

Bulletin de l'Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques

La revue trimestrielle de l'Union
des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques

Directeur de la publication : Mickaël PROST
Rédacteurs en chef : Claire BONNEFONT et Philippe PATTE

Siège social et secrétariat
3 rue de l'École Polytechnique
75005 PARIS

Téléphone
01 73 71 46 33

Enregistreur
09 79 94 26 97

Télécopie
09 79 94 36 97

Courriel
ups@prepas.org



Prix du numéro : 3,10 €. Abonnement (4 numéros annuels) : 11 €.

Adresser les demandes d'abonnement et leur règlement au secrétariat.

***Bulletin vert* – mode d'emploi**

Ce *Bulletin vert* est consultable sur le site privé de l'UPS, à l'adresse <http://www.prepas.org/ups.php?rubrique=39>, où vous pouvez aussi trouver les bulletins plus anciens.

Pour le 250^e anniversaire de la naissance de Joseph Fourier, notre collègue Olivier Lablée a coordonné la rédaction du dossier spécial qui montre combien les outils inventés par Fourier restent d'actualité. Vous prendrez plaisir à découvrir les articles de Olivier Lablée, Hervé Pajot et Pierre Chainais.

Début 2018 est décédé notre collègue Olivier Cervera. Il a beaucoup donné à son métier, ses élèves et ses collègues, à l'UPS aussi. Ses amis, collègues, élèves et anciens élèves lui rendent hommage.

Pour les numéros suivants, nous vous rappelons comment alimenter les différents forums.

- **Informatique.**
Contacter Roland LOUBOUTIN (roland.louboutin@prepas.org).
- **Mathématiques.**
Contacter Claude MORIN (claudemorin@prepas.org).
- **Physique et Chimie.**
Contacter Sophie RÉMY (sophie.remy@prepas.org)

Pour toutes les contributions, l'adresse d'envoi est celle du secrétariat ¹. Les articles destinés au *Bulletin vert* doivent parvenir de préférence sous forme électronique. Mais les articles rédigés lisiblement sur papier sont également les bienvenus.

Le délai de réception pour une parution dans le bulletin n° 262 est fixé au 15 juillet 2018.

Philippe PATTE

1. UPS, 3 rue de l'École Polytechnique, 75005 PARIS. Courriel : ups@prepas.org.

Sommaire

Éditorial	4
Comité de l'UPS élu en 2017	6
Dossier spécial Fourier	17
par Olivier LABLÉE	
Dans les pas de Joseph Fourier, quelques mots sur son œuvre et son héritage en géométrie spectrale	19
par Olivier LABLÉE	
L'analyse de Fourier, 250 ans après Fourier : continuité des opérateurs d'intégrale singulière et rectifiabilité	43
par Hervé PAJOT	
De la transformée de Fourier à l'analyse temps-fréquence bivariée	63
par Pierre CHAINAIS	
Comptes rendus de stages	84
<i>Transmission et traitement optique de l'information,</i> à l'IMT Atlantique Brest, par Maxime BONIS	
<i>Recyclage de matériel informatique pour la conception d'instruments à bas coût,</i> à l'IOGS, par Hélène sc Mensch et Marc STRUBEL	
Hommage à Olivier Cervera	87

Éditorial

Trois mesures de fanfare, un bruit de vaisselle cassée. Vous avez reconnu ?

Deuxième indice : « Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué. » Vous y êtes, n'est-ce pas ?

Il y a 50 ans, le 29 avril 1968 les Shadoks¹ apparaissaient à la télévision, ils étaient nés deux ans auparavant, c'étaient encore des enfants.

Il n'empêche que leurs proverbes sont toujours d'actualité.

Parcoursup : « Quand on ne sait pas où l'on va il faut y aller... et le plus vite possible. »

Réforme du baccalauréat : « Pour qu'il y ait le moins de mécontents possible, il faut toujours taper sur les mêmes. »

Il faut dire que, quand on est enseignant, on sait bien que « Plus ça rate, plus ça a de chances de réussir. »

Et quelle vision des sciences !

L'informatique avec « Le grand ordinateur des pompes funèbres ».

La logique des passoires et sa démonstration remarquable de « La notion de passoire est indépendante de la notion de trou. »

Les mathématiques : « Le point est la plus courte distance entre deux lignes. Première application : quand deux lignes se rencontrent, elles se rencontrent au même point. »

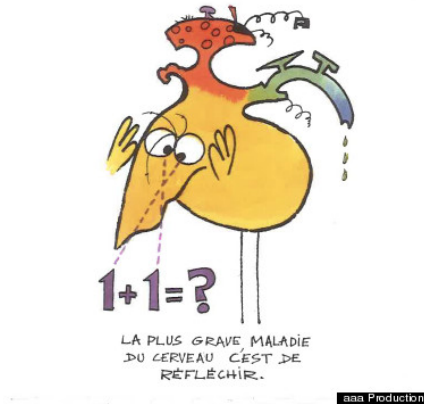
La numération : « Quand il n'y a pas de Shadok, on dit GA, quand il y a un Shadok on dit BU, quand il y en a un de plus, on dit ZO, et encore un autre, on dit MEU. Si je mets un Shadok de plus je n'ai pas assez de mots pour compter. Alors, c'est très simple, on les jette dans une poubelle et je dis que j'ai BU poubelle. »

La physique avec la gravitation pour les nuls encore appelée « tombologie » : « Avec un escalier prévu pour la montée, on réussit souvent à monter plus bas qu'on ne serait descendu avec un escalier prévu pour la descente. »

1. Une création de Jacques Rouxel.

Sans parler des SVT : « De façon générale, un œuf se compose de trois parties, l'intérieur, l'extérieur et l'entre-deux. L'expérience nous prouve que, si on a un extérieur en poule, convenablement disposé autour de l'œuf, l'intérieur se transforme petit à petit en extérieur. Ce qui démontre que l'intérieur est bien équivalent à l'extérieur. »

La devise Shadok de la semaine



Etc. Et n'oubliez pas : « Il vaut mieux mobiliser son intelligence sur des conneries, que sa connerie sur des choses intelligentes. » Parce que « la plus grave maladie du cerveau, c'est de réfléchir. »

Claire Bonnefont, avec l'aide de Jacques Rouxel

Comité de l'UPS élu en 2017

Bureau

Mickaël PROST, Président,

Séverine MENSCH-DE MARCILLAC, Vice-présidente Physique,

Véronique GADET, Vice-présidente Chimie,

Marc de FALCO, Vice-président Informatique,

Philippe PATTE, Vice-président Mathématiques,

Michel HENRI, Secrétaire général,

Myriam VERDURE, Trésorière,

Yann BRUNEL, Trésorier adjoint,

Sonia NAJID, Responsable Ouverture sociale et Diversité,

Laurent WALBRON, Responsable Site internet et réseau,

Yannick ALMÉRAS, Responsable BEOS¹.

Autres membres du comité

Rémi BARBET-MASSIN

Anne-Marie BÉNINGER

Olivier BIRON

Claire BONNEFONT

Alexandra COURTEAUX

Walter DAMIN

Émilie FRÉMONT

Olivier GRAS

Florence LEVECQUE

Ariane PELADAN

Sophie RÉMY

Jean-Baptiste ROTA

Nicolas TOSEL

Christine WAGNER

Gaël BÉNABOU

Christophe BERTAULT

Maxime BONIS

Denis CHOIMET

Edwige CROIX

Éric DÉTREZ

Stéphane GONNORD

Jean KIEFFER

Hélène MENSCH

Olivier PLAIDY

Tristan RIBEYRE-STECKI

Laurent SARTRE

Maxime VOISIN

1. Base d'Épreuves Orales Scientifiques de concours aux grandes écoles <http://beos.prepas.org/>.

Certains collègues travaillent pour la collectivité sans pour autant être membres du comité ; leur nom est mentionné entre parenthèses dans la liste qui suit.

Pôles techniques

- **Communication**

Agence Noir sur Blanc : Mickaël PROST.

Site prepas.org : Laurent WALBRON, Philippe PATTE.

Forum (modérateurs) : Laurent WALBRON, Olivier BIRON, Walter DAMIN, Jean KIEFFER, (Jean NOUGAYREDE), Philippe PATTE.

Revue de presse : Émilie FRÉMONT, Olivier GRAS, Olivier PLAIDY.

Facebook : Tristan RIBEYRE-STECKI.

Salon Grandes Écoles : Christophe BERTAULT.

Bulletin vert : Philippe PATTE, Claire BONNEFONT, (Claude MORIN) (forum pédagogique math), Sophie RÉMY (forum pédagogique physique).

BEOS : Yannick ALMÉRAS.

Listes de diffusion : Laurent WALBRON, Philippe PATTE, Tristan RIBEYRE-STECKI.

- **LIESSE** : Véronique GADET, Séverine MENSCH-DE MARCILLAC, Ariane PELADAN.
- **Statistiques & Annuaire** : Philippe PATTE, Alexandra COURTEAUX.

Pôles disciplinaires

Chimie

- **Supervision du contrôle *a posteriori*** : Florence LEVECQUE, Olivier PLAIDY, Jean-Baptiste ROTA.
- **Réunions bilan de concours** : Véronique GADET, Florence LEVECQUE, Tristan RIBEYRE-STECKI, Jean-Baptiste ROTA.
- **Ressources** : Tristan RIBEYRE-STECKI, Jean-Baptiste ROTA, Maxime VOISIN.

Informatique

- **Supervision du contrôle *a posteriori*** : (Stéphane LEGROS).
- **Réunions bilan de concours** : Éric DÉTREZ, Marc de FALCO, Stéphane GONNORD.
- **Ressources** : Éric DÉTREZ, Marc de FALCO, Philippe PATTE, Laurent SARTRE.

Mathématiques

- **Supervision du contrôle *a posteriori*** : Denis CHOIMET, Gaël BENABOU, Claire BONNEFONT, Edwige CROIX, Michel HENRI, Philippe PATTE, Mickaël PROST.
- **Réunions bilan de concours** : Philippe PATTE, Gaël BENABOU, Claire BONNEFONT, Denis CHOIMET, Edwige CROIX, Michel HENRI, Mickaël PROST.
- **Ressources** : Philippe PATTE, (Michel QUERCIA).

Physique

- **Supervision du contrôle *a posteriori*** : Alexandra COURTEAUX, Yannick ALMÉRAS, Anne-Marie BÉNINGER, Jean KIEFFER, Séverine MENSCH-DE MARCILLAC, Sophie RÉMY.
- **Réunions bilan de concours** : Alexandra COURTEAUX, Yannick ALMÉRAS, Anne-Marie BÉNINGER, Olivier GRAS, Hélène MENSCH, Séverine MENSCH-DE MARCILLAC.
- **Ressources** : Yannick ALMÉRAS, Maxime BONIS, (Arnaud SCHMITTBUHL).

Pôles transversaux

Contacts

- **Institution**

DGESIP : Mickaël PROST.

- **Écoles et université**

CGE : Mickaël PROST, Séverine MENSCH-DE MARCILLAC, Sonia NAJID, Gaël BENABOU (ouverture sociale), Olivier BIRON (filières technologiques), Alexandra COURTEAUX (égalité, handicap), Christine WAGNER, Olivier GRAS (attractivité des filières scientifiques).

CPU : Mickaël PROST, Olivier BIRON, Claire BONNEFONT.

Service Com' Grandes Écoles : Tristan RIBEYRE-STECKI, Maxime BONIS.

- **Associations de professeurs et de provideurs**

APLCPGE : Mickaël PROST, Nicolas TOSEL.

APMEP : Denis CHOIMET.

UdPPC : Sophie RÉMY.

APPLS / APHEC : Claire BONNEFONT.

UPA : Florence LEVECQUE.

UPLS : Olivier BIRON.

UPSTI : Olivier BIRON.

- **Sociétés savantes et instituts de recherche**

INRIA : Marc de FALCO.

SCF : Véronique GADET.

SFP : Rémi BARBET-MASSIN, Sophie RÉMY.

SIF : Marc de FALCO, Laurent SARTRE.

SMF : Nicolas TOSEL.

• **Autres associations**

CFEM : Nicolas TOSEL.

EφD : Sophie RÉMY.

(I)ChO : Jean-Baptiste ROTA.

(I)PhO : Sophie RÉMY.

Égalité des chances

Sonia NAJID, Gaël BENABOU, Maxime VOISIN.

Défense de l'enseignement scientifique

Rémi BARBET-MASSIN, Nicolas TOSEL, Yann BRUNEL.

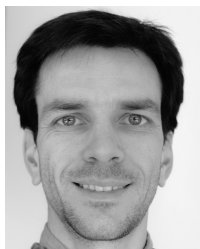
Filières technologiques

Anne-Marie BÉNINGER, Olivier BIRON, Edwige CROIX, Walter DAMIN.

International

Sophie RÉMY, Maxime VOISIN.

Trombinoscope



Yannick ALMÉRAS
Physique-Chimie – MP*
16-11 – Lycée Clemenceau
yannick.almeras@prepas.org



Rémi BARBET-MASSIN
Physique – PC*
19-15 – Lycée Henri IV
remi.barbet-massin@prepas.org



Gaël BENABOU
Mathématiques – MP
19-35 – Lycée Paul Valéry
gael.benabou@prepas.org



Anne-Marie BÉNINGER
Physique-Chimie – TSI 2
01-34 – Lycée Antonin Artaud
anne-marie.beninger@prepas.org



Christophe BERTAULT
Mathématiques – MPSI
19-23 – Lycée Saint Louis
christophe.bertault@prepas.org



Olivier BIRON
Physique-Chimie – MP
26-43 – Lycée Gustave Monod
olivier.biron@prepas.org



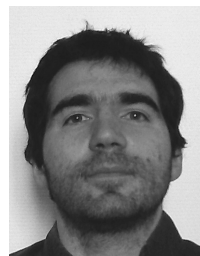
Maxime BONIS
Physique-Chimie – PSI
15-12 – Lycée Henri Loritz
maxime.bonis@prepas.org



Claire BONNEFONT
Mathématiques – MP
08-34 – Lycée Marcelin Berthelot
claire.bonnefont@prepas.org



Yann BRUNEL
Physique-Chimie – MPSI
19-15 – Lycée Henri IV
yann.brunel@prepas.org



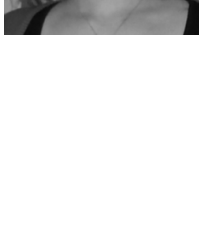
Denis CHOIMET
Mathématiques – MP*
13-31 – Lycée du Parc
denis.choimet@prepas.org



Alexandra COURTEAUX
Physique-Chimie – MP
02-30 – Lycée Louis Thuillier
alexandra.courteaux@prepas.org



Edwige CROIX
Mathématiques – ATS
11-18 – Lycée Baggio
edwige.croix@prepas.org



Walter DAMIN
Mathématiques – TSI 2
25-35 – Lycée Pierre-Paul Riquet
walter.damin@prepas.org



Marc de FALCO

Mathématiques – MPSI
17-14 – Centre international de Valbonne
marc.de-falco@prepas.org

Éric DÉTREZ

Informatique
11-16 – Lycée Faidherbe
eric.detrez@prepas.org



Émilie FRÉMONT

Physique – PC*
19-25 – Lycée Chaptal
emilie.fremont@prepas.org

Véronique GADET

Chimie – PC*
19-16 – Lycée Louis le Grand
veronique.gadet@prepas.org



Stéphane GONNORD

Mathématiques – PSI
13-31 – Lycée du Parc
stephane.gonnord@prepas.org

Olivier GRAS

Physique-Chimie – PSI
02-30 – Lycée Louis Thuillier
olivier.gras@prepas.org



Michel HENRI

Mathématiques – PSI*
19-47 – Lycée Janson de Sailly
michel.henri@prepas.org



Jean KIEFFER
Physique-Chimie – PSI*
23-24 – Lycée Pierre Corneille
jean.kieffer@prepas.org



Florence LEVECQUE
Chimie – PC
26-36 – Lycée Lakanal
florence.levèque@prepas.org



Hélène MENSCH
Physique-Chimie – PSI
26-33 – Lycée Pasteur
helene.mensch@prepas.org



Séverine MENSCH-DE MARCILLAC
Physique – PC*
26-33 – Lycée Pasteur
severine.mensch@prepas.org



Sonia NAJID
Physique-Chimie – MPSI
23-24 – Lycée Pierre Corneille
sonia.najid@prepas.org



Philippe PATTE
Mathématiques – MP
26-36 – Lycée Lakanal
philippe.patte@prepas.org

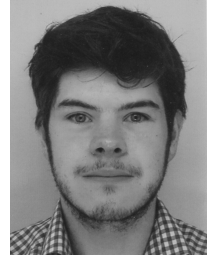


Ariane PELADAN
Mathématiques – PT*
19-48 – Lycée Jean-Baptiste Say
ariane.peladan@prepas.org



Olivier PLAIDY
Chimie – PCSI / PC
04-51 – Lycée René Cassin
olivier.plaidy@prepas.org

Mickaël PROST
Mathématiques – PT*
19-25 – Lycée Chaptal
mickael.prost@prepas.org



Sophie RÉMY
Physique – PC*
12-31 – Lycée Gay-Lussac
sophie.remy@prepas.org

Tristan RIBEYRE-STECKI
Chimie – PC
22-26 – Lycée Brizeux
tristan.ribeyre-stecki@prepas.org



Jean-Baptiste ROTA
Chimie – PC
13-21 – Lycée Claude Fauriel
jean-baptiste.rota@prepas.org

Laurent SARTRE
Informatique
04-20 – Lycée Montaigne
laurent.sartre@prepas.org



Nicolas TOSEL
Mathématiques – MP*
19-16 – Lycée Louis le Grand
nicolas.tosel@prepas.org

Myriam VERDURE
Mathématiques – PT
23-22 – Lycée Robert Schuman
myriam.verdure@prepas.org



Maxime VOISIN
Chimie – PCSI / PC
02-11 – Lycée Pierre de la Ramée
maxime.voisin@prepas.org

Christine WAGNER
Mathématiques – PT*
19-39 – Lycée Raspail
christine.wagner@prepas.org



Laurent WALBRON
Mathématiques – MPSI
25-34 – Lycée Bellevue
laurent.walbron@prepas.org

Dossier spécial Fourier

Voilà exactement 250 années qui nous séparent de la naissance du mathématicien et physicien Joseph Fourier (1768-1830). Son œuvre maîtresse tient dans un beau mémoire de plus de 500 pages publié en 1822 sous le titre *Théorie analytique de la chaleur*. Cet ouvrage est principalement consacré à une problématique très concrète issue de la physique, en l'espèce la question de la propagation de la chaleur sur un corps solide. De fait, ce travail dépasse largement sur bien des aspects le problème initial.

La place de Fourier dans l'histoire est somme toute plutôt paradoxale. À la fois mésestimé et pourtant très largement connu, son génie semble ne pas être apprécié à sa juste valeur dans le panthéon des mathématiques. De son vivant Fourier a essuyé moult critiques de la part de ses pairs, notamment Lagrange et Laplace pour qui l'analyse spéciale développée par Fourier relève plus du domaine de l'abracadabrantique que de la rigueur mathématique d'usage. Au demeurant, quinze années s'écoulaient entre le moment où il soumet son mémoire et sa nomination en tant que secrétaire perpétuel à l'Académie des Sciences. Même parmi ses prestigieux contemporains sa postérité semblait promise aux oubliettes, ainsi le grand Victor Hugo écrivit au détour d'un des chapitres des *Misérables* : « *Il y avait à l'Académie des sciences un Fourier célèbre que la postérité a oublié et dans je ne sais quel grenier un Fourier obscur dont l'avenir se souviendra* ». Le second Fourier en question est le phalanstérien Charles Fourier, je laisse le soin au lecteur d'apprécier cette prédiction à sa juste valeur...

Aujourd'hui, Joseph Fourier jouit d'une grande notoriété dans un large spectre de sciences et pourtant sa vie et son œuvre originelle restent assez mal connues. Prenons donc le temps de lire et de comprendre la portée de ses travaux. Dans un monde en éternel mouvement, il y a quelque chose d'émouvant dans le fait de lire et d'essayer de comprendre directement son texte ainsi que dans la beauté et la profondeur de son œuvre. À l'instar de beaucoup de scientifiques du XVIII^e siècle, sa vie inspire une réelle admiration qui nourrit en nous une part d'imaginaire romantique autour des mathématiciens et physiciens de cette période.

Au fond, l'entreprise de Fourier doit s'appréhender plus comme un programme de recherche que comme une théorie parfaitement rédigée et achevée. Aujourd'hui, quand on prend le temps d'analyser ses recherches, on comprend bien qu'il était un visionnaire. Dans les mathématiques qu'il écrivit, on reconnaît aisément à présent les prémices d'un grand nombre de mathématiques du XX^e siècle, comme par exemple les espaces de Hilbert, la théorie spectrale, les distributions, les ondelettes, etc. Il serait bien difficile d'imaginer comment seraient aujourd'hui les mathématiques et la physique sans sa contribution et son influence.

À l'heure actuelle, il semble que l'ensemble de ses travaux ne soit pas encore considéré tout à fait à sa juste place, surtout en mathématiques d'ailleurs. Sa présence dans l'enseignement actuel est elle aussi à débattre, par exemple penser que le legs de Fourier se résume uniquement à des "boîtes noires" et à des "outils" puissants et incontournables en mathématique, en physique et pour l'ingénierie est une erreur patente et dommageable, en particulier pour les étudiants. Au demeurant il est malheureux et totalement incompréhensible de constater que l'analyse de Fourier a simplement disparu des programmes de mathématiques des classes préparatoires, alors qu'elle y mériterait sûrement une place centrale... Qu'on le veuille ou non, il est évident que l'héritage de Fourier constitue actuellement un lien fort entre les mathématiques pures, les mathématiques appliquées, la physique, la modélisation et même l'informatique. Manifestement la morale principale que notre héros nous laisse est celle d'une volonté farouche de réconcilier les disciplines scientifiques entre elles et de briser certaines frontières trop hermétiques, y compris au sein même des mathématiques.

Ce numéro de printemps du *Bulletin Vert* de l'UPS consacre une partie de son contenu à Fourier à travers trois articles. Le premier retrace très brièvement les travaux de Fourier en les insérant dans une thématique de recherche actuelle en géométrie pour laquelle le présent auteur possède une certaine appétence.

Le second article est écrit par *Hervé Pajot*, grand spécialiste en analyse. Hervé nous propose ici un article consacré à l'analyse de Fourier appliquée aux opérateurs d'intégrale singulière et à la notion de rectifiabilité en théorie géométrique de la mesure. C'est un grand plaisir pour moi qu'il ait accepté d'écrire un article de cette qualité pour le bulletin. Non seulement il connaît parfaitement l'analyse de Fourier, mais il est aussi un excellent pédagogue et un communicant hors-pair pour la promotion des mathématiques. J'ai eu personnellement la chance de faire mes premières années d'enseignement à l'Université Joseph Fourier auprès de cette figure bienveillante et tutélaire. Hervé est par ailleurs le coordinateur scientifique d'un projet de docu-BD sur la vie et l'œuvre de Fourier (n'oublions pas qu'il fût aussi égyptologue et préfet de l'Isère). Cette BD très grand public devrait paraître en octobre aux *éditions Petit à Petit*.

