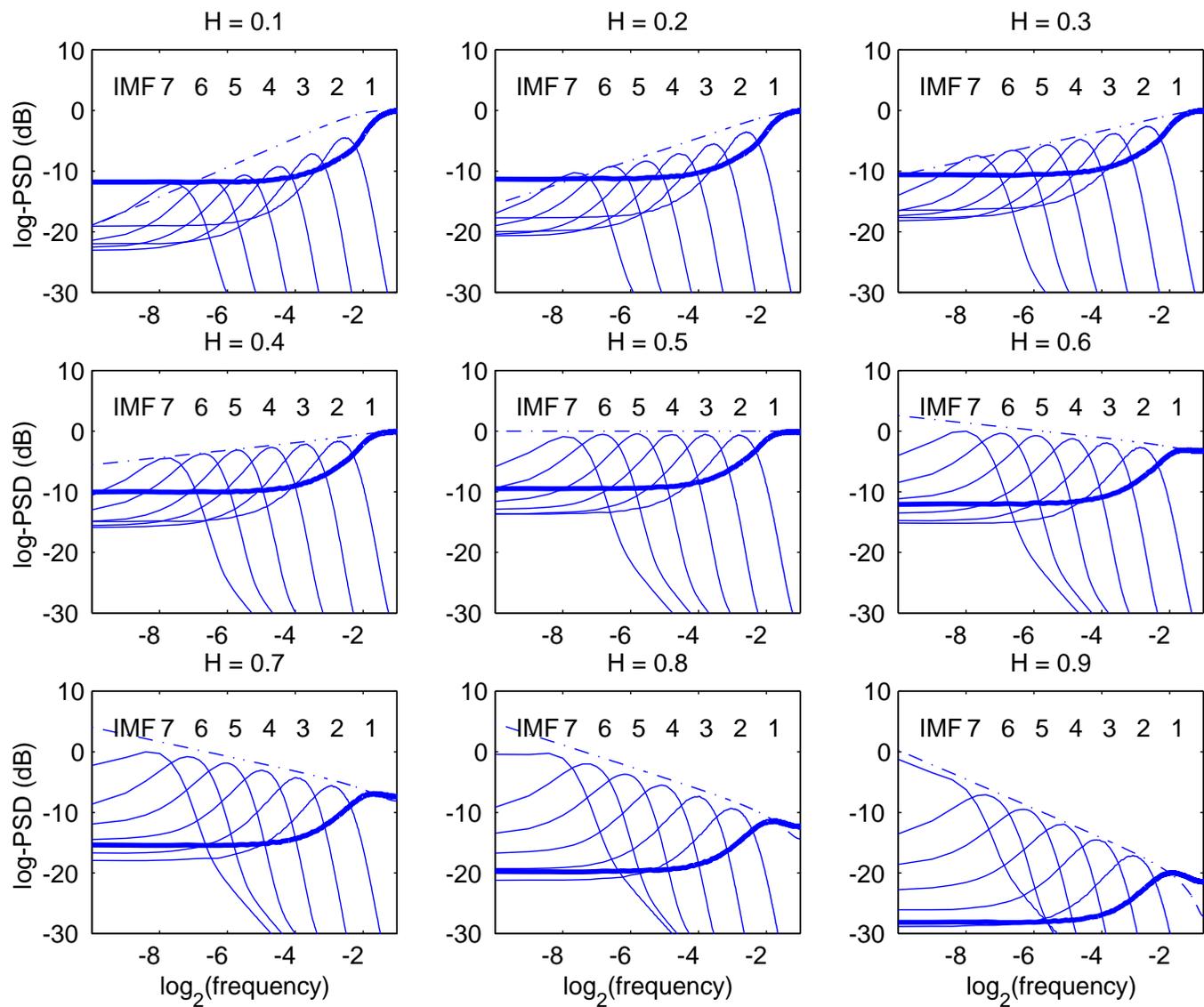
Approche stochastique et fréquentielle — Décomposition et analyse spectrale, mode par mode, d'un bruit large bande.

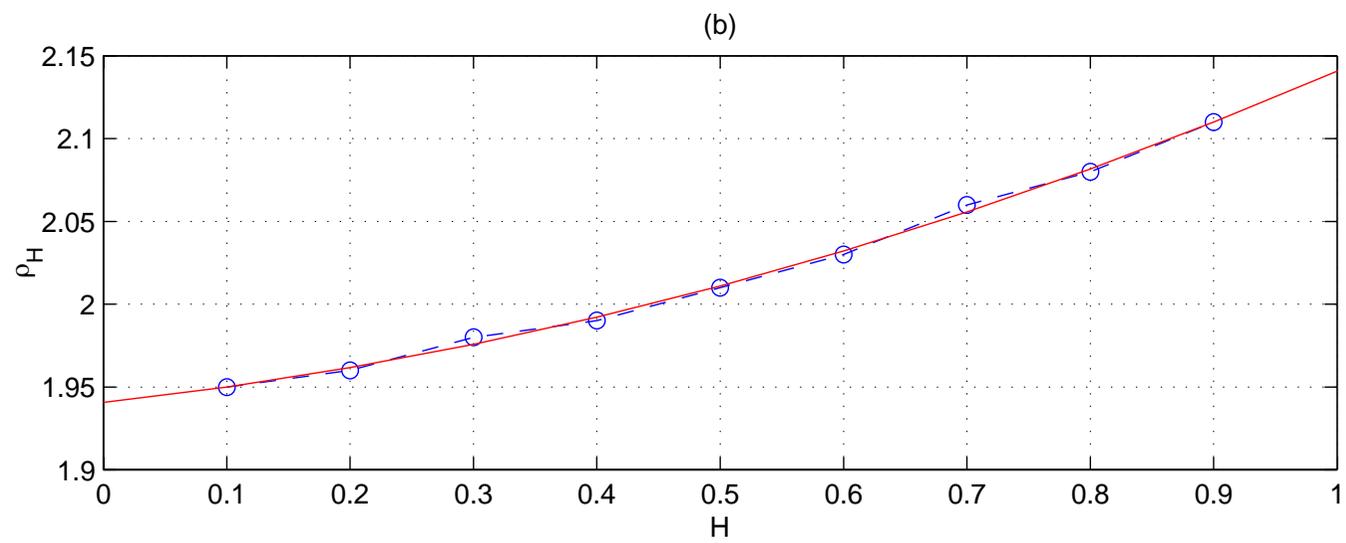
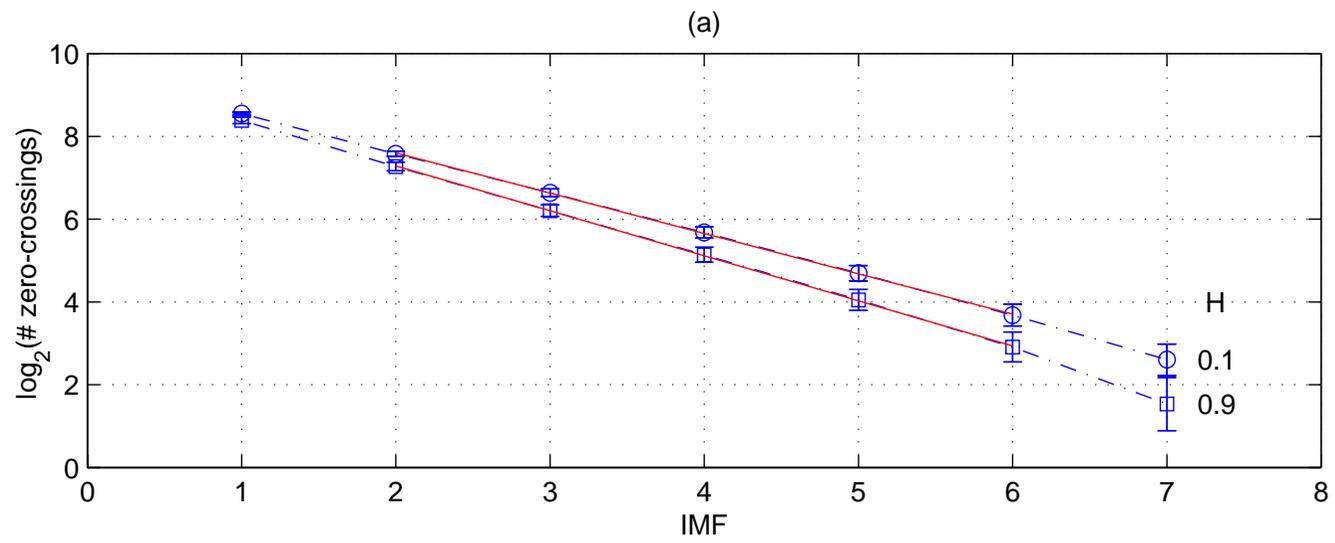
Modèle — Bruit gaussien fractionnaire (fGn), de densité spectrale $\mathcal{S}(f) \sim |f|^{1-2H}$, avec $0 < H < 1$ (exposant de Hurst).

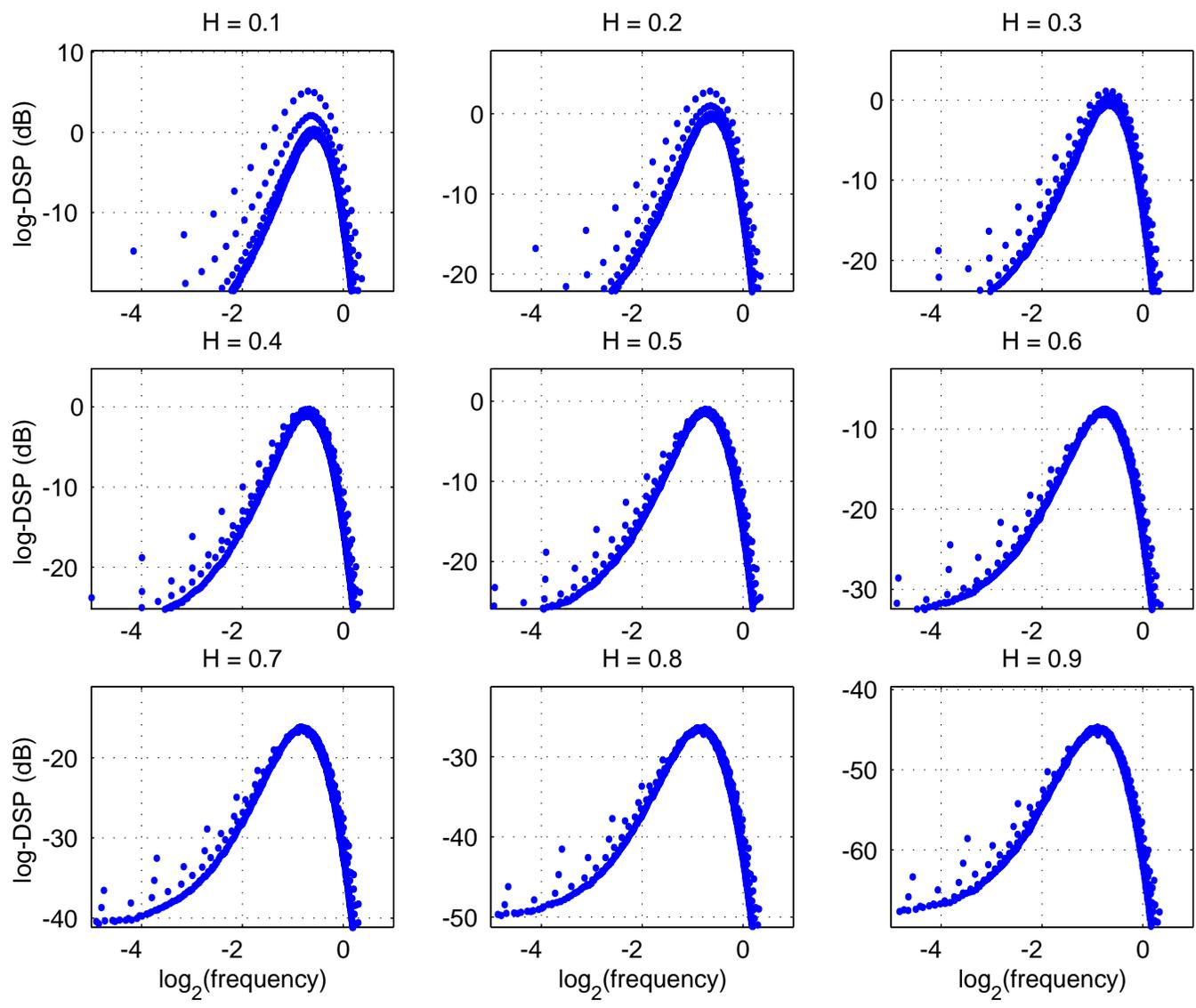
Résultats — Moyenne d'ensemble \Rightarrow émergence “spontanée” d'une structure de banc de filtres quasi-dyadique, auto-similaire (F., Gonçalves & Rilling, '03) :

$$\mathcal{S}_{k',H}(f) = \rho_H^{\alpha(k'-k)} \mathcal{S}_{k,H}(\rho_H^{k'-k} f)$$

pour tout $k' > k \geq 2$, avec $\alpha = 2H - 1$ et $\rho_H \approx 2$.







La DME comme filtre — 2.