Le dernier article écrit par *Pierre Chainais* est une application à la physique, plus précisément en traitement du signal. À travers un article passionnant, il nous fera découvrir l'analyse des signaux physiques depuis les partitions musicales jusqu'à la détection des fameuses ondes gravitationnelles. Je remercie chaleureusement Pierre d'avoir écrit ce bel article.

Pour finir, c'est un plaisir de remercier *Philippe Patte* du comité de rédaction pour son enthousiasme et la richesse des nombreux échanges que nous avons eus dans la construction de ce projet que j'espère réussi.

Olivier Lablée

———— Dans les pas de Joseph Fourier, quelques mots sur son œuvre et son héritage en géométrie spectrale

par Olivier LABLÉE

Lycée Ferdinand Buisson, Voiron,
Université Joseph Fourier, Grenoble.

Sommaire

1. L'œuvre de Fourier : le traité analytique de la chaleur
 - 1.1 Le temps des premières équations aux dérivées partielles
 - 1.2 Fourier : préfet, physicien et mathématicien
 - 1.3 Le traité analytique de la chaleur
2. Les séries et la transformée de Fourier : un panorama actuel
 - 2.1 Les notations modernes
 - 2.2 Les difficiles questions de convergence
 - 2.3 L'existence des coefficients intégraux
 - 2.4 Des séries à la transformée de Fourier
 - 2.5 Approche hilbertienne et convergence quadratique
 - 2.6 La puissante transformée de Fourier
 - 2.7 Une belle égalité : la formule sommatoire de Poisson
3. Une application géométrique : la formule de trace sur un tore plat
 - 3.1 Quelques généralités sur le spectre du laplacien
 - 3.2 Le tore plat
 - 3.3 Séries de Fourier sur le réseau Γ
 - 3.4 Le spectre du tore
 - 3.5 Un autre spectre : celui des longueurs
 - 3.6 Une passerelle entre les deux spectres
 - 3.7 Généralisation : le spectre d'une variété riemannienne

Introduction

À l'occasion du 250^e anniversaire de la naissance de Joseph Fourier (1768-1830), ces quelques notes ont pour vocation à mettre en lumière la portée des travaux de Fourier. Son œuvre publiée en 1822 sous le titre : *Théorie analytique de la chaleur* [Fou] constitue à elle seule un incroyable legs scientifique, en particulier en mathématiques. Dans la première section du présent article, nous allons décrire une partie de l'œuvre de Fourier et voir comment à partir d'un problème de physique particulier sont apparus plusieurs concepts mathématiques fondamentaux devenus aujourd'hui universels et d'une grande profondeur. On présentera ainsi la naissance des très célèbres séries de Fourier et on évoquera aussi la fameuse transformée de Fourier. La seconde partie de l'article dresse un rapide panorama sur les séries de Fourier et la transformée de Fourier telles que nous les connaissons et utilisons aujourd'hui, on insistera sur les places centrales qu'elles occupent au sein même des mathématiques actuelles. Enfin, la dernière partie de cet article est une invitation à un domaine de recherche mathématique se situant dans la partie centrale du paysage des mathématiques actuelles. Plus précisément, à travers un exemple très simple, on proposera une application moderne et profonde de l'héritage de Fourier située à la croisée des chemins de la géométrie riemannienne, de la théorie spectrale, des systèmes dynamiques, de la physique mathématique, etc. Ce domaine est la *géométrie spectrale*. Cet article est aussi l'occasion de rendre hommage à deux mathématiciens, le premier est Jean-Pierre Kahane (1926-2017), spécialiste imminent de l'analyse de Fourier, et le second mathématicien qui nous a quittés très récemment est le regretté Marcel Berger (1927-2016), spécialiste et contributeur hors norme en géométrie riemannienne.

Notation. Dans cet article on utilisera en permanence les notations suivantes : si X désigne un espace mesuré, l'espace de Lebesgue $L^p(X)$ pour un exposant $1 \leq p < \infty$ est défini par

$$L^p(X) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ mesurable}; \int_X |f(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

avec la norme associée définie par $\|f\|_{L^p} := (\int_X |f(x)|^p dx)^{1/p}$, qui confère à $L^p(X)$ une structure d'espace de Banach. Un cas important est $p = 2$, on a alors une structure d'espace de Hilbert avec le produit scalaire : $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_X f(x) \overline{g(x)} dx$; on a alors $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_X |f(x)|^2 dx}$. Enfin, on utilisera aussi l'espace de Banach

$$L^\infty(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ mesurable}; f \text{ est bornée presque partout sur } X\},$$

avec la norme $\|f\|_{L^\infty} := \text{supess} \{|f(x)|, x \in X\}$.

1 L'œuvre de Fourier : le traité analytique de la chaleur

1.1 Le temps des premières équations aux dérivées partielles

Avant de s'intéresser au problème de la propagation de la chaleur et aux travaux de Fourier, il est important de replacer cette œuvre dans un contexte plus général. Ce contexte est celui d'un problème antérieur à celui du problème de la chaleur, c'est le *problème des cordes*

vibrantes. Le problème des cordes vibrantes, connu aujourd'hui au moyen de l'*équation des ondes*, a connu historiquement une véritable crise entre différents célèbres mathématiciens. Les personnages clefs de cette histoire sont d'Alembert, qui est le premier à donner une équation de ce problème en 1747-1748, puis ensuite c'est le génial Euler qui propose des conditions élargies pour les hypothèses données par d'Alembert. Quelques années plus tard, c'est D. Bernoulli qui propose un point de vue différent. Pour lui, les cordes émettent avant tout un son, donc des harmoniques et par voie de fait des fonctions trigonométriques. Puis intervient Lagrange qui unifie les travaux de d'Alembert et d'Euler tout en s'opposant très farouchement aux idées de Bernoulli. Historiquement, il s'agit d'un moment très important : c'est le début de l'analyse des équations aux dérivées partielles et les prémices de l'analyse fonctionnelle.

1.2 Fourier : préfet, physicien et mathématicien

Laissons quelques instants les cordes vibrantes pour revenir à notre personnage principal, Joseph Fourier. Donnons d'abord quelques éléments biographiques de notre héros. Joseph Fourier naquit en 1768 à Auxerre. Après une scolarité en école militaire, son génie fut repéré par Monge, Fourier devint un des premiers professeurs à la toute nouvelle école Polytechnique. Il fit ensuite la campagne d'Égypte de Bonaparte, puis il fut nommé préfet de l'Isère en 1802. En particulier, c'est Fourier qui, à Grenoble, rencontra, influença et encouragea d'une certaine manière le jeune Champollion aux études et lui donna aussi le goût à l'égyptologie. Dans son rôle de préfet Fourier eut un rôle capital pour le département de l'Isère : assainissement des marais de Bourgoin-Jallieu, ouverture du col du Lautaret qui est un véritable trait d'union entre les Alpes du nord et les Alpes de sud. Tout en étant préfet, il écrivit son œuvre maîtresse : *Théorie analytique de la chaleur*. Le sujet de ce mémoire est la compréhension de l'évolution temporelle de la diffusion de la chaleur sur un objet physique solide. Ce mémoire fut soumis en 1807 à l'Académie des sciences et, dès 1811, il commença des correspondances avec Laplace et Lagrange concernant son mémoire. En 1817, il devint membre de l'Académie des sciences, et il fallut attendre 1822 pour que Fourier devienne secrétaire perpétuel de l'Académie et que son mémoire soit publié. Pour plus de détails, on conseille la lecture du superbe ouvrage de J. Dhombres et J.-B. Robert [Dh-Ro] : *Fourier, créateur de la physique mathématique*.

1.3 Le traité analytique de la chaleur

La traité de la chaleur est une œuvre de 500 pages comportant neuf grands chapitres. On va essayer de décrire les passages les plus fondamentaux de cette œuvre, en l'espèce on va évoquer uniquement les trois premiers chapitres. Le traité commence par une partie introductive nommée *Discours préliminaire*, cette partie de texte est philosophiquement intéressante, Fourier y expose sa vision des sciences et en particulier des mathématiques. Pour lui, l'étude des phénomènes naturels est la principale source des découvertes mathématiques. Le chapitre I du mémoire est dédié à l'aspect physique, il y introduit les principaux éléments physiques nécessaires à cette étude. Dans le chapitre II, Fourier introduit la fameuse équation de la chaleur qui décrit la dynamique de la chaleur sur un corps solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

où K, C, D sont des constantes physiques, et $u : (x, t) \mapsto u(x, t)$ est la fonction donnant la température du solide au point $x \in \Omega$ et à l'instant t . La précédente équation est aussi complétée par des conditions de bord et une condition initiale en temps. Fourier décrit notamment cette formule sur des exemples particuliers de corps solides : anneau, sphère, prisme, etc. Dans le chapitre III, certainement la plus belle partie de son œuvre, Fourier considère l'étude détaillée d'une "lame" homogène très mince de largeur finie et de longueur infinie. Plus précisément (aux notations et échelle près par rapport au texte original), on se donne une "lame" très mince de largeur finie égale à par exemple π et de longueur infinie sur laquelle on suppose que la température sur la largeur vaut une valeur constante, disons 1, et sur les bords verticaux la valeur 0. En notant par (x, y) , avec $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y < +\infty$, les coordonnées d'un point de la lame, Fourier établit que la température de la lame au point (x, y) est décrite par la fonction $u(x, y)$ qui vérifie l'équation stationnaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.1)$$

avec les conditions de bord précédentes, en l'espèce :

$$\begin{cases} u(x, 0) = 1 & \text{pour } 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & \text{pour } 0 \leq y < +\infty. \end{cases}$$

La première étape de Fourier pour résoudre ce problème est d'utiliser *la méthode de séparation des variables* : il cherche alors une solution sous la forme $u(x, y) = f(x)g(y)$, il s'ensuit facilement que $f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0$ et donc $-f''(x)/f(x) = g''(y)/g(y)$. Les variables x et y étant indépendantes, il existe alors une constante λ telle que pour tout couple (x, y) on ait l'équation

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda$$

qui se réécrit comme le système d'équations différentielles linéaires homogènes suivant :

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0 \\ g'' - \lambda g = 0 \end{cases}$$

Commençons par la première équation : il convient de distinguer trois cas suivant le signe de λ .

Cas où $\lambda = 0$. La fonction f est alors affine : $f(x) = ax + b$, avec a, b des constantes réelles. En utilisant les conditions de bords $f(0) = f(\pi) = 0$, il vient immédiatement que f est nulle.

Cas où $\lambda < 0$. On a alors que $f(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$, avec là aussi a, b des constantes réelles. Encore une fois, les conditions de bord nous amène à conclure que f est nulle. Il nous reste à voir le dernier cas.

Cas où $\lambda > 0$. L'expression de la fonction f est ici trigonométrique et elle s'exprime sous la forme : $f(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x)$, avec a, b des constantes réelles. Les conditions de bord nous fournissent le système $a = 0$ et $b \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$; étant entendu que l'on cherche une solution f non nulle, on choisira bien évidemment la constante $b \neq 0$. Le nombre λ doit alors vérifier la condition $\sqrt{\lambda} = k$, avec k entier au moins égal à 1 (car on suppose que $\lambda > 0$), i. e. $\lambda = k^2$, avec k entier, $k \geq 1$. Cela signifie que, pour tout entier $k \geq 1$, nous avons une

famille de solutions pour la fonction f (associée à la variable physique x) : $x \mapsto b_k \sin(kx)$, avec b_k une constante réelle.

L'autre équation du système, à savoir $g'' - \lambda g = 0$, se résout aussi facilement, avec $\lambda > 0$ (qui est le seul cas pertinent) : $g(y) = Ae^{\sqrt{\lambda}y} + Be^{-\sqrt{\lambda}y}$, avec A et B constantes réelles ; dans cette égalité, Fourier impose que $A = 0$ pour ne pas avoir une solution physiquement irréaliste (température infinie), et $B = 1$ pour la condition de bord en $y = 0$. Il reste alors $g(y) = e^{-\sqrt{\lambda}y}$. Lors de la résolution de f est apparu une infinité de choix pour λ : $\lambda = k^2$, $k \geq 1$; on a donc aussi une famille de solutions g (associée à la variable physique y) : $y \mapsto e^{-ky}$. Fourier, en utilisant le *principe de superposition*, écrit alors que la fonction

$$u(x, y) = e^{-y}b_1 \sin(x) + e^{-2y}b_2 \sin(2x) + \dots + e^{-ky}b_k \sin(kx) + \dots$$

est une solution générale de l'équation (1.1). Puis pour l'autre condition de bord $u(x, 0) = 1$ pour $0 \leq x \leq \pi$, Fourier écrit alors la surprenante égalité

$$1 = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + \dots + b_k \sin(kx) + \dots \tag{1.2}$$

Cette égalité quelque peu mystérieuse est appelée une décomposition en *série trigonométrique*. Fourier, s'intéresse ensuite au calcul des valeurs des constantes b_1, b_2, \dots . Dans un premier temps, il dérive terme à terme un grand nombre de fois l'égalité, il fixe ensuite $x = 0$ dans les équations obtenues et obtient ainsi un système linéaire infini. Toujours dans ce chapitre III, précisément dans une section nommée *Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques*, Fourier donne une autre méthode plus directe du calcul de ces fameux coefficients. Cette méthode d'une grande beauté constitue en réalité les prémisses de formules bien connues de nos jours en analyse hilbertienne. Fourier met notamment en lumière que

$$\int_0^\pi \sin(kx) \sin(nx) \, dx = 0 \quad \sin \neq k \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \sin^2(nx) \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

D'ailleurs, il est bon de signaler que la notation intégrale avec des bornes \int_a^b est écrite pour la première fois à cette occasion. Revenons au calcul des coefficients b_1, b_2, \dots . Fourier multiplie l'équation (1.2) par $\sin(x)$ et intègre entre 0 et π , il obtient d'abord que $\int_0^\pi \sin(x) \, dx = b_1 \frac{\pi}{2}$, puis par induction, en multipliant par $\sin(kx)$ et en intégrant toujours entre 0 et π , il vient $\int_0^\pi \sin(kx) \, dx = b_k \frac{\pi}{2}$. Résumons la situation : la solution générale de notre problème de lame mince est donnée par la fonction

$$u(x, y) = e^{-y}b_1 \sin(x) + e^{-2y}b_2 \sin(2x) + \dots + e^{-ky}b_k \sin(kx) + \dots,$$

où les conditions au bord ont conduit à l'égalité

$$1 = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + \dots + b_k \sin(kx) + \dots,$$

et les coefficients sont donnés par la formule intégrale remarquable suivante :

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kx) \, dx \quad (k \geq 1).$$

Observons que si l'on modifie par exemple la longueur de lame, ou si l'on définit la variable x sur un intervalle symétrique, on obtient des séries trigonométriques avec par exemple uniquement des cosinus ou bien à la fois des sinus et cosinus. D'ailleurs, Fourier affirme que, si on remplace dans la condition de bord la valeur constante 1 par une fonction f quelconque définie sur un intervalle $[-T/2, T/2]$, on a alors

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \right) \tag{1.3}$$

avec les expressions intégrales des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \\ a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt \quad (k \geq 1), \\ b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt \quad (k \geq 1). \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Toujours dans cet incroyable chapitre III, Fourier s'intéresse par la suite à la question de l'asymptotique des coefficients

$$\int_0^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt$$

avec une période $T \rightarrow +\infty$, l'entier $k \rightarrow +\infty$ simultanément de sorte que le rapport $\frac{k}{T}$ soit constant. De manière heuristique, en considérant la "variable" $y := \frac{k}{T}$, les coefficients prennent alors l'allure suivante : $\int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi y t) dt$, où y n'est plus considéré ici comme un paramètre entier mais comme un nombre réel. Fourier écrit alors que l'expression de la série trigonométrique associée en version "continue" devient :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \cos(y(x-t)) f(t) dy dt. \tag{1.5}$$

Il ajoute d'ailleurs que, pour tout indice p , on a les expressions des dérivées :

$$f^{(2p)}(x) = (-1)^p \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} y^{2p} \cos(y(x-t)) f(t) dy dt;$$

et pour le cas impair :

$$f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} y^{2p+1} \sin(y(x-t)) f(t) dy dt.$$

La formule (1.5) est juste extraordinaire, cette formule prouve bien encore une fois à quel point Fourier était un visionnaire. Cette égalité est en fait la formule d'inversion de la transformée de Fourier ! Transformée mathématique qui deviendra notamment la porte d'entrée entre deux paradigmes : le monde des variables "positions" et celui des variables "impulsions". Les travaux de Fourier furent accueillis avec une certaine réserve par ses contemporains, on lui reprocha un manque général de rigueur et surtout d'avoir laissé deux affirmations sans preuves : la question de la convergence des séries trigonométriques et la question

du sens à donner à l'écriture intégrale des coefficients. En particulier, Lagrange manifesta une opposition assez manifeste envers Fourier. En réalité, Fourier est le premier et le seul à comprendre vraiment les séries trigonométriques et les formules qu'il propose constituent de manière indubitable un programme de recherche qui deviendra et reste encore aujourd'hui une source d'inspiration et de questions pour les mathématiciens. Pour plus de détails sur l'aspect historique, voir le livre de J. Dhombres et J.-B. Robert [Dh-Ro].

2 Les séries et la transformée de Fourier : un panorama actuel

2.1 Les notations modernes

Avant de continuer, donnons une notation actuelle et bien pratique des séries de Fourier : soit f une fonction définie sur $[-T/2, T/2]$, la *série de Fourier* associée à f est :

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{ni\omega x}$$

où la *pulsation* est $\omega := \frac{2\pi}{T}$, et les coefficients complexes sont donnés par la formule

$$c_n := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ni\omega t} dt.$$

Ici, la notation \sim signifie juste qu'il s'agit de la série de Fourier associée à f . La relation entre les coefficients complexes c_n et les coefficients réels "historiques" a_n, b_n est la suivante : $a_0 = c_0$ et, pour $n \geq 1$, on a $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

2.2 Les difficiles questions de convergence

La délicate question de la convergence ponctuelle de la série trigonométrique est en grande partie résolue par P. G. Lejeune Dirichlet. En 1829, il franchit un pas décisif en donnant une démonstration rigoureuse de la convergence d'une série de Fourier, il prouve en particulier que, si f est continue et monotone par morceaux sur $[-T/2, T/2]$, alors sa série de Fourier converge ponctuellement vers la fonction régularisée $f_{\text{reg}} : x \mapsto \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ sur ce segment, ce qui signifie que, pour tout $x \in [-T/2, T/2]$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| f_{\text{reg}}(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e_n(x) \right| = 0.$$

Si on enlève l'hypothèse de monotonie qu'avons-nous? Par exemple, si f est une fonction continue et 2π -périodique, est-on sûr que sa série de Fourier associée converge partout vers f sur \mathbb{R} ? De manière assez inattendue, la réponse est négative : en effet il peut y avoir une divergence de la série en certains points : c'est d'ailleurs du Bois-Reymond en 1873 qui donna le premier contre-exemple corroborant ceci.

Concernant les fonctions $f \in L^1(\mathbb{T})$, \mathbb{T} étant un tore de dimension 1¹, le *lemme de Riemann-Lebesgue* assure déjà que les coefficients de Fourier tendent vers zéro pour $n \rightarrow +\infty$, ce qui

1. Les fonctions définies sur un tel tore sont donc périodiques de période la longueur de tore.

est la condition nécessaire de base pour l'éventuelle convergence de la série, mais que dire de plus ? Contre toute attente, Kolmogoroff [**Kol**] en 1926 surprit toute la communauté mathématique en construisant une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier associée diverge en tout point de \mathbb{T} .

En 1966, Kahane et Katznelson [**Ka-Ka**] ont prouvé que la série de Fourier d'une fonction continue et périodique peut diverger sur tout ensemble donné de mesure de Lebesgue nulle. La même année, Carleson [**Car**] prouva un résultat fondamental : pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$, la série de Fourier associée converge presque partout vers la fonction f . La convergence presque partout signifie que l'ensemble des points où il n'y a pas convergence ponctuelle est de mesure de Lebesgue nulle. Un an plus tard, Hunt [**Hun**] généralisa ce résultat pour des fonctions $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec $p > 1$.

Il existe aussi un autre mode de convergence moins rigide que celui de la convergence presque partout, c'est la convergence en norme L^2 (dite aussi convergence quadratique) : la série de Fourier converge au sens L^2 si

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{k=-N}^N \langle f, e_k \rangle_{L^2} e_k \right\|_{L^2}^2 = 0;$$

On abordera en détail ce mode de convergence en section 2.5.

2.3 L'existence des coefficients intégraux

Pour utiliser les formules de Fourier, il faut évidemment comprendre le sens à donner aux formules intégrales des coefficients. C'est Riemann qui fut le premier à comprendre la réelle portée des travaux de Fourier. D'ailleurs, dès 1854, Riemann s'intéressa lui aussi à l'étude des séries trigonométriques et c'est à cette occasion qu'il introduisit sa fameuse intégrale. Cette influence majeure se retrouve aussi dans la théorie de l'intégration de Lebesgue (datant de 1907), en effet une des premières applications de Lebesgue concerne encore une fois les séries trigonométriques. De manière générale, les travaux sur les séries trigonométriques ont joué un rôle majeur dans le développement des mathématiques. Par exemple pour la notion de convergence uniforme avec les travaux de E. Heine; on peut aussi citer la théorie des ensembles de G. Cantor, et bien évidemment, l'incontournable théorie des distributions de L. Schwartz de 1950.

2.4 Des séries à la transformée de Fourier

Reprenons maintenant avec des notations modernes l'heuristique de Fourier pour faire apparaître la formulation continue des séries trigonométriques. Considérons une fonction f définie sur $[-T/2, T/2]$, sa série de Fourier est $f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{c}_n e^{\frac{2\pi i n x}{T}} \Delta T$, avec $\Delta T := \frac{1}{T}$, et où

les coefficients complexes associés sont les $c_n = \frac{1}{T} \widetilde{c}_n$ où $\widetilde{c}_n := \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ni\omega t} dt$. En considérant formellement la variable " $\xi := \frac{n}{T}$ " (rappelons que l'on s'intéresse à la limite $T \rightarrow +\infty$ et $n \rightarrow +\infty$), le coefficient \widetilde{c}_n "devient", dans la nouvelle variable continue ξ ,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi \xi t} dt.$$

Quant à l’expression de la série de Fourier, elle devient ($\Delta T \rightarrow 0$) l’écriture intégrale suivante :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

Les aficionados de l’analyse harmonique auront reconnu la transformée de Fourier et la formule d’inversion. En effet, la dernière égalité se réécrit $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$. Cette égalité signifie qu’en appliquant deux fois la transformée de Fourier sur une fonction, on récupère, à une symétrie près, la fonction de départ; en d’autres termes, si on connaît la transformée de Fourier d’une certaine fonction f , on peut déterminer complètement la fonction f de départ. Fourier utilisa cette transformation en vue de résoudre l’équation de la chaleur sur un ensemble non borné. D’ailleurs, Poisson en 1815 construisit sur cette base *la solution fondamentale de la chaleur*.