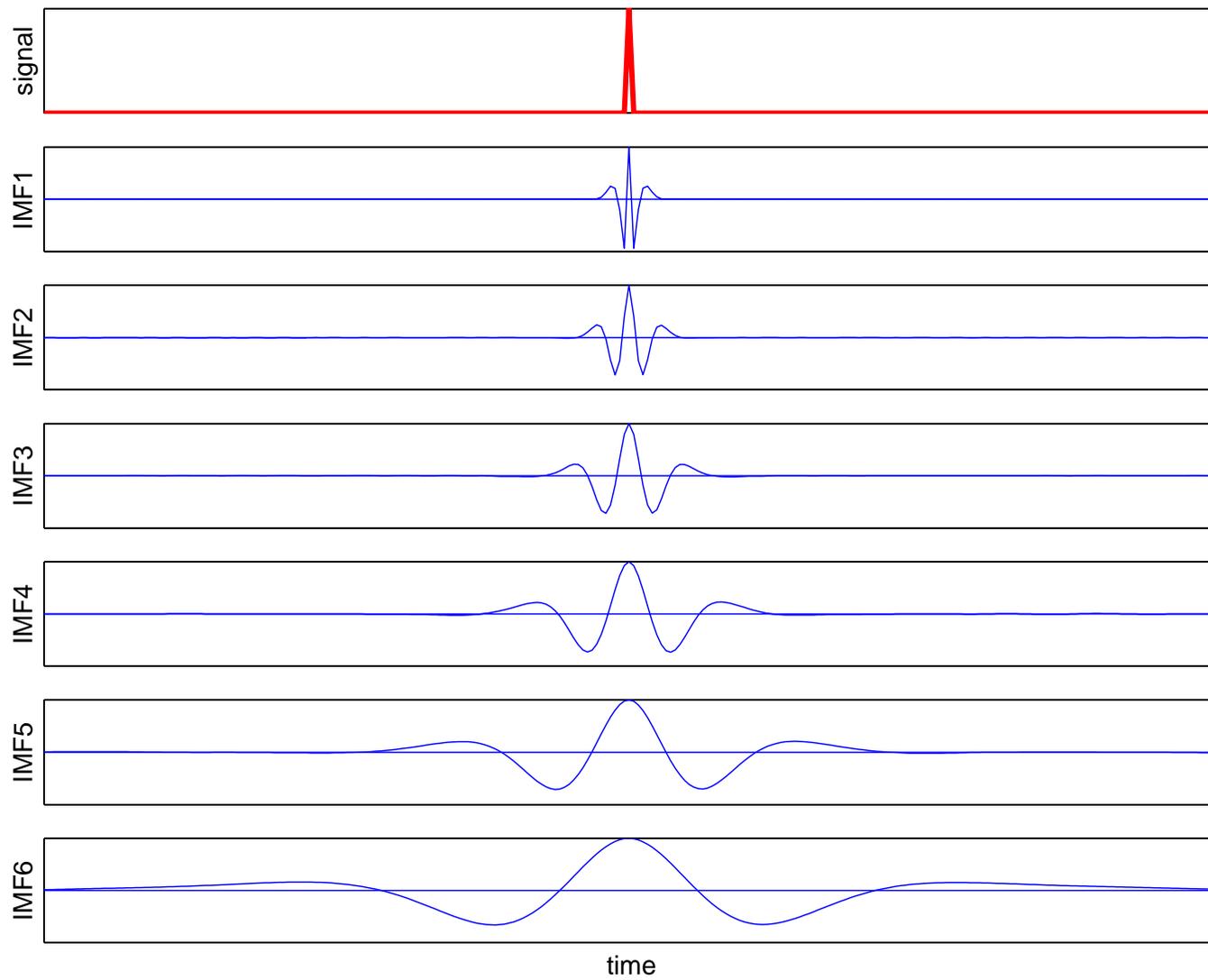
Approche déterministe et temporelle — Décomposition, mode par mode, d'une impulsion.

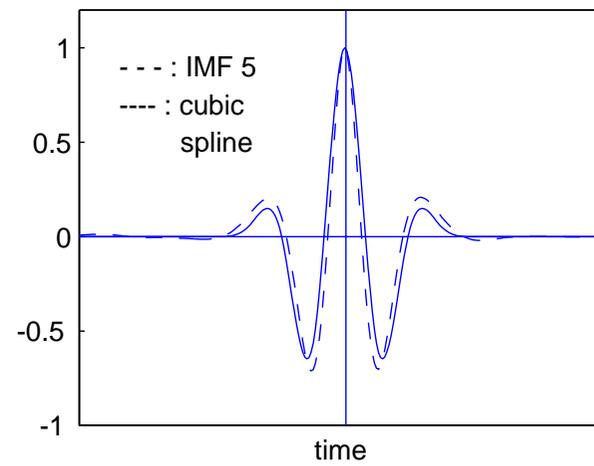
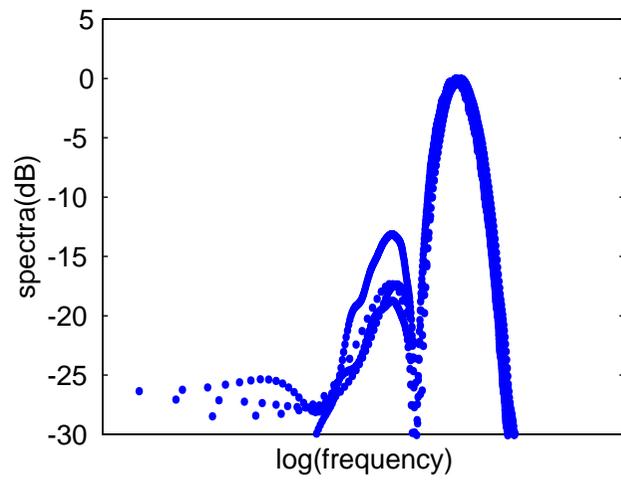
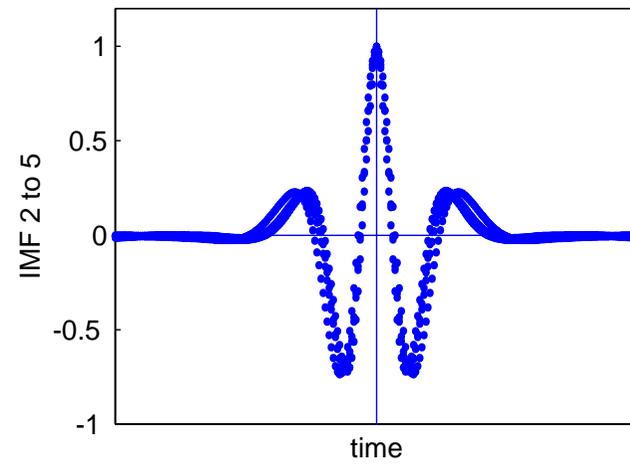
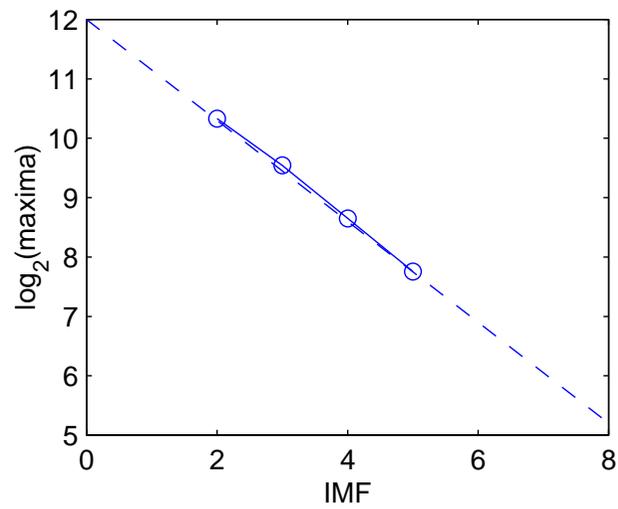
Modèle — Nécessité d'extrema multiples \Rightarrow impulsion *faiblement bruitée*.

Résultats — Moyenne d'ensemble \Rightarrow émergence “spontanée” d'une structure de banc de filtres quasi-dyadique, auto-similaire (F. & Gonçalves, '03) :

$$d_k[n] = \frac{1}{\alpha^k} \psi \left(\left\lfloor \frac{n}{\alpha^k} \right\rfloor \right),$$

pour tout $k' > k \geq 2$ et où $\alpha \approx 2^p$, avec p tel que $d_k[0] = 2^{C-pk}$.