2.5 Approche hilbertienne et convergence quadratique

On va présenter un point de vue plus algébrique sur les séries de Fourier, c’est le point de vue hilbertien. Le début de cette approche est dû à Parseval qui démontra que, dans le cas d’une fonction de carré sommable sur $[-\pi, \pi]$, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

où encore une fois $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-nit} dt$. Cette égalité de Parseval est une merveille et servira véritablement de pilier dans la théorie des *espaces de Hilbert*. Pour la comprendre mieux, utilisons à nouveau des notations et des concepts modernes. Si l’on note \mathbb{T} le tore unidimensionnel de longueur 2π , on lui associe *l’espace de Lebesgue* usuel $L^2(\mathbb{T})$, que l’on peut munir du *produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx;$$

la *norme* associée est définie par $\|f\|_{L^2}^2 = \langle f, f \rangle_{L^2}$. Ce produit scalaire confère à $L^2(\mathbb{T})$ une structure d’espace complet : c’est un *espace de Hilbert*. Introduisons aussi la famille de fonctions $(x \mapsto e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$. Le coefficient de Fourier c_n d’une fonction f s’écrit alors $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, e_n \rangle_{L^2}$; et la série de Fourier devient quant à elle

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle_{L^2} e_n(x).$$

La formule de Parseval assure la convergence des séries de Fourier au sens L^2 : on a

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle_{L^2} e_n,$$

ce qui signifie

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{k=-N}^N \langle f, e_k \rangle_{L^2} e_k \right\|_{L^2}^2 = 0.$$

La seconde conséquence fondamentale de la formule est qu'elle établit le fait que l'espace $L^2(\mathbb{T})$ est isométrique à l'espace de Hilbert²

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\},$$

où le produit scalaire associé est $\langle u_n, v_n \rangle_{\ell^2} := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$. En effet, l'application suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f \longmapsto (\langle f, e_n \rangle_{L^2})_n \end{array} \right.$$

est une *transformation unitaire* (i. e. une isométrie linéaire bijective). De facto, la famille de fonctions $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{T})$. En 1912, Plancherel établit la version continue de la formule de Parseval-Bessel, il montre que, pour une fonction f bornée, intégrable et à support compact,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 dx.$$

Cette égalité a elle aussi un sens très remarquable et une profondeur importante.

2.6 La puissante transformée de Fourier

La transformée de Fourier est d'une telle utilité, efficacité et beauté qu'on va présenter ici, dans un langage actuel, les points les plus étonnants et caractéristiques de cette transformation. L'espace idéal de la transformée de Fourier est l'espace de Schwartz³ :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}); \forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, x \mapsto x^k f^{(\ell)}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \right\}.$$

Cet espace possède une structure d'algèbre unitaire commutative stable par dérivation et par multiplication par des fonctions polynomiales. D'un point de vue topologique, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ (d'ailleurs dans tous les espaces $L^p(\mathbb{R})$, avec $p \geq 1$). En outre, cet espace est stable par transformée de Fourier. La transformée de Fourier peut être alors considérée comme l'application linéaire suivante :

$$\mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto \widehat{f}, \end{array} \right.$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on utilisera la convention suivante :

$$\widehat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi xt} dt.$$

Avec le simple changement de variable ($t \rightsquigarrow -t$), on observe simplement que, pour toute fonction f de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

2. Cet espace, introduit en 1904 par David Hilbert lui même, est fondamental en analyse Hilbertienne.

3. Espace nommé ainsi par Alexander Grothendieck en l'honneur de Laurent Schwartz.

$$\widehat{f(x)} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} e^{2i\pi xt} dt = \widehat{f(-x)}. \tag{2.1}$$

Les propriétés de dérivabilité de la transformée de Fourier sont remarquables. En effet, si f désigne une fonction $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et k, ℓ deux entiers, on dispose d'une part de

$$\widehat{f^{(\ell)}}(x) = (-2\pi i)^\ell \widehat{t^\ell f(t)}(x), \tag{2.2}$$

et d'autre part on a aussi

$$\widehat{f^{(k)}}(x) = (2i\pi x)^k \widehat{f}(x). \tag{2.3}$$

En d'autres termes, on a un lien précis entre l'action de dériver une fonction et l'action de la multiplier par un monôme. C'est d'ailleurs grâce à ces deux formules qu'on vérifie que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par la transformée de Fourier. Ces deux formules s'obtiennent facilement avec la formule d'intégration par parties et en utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral de Lebesgue. Continuons la présentation des propriétés phares de la transformée de Fourier. Par l'utilisation du théorème de Fubini-Lebesgue on montre que, pour deux fonctions f, g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a la relation ⁴

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g}(x) dx. \tag{2.4}$$

Présentons maintenant un exemple très classique et utile de calcul de transformée de Fourier : le cas des *fonctions gaussiennes*. Soit $a > 0$ un nombre réel fixé, la fonction gaussienne $\psi_a(t) := e^{-a\pi t^2}$ appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et vérifie l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $\psi'_a(t) + 2a\pi t\psi_a(t) = 0$. En appliquant la transformée de Fourier sur cette égalité et en utilisant les propriétés de dérivation mentionnées auparavant, on obtient la nouvelle équation différentielle

$$\frac{2\pi}{a} x \widehat{\psi}_a(x) + \widehat{\psi}_a'(x) = 0$$

qu'on intègre facilement ⁵ et on conclut alors sans trop d'efforts que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{e^{-a\pi t^2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi x^2}{a}}. \tag{2.5}$$

Il est notable que la transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne.

En outre, on dispose aussi du fait que la transformée de Fourier \mathcal{F} est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même et la bijection réciproque est donnée par

4. Attention ! cette égalité ne signifie pas que la transformée de Fourier est un opérateur symétrique. En effet, en général,

$$\langle \widehat{f}, g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \overline{g(x)} dx \neq \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\widehat{g}(x)} dx = \langle f, \widehat{g} \rangle_{L^2}.$$

5. La constante d'intégration est égale à :

$$C = \widehat{\psi}_a(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi_a(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-a\pi t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2i\pi xt} dx.$$

En d'autres termes, l'égalité $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$ est vraie pour tout x réel.

La formule de Plancherel stipule que, pour tout couple de fonctions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a l'égalité $\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2}$. En particulier, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 dx. \quad (2.6)$$

Avant de conclure, il est important de rappeler aussi que la transformée de Fourier possède un lien fort avec *le produit de convolution*. Le produit de convolution d'une fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ par une autre fonction g de $L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$ est défini par

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy. \quad (2.7)$$

Ce produit existe bien. En effet, en utilisant le théorème de Fubini ainsi que l'inégalité de Hölder, on montre que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$. On prouve aussi que la fonction $f \star g$ appartient à l'espace $L^p(\mathbb{R})$ et on a la majoration $\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$. Avec un changement de variable, on constate que le produit de convolution \star est commutatif (quand cela a un sens). Une utilisation importante du produit de convolution est de prouver que l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans tous les espaces $L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Pour les détails sur le produit \star et les résultats de densité, voir par exemple [Bré]. Le lien intime entre le produit de convolution et la transformée de Fourier réside dans l'égalité suivante : si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\mathcal{F}(f \star g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g). \quad (2.8)$$

De plus, si les fonctions $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g$ et $f \star g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on a aussi

$$\mathcal{F}f \star \mathcal{F}g = \mathcal{F}(f \star g). \quad (2.9)$$

En conclusion, il est alors manifeste que la transformée de Fourier réalise une transformation unitaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (pour la norme $L^2(\mathbb{R})$).

Pour finir, abordons rapidement comment prolonger notre transformée de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Attendu que la transformée de Fourier \mathcal{F} est un opérateur borné sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe un unique opérateur borné $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ tel que la restriction de \mathcal{F} à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ coïncide avec la transformée de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'ailleurs, ce prolongement conserve ses propriétés cardinales : \mathcal{F} réalise aussi une transformation unitaire de $L^2(\mathbb{R})$.

2.7 Une belle égalité : la formule sommatoire de Poisson

La formule sommatoire de Poisson est l'ancêtre des *formules de traces*, cette égalité est une merveille de synthèse à elle seule. Considérons une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ fixée et introduisons la fonction $F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)$. Attendu que f est une fonction de l'espace de

Schwartz, il est manifeste que la série F est absolument convergente et vérifie une condition de 1-périodicité. La théorie des séries de Fourier nous assure la décomposition

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n x},$$

avec $c_n = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi n t} dt$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t+k) \right) e^{-2i\pi n t} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^1 f(t+k) e^{-2i\pi n t} dt \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(u) e^{-2i\pi n u} du = \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

On déduit alors la formule $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ et, dans le cas particulier où $x = 0$, on a la formule synthétique dite *formule sommatoire de Poisson* :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell).$$

Quelques références bibliographiques

La référence majeure sur les séries de Fourier est l'ouvrage de A. Zygmund [Zyg]. Parmi les autres références classiques on a par exemple [Eva], [Li-Lo], [St-We], [Rud], [Tay]. Le livre de J.-P. Kahane et P.-G. Lemarié-Rieusset [Ka-Le] propose aussi un excellent panorama sur les séries de Fourier et les ondelettes.

3 Une application géométrique : la formule de trace sur un tore plat

L'objectif de cette dernière partie est de présenter une application moderne de l'héritage de Fourier qui s'insère dans une discipline se trouvant à la frontière entre la géométrie riemannienne et la théorie spectrale, qu'on appelle la *géométrie spectrale*. Pour comprendre en profondeur la géométrie spectrale il est bien évidemment nécessaire d'être parfaitement à l'aise avec tous les concepts de géométrie riemannienne. En conséquence, pour que le présent propos puisse être aisément présenté, on va travailler uniquement sur un cas concret possédant une géométrie très simple : c'est l'exemple du tore plat de dimension deux. Avant de commencer à travailler sur cet exemple, il est tout de même important de présenter une vision globale et motivante des questions qu'on souhaite aborder à travers le prisme de cet exemple particulier.

3.1 Quelques généralités sur le spectre du laplacien

Le *laplacien* (euclidien) fut introduit la première fois par P.-S. Laplace (1749-1827) en mécanique céleste (la notation Δ fut introduite par G. Lamé). Dans l'espace euclidien tridimen-

sionnel ambiant, le laplacien est l'opérateur différentiel :

$$\Delta : \begin{cases} \mathcal{C}^2(U) \longrightarrow \mathcal{C}^0(U) \\ f \longmapsto \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \end{cases}$$

où U désigne par exemple un ouvert de \mathbb{R}^3 . Dans ce texte quand on parlera du laplacien il s'agira en fait de l'opérateur $-\Delta$. Cet opérateur est fondamental et incontournable en physique, en particulier dans les nombreux processus de diffusion, par exemple :

- en mécanique des fluides : les *équations de Navier-Stokes* ;
- en théorie du potentiel et en gravité (avec des potentiels newtoniens) : les *équations de Laplace* ;
- en propagation de la chaleur : l'*équation de la chaleur* ;
- en physique ondulatoire : l'*équation des ondes* ;
- en physique quantique : l'*équation de Schrödinger* ;

Le laplacien apparaît aussi

- en imagerie ;
- en finance : les *équations de Black-Scholes* ;
- etc.

Et bien sûr cet opérateur est central au sein même des mathématiques, il est utile :

- en analyse des EDP ;
- dans les systèmes dynamiques intégrables classiques et quantiques ;
- pour le chaos quantique ;
- en géométrie et topologie des variétés ;
- en probabilité : le *mouvement brownien* ;
- pour les flots géométriques, comme par exemple le fameux *flot de Ricci*. C'est au début des années 80 que R. Hamilton a introduit ce fameux flot, qui est en réalité une équation d'évolution géométrique non linéaire cousine de l'équation de la chaleur. Le point culminant de l'utilisation de ce flot date de 2002–2003, quand G. Perelman prouva d'une manière incroyable et étourdissante la très célèbre *conjecture de Poincaré* et également la plus générale *conjecture de géométrisation* de W. Thurston ;
- etc.

Revenons à l'étude du laplacien, un excellent angle d'attaque est le point de vue spectral. Motivons cette affirmation avec notre exemple favori issu de la physique : le problème de la chaleur. Pour un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, la propagation de la chaleur vérifie l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0,$$

avec éventuellement une condition de bord et une condition initiale. Le principe de résolution à la *Fourier* est le même que celui du problème statique pour la lame mince : on cherche une solution sous la forme $u(x, t) = f(x)\varphi(t)$ et il vient alors immédiatement la question suivante : chercher les couples (λ, f) , λ étant un scalaire et f une fonction non nulle vérifiant

$$-\Delta f = \lambda f,$$

avec aussi une condition de bord pour les fonctions f (dans le cas où l'on a un bord bien sûr). Dans un langage plus précis, on s'intéresse au *spectre de l'opérateur* $-\Delta$. Précisons les définitions : on dira qu'un scalaire λ est une *valeur propre* de $-\Delta$ s'il existe au moins une

fonction non nulle f définie sur Ω (avec éventuellement une condition de bord) telle que $-\Delta f = \lambda f$; dans ce cas, on dira que f est une *fonction propre* associée à λ , et l'ensemble $\ker(\lambda I_d + \Delta)$ est le *sous-espace propre* associé. La *multiplicité* de λ est la dimension de l'espace $\ker(\lambda I_d + \Delta)$. Pour finir, le *spectre* de $-\Delta$ est défini comme étant l'ensemble des valeurs propres de $-\Delta$. Dans le cas du laplacien sur un domaine borné Ω (qu'on supposera sans bord⁶ pour simplifier), on dispose du théorème spectral suivant : le spectre de l'opérateur $-\Delta$ est uniquement constitué d'une suite de valeurs propres réelles isolées :

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

telle que $\lambda_k \rightarrow +\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$. De plus, chaque valeur propre possède une multiplicité finie. Dans la notation présentée ici, les valeurs propres sont comptées avec leurs multiplicités; ainsi, $0 = \lambda_0 < \lambda_1$ signifie que la première valeur propre est nulle et simple. Ce théorème spectral demeure vrai si Ω possède un bord (mais on n'a plus forcément $\lambda_0 = 0$). Il est manifeste que le spectre dépend donc du domaine Ω , en particulier de ses propriétés géométriques et topologiques. Il y a par conséquent un lien profond entre la suite de valeurs propres $(\lambda_k)_k$ et la géométrie du domaine Ω . Il n'y a pas de méthode générale pour calculer un spectre d'opérateur linéaire; même dans le cas du laplacien sur un domaine simple, le calcul est souvent difficile, et finalement on dispose de peu d'exemples où l'on peut expliciter complètement le spectre. Voici tout de même un exemple intéressant et *in fine* très profond : celui du *tore plat* (en dimension deux).

3.2 Le tore plat

Avant toute chose, une question liminaire s'impose, à savoir comment construire le tore plat en dimension deux? Soient $a, b > 0$ deux nombres réels fixés, considérons le réseau⁷ $\Gamma := ae_1\mathbb{Z} \oplus be_2\mathbb{Z}$, où (e_1, e_2) est la base canonique de \mathbb{R}^2 . Dire qu'un vecteur x du plan appartient à Γ signifie qu'il existe un couple de nombres entiers n, m tels que $x = (na, mb)$. Le tore plat associé à ce réseau est alors simplement défini comme l'espace quotient $\mathbb{T} := \mathbb{R}^2/\Gamma$, la relation d'équivalence sous-jacente étant la suivante : $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \Gamma$. Cet espace quotient est naturellement muni d'une topologie métrique : $d_{\mathbb{T}}(\bar{x}, \bar{y}) := \min_{x, y} d(x, y)$, où x est un représentant de \bar{x} et y un représentant de \bar{y} . Cet espace est compact. Pour une image plus concrète du tore plat \mathbb{T} , on peut le voir comme le rectangle $[0, a] \times [0, b]$ avec un recollement des bords verticaux entre eux et un recollement des bords horizontaux entre eux : une sorte de domaine à la "Pac-Man". Une fonction sur \mathbb{T} est donc une fonction sur \mathbb{R}^2 qui est a -périodique en la première variable et b -périodique en la seconde. Si l'on munit \mathbb{T} de la structure riemannienne héritée de celle de \mathbb{R}^2 , sa courbure sectionnelle est alors nulle, c'est la raison du terme *tore plat*.

3.3 Séries de Fourier sur le réseau Γ

La théorie des séries de Fourier se généralise assez naturellement aux cas des fonctions de plusieurs variables. En particulier dans le cas du réseau $\Gamma := ae_1\mathbb{Z} \oplus be_2\mathbb{Z}$ évoqué précédemment, pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{T})$, on a la décomposition suivante, au sens L^2 :

$$u = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} c_{\gamma} e_{\gamma},$$

6. Comme par exemple une sphère ou un tore.

7. Un réseau est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}^2, +)$.

où $\Gamma^* := \{x \in \mathbb{R}^2; \forall \gamma \in \Gamma, x \cdot \gamma \in \mathbb{Z}\}$ désigne le réseau dual de Γ , $c_\gamma := \int_{\mathbb{T}} u(t) e^{-2i\pi\gamma \cdot t} dt$, et $e_\gamma(t) := e^{2i\pi\gamma \cdot t}$; ici, $\gamma \cdot t$ désigne le produit scalaire euclidien entre les vecteurs γ et t . Dans notre cas, comme (a, b) est une \mathbb{Z} -base de Γ , le réseau dual Γ^* est directement donné par $\Gamma^* = \frac{1}{a}e_1 \oplus \frac{1}{b}e_2 \mathbb{Z}$. Il s'ensuit alors que $(\frac{1}{a}e_1, \frac{1}{b}e_2)$ est une \mathbb{Z} -base de Γ^* . Ainsi, la famille

$$\left(e_{n,m} : (x, y) \mapsto e^{\frac{2i\pi nx}{a} + \frac{2i\pi my}{b}} \right)_{n,m \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$: toute fonction $u \in L^2(\mathbb{T})$ se décompose alors de la manière suivante

$$u = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} c_{n,m} e_{n,m}.$$

3.4 Le spectre du tore

Intéressons-nous dès lors au spectre du tore \mathbb{T} .⁸ Soit λ une valeur propre du laplacien⁹ sur \mathbb{T} , par définition il existe alors une fonction $u \in L^2(\mathbb{T})$, avec $u \neq 0$, telle que $-\Delta u - \lambda u = 0$. Par la théorie L^2 des séries de Fourier, le système de fonctions $\left(e_{n,m} : (x, y) \mapsto e^{\frac{2i\pi nx}{a} + \frac{2i\pi my}{b}} \right)_{n,m \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ formée de vecteurs propres du laplacien, en effet pour tout couple $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$-\Delta e_{n,m} = 4\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) e_{n,m}$$

La fonction u se décompose sur la base de Fourier de la manière suivante $u = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} c_{n,m} e_{n,m}$.

Ainsi, l'équation $-\Delta u - \lambda u = 0$ devient

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} c_{n,m} \left(4\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) - \lambda \right) e_{n,m} = 0.$$

Comme $u \neq 0$, il existe alors au moins un couple d'entiers (n_0, m_0) tel que $c_{n_0, m_0} \neq 0$; ainsi, $\lambda = 4\pi^2 \left(\frac{n_0^2}{a^2} + \frac{m_0^2}{b^2} \right)$. In fine, on a

$$\text{Spec}(\mathbb{T}) = \left\{ 4\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), n, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3.5 Un autre spectre : celui des longueurs

Le tore plat possède aussi un autre spectre, qu'on appelle le *spectre des longueurs*. Le spectre des longueurs est défini comme étant l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques de \mathbb{T} . Le spectre des longueurs est compté avec les multiplicités des longueurs, la multiplicité d'une longueur étant le nombre de classes d'homotopie de lacets du tore représentées par une géodésique périodique de cette longueur. *De facto*, dans le cas du tore plat, les géodésiques sont exactement les droites paramétrées par le flot de point initial l'origine : $\varphi_t = (t, \alpha t)$, α étant donc la pente de la droite. On cherche les géodésiques périodiques du

8. En géométrie spectrale, au lieu de parler du spectre de l'opérateur laplacien, on parle en fait du spectre de l'objet géométrique que l'on considère.

9. En géométrie spectrale, le laplacien est l'opérateur $-\Delta$.

toire, ce sont des droites qui s'enroulent sur le tore. Pour cela, il faut chercher si le flot associé est périodique, c'est-à-dire s'il existe un temps T tel que $(T, \alpha T) \in ae_1\mathbb{Z} \oplus be_2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} T = ak, & k \in \mathbb{Z}, \\ \alpha T = b\ell, & \ell \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En particulier, pour que ce temps T puisse exister, il est nécessaire que $\alpha \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Supposons cette condition vérifiée et écrivons $\alpha \frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ où n, m sont des entiers relatifs supposés premiers entre eux, il vient alors immédiatement que le flot est périodique. En effet, avec $T = am$, on a bien $\varphi_{am} = (am, nb) \in ae_1\mathbb{Z} \oplus be_2\mathbb{Z}$.

En conclusion, les géodésiques périodiques sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2 / \Gamma$ sont les droites de la forme $\varphi_t = (t, \alpha t)$, avec la condition de rationalité¹⁰ $\alpha \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, la longueur de la géodésique associée à la condition de rationalité $\alpha \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ est égale à $\sqrt{m^2 a^2 + n^2 b^2}$. Ainsi, le spectre des longueurs du tore est donné par

$$\mathcal{L}(\mathbb{T}) = \left\{ \sqrt{k^2 a^2 + \ell^2 b^2}, (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

3.6 Une passerelle entre les deux spectres

La formule sommatoire de Poisson présentée en partie 2 se généralise en plusieurs variables. Pour le cas qui nous intéresse, celui de la dimension deux, pour une fonction f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, la formule de Poisson sur le réseau $\Gamma = ae_1\mathbb{Z} \oplus be_2\mathbb{Z}$ s'écrit

$$\sum_{k \in \Gamma} f(k) = \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma)} \sum_{\ell \in \Gamma^*} \widehat{f}(\ell),$$

où Γ^* est le réseau dual de Γ . Le volume du réseau Γ est ici ab et on a aussi $\text{Vol}(\Gamma^*) = \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma)} = \frac{1}{ab}$. Un calcul classique de transformée de Fourier à deux variables similaire au calcul effectué en partie 2 assure que la transformée de Fourier de la fonction gaussienne

$$f(x) = e^{-\alpha \|x\|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2),$$

où $\alpha > 0$, est donnée par $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\frac{\pi^2 \|\xi\|^2}{\alpha}}$. Dès lors, en appliquant la formule de Poisson à cette gaussienne, on obtient

$$\sum_{x \in \Gamma} e^{-\alpha \|x\|^2} = \frac{1}{ab} \frac{\pi}{\alpha} \sum_{y \in \Gamma^*} e^{-\frac{\pi^2 \|y\|^2}{\alpha}}$$

puis, en remplaçant le réseau Γ par son dual Γ^* , on a

$$\sum_{x \in \Gamma^*} e^{-\alpha \|x\|^2} = \frac{\pi ab}{\alpha} \sum_{y \in \Gamma} e^{-\frac{\pi^2 \|y\|^2}{\alpha}},$$

car $\Gamma^{**} = \Gamma$ et $\text{vol}(\Gamma^*) = \frac{1}{\text{vol}(\Gamma)}$. En particulier, avec le choix $\alpha := 4\pi^2 t$, où $t > 0$, on dispose de l'égalité suivante :

$$\sum_{x \in \Gamma^*} e^{-4\pi^2 t \|x\|^2} = \frac{ab}{4\pi t} \sum_{y \in \Gamma} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}}.$$

10. Notons que, si $\alpha \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, le flot n'est pas périodique, mais il remplit densément le tore.

Du fait que le spectre de \mathbb{T} est $\left\{4\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right), n, m \in \mathbb{Z}\right\}$, on obtient finalement la formule de trace suivante :

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathbb{T})} e^{-\lambda t} = \frac{\text{Vol}(\Gamma)}{4\pi t} \sum_{\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{T})} e^{-\frac{\ell^2}{4t}}.$$

Dans cette égalité, le terme de droite correspond à la partie géométrique du tore (volume, dimension...) alors que le terme de gauche contient lui les informations spectrales. Cette égalité recèle aussi le très puissant paradigme de l'analyse semi-classique... L'essence de l'analyse semi-classique est de relier les formalismes mathématiques de la mécanique hamiltonienne classique (structure géométrique commutative) et de la mécanique quantique (algèbre d'opérateurs non commutative). Dans l'exemple du tore, les longueurs des géodésiques périodiques sont effectivement des quantités classiques, elles correspondent aux longueurs des trajectoires classiques du flot hamiltonien $H(x, \xi) = |\xi|_{g(x)}^2 / 2$ défini sur l'espace des phases du fibré cotangent $T^*\mathbb{T}$, alors que le spectre $\text{Spec}(\mathbb{T})$ correspond aux niveaux d'énergie de l'hamiltonien quantique $-\Delta_g$. En outre, la fonction de gauche dans la précédente formule de trace est omniprésente en géométrie spectrale, cette fonction s'appelle la *fonction spectrale de répartition* de \mathbb{T} , on la note souvent

$$Z_{\mathbb{T}}(t) := \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathbb{T})} e^{-\lambda t}.$$

Cette série est uniformément convergente sur les intervalles $[\varepsilon, +\infty[$, avec $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, et dès lors il est évident que $t \mapsto Z_{\mathbb{T}}(t)$ est continue et décroissante sur \mathbb{R}_+^* , avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} Z_{\mathbb{T}}(t) = 1$ (car $0 \in \text{Spec}(\mathbb{T})$). Le principal intérêt de cette fonction réside d'une part dans le fait que $Z_{\mathbb{T}}$ détermine complètement le spectre de \mathbb{T} , et d'autre part que cette fonction est reliée à la *distribution spectrale de densité*

$$D_{\mathbb{T}} := \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathbb{T})} \delta_{\lambda}$$

où δ_{λ} est la masse de Dirac au point λ (au sens des distributions). En effet, au sens des distributions, pour tout $t > 0$, on a

$$\widehat{D}_{\mathbb{T}} = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathbb{T})} \widehat{\delta}_{\lambda} = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathbb{T})} e^{-2\pi i t \lambda} = Z_{\mathbb{T}}(2\pi i t).$$

Ici, le terme $Z_{\mathbb{T}}(2\pi i t)$ est la distribution régulière associée à la fonction $t \mapsto e^{-2\pi i t \lambda}$, i. e., pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\widehat{D}_{\mathbb{T}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} Z_{\mathbb{T}}(2\pi i t) \varphi(t) dt.$$

3.7 Généralisation : le spectre d'une variété riemannienne

Le laplacien riemannien et son spectre

Il est important de signaler qu'il existe une généralisation de l'étude des valeurs propres du laplacien pour les *variétés riemanniennes*. En *géométrie riemannienne*, l'*opérateur de Laplace-Beltrami* est la généralisation du laplacien de \mathbb{R}^n . Pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 à valeurs réelles définie sur une variété riemannienne (M, g) , et pour $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$

une carte locale de la variété M , l'opérateur de Laplace-Beltrami, ou plus simplement le laplacien de (M, g) , appliqué à la fonction f est donné par la formule locale :

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{|g|} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_k} \right),$$

où $|g| = \det(g_{ij})$ et $g^{jk} = (g_{jk})^{-1}$. Cet opérateur joue un très grand rôle au sein même des mathématiques : son spectre est un invariant géométrique majeur. En 1949, S. Minakshisundaram et Å. Pleijel ont écrit le premier article sur $-\Delta_g$ dans le cas d'une variété riemannienne compacte (M, g) . En particulier, ils ont prouvé que le spectre de $-\Delta_g$ est uniquement constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en $+\infty$:

$$0 \leq \lambda_1(M) < \lambda_2(M) \leq \dots \leq \lambda_k(M) \leq \dots$$

On appelle cette suite *le spectre de la variété* (M, g) . Durant les années 1949–1954, H. Maass, et après lui A. Selberg, ont beaucoup étudié le spectre de $-\Delta_g$ dans le cas des surfaces compactes. Plus tard, beaucoup de géomètres, motivés par le célèbre livre de M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet [BGM], se sont alors intéressés à cet invariant spectral. L'étude du laplacien, et plus particulièrement de son spectre, est un carrefour entre la théorie spectrale, l'analyse harmonique, la géométrie différentielle et même la théorie des groupes. *De facto*, il y a deux problématiques majeures liées au spectre du laplacien $-\Delta_g$.

1. *Les problèmes directs* : étant donnée une variété riemannienne (M, g) , que dire du spectre de l'opérateur $-\Delta_g$? L'objectif est, à géométrie fixée, de pouvoir calculer, ou à défaut de donner des propriétés du spectre de l'opérateur $-\Delta_g$.
2. *Les problèmes inverses* : étant donné le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$, que dire géométriquement de (M, g) ?

Les problèmes directs

Concernant la première problématique il y a deux sous-thèmes classiques.

- Le premier concerne le bas du spectre : on s'intéresse aux plus petites valeurs propres de l'opérateur $-\Delta_g$, qui ont beaucoup d'applications en topologie.
- Le second est l'étude de l'asymptotique des grandes valeurs propres : c'est le domaine de l'*analyse semi-classique*.

L'exemple de base de problème aux grandes valeurs propres est la formule asymptotique de Weyl. Pour le laplacien dans un domaine rectangulaire Ω de \mathbb{R}^2 avec des conditions de Dirichlet aux bords, le physicien P. Debye conjectura que le nombre de valeurs propres $\mathcal{N}(\lambda)$ inférieures à un réel positif λ , vérifie l'équivalence, pour $\lambda \rightarrow +\infty$,

$$\mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{\text{Vol}(\Omega)}{4\pi} \lambda,$$

où $\text{Vol}(\Omega)$ est l'aire du rectangle Ω . En 1911, H. Weyl démontra cette conjecture. Ce résultat se généralise pour les variétés riemanniennes compactes, c'est la *formule asymptotique de Weyl* :

$$\#\{ \{k \in \mathbb{N}, \lambda_k(M) \leq \lambda\} \} \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{B_n \text{Vol}(M, g)}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}},$$

où $B_n := \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ est le volume de la boule unité fermée de $(\mathbb{R}^n, \text{can})$, où can désigne la métrique euclidienne canonique. En particulier, on a aussi

$$\lambda_k(M) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{(2\pi)^n}{B_n \text{Vol}(M, g)} \right)^{\frac{2}{n}} k^{\frac{2}{n}}.$$

Les problèmes inverses

Le principe cardinal de la problématique inverse est le suivant : à partir de la donnée unique du spectre du laplacien $-\Delta_g$, quelles informations géométriques sur la variété (M, g) peut-on connaître? Un des premiers à formaliser mathématiquement cette question est sans doute L. Green en 1960. Cette question remonte à H. Weyl en 1911-1912 pour un cas particulier de surface. La question fut ensuite largement popularisée par Mark Kac [**Kac**] en 1966 dans son célèbre article "Can one hear the shape of a drum?"¹¹. Le sens précis de cette question est le suivant : pour le laplacien riemannien, une suite de valeurs propres (un ensemble d’harmoniques du tambour) caractérise-t-elle, à isométrie près, la variété de départ (la géométrie du tambour)? Il est connu que, si deux variétés sont isométriques, elles sont alors isospectrales (c’est-à-dire ont le même spectre). Mais qu’en est-il de la réciproque?

C’est finalement en 1964, que le génial mathématicien J. Milnor a répondu par la négative ; en effet, dans son célèbre article [**Mil**], il a décrit la construction d’une paire de tores plats de dimension 16 isospectraux mais non isométriques! Depuis, de nombreux autres exemples ont été trouvés, à commencer par T. Sunada [**Sun**], qui en 1985 a donné une méthode de construction systématique de variétés isospectrales non isométriques. C. Gordon et E. N. Wilson [**Go-Wi**] ont aussi donné en 1984 une méthode de construction de déformations continues de variétés. L’histoire ne s’arrête pas là, d’autres méthodes de construction sont apparues, comme par exemple la méthode de transplantation de P. Bérard [**Bér1**], [**Bér2**], etc. En 1992, C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert [**GWW**] ont donné le premier exemple de deux domaines plans non isométriques, mais ayant tout de même un spectre commun pour le laplacien avec conditions de Neumann ou de Dirichlet.

Nonobstant le fait que le spectre du laplacien $(\lambda_k(M))_k$ ne caractérise pas intégralement la variété de départ (M, g) , la donnée du spectre permet tout de même d’obtenir un grand nombre d’informations géométriques. En effet, si (M, g) désigne une variété riemannienne compacte de dimension n , on dispose de la fameuse *égalité de Minakshisundaram-Pleijel* : pour tout $t > 0$, on a

$$Z_M(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-t\lambda_k(M)} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k + \dots \right), \tag{3.1}$$

où

$$a_0 = \text{Vol}(M, g)$$

et

$$a_1 = \frac{1}{6} \int_M \text{Scal}_g d\mathcal{V}_g.$$

L’expression du terme a_2 est

$$a_2 = \frac{1}{360} \int_M \left(2|R|^2 - 2|\text{Ric}|^2 + 5\text{Scal}_g^2 \right) d\mathcal{V}_g,$$

11. "Peut-on entendre la forme d’un tambour?"

où Scal_g est la *courbure scalaire*, Ric la *courbure de Ricci*, et R désigne le *tenseur de courbure de Riemann*. Le calcul des autres coefficients a_k pour $k \geq 2$ est très difficile et est *de facto* inutile. Dans le cas des surfaces (*i. e.* si $\dim(M) = 2$), la *formule de Gauss-Bonnet* donne

$$a_1 = \frac{\pi}{3} \chi(M),$$

où $\chi(M)$ est la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de M . En conséquence, pour toute surface fermée¹² M , on a

$$Z_M(t) = \frac{\text{Vol}(M, g)}{4\pi t} + \frac{\chi(M)}{12} + \frac{\pi t}{60} \int_M K^2 dV_g + P(t) t^2,$$

où $t \mapsto P(t)$ est une fonction bornée sur M .

Une conséquence fondamentale de l'égalité de Minakshisundaram-Pleijel réside dans le fait que le spectre de la variété (M, g) détermine :

- la dimension de la variété ;
- le volume de la variété ;
- l'intégrale de la courbure scalaire Scal_g sur la variété. En particulier, si M et M' sont des surfaces, alors $\chi(M) = \chi(M')$.

C'est assez surprenant pour le signaler mais la preuve de l'égalité (3.1) repose sur l'équation de la chaleur sur la variété (M, g) , plus précisément sur la construction d'une solution de cette équation. Cette résolution utilise le concept fondamental de *noyau de la chaleur* de M . La théorie du noyau de la chaleur sur une variété riemannienne est d'une grande profondeur et permet d'analyser finement la relation entre la géométrie de M , son spectre et les processus de diffusion agissant sur cette variété.

La donnée du spectre du laplacien fournit aussi d'autres invariants géométriques, comme par exemple le spectre des longueurs d'une variété. Le spectre des longueurs d'une variété riemannienne est l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques. En 1973, Y. Colin de Verdière [Col1], [Col2] a montré que dans le cas compact, modulo une hypothèse de *généricité* toujours vérifiée à courbure sectionnelle négative, le spectre du laplacien détermine complètement le spectre des longueurs. La technique utilisée par Y. Colin de Verdière repose sur les formules de traces. Ces dernières s'utilisent dans un cadre beaucoup plus général que celui du laplacien. Le principe formel des formules de traces est le suivant : considérons d'abord un opérateur linéaire H non borné sur un Hilbert ayant un spectre discret $\text{Spec}(H) = \{\lambda_k, k \geq 1\}$, et une fonction f "sympathique". La formule de trace consiste alors à calculer la trace de l'opérateur $f(H)$ de deux façons différentes :

- la première façon, lorsque que cela a un sens, avec les valeurs propres de l'opérateur linéaire $f(H)$:

$$\text{Tr}(f(H)) = \sum_{k \geq 1} f(\lambda_k) ;$$

- la seconde façon, avec le noyau de Schwartz de l'opérateur $f(H)$.

Si $f(H)\varphi(x) = \int_M K_f(x, y)\varphi(y) dy$, alors

$$\text{Tr}(f(H)) = \int_M K_f(x, x) dx.$$

12. Une surface fermée est une surface compacte et sans bord.

Ainsi, on obtient la formule de trace générale suivante :

$$\sum_{k \geq 1} f(\lambda_k) = \int_M K_f(x, x) dx.$$

La difficulté réside alors dans le choix de la fonction f , d'une part pour légitimer ces formules, et d'autre part pour arriver à en tirer des informations spectro-géométriques. Les choix de fonction f les plus courants sont : $f(x) = e^{-xt}$, où $t \geq 0$ (fonction de la chaleur) ; $f(x) = \frac{1}{x^s}$, où $s \in \mathbb{C}$, avec $\operatorname{Re}(s) > 1$ (fonction zêta de Riemann) ; $f(x) = e^{-\frac{ix}{h}}$, où $t \geq 0$ et $h > 0$ (fonction de Schrödinger) ; etc. Pour une référence récente sur les formules de traces en géométrie, voir [Col3].

Quelques références bibliographiques

Pour une introduction complète à la géométrie riemannienne les livres [GHL] et [DoC] constituent un excellent support. Le stratosphérique livre de M. Berger [Ber] est une magnifique bible moderne de la géométrie riemannienne. Les principales références sur la géométrie spectrale sur les variétés riemanniennes sont le livre mythique de M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet [BGM], le livre de P. Bérard [Bér3], celui de I. Chavel [Cha], celui de S. Rosenberg [Ros]. Pour une référence plus récente, on pourra consulter le livre [Lab].

Bibliographie

- [Bér1] P. BÉRARD, *Transplantation et isospectralité I*, Math. Ann. 292 : 547-559, 1992.
- [Bér2] P. BÉRARD, *Transplantation et isospectralité II*, J. London Math. Soc. 48 : 565-576, 1993.
- [Bér3] P. BÉRARD, *Spectral Geometry : Direct and Inverse Problems*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1207, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [BGM] M. BERGER, P. GAUDUCHON & E. MAZET, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lectures Notes in Mathematics 194, Springer-Verlag 1971.
- [Ber] M. BERGER, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, Berlin Heidelberg NewYork, 2002.
- [Bré] H. BRÉZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2010.
- [Car] L. CARLESON, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. Volume 116, 135-157, 1966.
- [Cha] I. CHAVEL, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Orlando, 1984.
- [Col1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I*, Compositio Mathematica, 27 : 80-106, 1973.
- [Col2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II*, Compositio Mathematica, 27 : 159-184, 1973.
- [Col3] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectrum of the Laplace operator and periodic geodesics : thirty years after*, Ann. Inst. Fourier. 57 (7) : 2429-2463, 2008.
- [Dh-Ro] J. DHOMBRES & J. B. ROBERT, *Fourier, créateur de la physique mathématique*, collection « Un savant, une époque », Belin, 1998.

- [DoC] M. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, Basel, 1992.
- [Eva] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society, 2nd Edn. 2010.
- [Fou] J. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur, par M. Fourier*, F. Didot père et fils (Paris), 1822.
- [GHL] S. GALLOT, D. HULLIN & J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*, Universitext Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Go-Wi] C. GORDON & E.N. WILSON, *Isospectral deformations on compact manifolds*, J. Diff. Geom. 19 : 241-256, 1984.
- [GWW] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones Mathematicae 110 : 1-22, 1992.
- [Hun] R.A. HUNT, *On the convergence of Fourier series, in Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues*. Proceeding of the Conference Held at Southern Illinois University (Edwardsville, IL, April 27–29, 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, pp. 235–255, 1968.
- [Kac] M. KAC, *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly, 73 (4), 1-23, 1966.
- [Ka-Ka] J.-P. KAHANE & Y. KATZNELSON, *Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques*. Studia Mathematica 26 : 305-306. J. P. Kahane. 1966.
- [Ka-Le] J.-P. KAHANE & P.-G. LEMARIÉ-RIEUSSET, *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, Nouvelle bibliothèque mathématique, 1998.
- [Kol] A. KOLMOGOROV, *Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier*, Fund. Math. 5, 1924.
- [Lab] O. LABLÉE, *Spectral Theory in Riemannian Geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, 2015.
- [Li-Lo] H. LIEB & L. LOSS, *Analysis*, American Math. Soc., Providence RI, 2001.
- [Mil] J. MILNOR, *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 51 : 542, 1964.
- [Ros] S. ROSENBERG, *The Laplacian on a Riemannian Manifold*, London Mathematical Society, Student Texts 31 Cambridge University Press, 1997.
- [Rud] W. RUDIN : *Real and Complex Analysis*, Mc Graw Hill, New York, 1974.
- [Sun] T. SUNADA, *Riemannian covering and isospectral manifolds*, Ann. of Math. 121 : 169-186, 1985.
- [St-We] E. M. STEIN & G. WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.
- [Tay] M. E. TAYLOR, *Noncommutative Harmonic Analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 1986.
- [Zyg] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series, 3rd edition Foreword by Robert Fefferman*, Cambridge University Press, 2015.

L'analyse de Fourier, 250 ans après Fourier : continuité des opérateurs d'intégrale singulière et rectifiabilité

par Hervé PAJOT

Université de Grenoble Alpes

Herve.Pajot@univ-grenoble-alpes.fr

Sommaire

- 1 Qu'est ce qu'un opérateur d'intégrale singulière ? L'exemple de l'opérateur de Hilbert
- 2 Preuves de la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens
 - 2.1 Quelques notations et définitions
 - 2.2 Un survol historique
 - 2.3 Problème géométrique du voyageur de commerce et formule de Calderón
 - 2.4 Bases de Haar et lemme de Schur
 - 2.5 Une preuve géométrique via la courbure de Menger
 - 2.6 Au-delà des graphes lipschitziens : une introduction à la rectifiabilité uniforme
- 3 Appendice. Mesures et dimension de Hausdorff

Introduction

L'analyse de Fourier est-elle toujours vivante 250 ans après la naissance de son créateur ? Le but de ces notes est de présenter un sujet toujours d'actualité, à savoir l'étude géométrique des opérateurs d'intégrale singulière, et de voir le rôle joué par l'analyse de Fourier dans la

résolution de certains problèmes dans ce domaine. L'exemple phare est l'étude de la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens. Ce problème posé dans les années 1960 a connu une solution partielle en 1978 par Calderón (voir [1]) puis une solution complète en 1982 par Coifman-Meyer-McIntosh (voir [5]). Cependant, ce résultat était jugé tellement important par la communauté des analystes harmoniciens que diverses preuves "plus simples" avec des idées vraiment novatrices ont vu le jour dans les années 1980-1990. Après avoir présenté brièvement les opérateurs d'intégrale singulière et discuté de façon plus détaillée de l'exemple le plus simple (l'opérateur de Hilbert), nous présenterons trois preuves de la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens. Dans la première, on se ramène au cas de l'opérateur de Hilbert via le théorème géométrique du voyageur de commerce (qui donne une caractérisation des sous-ensembles de courbes rectifiables du plan complexe). La seconde utilise des bases d'ondelettes du type "base de Haar". Après avoir estimé notre opérateur dans cette base bien choisie, on peut conclure en utilisant un résultat classique d'algèbre linéaire, à savoir le lemme de Schur. Enfin, la dernière utilise la courbure de Menger qui est un objet géométrique simple, mais fort utile. Elle permet de faire directement le lien entre la géométrie d'un graphe lipschitzien et la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy. Nous discuterons ensuite de la continuité de l'opérateur de Cauchy sur d'autres sous-ensembles du plan complexe et nous définirons alors la notion de rectifiabilité uniforme au sens de David et Semmes qui permet d'aller au-delà des graphes lipschitziens (voir [10] ou [11]). Nous présenterons le cas toujours ouvert de la dimension supérieure (l'opérateur de Cauchy est alors remplacé par les transformées de Riesz). Un appendice contient quelques compléments de théorie géométrique de la mesure (en particulier, sur les mesures et dimension de Hausdorff).

Tout ce dont nous avons besoin dans la suite en analyse se trouve dans le livre classique de Rudin *Analyse réelle et complexe*. En ce qui concerne la transformée de Fourier, nous utiliserons les résultats donnés dans l'article d'Olivier Lablée [19] dans ce bulletin.

Sauf mention du contraire, nos constantes se nomment C même si elles varient d'une ligne à l'autre.

Cet article est une adaptation d'un article [29] de l'auteur paru dans la *Gazette des Mathématiciens* (Société Mathématique de France) à l'occasion de la remise du prix Abel à Yves Meyer, grand expert de l'analyse de Fourier s'il en est. Par ce texte, je souhaite rendre hommage à mon maître, Guy David (mon directeur de thèse). À mon grand-père mathématique, Yves Meyer (directeur de thèse de Guy, Yves m'a beaucoup influencé). À mon arrière grand-père mathématique, Jean-Pierre Kahane (disparu en 2017) qui aurait écrit un bien meilleur article que moi. Jean-Pierre n'est plus là, alors il faut se résoudre à un second couteau pour écrire ces quelques lignes. Merci à eux pour ces années de discussions autour de l'analyse harmonique et de la théorie géométrique de la mesure (qui sont l'objet de ce texte), alors que mon prof de maths en Maths Spé M' avait décrété que je ne serai jamais mathématicien. Il y a maintenant un espace de Bourdon-Pajot, une algèbre de Royden-Bourdon-Pajot, un théorème de recouvrement de Pajot... Il faut encourager vos élèves à faire des maths (même s'il faut parfois/souvent leur mettre un coup de pied aux fesses pour les remotiver)! Les mathématiques sont tellement belles, riches... et ont beaucoup de débouchés (voir la brochure de l'ONISEP à ce sujet : <http://www.onisep.fr/Publications/Zoom/Les-metiers-des-mathematiques-et-de-l-informatique>)!

1 Qu'est ce qu'un opérateur d'intégrale singulière ?

L'exemple de l'opérateur de Hilbert

On se donne une mesure positive μ dans le plan complexe \mathbb{C} . On notera dans la suite E le support de μ que l'on supposera fermé dans \mathbb{C} . Les exemples que nous avons en tête sont $E = \mathbb{R}$ et $\mu = \mathcal{L}^1$ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} ou plus généralement E est un graphe lipschitzien et μ est la mesure de longueur sur ce graphe. Nous précisons ce dernier exemple dans le prochain paragraphe. Si $p \geq 1$, $L^p(\mu)$ (que nous noterons parfois aussi $L^p(E)$) est l'espace des fonctions mesurables sur E telles que

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

Considérons maintenant un noyau $K : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est régulier hors de la diagonale de \mathbb{C} , mais dont nous contrôlons le défaut de régularité. Dans ces notes, nous dirons qu'une fonction $K : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{z = z'\} \rightarrow \mathbb{C}$ est un noyau standard s'il existe des constantes $\delta \in]0, 1]$ et $C > 0$ telles que, pour tout $z \neq z'$, on a les propriétés suivantes :

- (i) $K(z', z) = -K(z, z')$ (on dit que K est impair) ;
- (ii) $|K(z, z')| \leq C / |z - z'|$.