Retour sur le fGn

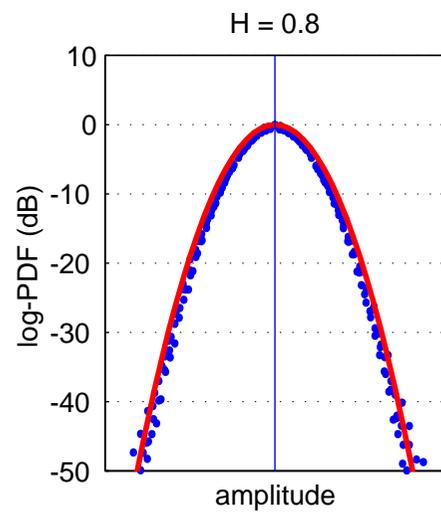
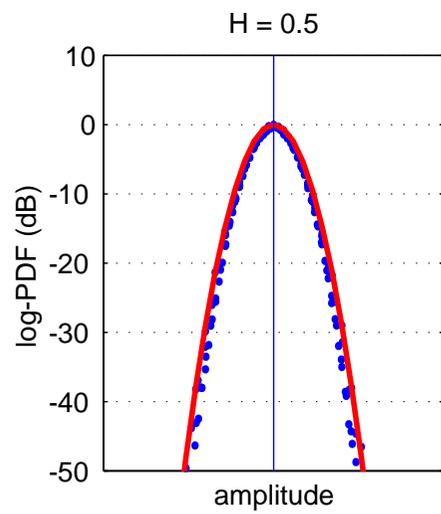
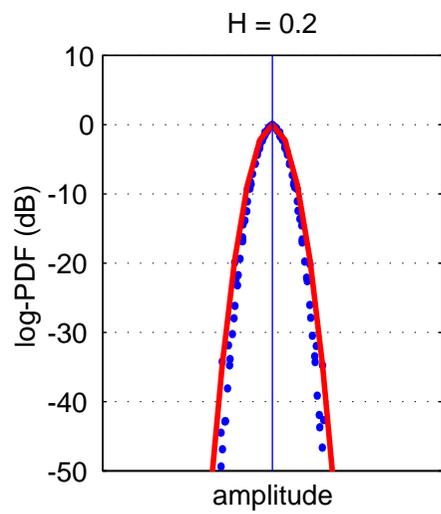
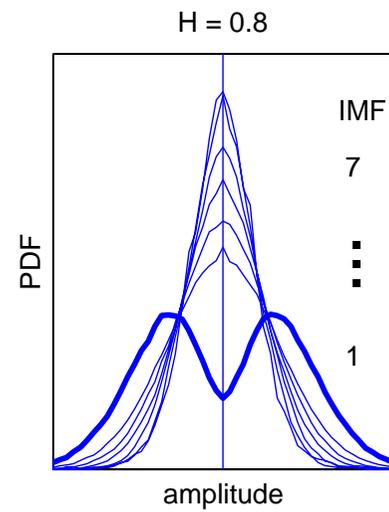
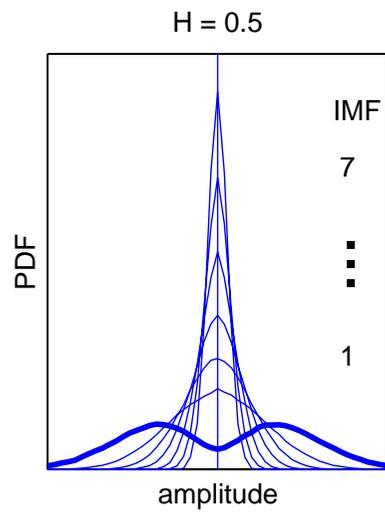
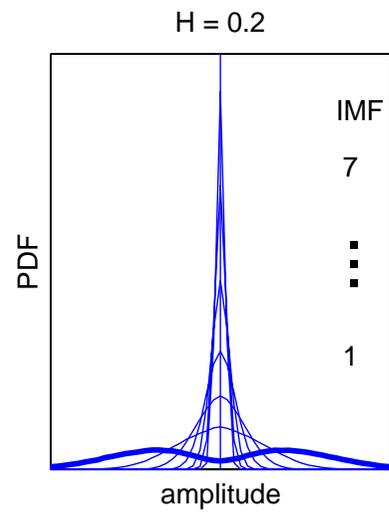
Variance des modes — La relation d'auto-similarité des spectres conduit, pour la variance $V_H[k] := \text{var } d_{k,H}[n]$, à :

$$\begin{aligned} V_H[k'] &= \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{S}_{k',H}(f) df \\ &= \rho_H^{\alpha(k'-k)} \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{S}_{k,H}(\rho_H^{k'-k} f) df \\ &= \rho_H^{(\alpha-1)(k'-k)} V_H[k], \end{aligned}$$

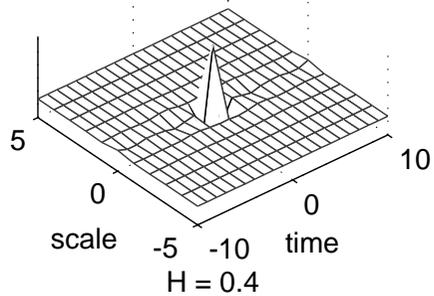
soit encore : $V_H[k] = C \rho_H^{2(H-1)k}$

Statistiques marginales — Gaussiannité pour $k \geq 2$.

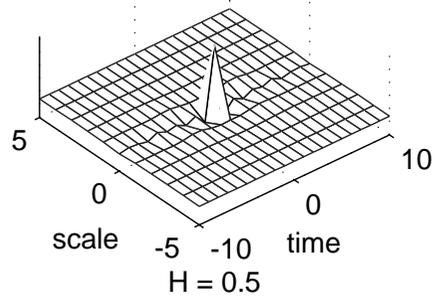
Corrélations — Réduites, sauf intra-mode pour H grand.