On suppose en outre que

- (iii) si $|z_0 - z_1| < 1/2 |z_0 - z_2|$, on a $|K(z_0, z_2) - K(z_1, z_2)| \leq C |z_0 - z_1|^\delta / |z_0 - z_2|^{1+\delta}$.

Le comportement du noyau K est comparable à celui de $1/(z - z')$ qui en est un exemple. Il existe diverses notions de "noyau standard" dans la littérature, mais celles-ci sont très proches de celle que nous avons choisie. Nous ne considérerons dans la suite que de tels noyaux. Un exemple typique est de prendre une fonction $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est régulière sauf en 0 et de considérer $K(x, y) = \phi(x - y)$. Nous associerons à la mesure μ et au noyau K un opérateur d'intégrale singulière que l'on définit formellement par

$$Tf(x) = \int_E K(x, y) f(y) d\mu(y). \tag{1}$$

Dans le cas où $K(x, y) = \phi(x - y)$, Tf est juste la convolution de f par ϕ :

$$Tf(x) = f * \phi(x) = \int_E \phi(x - y) f(y) d\mu(y). \tag{2}$$

Les principaux problèmes qui se posent sont les suivants.

Problème d'existence : Comment donner un sens à $Tf(x)$ pour $x \in E$ si f est dans une bonne classe de fonctions sur E , par exemple $f \in L^p(\mu) = L^p(E)$? Par densité des fonctions lisses dans les espaces de Lebesgue, il est naturel de se limiter dans un premier temps au cas des fonctions de classe C^∞ à support compact dans E . Le problème vient du fait que K est singulier sur la diagonale. Une idée est de considérer les opérateurs tronqués qui sont définis pour tout $\varepsilon > 0$ par

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x, y) f(y) d\mu(y). \tag{3}$$

Il est clair que $T_\varepsilon f(x)$ est bien défini pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$. On dit que l'opérateur T est défini au sens de la valeur principale si, pour (presque) tout $x \in E$, la limite

$T^* f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x)$ existe et est finie. En pratique, il n'est pas facile de vérifier une telle convergence. Une autre façon de donner un sens à T est de le faire au sens des distributions comme l'ont suggéré Coifman et Meyer (voir [6]). On peut définir ainsi T comme un opérateur continu de l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans son dual dont l'action est donnée par

$$\langle Tf, g \rangle = 1/2 \iint K(x, y)(f(y)g(x) - f(x)g(y))d\mu(x)d\mu(y).$$

Rappelons que K est impair et donc l'intégrale $\langle Tf, g \rangle$ est formellement égale à

$$\iint K(x, y)f(y)g(x)d\mu(x)d\mu(y).$$

Le point est que la singularité en $x = y$ est "tuée" par le fait que $|f(x)g(y) - f(y)g(x)| \leq C|x - y|$ (où la constante C dépend de f et g).

Problème de la continuité L^2 . La continuité L^2 joue un rôle particulier. En effet, elle peut être obtenue par des techniques d'analyse de Fourier comme nous le verrons pour l'opérateur de Hilbert. D'autre part, sous des hypothèses générales sur μ et le noyau, elle entraîne la continuité L^p pour tout $1 < p < \infty$. Ceci est un des points-clés de la théorie des intégrales singulières de Calderón-Zygmund (voir [3] ou [33]). Mais, que signifie que T est continu sur $L^2(\mu)$? Supposons dans un premier temps que le problème d'existence (au sens de la valeur principale ou des distributions) soit réglé dans le cas des fonctions lisses (par exemple de classe C^∞ à support compact, voir le paragraphe suivant). Le but est alors de démontrer que l'on peut étendre T en un opérateur continu de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\mu)$. Afin d'éviter d'avoir à résoudre d'abord le problème d'existence, il est plus commode de considérer la définition suivante. Nous dirons que l'opérateur T est borné sur $L^2(\mu)$ si les opérateurs tronqués T_ε sont bornés uniformément en ε sur $L^2(\mu)$, c'est-à-dire s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, toute fonction $f \in L^2(\mu)$, on a $\|T_\varepsilon f\|_2 \leq C\|f\|_2$. En fait, ces diverses notions de continuité L^2 sont équivalentes. Notons que, dans beaucoup de situations, la continuité L^2 entraîne l'existence en tant que valeur principale (voir [3]). Enfin, il est important de voir que la continuité L^2 d'un opérateur d'intégrale singulière associé à un noyau K implique en général que la mesure est 1-dimensionnelle, au sens où il existe une constante $C > 0$ telle que $\mu(B(z, R)) \leq CR$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, tout $R > 0$ (voir plus loin le théorème de Guy David sur la continuité de l'opérateur de Cauchy sur les courbes rectifiables).

Pour illustrer ce qui précède, nous allons considérer le cas de l'opérateur de Hilbert. Dans ce cas $E = \mathbb{R}$, μ est la mesure de Lebesgue \mathcal{L}^1 sur \mathbb{R} et $K(x, y) = 1/(x - y)$. Cet opérateur est donc la convolution sur \mathbb{R} avec la fonction $1/x$. Pour alléger les notations, on note $dx = d\mathcal{L}^1(x)$. Tout d'abord, nous affirmons que, si f est de classe C^∞ à support compact, alors $Hf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy$ existe et est finie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Fixons $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On choisit $r > \varepsilon$ de telle sorte que le support de f soit inclus dans l'intervalle $[x - r, x + r]$. Le point-clé est de noter que $\int_{\varepsilon < |x-y| \leq r} \frac{1}{x-y} dy = 0$. Cette égalité est triviale (elle vient de la parité de la fonction intégrée), mais elle est cruciale. Pour s'en convaincre, le lecteur pourra essayer de reprendre ce qui suit avec le noyau $K(x, y) = 1/|x - y|$ qui lui ne vérifie pas ce type

d'égalité. Puisque f est à support dans $[x - r, x + r]$, on a alors

$$\begin{aligned} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy &= \int_{\varepsilon < |x-y| \leq r} \frac{f(y) - f(x)}{x-y} dy \\ &= \int_{|x-y| \leq r} \frac{f(y) - f(x)}{x-y} dy - \int_{|x-y| \leq \varepsilon} \frac{f(y) - f(x)}{x-y} dy. \end{aligned}$$

Comme f est lisse, la première intégrale est finie et la seconde tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Ce qui permet de conclure à l'existence au sens de la valeur principale de l'opérateur de Hilbert. Pour la continuité L^2 , on commence par noter que, si f est de classe C^∞ à support compact dans \mathbb{R} , on a $\widehat{Hf}(\xi) = -i\widehat{f}(\xi)\frac{\xi}{|\xi|}$, où la transformée de Fourier de f est définie par $\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2i\pi x\xi} f(x) dx$ (voir [12]). Par l'identité de Plancherel (voir la section 2.6 de [19]), $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ et $\|Hf\|_2 = \|\widehat{Hf}\|_2$, donc $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$. D'où, par densité des fonctions lisses dans $L^2(\mathbb{R})$, l'opérateur H a une unique extension en un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même. La continuité dans $L^p(\mu)$ (pour $p \neq 2$) de la transformée de Hilbert peut se démontrer par des méthodes d'analyse complexe, par exemple le théorème des résidus (travaux de M. Riesz, voir [12] paragraphe 6.3 du chapitre 3).

Le lecteur pourra trouver une introduction (assez complète) aux opérateurs d'intégrale singulière dans [3] ou [12] avant de consulter le pavé [33].

2 Preuves de la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens

2.1 Quelques notations et définitions

Un graphe lipschitzien Γ est un sous-ensemble du plan complexe de la forme, à une rotation près,

$$\Gamma = \{x + iA(x); x \in \mathbb{R}\},$$

où $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne. Nous rappelons que ceci signifie qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|A(x) - A(y)| \leq C|x - y|. \tag{4}$$

La plus petite constante C vérifiant (4) est la constante de Lipschitz de A et nous la noterons $\text{Lip}(A)$. Signalons que l'on peut de façon analogue définir des applications lipschitziennes entre deux espaces métriques généraux. Les applications lipschitziennes jouissent des propriétés fondamentales suivantes dans le cas euclidien (voir [30] pour des extensions à d'autres cadres géométriques).

Extension. Supposons que l'application A ne soit lipschitzienne que sur un sous-ensemble K de \mathbb{R} (c'est-à-dire l'inégalité (4) n'est vraie que pour $x, y \in K$). Alors on peut étendre A en une fonction lipschitzienne sur \mathbb{R} tout entier qui a la même constante de Lipschitz que A : il existe une application lipschitzienne $\tilde{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $A(x) = \tilde{A}(x)$ si $x \in K$ et $\text{Lip}(A) = \text{Lip}(\tilde{A})$ (ici, $\text{Lip}(A)$ est la plus petite constante telle que (4) soit vérifiée pour tous $x, y \in K$).

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que $\tilde{A}(x) = \inf\{A(x') + \text{Lip}(A)|x - x'|; x' \in K\}$ convient. Ainsi, si notre graphe lipschitzien Γ n'était défini que sur un intervalle I de \mathbb{R} , on pourrait prolonger l'application lipschitzienne (et donc son graphe) sur \mathbb{R} tout entier. Si $A : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est lipschitzienne sur un sous-ensemble K de \mathbb{R}^n , alors, en appliquant la méthode précédente coordonnée par coordonnée, on peut la prolonger en une fonction lipschitzienne sur \mathbb{R}^n avec une constante de Lipschitz $\sqrt{n}\text{Lip}(A)$. En fait, le théorème de Kirszbraun affirme que l'on peut prolonger A en une fonction lipschitzienne de même constante. On peut voir ce résultat comme une version non linéaire du théorème d'Hahn-Banach sur le prolongement des formes linéaires. Nous en omettons la preuve qui est plus difficile que la précédente (voir [30]). Très récemment, ce type de résultat a été étendu aux applications lipschitziennes entre espaces métriques sous des hypothèses de courbure (par exemple variétés riemanniennes à courbure sectionnelle négative, voir [30]).

Différentiabilité. Toute fonction lipschitzienne $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue. Il s'ensuit par le théorème de Radon-Nykodym que A est dérivable presque partout. On note $s_\Gamma(x) = x + iA(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, Γ a donc une tangente en $s_\Gamma(x)$. De plus, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq |s'_\Gamma(x)| = \sqrt{1 + A'(x)^2} \leq \sqrt{1 + \text{Lip}(A)^2}$. D'où, $|dx| \leq |ds_\Gamma(x)| \leq \sqrt{1 + \text{Lip}(A)^2} |dx|$. Donc, Γ est un exemple de courbe corde-arc, ce qui signifie qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que tout couple de points $s_\Gamma(x)$ et $s_\Gamma(x')$ peut être joint par une sous-courbe de Γ de longueur $\leq C |s_\Gamma(x) - s_\Gamma(x')|$ (ici, $C = \sqrt{1 + \text{Lip}(A)^2}$ convient). Notons d'ailleurs que la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy reste vraie dans ce cadre plus général. Le résultat sur la différentiabilité s'étend aux fonctions lipschitziennes $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $n, m > 1$ (théorème de Rademacher, voir [20] pour une démonstration) et, plus récemment, il en a été donné des versions dans le cas d'applications lipschitziennes $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, où X est un espace métrique à géométrie bornée (voir [30]).

L'opérateur de Cauchy sur le graphe lipschitzien Γ est formellement défini par

$$C_\Gamma f(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{z - \xi} d\xi, \quad z \in \Gamma.$$

On peut aussi mettre un $1/(2i\pi)$ devant l'intégrale pour faire encore plus le lien avec la formule de Cauchy. Si on pose $F(t) = f(t + iA(t))(1 + iA'(t))$, on a alors

$$C_\Gamma f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{F(y)}{x + iA(x) - (y + iA(y))} dy \quad \text{si } z = x + iA(x).$$

Or, d'après ce qui précède, la norme de F dans $L^2(\mathbb{R})$ est comparable à la norme de f dans $L^2(\Gamma)$. On pourra donc aussi considérer l'opérateur de Cauchy sous la forme

$$C_\Gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x + iA(x) - (y + iA(y))} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le problème de la continuité L^2 pour les deux opérateurs précédents (dans $L^2(\Gamma)$ pour l'un, dans $L^2(\mathbb{R})$ pour l'autre) est équivalent. Dans la suite, nous présenterons trois preuves de la continuité L^2 de cet opérateur. Nous préciserons à chaque fois laquelle des définitions différentes (mais équivalentes) de la bornitude L^2 nous utiliserons.

2.2 Un survol historique

L'origine de ce problème est quelque peu confuse. D'après Igari (cité par Murai dans [25]), Zygmund aurait conjecturé ce résultat en 1965 lors de cours donnés à Orsay en relation avec l'existence en tant que valeur principale de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens. À la même époque, selon Meyer [24], Calderón pour résoudre un problème de Dirichlet aurait été confronté à cette difficulté.

Écrivons formellement l'opérateur de Cauchy sur le graphe $\Gamma = \{x + iA(x), x \in \mathbb{R}\}$ comme

$$C_{\Gamma}f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x + iA(x) - (y + iA(y))} dy.$$

En faisant un développement en série du dénominateur, on obtient de façon formelle

$$C_{\Gamma}f(x) = \pi Hf(x) + \sum_{n \geq 1} (-1)^n T_n f(x),$$

où H est l'opérateur de Hilbert et T_n (appelé commutateur de Calderón d'ordre n) est l'opérateur d'intégrale singulière associé au noyau $K_n(x, y) = \frac{(A(x) - A(y))^n}{(x - y)^{n+1}}$. Comme on sait que H est continu sur $L^2(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que les T_n sont bornés sur $L^2(\mathbb{R})$ avec des normes bien contrôlées par rapport à n . En 1965, Calderón prouve que T_1 est borné. Le cas $n = 2$ est résolu en 1975 par Coifman et Meyer. En 1978, Calderón (voir [1]) démontre le cas général à condition que la constante de Lipschitz du graphe soit assez petite (sans qu'il lui soit possible de donner une borne explicite), puis en 1981, Coifman, McIntosh et Meyer (voir [5]) se passent de cette dernière condition. Diverses preuves vont ensuite être données, nous en présenterons trois très différentes. Notons aussi que David (voir [8]) a démontré que, si Γ est une courbe (localement) rectifiable, l'opérateur de Cauchy C_{Γ} est borné sur $L^2(\Gamma)$ si et seulement si la courbe est Ahlfors-régulière. Ce sera un des points de départ de la théorie de la rectifiabilité uniforme que David et Semmes développeront dans les années 1990 (voir le dernier paragraphe).

La continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens a eu diverses applications en analyse de Fourier, analyse complexe, théorie du potentiel, équations aux dérivées partielles... Voir par exemple les exposés aux congrès mondiaux des mathématiciens de Calderón (Helsinki, 1978), Fefferman (Vancouver, 1978), Meyer (Varsovie, 1983), David (Berkeley, 1986), Tolsa (Madrid, 2006). Voir [2], [15], [23], [7], [31].

Sur la continuité de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens, on pourra aussi consulter [18] ou [25].

2.3 Problème géométrique du voyageur de commerce et formule de Calderón

La première preuve de nature géométrique est due à Peter Jones (voir [16] et [17]). L'idée de départ est simple et repose sur deux observations.

1. Dans le cas où le graphe lipschitzien est une droite, la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy n'est rien d'autre que celle de l'opérateur de Hilbert et peut s'obtenir par des méthodes simples d'analyse de Fourier (voir le premier paragraphe).

2. Un graphe lipschitzien est “plat”. Nous avons vu par exemple qu’il admet une tangente en presque tout point.

Cela nous conduit à approximer le graphe lipschitzien par des droites, et donc l’opérateur de Cauchy par des opérateurs de Hilbert. La continuité L^2 du premier découlera de la continuité L^2 des seconds. La philosophie de la preuve est simple mais elle est difficile à mettre en pratique. Tout d’abord, la platitude locale de Γ ne suffit pas. Il nous faut mesurer en tout point et à toutes les échelles la platitude de Γ . Pour cela, Jones a introduit les nombres β qui se sont révélés fort utiles pour étudier quantitativement les propriétés de rectifiabilité des sous-ensembles des espaces euclidiens (voir le paragraphe 3.6). Du coup, il nous faut aussi décomposer f suivant la localisation et les échelles (ou en temps/fréquence). Ceci sera fait via la formule reproduisante de Calderón. Commençons par le problème géométrique du voyageur de commerce et les nombres β . Soit $E \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble fermé du plan complexe (pas nécessairement le support d’une mesure μ). Pour tout $z \in \mathbb{C}$ (et non pas seulement dans E !), tout $t > 0$, on pose

$$\beta_E(z, t) = \inf_L \sup_{z' \in E \cap B(z, t)} \frac{d(z', L)}{t},$$

où l’inf est pris sur toutes les droites L de \mathbb{C} (sans se restreindre aux droites passant par le point z). Le nombre $\beta_E(z, t)$ est compris entre 0 et 1. Il vaut 0 si, à l’intérieur de $B(z, t)$, E est contenu dans une droite. D’un autre côté, $\beta_E(z, t)$ est égal à 1 si E “remplit presque” toute la boule $B(z, t)$ (penser par exemple à $E = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$). On peut aussi voir que $t\beta_E(z, t)$ est comparable à la largeur de la bande la plus fine qui contient $E \cap B(z, t)$. Dans le cas où $E = \Gamma$ est un graphe lipschitzien, nous avons vu que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow 0} \beta_\Gamma(s_\Gamma(x), t) = 0$ (car en presque tout point, Γ admet une tangente). En fait, Jones démontre que dans ce cas, les nombres β sont intégrables en un certain sens : il existe une constante $C \geq 0$ ne dépendant que de la constante de Lipschitz de A telle que, pour toute boule B de \mathbb{C} , on a

$$\int_{\Gamma \cap B} \int_0^{\text{diam} B} \beta_\Gamma(z, t)^2 dz dt / t \leq C \text{diam} B. \tag{5}$$

Cette estimation permet de contrôler l’erreur commise en approxinant l’opérateur de Cauchy par des opérateurs de Hilbert. Plus tard, Jones (voir [17]) s’est rendu compte que les nombres β peuvent caractériser les sous-ensembles de courbes rectifiables de \mathbb{C} . Pour cela, posons

$$\beta(E) = \int_{\mathbb{C}} \int_0^{+\infty} \beta_E(z, t)^2 dz dt / t.$$

Alors E est contenu dans une courbe rectifiable γ si et seulement si $\beta(E) < \infty$. De plus, dans ce cas,

$$C^{-1}(\beta(E) + \text{diam} E) \leq \inf_{\gamma \supset E} l(\gamma) \leq C(\beta(E) + \text{diam} E),$$

où C est une constante absolue et $l(\gamma)$ est la longueur de la courbe γ . L’ingrédient (presque) principal de la preuve de ce résultat est le théorème de Pythagore!

Passons maintenant à la formule de Calderón. Soit ϕ une fonction (lisse) d’intégrale nulle telle que, pour tout $\xi \neq 0$,

$$\int_0^{+\infty} |\widehat{\phi}(t\xi)|^2 dt = 1. \tag{6}$$

L'identité de Calderón s'énonce ainsi. Si $f \in L^2$ et si on note $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(x/t)$, on a presque partout

$$f = \int_0^\infty f * \tilde{\phi}_t * \phi_t dt/t,$$

où $*$ représente le produit de convolution.

Pour voir cela, posons $g(x) = \int_0^\infty f * \tilde{\phi}_t * \phi_t(x) dt/t$. Alors, en utilisant le théorème de Fubini et les inégalités (2.1) et (2.8) de [19], plus (6), on a $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$, d'où l'identité de Calderón. Celle-ci, découverte par Calderón en 1964, a été retrouvée des années plus tard par Grossmann et Morlet, les précurseurs des ondelettes (vite rejoints par Yves Meyer!). On pose $\phi_{a,b}(x) = a^{-n/2}\phi((x-b)/a)$, puis, pour $f \in L^2$, $F(a,b) = \langle f, \phi_{a,b} \rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel dans L^2 . Dans ce cadre, la formule de Calderón s'écrit

$$f(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} F(a,b)\phi_{a,b}(x) db da/a^{1+n}.$$

En discrétisant, c'est-à-dire en écrivant l'identité précédente en terme de série et non d'intégrale grâce à un pavage bien choisi de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, on obtient de façon formelle la décomposition en ondelettes de f :

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha(j,k) 2^{jn/2} \phi(2^j x - k).$$

Il y a un lien entre ondelettes et nombres β . Les premières permettent de faire une analyse multi-échelle d'une fonction, les seconds d'un ensemble. La preuve complète de Jones utilise les ingrédients précédents (et la stratégie expliquée au début de ce paragraphe) et peut se trouver dans [3] (théorème 10 du chapitre IV).

2.4 Bases de Haar et lemme de Schur

Nous présentons maintenant une preuve due à Coifman, Jones et Semmes (voir [4]) qui est inspirée, d'après ce qu'écrivent les auteurs dans l'introduction de leur article, par des travaux présentés par Meyer et Tchamitchan lors d'une conférence d'analyse harmonique en 1987. L'idée de départ est simple et consiste à considérer la matrice (infinie) de l'opérateur de Cauchy dans une base orthonormale de $L^2(\Gamma)$ bien choisie. Après avoir estimé les coefficients de cette matrice, on peut conclure par le lemme de Schur. Dans le cas de l'opérateur de Hilbert, la base choisie est la base de Haar qui est l'exemple le plus simple de base d'ondelettes. Dans le cas général, il faut tenir compte de la géométrie de l'ensemble et modifier le système classique de Haar. Un des intérêts de cette preuve est qu'elle peut s'adapter pour démontrer les critères célèbres de continuité L^2 que sont le théorème $T(1)$ de David-Journé (qui dit qu'il suffit de tester l'opérateur sur la fonction 1 pour conclure ! Voir le paragraphe suivant pour une version de ce résultat) ou $T(b)$ de David-Journé-Semmes (qui dit qu'il suffit de tester l'opérateur sur une fonction b bien choisie, par exemple $b = 1 + iA'$ ou A' dans le cas de l'opérateur de Cauchy (suivant sa définition), pour conclure) dans les espaces euclidiens (voir [9]) ou plus généralement les espaces de type homogène (voir [3]). Donnons maintenant quelques détails et commençons par considérer le cas de l'opérateur de Hilbert. Pour simplifier la présentation, nous oublions le problème d'existence de Hf (quand $f \in L^2(\mathbb{R})$). Pour traiter les choses de façon rigoureuse, il faudrait considérer les opérateurs tronqués H_ε et obtenir des estimées uniformes en ε (voir aussi la discussion sur le

cas de l'opérateur de Cauchy à la fin de ce paragraphe). Construisons maintenant la base de Haar et, pour cela, notons Δ la famille des intervalles dyadiques de \mathbb{R} , c'est-à-dire l'ensemble des intervalles de la forme $I_j^k = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$ quand j et k décrivent \mathbb{Z} , et Δ_j la famille des intervalles dyadiques de taille 2^{-j} , c'est-à-dire $\Delta_j = \{I_j^k; k \in \mathbb{Z}\}$. Remarquons que nous avons les propriétés suivantes.

(i) La famille Δ est la réunion des Δ_j et, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les intervalles de Δ_j forment une partition de \mathbb{R} .

(ii) Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, tous les intervalles de Δ_j sont de diamètre et de mesure de Lebesgue égales à 2^{-j} .

(iii) Si $I \in \Delta_j, I' \in \Delta_k$ avec $j \leq k$, alors soit $I \cap I' = \emptyset$ soit $I' \subset I$.

(iv) Les intervalles de Δ ont la propriété de petites frontières, à savoir, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, tout $I \in \Delta_j$ et tout $\tau > 0$, $\mathcal{L}^1(\{x \in I, \text{dist}(x, \mathbb{R} \setminus I) \leq \tau 2^{-j}\}) = 2\tau 2^{-j}$.

Ces propriétés sont assez élémentaires à vérifier dans ce cas simple. Dans les espaces euclidiens, la famille des pavés dyadiques a des propriétés similaires. Il est beaucoup moins évident de voir que, dans des situations plus abstraites, comme dans le cas des ensembles Ahlfors-réguliers de \mathbb{R}^n et des espaces de type homogène, il existe des analogues des intervalles dyadiques (voir [9] ou [3]).

Construisons maintenant la base de Haar associée à Δ . Si $I \in \Delta_j$ s'écrit $I = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$, on note $I_g = [(2k)2^{-j-1}, (2k+1)2^{-j-1}[$ et $I_d = [(2k+1)2^{-j-1}, (2k+2)2^{-j-1}[$, de sorte que $I_g, I_d \in \Delta_{j+1}$ et I est l'union disjointe de I_g et I_d . La fonction h_I est la fonction à support dans I telle que $h_I(x) = |I|^{-1/2}$ si $x \in I_g$ et $h_I(x) = -|I|^{1/2}$ si $x \in I_d$, où $|I|$ est la longueur de l'intervalle dyadique I .

La famille $\{h_I\}_{I \in \Delta}$ forme une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ dans laquelle on peut écrire notre opérateur

$$Hf = \sum_{I, J \in \Delta} \langle Hh_I, h_J \rangle h_J \langle f, h_I \rangle,$$

où $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt$ est le produit scalaire classique sur $L^2(\mathbb{R})$. Le but est d'obtenir une estimation du type

$$\sup_{I \in \Delta} \left\{ \sum_{J \in \Delta} |\langle Hh_I, h_J \rangle| + \sum_{J \in \Delta} |\langle Hh_J, h_I \rangle| \right\} < \infty. \tag{7}$$

On peut alors conclure en appliquant le lemme de Schur qui s'énonce ainsi. Soit Λ une famille d'indices (par exemple, $\Lambda = \mathbb{N}$ ou $\Lambda = \mathbb{Z}$). On se donne des poids w_i , avec $i \in \Lambda$, qui sont des réels strictement positifs, et une matrice (peut-être infinie) $A = (a_{i,j})_{i,j \in \Lambda}$. Supposons qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\sum_{j \in \Lambda} |a_{i,j}|w_j \leq Cw_i \quad \text{pour tout } i \in \Lambda \tag{8}$$

$$\sum_{i \in \Lambda} |a_{i,j}|w_i \leq Cw_j \quad \text{pour tout } j \in \Lambda. \tag{9}$$

Alors A est bornée sur $l^2(\Lambda)$. En effet, soit $x = (x_j)$. On souhaite estimer la norme de $y = (y_i)$ où, pour tout $i \in \Lambda$, $y_i = \sum_j a_{i,j}x_j$. Commençons par écrire que

$$y_i = \sum_j \text{sign}(a_{i,j})(|a_{i,j}|^{1/2}w_j^{1/2})(w_j^{-1/2}|a_{i,j}|^{1/2}x_j)$$

et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que (8) :

$$\begin{aligned} |y_i|^2 &\leq \sum_j (|a_{i,j}|w_j) \sum_j (|a_{i,j}|w_j^{-1}|x_j|^2) \\ &\leq Cw_i \sum_j |a_{i,j}|w_j^{-1}|x_j|^2. \end{aligned}$$

D'où, en utilisant (9), il vient

$$\begin{aligned} \|y\|^2 = \sum_i |y_i|^2 &\leq C \sum_j \sum_i w_i |a_{i,j}| w_j^{-1} |x_j|^2 \\ &\leq C^2 \sum_j w_j w_j^{-1} |x_j|^2 \\ &= C^2 \sum_j |x_j|^2 = C^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Comment obtenir une estimation du type (7) ? Le but est d'estimer

$$\int \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{1}{x-y} h_I(x) h_J(x) dx dy.$$

Les fonctions h_I et h_J sont respectivement de support les intervalles dyadiques I et J . Alors, soit $I \cap J = \emptyset$, soit l'un des deux intervalles est contenu dans l'autre. Il y a divers cas selon que

- les intervalles I et J sont ou ne sont pas de taille comparable ;
- les intervalles I et J sont loin l'un de l'autre (par rapport à leurs longueurs), ils sont proches ou contenus l'un dans l'autre.

Considérons le cas où $I = [0, 1]$, le cas général se déduisant par homothéties et translations. Supposons en outre que $|J| \geq 1/10$ (soit $|J| \geq 1/10|I|$) et $[0, 1] \cap 2J = \emptyset$. On commence par noter que, si $x \notin 2J$, on a

$$|H(h_J)(x)| \leq C|x - x_J|^{-2}|J|^{3/2},$$

où x_J est le milieu de l'intervalle J . En effet, comme $\int h_J(x) dx = 0$, on a

$$\begin{aligned} |H(h_J)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-x_J} \right) h_J(y) dy \right| \\ &\leq |J|^{-1/2} \int_J \frac{|x_J - y|}{|x-y||x-x_J|} dx \\ &\leq C|x - x_J|^{-2}|J|^{3/2}. \end{aligned}$$

On en déduit alors $|\langle H(h_I), h_J \rangle| \leq C|J|^{3/2}|x_J|^{-2}$. Les autres cas se traitent de façon analogue. La propriété de petite frontière permet de contrôler la mesure des $(x, y) \in I \times J$ pour lesquels $1/(x - y)$ est grand quand les intervalles dyadiques I et J sont voisins par exemple. Dans le cas de l'opérateur de Cauchy sur le graphe Γ d'une fonction lipschitzienne $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on tient compte de la géométrie de l'ensemble considéré et on modifie en conséquence la base de Haar. Notons $s_\Gamma(x) = x + iA(x)$. Il est plus agréable de travailler avec l'opérateur de Cauchy défini par

$$C_\Gamma f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{s'_\Gamma(y)}{s_\Gamma(y) - s_\Gamma(x) - i\varepsilon s'_\Gamma(x)} dy.$$

On a alors par la formule de Cauchy que

$$\int C_\Gamma f(x) s'_\Gamma(x) dx = 0$$

si f est une fonction étagée telle que $C_\Gamma f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $m(I) = \frac{1}{|I|} \int_I s'_\Gamma(x) dx$ (moyenne de s'_Γ sur I). Le "produit scalaire" associé est $\langle f, g \rangle_\Gamma = \int f(x)g(x)s'_\Gamma(x) dx$. Attention! ce "produit scalaire" n'est pas un produit scalaire au sens usuel mais il convient de faire comme si c'en était un. Enfin, la base de Haar considérée est

$$g_I(x) = |I|^{-1/2} \left(\frac{m(I_g)m(I_d)}{m(I)} \right)^{1/2} \left(m(I_g)^{-1} \chi_{I_g}(x) - m(I_d)^{-1} \chi_{I_d}(x) \right),$$

où l'on note χ_I la fonction indicatrice d'un intervalle I .

Avec ces normalisations, on peut montrer que (g_I) se comporte comme une base ortho-normale. En effet, il existe une constante $C > 0$ telle que, si $f \in L^2(\Gamma)$, $f = \sum_I \langle f, g_I \rangle_\Gamma g_I$ et $C^{-1} \|f\|_2^2 \leq \sum_I |\langle f, g_I \rangle_\Gamma|^2 \leq C \|f\|_2^2$. Cette estimation est difficile. Comme précédemment, nous avons en faisant des calculs similaires que

$$\sup_{I \in \Delta} \left\{ \sum_{J \in \Delta} |\langle C_\Gamma g_I, g_J \rangle_\Gamma| + \sum_{J \in \Delta} |\langle C_\Gamma g_J, g_I \rangle_\Gamma| \right\} < \infty.$$

Nous pouvons alors conclure par le lemme de Schur.

Concernant le lien entre ondelettes et intégrales singulières, le lecteur pourra tout d'abord se plonger dans [9], qui donne aussi une introduction à la théorie de la rectifiabilité uniforme alors balbutiante, avant de se plonger dans [24].

2.5 Une preuve géométrique via la courbure de Menger

Nous allons présenter la preuve la plus récente de la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens, due à Melnikov et Verdera (voir [22]). Elle repose sur la courbure de Menger que nous allons maintenant définir. Étant donné trois points distincts z_1, z_2 et z_3 du plan complexe, on définit leur courbure de Menger $c(z_1, z_2, z_3)$ comme l'inverse du rayon du cercle circonscrit aux trois points. Ainsi, si les points sont alignés, ce rayon est infini et donc $c(z_1, z_2, z_3) = 0$. Par des arguments de géométrie élémentaire, on a les formules suivantes :

$$c(z_1, z_2, z_3)^2 = \left(\frac{4S(z_1, z_2, z_3)}{|z_1 - z_2||z_2 - z_3||z_3 - z_1|} \right)^2 = \sum_{\sigma} \frac{1}{(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(2)})(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(3)})}, \quad (10)$$

où $S(z_1, z_2, z_3)$ est l'aire du triangle de sommets z_1, z_2, z_3 , et σ décrit l'ensemble des permutations sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. On en déduit les formules suivantes (que l'on peut aussi démontrer directement) :

$$c(z_1, z_2, z_3) = 2 \frac{d(z_1, D_{z_2 z_3})}{|z_1 - z_2||z_1 - z_3|} = 2 \frac{\sin \alpha}{L},$$

où $D_{z_2 z_3}$ est la droite de \mathbb{C} passant par z_2 et z_3 , L est la longueur d'un côté du triangle de sommets z_1, z_2, z_3 , et α est l'angle opposé à ce côté.

Si μ est une mesure de Borel positive dans \mathbb{C} , on définit sa courbure de Menger par

$$c^2(\mu) = \int \int \int c(z_1, z_2, z_3)^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3).$$

Nous allons maintenant faire le lien entre cette courbure de mesure et l'opérateur de Cauchy via la formule (10). Pour cela, considérons formellement l'opérateur de Cauchy associé à μ et défini par $Cf(z) = \int \frac{f(\xi)}{z-\xi} d\mu(\xi)$. On a alors, si B est une boule de \mathbb{C} et si on note χ_B sa fonction indicatrice,

$$\int_B |C\chi_B(z_1)|^2 d\mu(z_1) = \int_B (C\chi_B(z_1)) \overline{(C\chi_B(z_1))} d\mu(z_1) \tag{11}$$

$$= \int_B \int_B \int_B \frac{1}{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)} d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3) \tag{12}$$

$$= 1/6 \int_B \int_B \int_B c(z_1, z_2, z_3)^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3). \tag{13}$$

Si nous voulions rendre plus rigoureux le calcul précédent, il faudrait considérer les opérateurs de Cauchy tronqués $C_\epsilon f(z) = \int_{|z-\xi|>\epsilon} \frac{f(\xi)}{z-\xi} d\mu(\xi)$. Si nous supposons que la mesure μ est Ahlfors-régulière de dimension 1 (voir le paragraphe suivant pour la définition), on peut montrer que $\int_B |C_\epsilon \chi_B(z)|^2 d\mu(z)$ est comparable à $\int_B \int_B \int_B c(z_1, z_2, z_3)^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3)$ modulo un $O(\text{diam } B)$. Or, toujours sous l'hypothèse que μ est Ahlfors-régulière de dimension 1, le théorème $T(1)$ nous dit que l'opérateur de Cauchy associé à μ est borné sur $L^2(\mu)$ (au sens où tous les opérateurs tronqués sont uniformément bornés sur $L^2(\mu)$) si et seulement si il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $\epsilon > 0$, toute boule B de \mathbb{C} , on a

$$\int_B |C_\epsilon \chi_B(z)|^2 d\mu(z) \leq C \text{diam } B.$$

L'opérateur de Cauchy est donc borné si et seulement si il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour toute boule B de \mathbb{C} ,

$$\int_B \int_B \int_B c(z_1, z_2, z_3)^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3) \leq C \text{diam } B.$$

Cette dernière condition s'appelle la condition de courbure locale et il nous reste à la vérifier dans le cas où μ est la mesure de longueur sur un graphe lipschitzien.

Nous allons en fait montrer que, si Γ est le graphe lipschitzien d'une fonction K -lipschitzienne $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , et si on note μ la mesure de longueur sur Γ , $c^2(\mu) \leq C(1 + K)^{3/2} K^2 \text{diam } I$, où C est une constante absolue. Ceci est équivalent à la condition de courbure locale pour un graphe lipschitzien. Rappelons que, si x, y et z sont des points de \mathbb{C} ,

$$c(x, y, z) = \frac{2d(x, L_{y,z})}{|x - y||x - z|},$$

où $L_{y,z}$ est la droite de \mathbb{C} qui passe par y et z .

Si r, s et t sont dans I , on a, pour $x = (r, f(r))$, $y = (s, f(s))$, et $z = (t, f(t))$,

$$\begin{aligned} c^2(x, y, z) &\leq \left(\frac{(f(t) - f(r))(s - r) - (f(s) - f(r))(t - r)}{|x - y||x - z||y - z|} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{\frac{f(t) - f(r)}{t - r} - \frac{f(s) - f(r)}{s - r}}{t - s} \right)^2. \end{aligned}$$

Écrivons $I = [a, b]$ et posons $g(t) = f(t) - \left(f(a) + (t - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$ si $t \in I$ et $g(t) = 0$ sinon. Alors g est $2K$ -lipschitzienne, avec une dérivée dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus, si r, s et t sont dans I ,

$$c^2(x, y, z) \leq \left(\frac{\frac{g(t) - g(r)}{t - r} - \frac{g(s) - g(r)}{s - r}}{t - s} \right)^2.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} c^2(\Gamma) &\leq \int_I \int_I \int_I \left(\frac{\frac{f(t) - f(r)}{t - r} - \frac{f(s) - f(r)}{s - r}}{t - s} \right)^2 (1 + |f'(r)|)^{\frac{1}{2}} (1 + |f'(s)|)^{\frac{1}{2}} (1 + |f'(t)|)^{\frac{1}{2}} dr ds dt \\ &\leq (1 + K)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(t) - f(r)}{t - r} - \frac{f(s) - f(r)}{s - r} \right)^2 dr \frac{ds dt}{(s - t)^2} \\ &\leq (1 + K)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(r + h) - f(r)}{h} - \frac{f(r + k) - f(r)}{k} \right)^2 dr \frac{dh dk}{(h - k)^2}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Plancherel (voir la section 2.6 de [19]), il vient

$$c^2(\Gamma) \leq (1 + K)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-i\xi h} - 1}{h} - \frac{e^{-i\xi k} - 1}{k} \right|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \frac{dh dk}{(h - k)^2}.$$

En appliquant les changements de variables $h \rightarrow \xi h$ et $k \rightarrow \xi k$, et de nouveau la formule de Plancherel, on obtient

$$\begin{aligned} c^2(\Gamma) &\leq (1 + K)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-ih} - 1}{h} - \frac{e^{-ik} - 1}{k} \right|^2 \frac{dh dk}{(h - k)^2} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C(1 + K)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} |g'(t)|^2 dt \\ &\leq C(1 + K)^{\frac{3}{2}} K^2 \text{diam } I. \end{aligned}$$

Ce qui est l'inégalité cherchée.

2.6 Au-delà des graphes lipschitziens : une introduction à la rectifiabilité uniforme

Une question naturelle est de se demander pour quel type d'ensemble E (qui est le support d'une mesure μ) l'opérateur de Cauchy définit un opérateur borné sur $L^2(\mu)$. De façon

plus précise, peut-on caractériser les sous-ensembles (fermés) E (qui supporte une mesure μ) du plan complexe tels qu'il existe une constante $C > 0$ qui satisfait

$$\int_E |C_\varepsilon f|^2 d\mu \leq C \int_E |f|^2 d\mu$$

pour tout $\varepsilon > 0$, tout $f \in L^2(\mu)$? Ici, $C_\varepsilon f(x) = \int \frac{f(y)}{x-y} d\mu(y)$ est l'opérateur de Cauchy tronqué associé à μ . Nous avons déjà vu au paragraphe 3.2 que, si $E = \Gamma$ est une courbe rectifiable (munie de sa mesure de longueur μ), l'opérateur de Cauchy sur E définit un opérateur borné sur $L^2(\mu)$ si et seulement si la courbe Γ est Ahlfors-régulière : il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\mu(B(x, R)) \leq CR$ pour tout $x \in \Gamma$, tout $R > 0$. Notons que, par connexité, l'estimation inverse $\mu(B(x, R)) \geq C^{-1}R$ est automatique (si $R \leq \text{diam } E$). Cette condition de croissance des boules étant (presque) nécessaire pour la bornitude de l'opérateur de Cauchy, nous supposons dans la suite que notre ensemble E est Ahlfors-régulier de dimension 1, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que $C^{-1}R \leq \mu(B(x, R)) \leq CR$ pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \text{diam } E[$. Une courbe Ahlfors-régulière est donc une courbe (localement) rectifiable qui est un ensemble Ahlfors-régulier lorsqu'on la munit de sa mesure de longueur. Notons aussi qu'un graphe lipschitzien est une courbe Ahlfors-régulière.

Remarque. Une autre motivation pour considérer ce type de condition est qu'un ensemble Ahlfors-régulier est un espace de type homogène au sens de Coifman et Weiss (voir [3] chapitre VI). L'ensemble de ces espaces était le paradis des analystes harmoniciens, c'est-à-dire les espaces dans lesquels l'analyse harmonique euclidienne s'adaptait sans problème, jusqu'aux travaux très récents de David, Tolsa, Nazarov-Treil-Volberg. Ces auteurs ont montré que le contrôle de la mesure μ n'était pas nécessaire pour obtenir des théorèmes de type $T(1)$ ou $T(b)$ par exemple (voir le survol [32]).

Notons que, si E est Ahlfors-régulier de dimension 1, il est de dimension de Hausdorff 1 et que μ est équivalente à la restriction de la 1-mesure de Hausdorff H^1 sur E (ces notions sont définies dans l'appendice). Ainsi, E est Ahlfors-régulier (nous omettons de préciser dorénavant la dimension) s'il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1}R \leq H^1(E \cap B(x, R)) \leq CR$ pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \text{diam } E[$.

Nous avons vu au paragraphe 3.5 qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur de Cauchy soit borné sur $L^2(\mu)$ est la condition de courbure locale : il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\int_B \int_B \int_B c(x, y, z)^2 d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z) \leq C \text{diam } B$. Mattila, Melnikov et Verdera (voir [21]) ont démontré que cette condition était aussi équivalente à la rectifiabilité uniforme au sens de David et Semmes que nous allons maintenant décrire.

Commençons par rappeler la définition classique de la rectifiabilité. Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ (avec $H^1(E) < \infty$) est 1-rectifiable s'il existe une famille dénombrable de fonctions lipschitziennes $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $H^1(E \setminus \bigcup_j f_j(\mathbb{R})) = 0$. Il est équivalent de demander que l'on puisse recouvrir E (à un ensemble de H^1 -mesure nulle près) par une famille dénombrable de graphes lipschitziens. La notion de rectifiabilité uniforme est une version quantitative de la notion classique de rectifiabilité. Elle a été introduite pour étendre le théorème de Coifman-McIntosh-Meyer à d'autres ensembles du plan complexe. Un ensemble Ahlfors-régulier $E \subset \mathbb{C}$ est dit uniformément rectifiable s'il existe une courbe Ahlfors-régulière $\Gamma \subset \mathbb{C}$ telle que $E \subset \Gamma$. Par le théorème de Guy David, l'opérateur de Cauchy est borné sur un tel

ensemble. Par les travaux de David-Semmes (voir [11]) puis de Mattila-Melnikov-Verdera, les conditions suivantes sont équivalentes pour un ensemble Ahlfors-régulier $E \subset \mathbb{C}$ (muni d'une mesure μ , par exemple la restriction de H^1 sur E).

- (i) L'ensemble E est uniformément rectifiable.
- (ii) L'ensemble E vérifie BPLG (Big Pieces of Lipschitz Graphs) : il existe des constantes réelles $M > 0$ et $\varepsilon > 0$ telles que, pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \text{diam } E[$, il existe un graphe lipschitzien Γ de constante de Lipschitz $\leq M$ vérifiant $\mu(B(x, R)) \geq \varepsilon R$.
- (iii) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \text{diam } E[$,

$$\int_0^R \int_{E \cap B(x, R)} \beta_E(y, t)^2 d\mu(y) dt / t \leq CR.$$

- (iv) L'ensemble E vérifie la condition de courbure locale.
- (v) L'opérateur de Cauchy est borné sur $L^2(\mu)$.

Faisons quelques commentaires. Un ensemble uniformément rectifiable est rectifiable au sens classique. D'ailleurs, la condition BPLG est une version quantitative de recouvrir E par des graphes lipschitziens. Il n'est pas difficile de voir que la condition BPLG implique la bornitude de l'opérateur de Cauchy grâce au théorème de Coifman-McIntosh-Meyer (et ici, le contrôle uniforme de la norme des graphes et de la masse de $E \cap B(x, R)$ contenue dans un graphe lipschitzien est primordial). Nous avons déjà rencontré la condition (iii) (qui dit que la mesure $\beta_E(y, t) dy dt / t$ est une mesure de Carleson, voir [28] chapitre 1) dans le paragraphe 3.3 dans le cadre des graphes lipschitziens qui sont donc uniformément rectifiables. Elle permet de contrôler la proportion dans toute boule $B(x, R)$ de couples (y, t) pour lesquels $\beta_E(y, t)$ est grand. Dans le cas rectifiable classique, une condition nécessaire et suffisante (démontrée par l'auteur de ces lignes dans [27]) est $\int_0^{\text{diam } E} \beta_E(x, t)^2 dt / t < \infty$ pour presque tout $x \in E$. Cette condition ne donne qu'un contrôle local des β . Nous avons déjà rencontré la condition (iv) au paragraphe 3.5 et vu qu'elle était équivalente à (v).