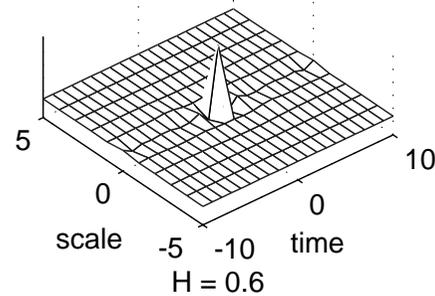
H = 0.1



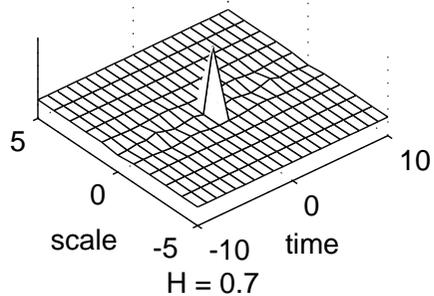
H = 0.2



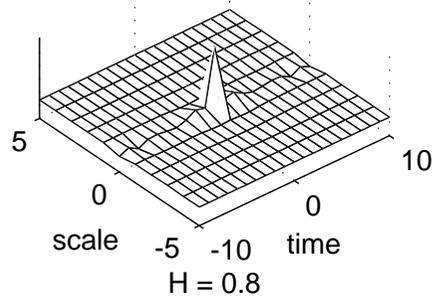
H = 0.3



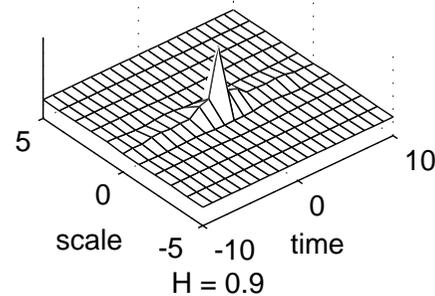
H = 0.4



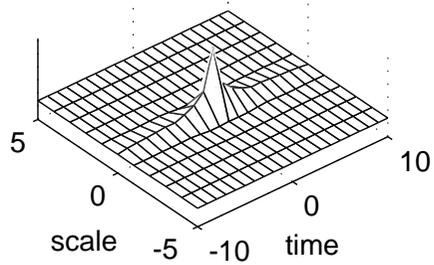
H = 0.5



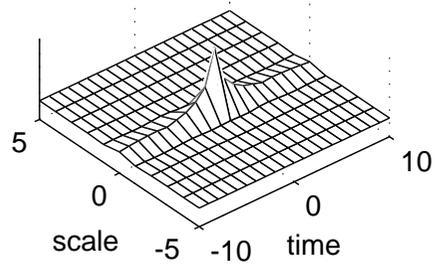
H = 0.6



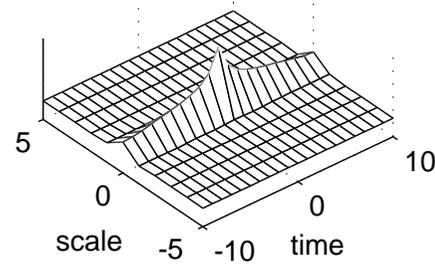
H = 0.7



H = 0.8



H = 0.9



Estimation de l'exposant de Hurst

Variance empirique — Évaluation de l'énergie mode par mode :

$$\hat{V}_H[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_{k,H}^2[n].$$

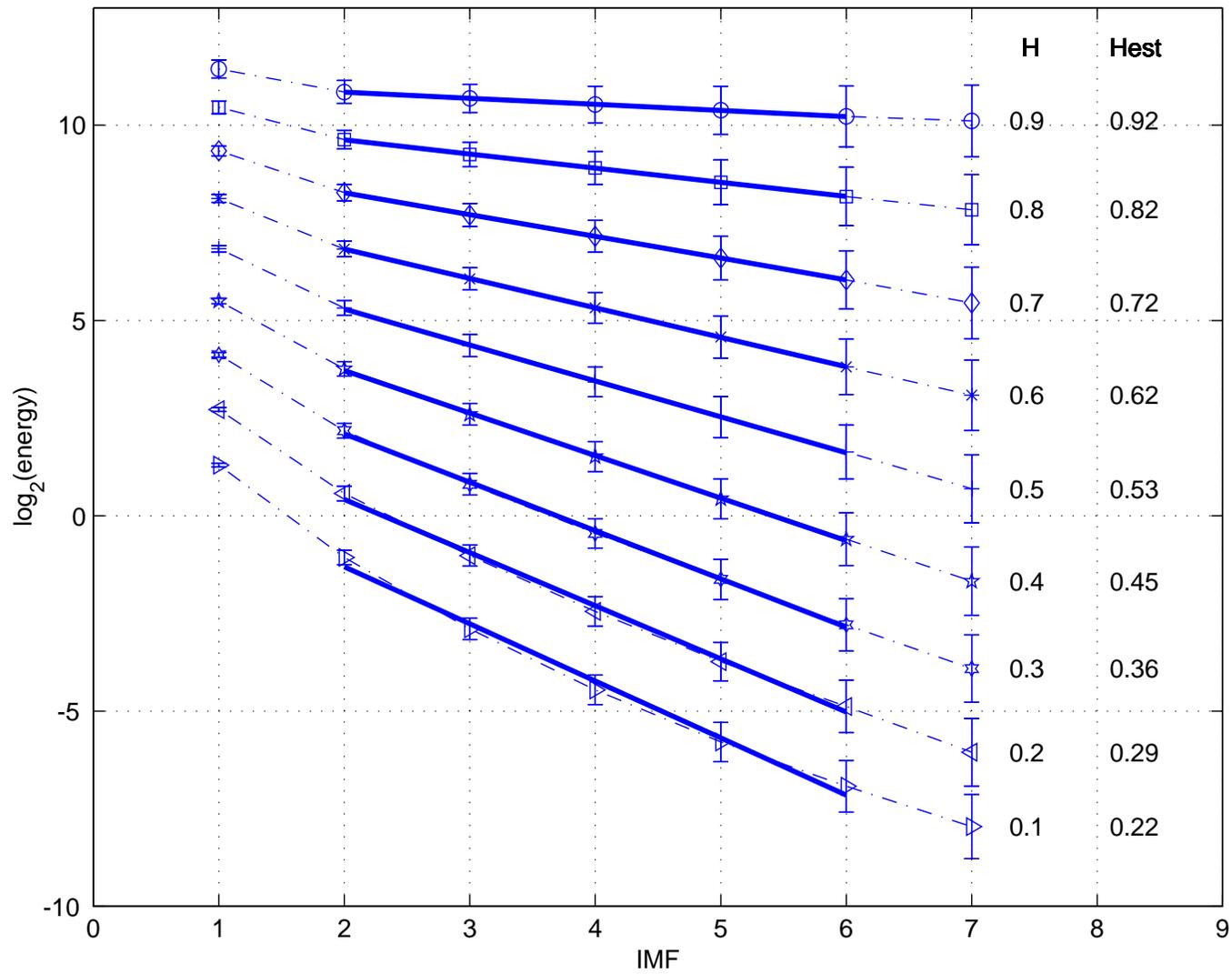
Pente — Le modèle pour la variance étant *linéaire* en échelle semi-logarithmique :

$$\log V_H[k] = [2(H - 1) \log \rho_H] k + \text{Cte},$$

une *estimée* \hat{H} de l'exposant de Hurst H peut s'écrire :

$$\hat{H} = 1 + \frac{\kappa_H}{2},$$

où κ_H est la pente mesurée.