L'histoire est-elle terminée ? Plaçons-nous maintenant dans \mathbb{R}^n et considérons un ensemble Ahlfors-régulier E de dimension d (d entier, $0 < d \leq n$), c'est-à-dire que E supporte une mesure μ telle qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant, pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \text{diam } E[$,

$$C^{-1}R^d \leq \mu(B(x, R)) \leq CR^d.$$

Les analogues de l'opérateur de Cauchy sont les transformées de Riesz R_j associées aux noyaux $K_j = (x_j - y_j) / |x - y|^{d+1}$. Ces opérateurs sont bornés L^2 sur les d -graphes lipschitziens qui sont des sous-ensembles de \mathbb{R}^n de la forme $\Gamma = \{(x, A(x)); x \in \mathbb{R}^d\}$, où la fonction $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ est lipschitzienne. Il existe une théorie de la rectifiabilité uniforme dans ce cadre. Mais nous ne savons pas si la rectifiabilité uniforme caractérise la bornitude des transformées de Riesz. Le point crucial est que nous n'avons pas une courbure de Menger adaptée (c'est-à-dire vérifiant l'égalité "magique" (10)). Voir [26] pour une solution en codimension 1.

Une très bonne introduction à la théorie de la rectifiabilité uniforme est la première partie du livre [11]. Les liens entre opérateur de Cauchy, nombres β et courbure de Menger sont décrits dans [28].

3 Appendice. Mesures et dimension de Hausdorff

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $d \geq 0$ et tout $\delta > 0$, on pose

$$H_\delta^d(E) = \inf \left\{ \sum_i (\text{diam } U_i)^d; E \subset \bigcup_i U_i, \text{diam } U_i \leq \delta \right\},$$

puis $H^d(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^d(E) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^d(E)$. Pour tout d , H^d est une mesure extérieure qui est borélienne et régulière, mais qui n'est pas finie sur les compacts (sauf si $d \geq n$). Si $d = 0$, on reconnaît la mesure de comptage. Si Γ est une courbe rectifiable (c'est-à-dire de longueur finie), $H^1(\Gamma)$ est la longueur $l(\Gamma)$ de Γ . Pour voir cela de façon intuitive, supposons que la courbe Γ soit donnée par un paramétrage $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et considérons une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ de $[a, b]$. On peut alors associer à cette subdivision un recouvrement de Γ par les boules B_i de diamètre $|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$. On a alors

$$\sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \sum_{i=0}^{N-1} \text{diam } B_i,$$

d'où la conclusion en passant au supremum (obtenue de façon peu rigoureuse!) car

$$l(\Gamma) = \sup \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|,$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ de $[a, b]$. Si $d = n$, la mesure H^n est proportionnelle à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n . Ceci découle de l'inégalité isodiamétrique (voir [30]). Si $d > n$, H^d est la mesure triviale (égale à zéro sur tout ensemble). C'est un petit exercice de manipulation de la définition de voir que si $0 \leq d < d' < \infty$, on a $H^d(E) < \infty \implies H^{d'}(E) = 0$ et $H^{d'}(E) > 0 \implies H^d(E) = \infty$. On définit alors la dimension de Hausdorff de E par

$$\dim_H(E) = \sup \{d > 0, H^d(E) = \infty\} = \inf \{d' > 0, H^{d'}(E) = 0\}.$$

Ainsi, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, la dimension de Hausdorff d'un singleton est 0, celle d'une courbe rectifiable est 1 et celle de \mathbb{R}^n (ou de toute autre ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive) est n . Il n'est pas aisé en général d'estimer cette dimension. Décrivons un cas favorable. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit auto-similaire si $E = \bigcup_{i=1}^N S_i(E)$ où les $S_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des similitudes de rapport r_i (ce qui signifie que $|S_i(x) - S_i(y)| = r_i|x - y|$). Sous une hypothèse technique qui dit que les divers $S_i(E)$ doivent être assez séparés, la dimension de Hausdorff de E est l'unique solution s de l'équation $\sum_{i=1}^N r_i^s = 1$. Le lecteur peut alors appliquer ce qui précède pour démontrer que la dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor est $\log 2 / \log 3$. On peut aussi voir de façon heuristique que cette dimension est la bonne. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, considérons la partition naturelle de l'ensemble de Cantor par les intervalles I_j^k , $k = 0, \dots, 2^j - 1$, de longueur 3^{-j} . Considérons la somme $S_j = \sum_{k=0}^{2^j-1} (\text{diam } I_j^k)^d = (2/3^d)^j$. Cette suite géométrique converge si et seulement si

$d \geq \log 2 / \log 3$, d'où la conviction que la dimension de l'ensemble de Cantor doit être cette valeur bizarre, non entière...

Un autre résultat utile pour estimer la dimension de Hausdorff est le lemme de Frostmann. Si E est un borélien de \mathbb{R}^n , alors $H^d(E) > 0$ si et seulement si il existe une mesure de Radon μ à support compact dans E telle que $\mu(B(x, R)) \leq R^d$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $R > 0$. Le lecteur pourra essayer de démontrer seul l'implication \Leftarrow . La réciproque est un joli exercice de théorie de la mesure utilisant la convergence faible de mesure (voir [20] ou [30]).

Le lecteur qui veut apprendre de la théorie géométrique de la mesure (mesures et dimension de Hausdorff, rectifiabilité) pourra commencer par aborder [13], [20] ou [30] avant d'aborder la "bible" du domaine [14] dans lequel le lecteur patient trouvera les réponses à (presque) toutes ses questions.

Bibliographie

- [1] A. P. Calderón, *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, Volume 74 (1977), p 1324–1327.
- [2] A. P. Calderón, *Commutators, singular integrals on Lipschitz curves, and applications*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki (1978), p 85–98.
- [3] M. Christ, *Lectures on singular integral operators*, Regional Conference Series in Mathematics 77, American Mathematical Society (1990).
- [4] R. Coifman, P. Jones, S. Semmes, *Two new elementary proofs of the L^2 boundedness of Cauchy integrals on Lipschitz curves*, Journal of the American Mathematical Society Volume 2 (1989), p 553–564.
- [5] R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, *L'opérateur de Cauchy définit un opérateur borné sur les courbes lipschitziennes*, Annals of Mathematics Volume 116 (1982), p 361–388.
- [6] R. Coifman, Y. Meyer, *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque Volume 57 (1978), Société Mathématique de France.
- [7] G. David, *Opérateurs de Calderón-Zygmund*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley (1986), p 890–899.
- [8] G. David, *Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure Volume 17 (1984), p 157–189.
- [9] G. David, *Wavelets and singular integral operators on curves and surfaces*, Lecture Notes in Mathematics Volume 1465 (1991), Springer-Verlag.
- [10] G. David, S. Semmes, *Singular integrals and rectifiable sets in \mathbb{R}^n : Au-delà des graphes lipschitziens*, Astérisque Volume 193 (1991).
- [11] G. David, S. Semmes, *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, Mathematical Surveys and Monographs 38 (1993).
- [12] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, American Mathematical Society (2001).
- [13] K. J. Falconer, *Geometry of fractal sets*, Cambridge University Press (1985).
- [14] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag (1969).

- [15] C. Fefferman, *Recent progress in classical Fourier analysis*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver (1974), p 95–118.
- [16] P. W. Jones, *Square functions, Cauchy integrals, analytic capacity, and harmonic measure*, in “Harmonic analysis and partial differential equations”, Lecture Notes in Mathematics Volume 1384 (1989), Springer-Verlag, p 24-68.
- [17] P. Jones, *Rectifiable sets and the traveling salesman problem*, Inventiones Mathematicae Volume 102 (1990), p 1-15.
- [18] J. L. Journé, *Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators, and the Cauchy integral of Calderón*, Lecture Notes in Mathematics Volume 994 (1983), Springer-Verlag.
- [19] O. Lablée, *Dans les pas de Joseph Fourier, quelques mots sur son oeuvre et son héritage en géométrie spectrale*, dans ce volume.
- [20] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics Volume 44, Cambridge University Press (1995).
- [21] P. Mattila, M. Melnikov, J. Verdera, *The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability*, Annals of Mathematics Volume 144 (1996), p 127-136.
- [22] M. Melnikov, J. Verdera, *A geometric proof of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz curves*, International Mathematical Research Notices Volume 7 (1995), p 325-331.
- [23] Y. Meyer, *Intégrales singulières, opérateurs multilinéaires, analyse complexe et équations aux dérivées partielles*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Varsovie (1983), p 1001–1010.
- [24] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Tome 1 et 2 (1990), Hermann.
- [25] T. Murai, *A real variable method for the Cauchy transform, and analytic capacity*, Lecture Notes in Mathematics Volume 1307 (1988), Springer-Verlag.
- [26] F. Nazarov, X. Tolsa, A. Volberg, *On the uniform rectifiability of AD regular measures with bounded Riesz transform operator : the case of codimension 1*, Acta Mathematica Volume 213 (2014), p 237–321.
- [27] H. Pajot, *Conditions quantitatives de rectifiabilité*, Bulletin de la Société Mathématique de France Volume 125 (1997), p 1–39.
- [28] H. Pajot, *Analytic capacity, rectifiability, Menger curvature and the Cauchy integral*, Lecture Notes in Mathematics Volume 1799 (2002), Springer-Verlag.
- [29] H. Pajot, *Yves Meyer et l'opérateur de Cauchy*, Gazette des Mathématiciens Volume 128 (2011), Société Mathématique de France, p 15–33.
- [30] H. Pajot, E. Russ, *Analyse dans les espaces métriques*, Collection "Savoirs actuels", EDP Sciences (2018).
- [31] X. Tolsa, *Analytic capacity, rectifiability, and the Cauchy integrals*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid (2006), p 1505–1527.
- [32] J. Verdera, *The fall of the doubling conditions in Calderón-Zygmund theory*, in “Proceedings of the 6th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations (El Escorial 2000)”, Numéro spécial de Publicacions Matemàtiques (2002), p 275-292.
- [33] E. M. Stein, *Harmonic analysis*, Princeton University Press (1995).

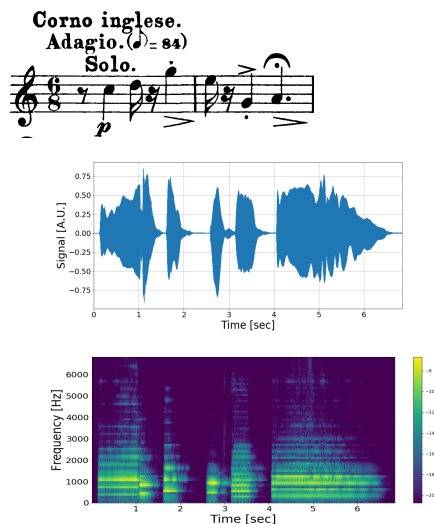
De la transformée de Fourier à l'analyse temps-fréquence bivariée

par Pierre CHAINAIS¹

Professeur, École Centrale de Lille,
Université de Lille, Laboratoire CRISTAL UMR CNRS 9189
pierre.chainais@centralelille.fr

1 Introduction

Le 250^e anniversaire de la naissance de Joseph Fourier (1768-1830) nous donne l'occasion de présenter l'un des prolongements contemporains essentiels de ses travaux : l'analyse temps-fréquence des signaux instationnaires ou comment définir mathématiquement la "partition musicale" d'un signal. Les figures ci-contre montrent la partition du solo de cor anglais au début de *Scène aux champs* dans la *Symphonie fantastique* de Berlioz, ainsi que le signal issu de l'enregistrement correspondant. L'information temps-fréquence associée est représentée par l'image codant la densité d'énergie temps-fréquence du bleu au jaune, le spectrogramme. L'objectif principal de cet article est d'introduire cet objet. Nous pourrions ainsi comprendre une petite partie de la partition de l'Univers, le spectrogramme d'une onde gravitationnelle issue de deux trous noirs en coalescence. Nous prolongerons cette présentation jusqu'aux résultats de travaux de recherche



1. Les travaux de recherche évoqués ici sont au cœur de la thèse de Julien Flamant, co-encadré par Nicolas Le Bihan, DR CNRS au GIPSA Lab de Grenoble, et Pierre Chainais.

en cours sur la construction d'une analyse temps-fréquence-polarisation pour les signaux bivariés, c'est-à-dire prenant leurs valeurs dans \mathbb{R}^2 au fil du temps.

Après un bref point historique, nous rappellerons quelques notions de base quant à la transformée de Fourier vue par le traitement du signal. Nous constaterons que la transformée de Fourier est particulièrement adaptée à l'analyse des signaux stationnaires (ceux dont les propriétés statistiques sont invariantes par translation en temps). Inversement, elle souffre d'une limitation fatale dès lors qu'il s'agit d'analyser des signaux instationnaires. Cette limitation est explicitée par une propriété mathématique de la transformée de Fourier (TF) énoncée par le théorème de Gabor. Ce théorème s'avère fatal à la notion pourtant intuitive de "fréquence instantanée" qui reste inatteignable (a-t-elle un sens? nous verrons...). Ce théorème est le pendant mathématique du principe d'incertitude de Heisenberg en physique quantique. Après une brève incursion dans le monde musical et une analogie avec la structure des partitions musicales, nous introduirons l'analyse temps-fréquence et ses atomes, d'abord pour les signaux unidimensionnels (on dit aussi univariés) notés $x(t) \in \mathbb{R}$. Pour illustrer ces outils, nous prendrons l'exemple des ondes gravitationnelles qui a fait tant de bruit récemment (l'analyse, pas les ondes...). Pour aller plus loin, nous terminerons en évoquant des travaux de recherche en cours qui portent sur une construction d'outils d'analyse temps-fréquence pour les signaux bivariés, c'est-à-dire à deux composantes $\mathbf{x}(t) = (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$. Nous passerons ainsi de la notion de spectrogramme classique à celle de spectrogramme de polarisation (en référence au comportement des ondes vectorielles, par exemple en électromagnétisme).

1.1 Point historique

Si Fourier n'a pas pratiqué la transformée de Fourier dans son acception moderne, son nom y est définitivement resté attaché. C'est bien lui qui a eu l'idée de rechercher les solutions d'équations aux dérivées partielles parmi les séries d'exponentielles complexes. Mais c'est surtout en physique quantique que les fondements de la transformée de Fourier moderne ont été posés. Le traitement du signal naît plus tard avec l'avènement des télécommunications, l'invention du RADAR et du SONAR, notamment motivés par la Seconde Guerre mondiale. Au sortir de la Seconde Guerre mondiale, c'est l'effervescence. En parallèle, nous retiendrons notamment les travaux de Claude Shannon (1948) sur la théorie de l'information, et les travaux de Laurent Schwartz sur la théorie des distributions (médaille Fields 1950) ou de Andreï Kolmogorov sur la théorie des probabilités, la complexité des algorithmes, la turbulence, etc., sans oublier Paul Lévy, Norbert Wiener et bien d'autres. Parmi les fondateurs de la communauté du traitement du signal en France, nous retiendrons en particulier André Blanc-Lapierre puis Bernard Picinbono.

Si la transformée de Fourier apparaissait déjà dans tous ces travaux, c'est l'algorithme de calcul de la transformée de Fourier rapide ou Fast Fourier Transform (FFT) inventé en 1965² par James Cooley et John Tukey qui signe l'acte de naissance de la transformée de Fourier telle qu'elle est pratiquée en traitement du signal aujourd'hui. Cette transformation numériquement bon marché avec une complexité en $O(N \log N)$ pour N échantillons temporels est devenu l'outil numérique le plus fréquemment utilisé et implémenté dans les dispositifs électroniques, de notre téléphone portable à notre téléviseur en passant bien sûr par nos consoles de jeux et autres lecteurs MP3.

2. En réalité, Cornelius Lanczos avait déjà proposé cette approche dès 1942.

1.2 Fourier et linéarité

La raison première qui a amené Fourier à exploiter la décomposition des fonctions sur une famille d'exponentielles complexes est fondamentalement la linéarité des équations aux dérivées partielles considérées. En effet, les exponentielles complexes sont les fonctions propres des opérateurs différentiels linéaires. Cela signifie simplement que la dérivée d'une exponentielle complexe est encore proportionnelle à une exponentielle complexe, d'où

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n e^{j\omega t} = (j\omega)^n e^{j\omega t} \quad (1)$$

Nous repensons ici à toutes les méthodes enseignées dans les cours de physique des classes préparatoires où l'on recherche des solutions sous la forme d'une exponentielle complexe. En électronique par exemple, on utilise les impédances complexes ($jL\omega$, $1/jC\omega$...); en électromagnétisme on s'intéresse aux ondes planes progressives monochromatiques (les fameuses OPPM!) sous une forme $\propto \exp[j(\omega t - kx)]$... Le point commun : dans les 2 cas, nous travaillons avec des modèles linéaires, les caractéristiques des composants *linéaires* ou les équations de Maxwell.

La transformée de Fourier (TF) est bien définie sur différents espaces, dont en particulier $L^2(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de carré intégrable ou signaux d'énergie finie, par³

$$X(\nu) = \langle x, e^{j2\pi\nu t} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt, \quad (2)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire entre deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ et ν est la fréquence, variable conjuguée du temps. Son inverse définit la formule de reconstruction :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x, e^{j2\pi\nu t} \rangle e^{j2\pi\nu t} d\nu. \quad (3)$$

Observons au passage que la famille des exponentielles complexes $\{e^{j2\pi\nu t}, \nu \in \mathbb{R}\}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$: nous pouvons interpréter $X(\nu)$ comme la "coordonnée" de $x(t)$ selon (dans la "direction" de) la fonction de base $e^{j2\pi\nu t}$.

Nous pourrions maintenant tout aussi bien considérer que nous sommes en train de chercher à résoudre les équations dans le domaine de Fourier : une fois identifiée la transformée de Fourier $F(\nu, \mathbf{k})$ de $f(t, \mathbf{x})$, une transformation inverse (ou reconstruction) nous donne accès à la solution dans le domaine spatio-temporel. Cette approche est couramment utilisée par des schémas numériques de résolution approchée des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires : les opérateurs différentiels sont transformés en des opérateurs algébriques bien moins coûteux à manipuler, l'algorithme FFT se chargeant du retour au domaine spatio-temporel pour un prix modique en $O(N \log N)$.

En traitement du signal, cette propriété de la transformée de Fourier est essentielle à l'analyse et la synthèse des filtres à partir de leur réponse fréquentielle ainsi qu'à l'identification des systèmes linéaires invariants par translation (dans le temps), les SLIT.

1.3 Analyse fréquentielle des signaux stationnaires

Il est temps de définir la notion de *signal*. Si le signal sera souvent assimilé à une fonction, il prend son origine dans le monde physique. On définit généralement un signal comme

3. Pour éviter toute discussion autour de la normalisation par des facteurs 2π , nous préférons par la suite toujours travailler avec la fréquence ν plutôt qu'avec la pulsation $\omega = 2\pi\nu$.

une quantité physique mesurable porteuse d'information issue d'un capteur (dont la modalité et l'unité peuvent être quelconques). Le signal abstrait est la fonction qui servira à le modéliser mathématiquement.

L'analyse de Fourier permet alors de définir une notion de densité spectrale d'énergie ou de puissance d'un signal. Il s'agit d'une quantité quadratique qui renvoie à des quantités bien connues des physiciens telles que $\frac{1}{2}mv^2$, $\frac{1}{2}kx^2$... Ces densités spectrales prennent un sens physique mathématiquement justifié par la propriété de conservation de l'énergie de la transformée de Fourier. Sans entrer plus dans les détails pour les signaux aléatoires, rappelons que, dans le cadre déterministe, la TF est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$. Cette affirmation découle du théorème de Parseval-Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu, \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)Y^*(\nu) d\nu, \quad (5)$$

où $x, y \in L^2(\mathbb{R})$ et y^* est le conjugué de y . La deuxième identité s'interprète comme une conservation du produit scalaire : la TF est une isométrie.

La propriété d'invariance par translation dans le temps devient *stationnarité* lorsque l'on parle de signaux (ou processus) aléatoires. Pour ces signaux, les propriétés statistiques (la moyenne, la variance, l'autocorrélation...) ne changent pas au cours du temps. Dans ce cas, grâce à des résultats sur les mesures aléatoires en probabilité, on peut montrer que des notions de densités spectrales d'énergie ou de puissance peuvent aussi être bien définies pour les signaux aléatoires⁴. La TF fournit ainsi une nouvelle représentation, facile à lire et interpréter, pour décrire le contenu d'un signal stationnaire sans perte d'information ; on parle souvent du *spectre* d'un signal pour le caractériser.

1.4 Fréquence physique, fréquence mathématique

Arrêtons-nous un instant sur le sens donné au mot *fréquence* depuis le début de cet article. Lorsque le physicien ou l'ingénieur emploie le mot *fréquence*, il pense d'abord au comptage de la répétition d'un phénomène au cours du temps : il fait implicitement référence à la notion naturelle de périodicité d'un système en rotation ou du mouvement d'un oscillateur harmonique. Dans ce cas, pourquoi travaillons-nous implicitement depuis le début de cet article avec des signaux à valeurs complexes, $x(t) \in \mathbb{C}$ tandis que les mesures du physicien sont à valeurs réelles $x(t) \in \mathbb{R}$? Quelle cohérence y-a-t-il entre la fréquence forcément positive (il s'agit du résultat d'un comptage) du physicien et le paramètre $\nu \in \mathbb{R}$ de la transformée de Fourier du mathématicien ?

Le premier élément de réponse tient à la construction même de la transformée de Fourier qui montre que les fonctions réelles de carré intégrable peuvent être décrites comme une combinaison linéaire infinie d'exponentielles complexes : on peut donc additionner des fonctions à valeurs complexes pour décrire des fonctions à valeurs réelles. Le paramètre de fréquence $\nu \in \mathbb{R}$ n'est à ce stade rien d'autre que l'indice d'une fonction $\exp(j2\pi\nu t)$, un nombre sans unité et sans signification physique a priori. Cependant, l'existence de cette décomposition de $x(t)$ sur la famille des exponentielles complexes induit une contrainte

4. On appelle signal aléatoire tout signal dont le futur ne peut être prédit exactement à partir du passé à l'aide d'un modèle mathématique approprié. Vaste sujet...

sur la structure de la fonction $X(\nu)$. Il s'agit de la *symétrie hermitienne* de la TF des signaux réelles. Lorsque $x(t) \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t)^* = x(t) \iff \forall \nu \in \mathbb{R}, \quad X(-\nu) = X^*(\nu). \quad (6)$$

Autrement dit, la connaissance de $X(\nu)$ pour $\nu \in \mathbb{R}^+$ suffit à reconstruire $x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, il apparaît que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} 2|X(\nu)|^2 d\nu, \quad (7)$$

d'où les facteurs en $\sqrt{2}$ devant les "valeurs efficaces" parfois utilisées en électronique. Le contenu fréquentiel du signal $x(t)$ est complètement décrit par $\{X(\nu), \nu \in \mathbb{R}^+\}$. C'est à partir de cette observation que l'on construit le *signal analytique* $x_+(t) \in \mathbb{C}$ associé au signal réel $x(t)$. Il s'agit du signal complexe issu de la TF inverse de $X_+(\nu)$ valant 0 pour les fréquences négatives ($\nu < 0$) et $2X(\nu)$ pour les fréquences positives ($\nu \geq 0$). La fonction $X_+(\nu)$ n'est associée qu'à des fréquences (mathématiques) positives qui correspondent bien à des fréquences physiquement interprétables : le recours à un objet mathématique à valeurs complexes permet l'interprétation physique univoque d'une observation à valeurs réelles. Les deux notions de fréquence, mathématique et physique, sont réconciliées.