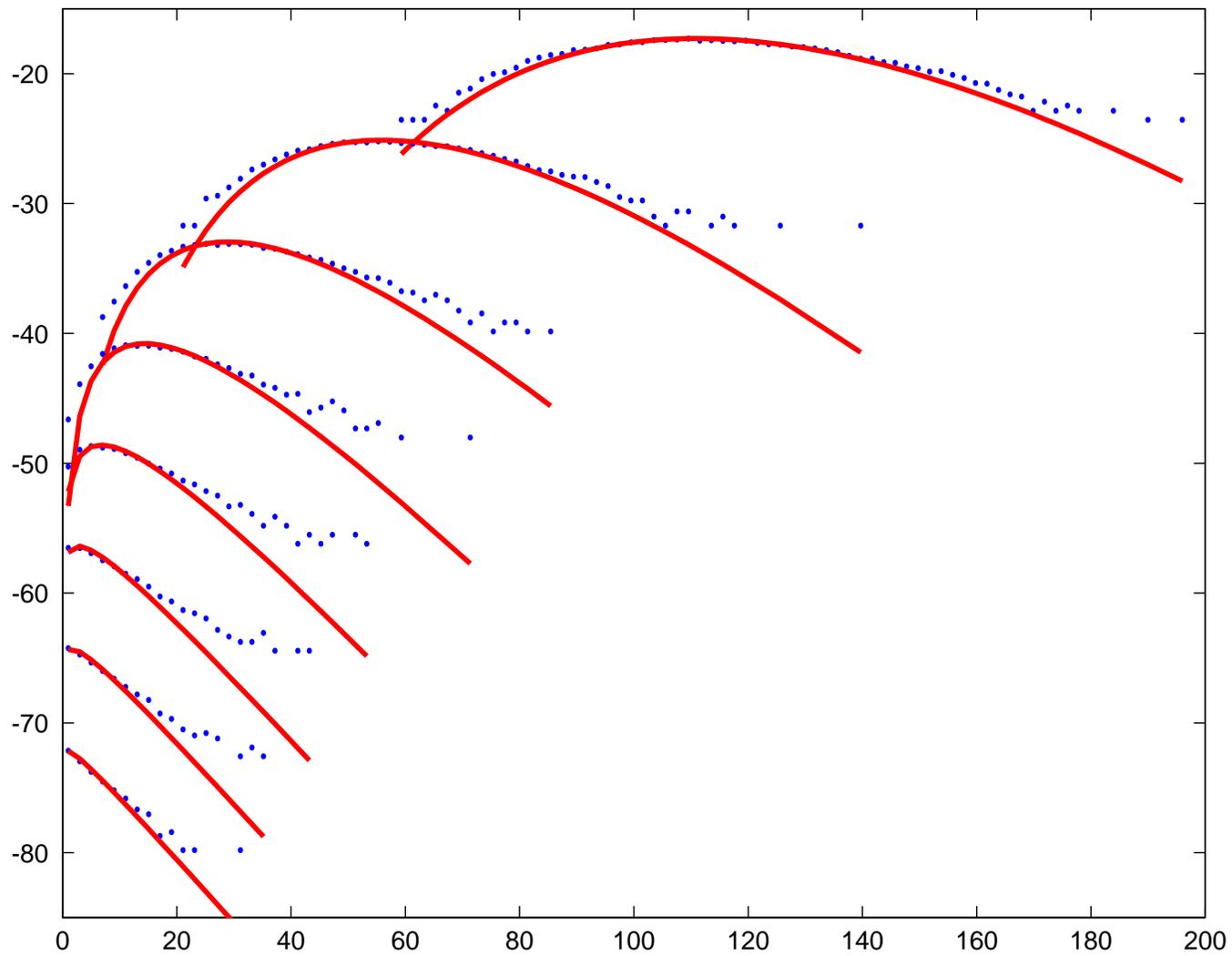
Manipulation de modes

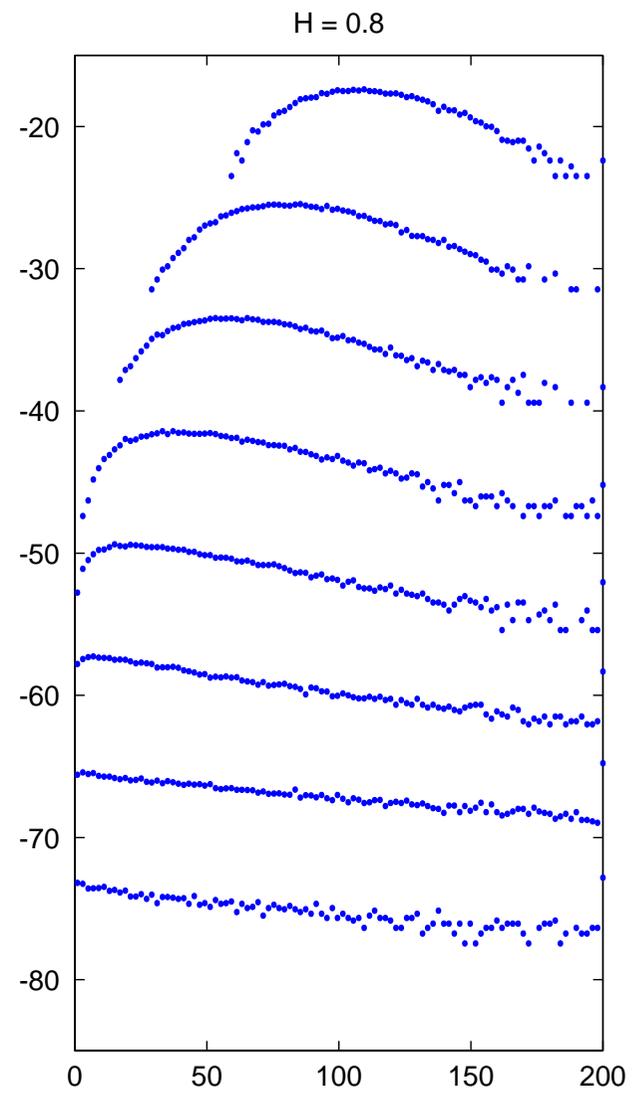
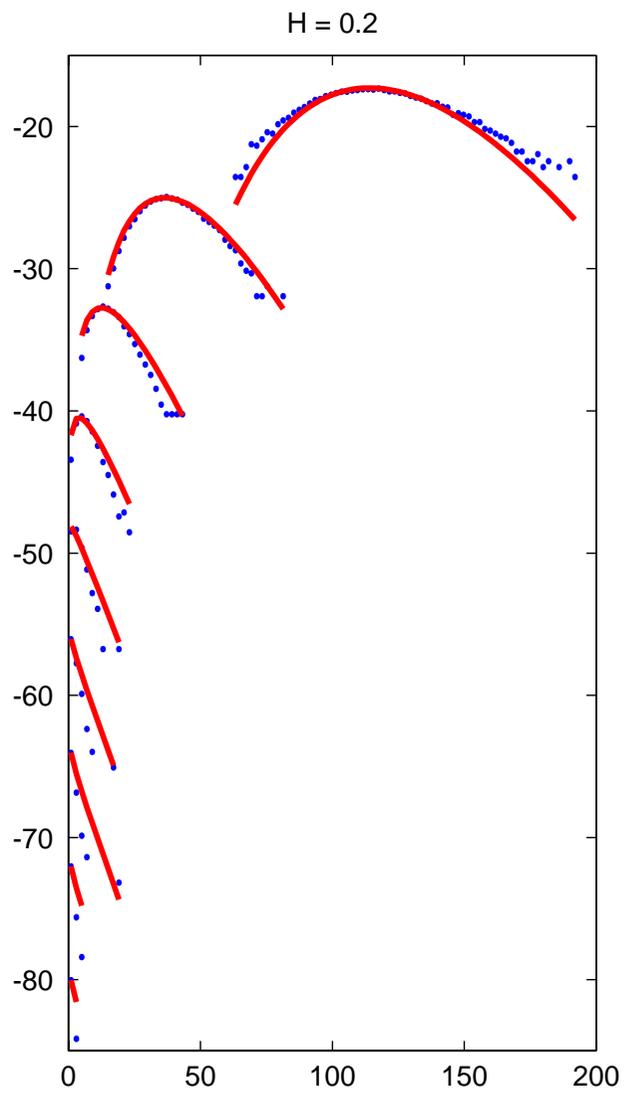
Reconstruction — L'extraction des modes est *non linéaire*, mais leur recombinaison linéaire est *exacte*. Sélection de modes \Rightarrow possibilités de reconstructions partielles.

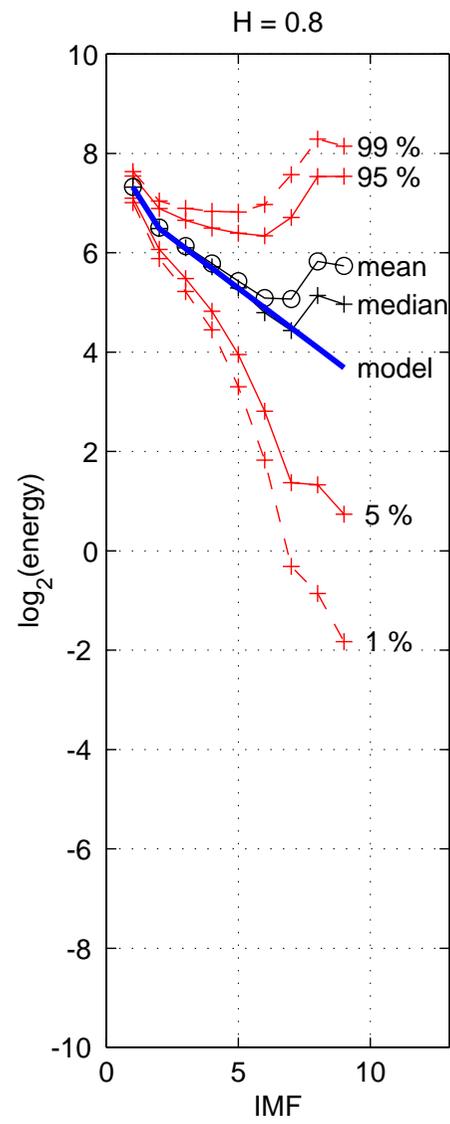
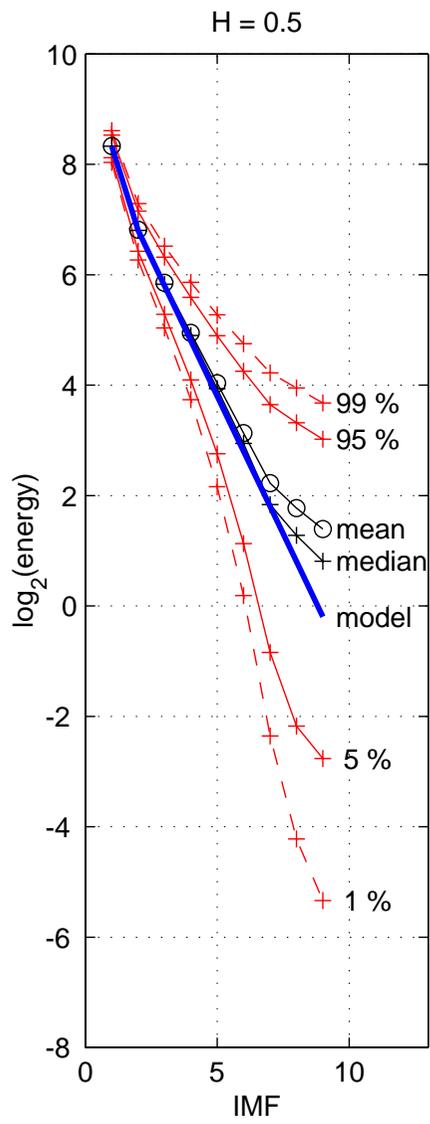
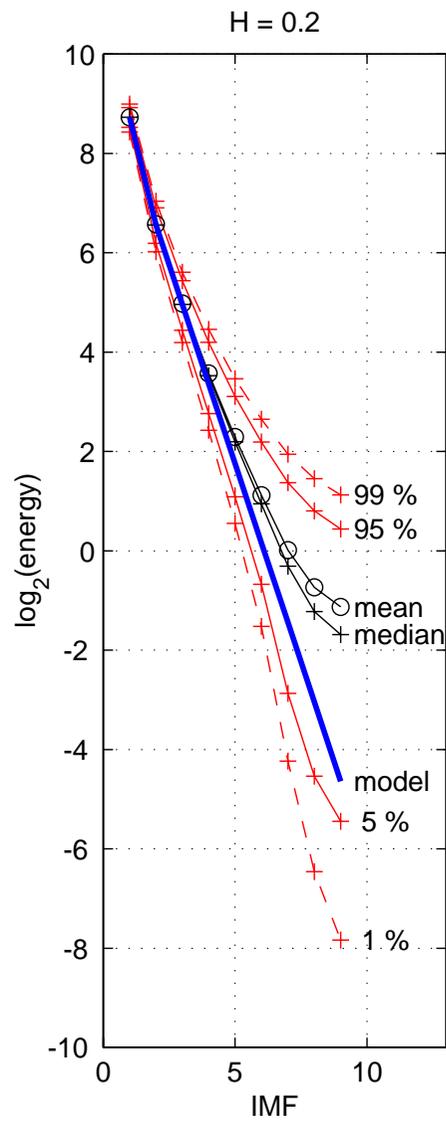
Modes significatifs — Pour un modèle de bruit, l'évaluation (empirique) de la dispersion statistique permet, mode par mode, de rejeter le cas échéant l'hypothèse bruit seul.

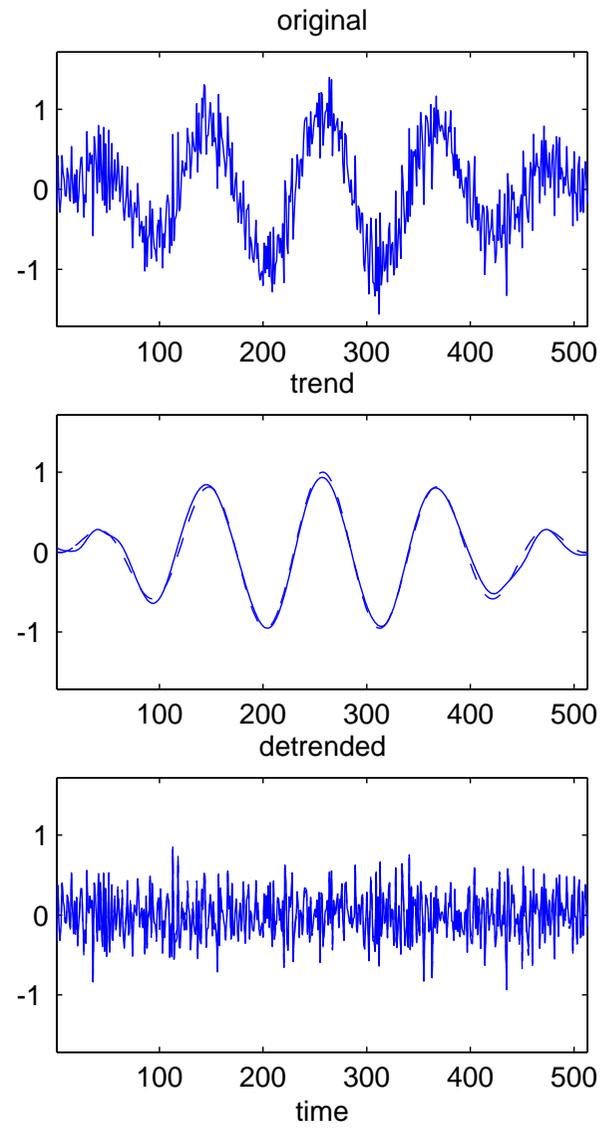
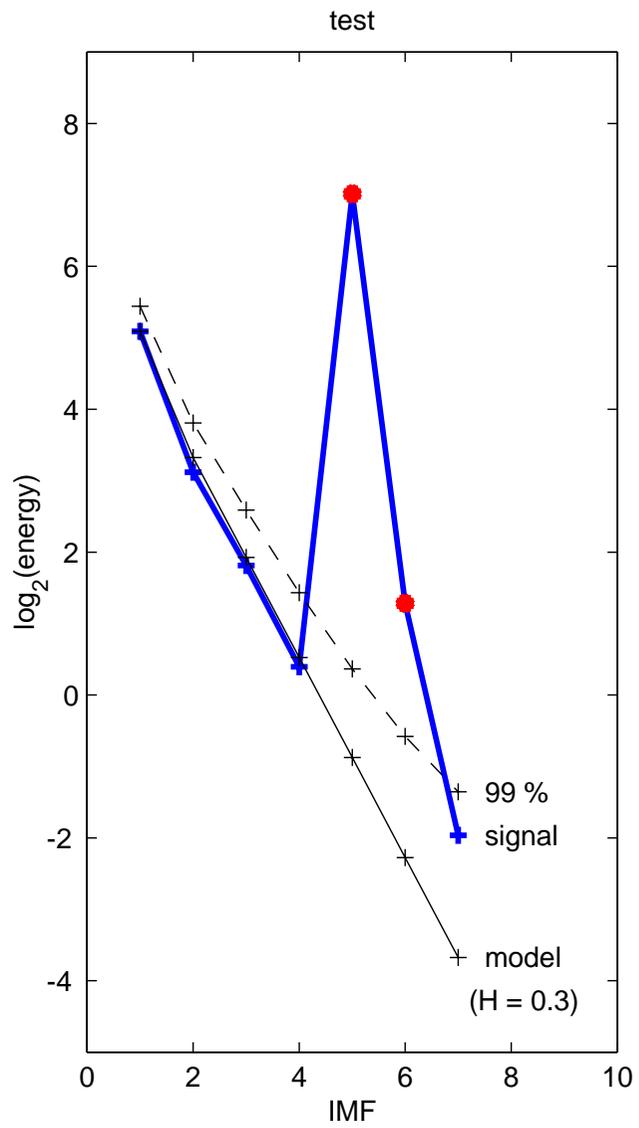
Applications — *Débruitage* et *suppression de tendance*, suivant que l'on ne garde ou rejette que les modes excédant un seuil fixé par le modèle et un taux d'acceptation.

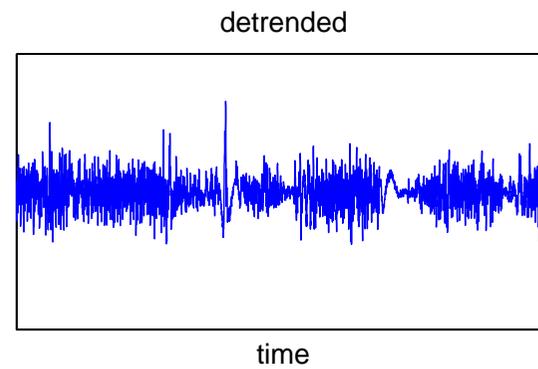
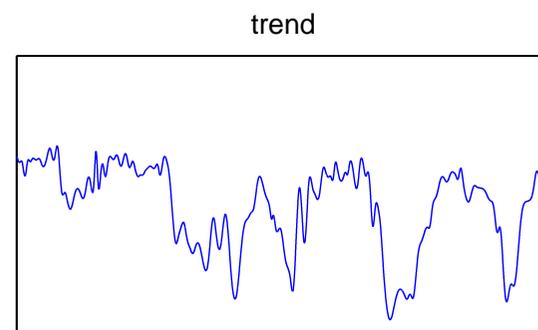
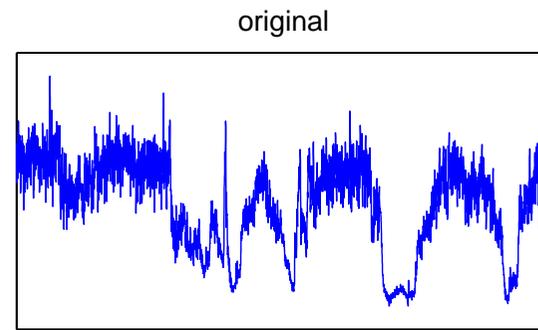
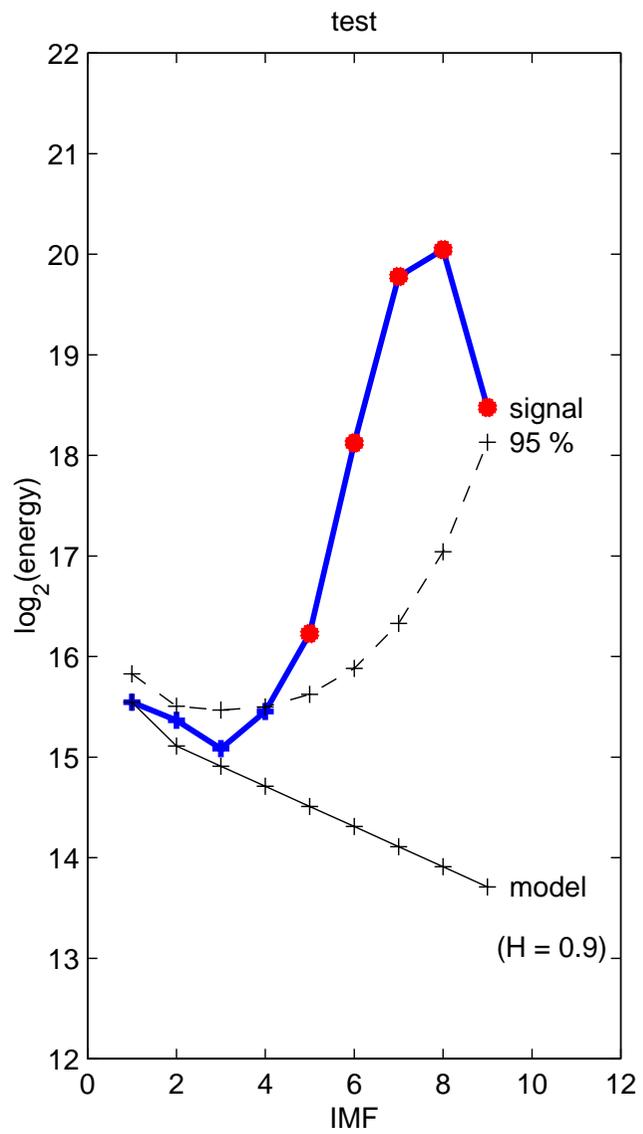
H = 0.5











Références, pré-tirages, logiciels, démos

<http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/>