2 La partition musicale : vers l'analyse temps-fréquence

La TF donne accès à une nouvelle représentation (isométrique) de l'information portée par un signal en fonction des fréquences plutôt que du temps. Cette enrichissante dualité entre temps et fréquence devient source de frustration lorsqu'il s'agit de prendre simultanément en compte le contenu fréquentiel et la dynamique d'un signal. À l'écoute d'un son, une musique ou une parole par exemple, l'ordre des notes ou des syllabes ainsi que le rythme ont autant d'importance que la mélodie ou le phrasé. Les musiciens disposent depuis longtemps déjà une représentation efficace jointe de la dynamique (le rythme) et du contenu fréquentiel (les notes) : la partition musicale.

2.1 La partition, une représentation mathématique

La partition, voir figure 1, est une représentation redoutablement riche du contenu temps-fréquence d'un signal particulier, la musique. Elle regorge d'informations auxquelles nous aimerions pouvoir donner un sens mathématique. Maîtriser la mathématique de la musique ouvrirait de nombreuses applications allant de la compression (le fameux MP3) à l'identification automatique des instruments et des voix. On pourrait extraire automatiquement la partition d'un morceau simplement à partir d'un enregistrement audio par exemple. Aujourd'hui encore, malgré des progrès considérables, cette tâche n'est pas maîtrisée de façon générale. Parmi les thématiques de recherche actuelles, la *séparation de sources* (et donc des différents instruments) reste un problème difficile. Étudions de plus près les informations présentes sur la partition de la figure 1.

Contenu fréquentiel et timbre. Tout d'abord l'instrument qui doit jouer est indiqué : il s'agit du cor anglais, le cousin grave du hautbois. Le timbre du son qui doit être produit est prescrit. Le timbre correspond au profil spectral d'un son, autrement dit la répartition

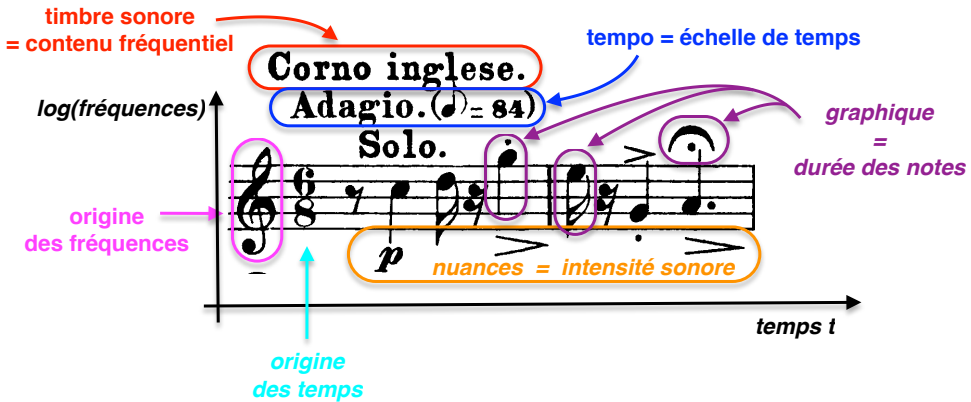


FIGURE 1 – Encodage de l'information temps-fréquence au sein d'une partition.

de l'énergie sur les fréquences harmoniques⁵; la façon d'attaquer les notes compte aussi. L'indication "Solo" rappelle au musicien qu'il devra particulièrement s'appliquer puisqu'il portera le thème au-dessus du reste de l'orchestre.

Temps et rythme. Une partition se lit de gauche à droite, direction qui représente l'écoulement du temps t . L'unité de temps est déterminée par le tempo relativement lent *Adagio* (qui signifie "à l'aise") précisé par la mesure qui se lit "84 à la croche" : le musicien devra jouer à la vitesse de 84 croches par minute. Les durées sont encodées par un code graphique incluant les rondes, les blanches, les noires, les croches, doubles-croches, etc., qui s'obtiennent en divisant les durées par 2 de façon récursive. Les puissances de 2 jouent un rôle particulier dans la description du rythme, même si les triolets et les puissances de 3 viennent parfois perturber le jeu. Il existe aussi des indications de silence, telles que les soupirs, ou de prolongation libre du son, telle que le point d'orgue sur la dernière note. L'origine des temps est placée juste après l'indication de la mesure, 6/8 ici. Le choix du 6/8 indique une façon particulière de décomposer le temps : chaque mesure, séparée de ses voisines par des barres, comptera 6 croches associées au chiffre 8 (1 croche = 1/8 de ronde). C'est une indication quant aux accents qui seront plus ou moins systématiquement marqués pour guider les danseurs par exemple : il apparaît déjà une indication quant à l'évolution de l'intensité du signal au cours du temps.

Fréquences et notes. La hauteur des notes est indiquée par la position de leur symbole sur une échelle représentée par la portée. L'origine des fréquences ν est repérée par la clé. Ici la clé de sol pointe sur la 2^e ligne en partant du bas qui correspondra à la note de Sol 4 ; les autres notes de la gamme, du do au si en passant par les dièses et les bémols, se placent soit sur, soit entre les lignes. La traduction en fréquences précises est établie par le choix

5. Si l'on suppose qu'un cor anglais joue une seule note en continu pendant un temps infini, il produit un signal parfaitement périodique décrit par un ensemble discret dénombrable de fréquences, une série de Fourier, voir l'article d'Olivier Lablée. La fréquence correspondant à la période du signal est associée à la fréquence fondamentale ν_0 . Les autres fréquences présentes sont appelées *harmoniques* : ce sont tous les multiples entiers $n\nu_0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, de la fondamentale.

d'une référence, par exemple le fameux "La 440" qui associe un La 4 à la fréquence de 440 Hz; les fréquences des autres notes en sont déduites en fonction de la taille des intervalles notamment. L'échelle logarithmique s'avère adaptée⁶.

Densité de puissance et nuances. La partition représente simultanément la dynamique temporelle et le contenu fréquentiel. Reste à inclure le détail de l'évolution de la puissance sonore d'une note à l'autre, les nuances. L'indication "p" sous la portée signifie "piano", "doucement" en français. Ensuite, les soufflets sous la portée suggèrent une décroissance de l'intensité sonore sur la durée de la note jusqu'à son extinction. Toutes ces indications peuvent s'interpréter comme l'amplitude instantanée du signal.

En résumé. L'axe horizontal de la portée est l'axe du temps et les durées correspondent à un code graphique. L'axe vertical se lit comme un axe fréquentiel en échelle logarithmique. Le détail de la couleur ou du timbre des notes se résume à l'indication de l'instrument choisi; notons qu'il dépendra en réalité aussi de l'instrumentiste. Les nuances encodent les variations instantanées d'intensité du son. La partition est une représentation riche, interprétable et efficace d'une information temps-fréquence très complète, parfaitement localisée à la fois en temps et en fréquence.

2.2 Temps, fréquence, temps-fréquence ?

De la musique aux mathématiques. Peut-on espérer construire une représentation mathématique des signaux (quelconques) qui rassemble toutes les bonnes propriétés de la partition musicale? La transformée de Fourier d'une fonction $x(t)$ s'exprime comme une intégrale sur \mathbb{R} tout entier. Toute localisation de l'information dans le temps est (au moins en apparence) perdue. Les exponentielles complexes encodent une information essentiellement non-locale. Ce n'est pas gênant tant que l'on parle de signaux stationnaires puisque leurs propriétés et donc leur contenu spectral ne dépendent pas du temps. L'analyse spectrale permet d'identifier le contenu fréquentiel d'un signal et d'en déduire le comportement physique du phénomène observé/mesuré.

Par contre, modifier une seule valeur de la fonction $X(\nu)$ modifiera l'ensemble des valeurs prises par la fonction $x(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet, $X(\nu)$ représente la contribution de la fonction $\exp(j2\pi\nu t)$, dont le support est \mathbb{R} tout entier, au signal $x(t)$. Ce n'est pas un problème pour les signaux stationnaires, par exemple un hautbois jouant perpétuellement le même refrain. Quel ennui! Tout le monde préfère un hautbois jouant des mélodies variées, éventuellement improvisées, amenant un effet de surprise. Si la transformée de Fourier de ce vaste répertoire permettra bien de faire apparaître dans la densité spectrale des pics d'énergie associés aux notes qui ont été jouées, il sera bien difficile de retrouver à quel moment chaque morceau, voire chaque note a été jouée. Cette information est elle-même encodée par l'ensemble des phases (ou arguments) de $X(\nu)$ et par conséquent peu lisible directement. La transformée de Fourier ne suffit pas à l'analyse des signaux instationnaires.

Localisation temporelle et fréquentielle. L'analyse temps-fréquence a pour objectif de produire une représentation mathématique du contenu temps-fréquence d'un signal, à la manière de la partition musicale. Le théorème de Gabor-Heisenberg est une mauvaise

6. Les puissances de 2 jouent ici encore un rôle essentiel, mais c'est un autre sujet.

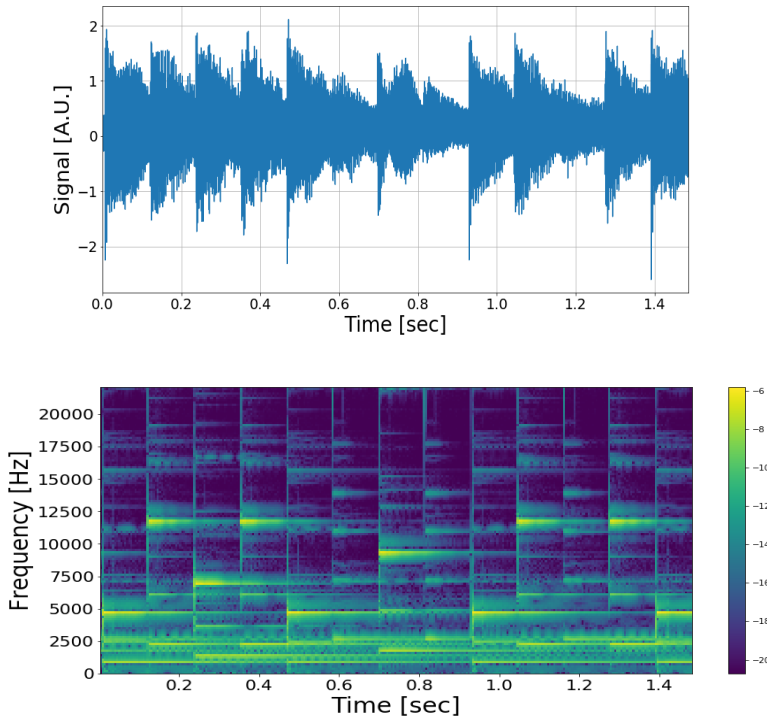


FIGURE 2 – Spectrogramme d'un air de glockenspiel (carillon) : (haut) amplitude du signal enregistré au cours du temps; (bas) spectrogramme du signal : densité d'énergie par unité de temps et de fréquence.

nouvelle. Ce théorème interdit la localisation parfaite d'un signal à la fois en temps et en fréquence. On ne peut pas construire de fonction réduite à une fréquence pure qui serait entendue pendant un temps arbitrairement court. Pourtant la partition musicale semble le permettre, par exemple en indiquant de frapper une timbale très brièvement et sèchement; en théorie du moins. La notion de fréquence instantanée a quelque chose d'intuitif *a priori*. Peut-on espérer la définir proprement ?

Nous sentons bien qu'il serait difficile de donner un sens à une fréquence vue comme le comptage de la répétition d'un phénomène si ce phénomène devait aussi ne se répéter que pendant un temps arbitrairement court, un paradoxe apparaît. Le théorème de Gabor s'énonce ainsi :

$$\Delta t \cdot \Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi}, \quad (8)$$

où Δt et $\Delta \nu$ mesurent respectivement l'encombrement temporel et fréquentiel⁷ d'un signal $x(t)$, toujours dans $L^2(\mathbb{R})$. Le cas d'égalité est atteint par la fonction gaussienne en

7. Plus précisément, on définit Δt et $\Delta \nu$ comme les écarts-types des distributions de probabilité construites à partir de $|x(t)|^2$ et $|X(\nu)|^2$ renormalisées par l'énergie du signal. La démonstration repose essentiellement sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$\exp(-t^2/2\sigma^2)$. Un signal parfaitement localisé en temps au sens où sa puissance instantanée $|x(t)|^2$ serait significativement non nulle pendant une durée $\Delta t \rightarrow 0$ est nécessairement d'encombrement spectral infini et $\Delta \nu \rightarrow \infty$. C'est le cas des phénomènes très brefs comme les percussions (dont il est difficile de décrire la hauteur de note) ou les éclairs qui perturbent tout le spectre radioélectrique. Réciproquement, un signal parfaitement localisé en fréquence est nécessairement de durée infinie et $\Delta t \rightarrow \infty$. C'est le cas des signaux monochromatiques et plus généralement des signaux périodiques. La notion de périodicité stricte est inaccessible au monde physique nécessairement limité à une observation de durée finie. La notion de fréquence instantanée est une chimère. Pourtant, il reste possible de construire une analyse temps-fréquence produisant une représentation temps-fréquence interprétable physiquement de façon univoque, mathématiquement bien fondée et encadrée : le *spectrogramme*.

La figure 2 représente l'enregistrement d'une mélodie jouée au glockenspiel (une sorte de carillon) et son spectrogramme. On reconnaît bien en jaune les zones à forte densité d'énergie temps-fréquence. Le rythme est facilement identifié par les lignes de rupture verticales caractéristiques des attaques du marteau sur les cloches. La hauteur des notes se repère facilement par les lignes jaunes horizontales ; les fréquences sont réparties de façon discrètes, selon la gamme. Remarquons les harmoniques qui apparaissent de façon moins marquées mais bien visibles comme une réplique aux fréquences multiples de la fréquence fondamentale du motif principal.

3 Analyse temps-fréquence

3.1 La transformée de Fourier à court terme

L'analyse temps-fréquence s'appuie sur une idée très naturelle et très simple. Puisque la TF n'est pas localisée en temps du fait de l'intégration sur \mathbb{R} , il suffit d'y introduire une fonction bien localisée en temps, une *fenêtre d'analyse*. Pour une fenêtre notée $w(t)$, telle que $\|w\|_2 = 1$, on définit la *transformée de Fourier à court terme*, dite aussi transformée de Fourier *fenêtrée* par

$$\mathcal{S}_w[x](s, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot w(t-s) e^{-j2\pi \nu t} dt \quad (9)$$

Cette fenêtre d'analyse étant centrée sur l'instant s , l'intégrande prend des valeurs significatives essentiellement dans l'intervalle $[s-\Delta t/2, s+\Delta t/2]$ seulement ; le résultat est une fonction qui dépend de la fréquence ν (c'est une transformée de Fourier) mais aussi conjointement de l'instant s où est localisée la fenêtre $w(t-s)$. Parmi les fenêtres $w(t)$ habituelles, on trouve la fenêtre rectangulaire (indicatrice d'un intervalle de durée finie), les fenêtres de Hamming, Hann, Blackman, etc. Toutes ces fonctions sont unimodales et rapidement décroissantes vers $\pm\infty$, par exemple une arche de fonction sinusoidale, une gaussienne... En pratique, les fenêtres à support compact en temps sont privilégiées.

Le choix de la forme de la fenêtre d'analyse $w(t)$ est surtout guidé par ses propriétés de localisation fréquentielle. La transformée de Fourier $W(\nu)$ de la fenêtre rectangulaire présente un lobe principal très étroit, a priori bien localisé en fréquence : c'est la fonction sinus cardinal (bien connue des opticiens, cf. diffraction par une fente d'Young). Par contre, elle présente de nombreux lobes secondaires qui risquent de parasiter l'analyse. On choisira plutôt une fenêtre présentant un lobe principal légèrement élargi mais associé à des lobes d'amplitude très faible décroissant très rapidement lorsque $\nu \rightarrow \pm\infty$. Finalement, la

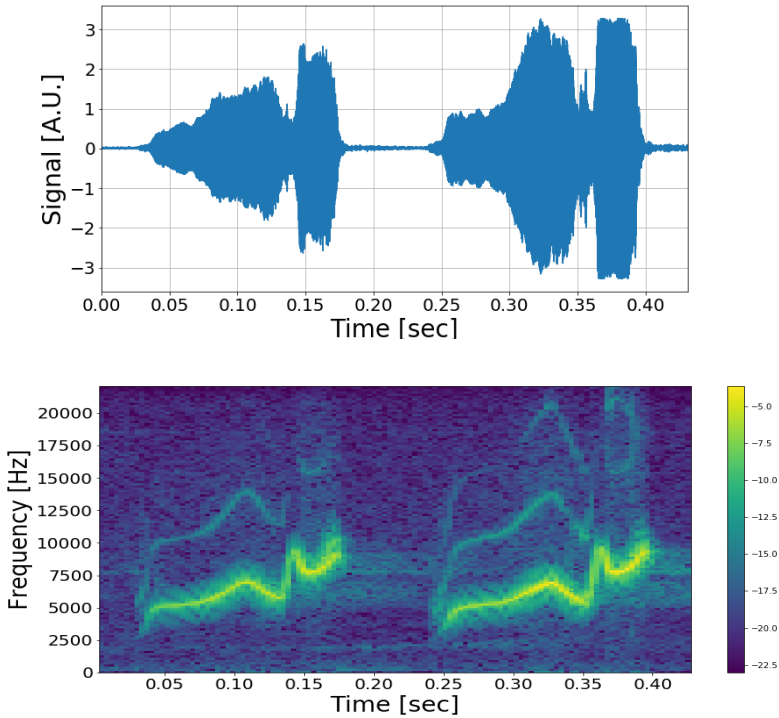


FIGURE 3 – Encodage de l'information temps-fréquence du chant ("cui-cui") d'un oiseau par un spectrogramme : (haut) amplitude du signal enregistré au cours du temps; (bas) spectrogramme du signal : densité d'énergie par unité de temps et de fréquence.

fenêtre optimale est en général le résultat d'un bon compromis temps-fréquence, si possible proche du cas d'égalité dans l'inégalité de Gabor (8).

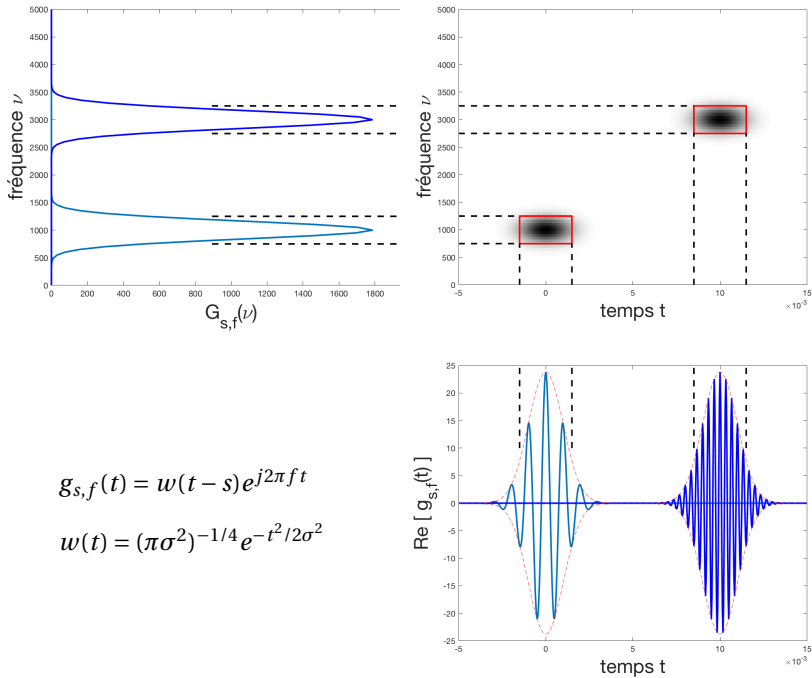
3.2 Atomes temps-fréquence et spectrogramme

Au-delà d'une idée simple et naturelle, la TF à court terme s'avère être un bel objet d'analyse fonctionnelle avec de bonnes propriétés [7]. Elle est notamment associée à la famille des *atomes temps-fréquence* $\{g_{s,\nu} = w(t-s)e^{j2\pi\nu t}, (s,\nu) \in \mathbb{R}^2\}$ qui permettent de sonder le plan temps-fréquence (\mathbb{R}^2) à la résolution $\Delta t \Delta \nu$ associée à la fenêtre $w(t) \leftrightarrow W(\nu)$ choisie, voir fig. 4. On peut alors réécrire la définition (9) comme un produit scalaire :

$$\mathcal{S}_w[x](s,\nu) = \langle x, g_{s,\nu} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot w(t-s) e^{-j2\pi\nu t} dt. \quad (10)$$

L'égalité ci-dessous assure la conservation de l'énergie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{S}_w[x](s,\nu)|^2 ds d\nu. \quad (11)$$



$$g_{s,f}(t) = w(t - s)e^{j2\pi ft}$$

$$w(t) = (\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-t^2/2\sigma^2}$$

FIGURE 4 – Exemples d’atomes temps-fréquence pour deux couples instant-fréquence (s_1, f_1) et (s_2, f_2) associés à $g_{s,f}(t)$ dans le domaine temporel, $G_{s,f}(\nu)$ dans le domaine fréquentiel, et représentation de leurs étendues dans le plan temps-fréquence. Les rectangles rouges de côtés $(\Delta t, \Delta \nu)$ sont appelés *boîtes de Gabor*.

Par conséquent, on peut considérer $|\mathcal{S}_w[x](t, \nu)|^2 dsd\nu$ comme la quantité d’énergie élémentaire portée par le signal dans l’élément temps-fréquence $[s, s+ds] \times [\nu, \nu+d\nu]$. Ce résultat garantit l’interprétabilité univoque d’un outil d’analyse plus souple que la transformée de Fourier, le *spectrogramme* d’un signal, c’est-à-dire sa densité d’énergie temps-fréquence $|\mathcal{S}_w[x](s, \nu)|^2$. De plus, on peut montrer analytiquement que, pour des modulations de fréquence simples, le maximum de cette densité est bien localisé sur la “fréquence locale” attendue, la dérivée de la phase. Par exemple, si $x(t) \propto \exp(j\varphi(t))$ avec $\varphi(t) = \pi at^2$, le spectrogramme fera apparaître une ligne de maxima autour de la droite d’équation $\nu(t) = \varphi'(t)/2\pi = at$ (ce signal est appelé *chirp linéaire*). La notion intuitive de “fréquence instantanée” prend ainsi un sens bien défini. Si la représentation fréquentielle est utile pour identifier les fréquences caractéristiques d’un signal stationnaire, la TF à court terme donne accès à une représentation temps-fréquence plus lisible, en particulier grâce à la redondance de l’image (2D) produite à partir du signal (1D).

La figure 3 représente l’enregistrement du chant “cui-cui” d’un oiseau ainsi que son spectrogramme. On reconnaît bien en jaune les zones à forte densité d’énergie temps-fréquence caractéristiques d’un son qui part du grave pour fluctuer vers l’aigu, répété 2 fois : “cu-i / cu-i” (sic). Remarquons encore une fois les harmoniques qui apparaissent de façon moins marquées mais bien visibles comme une réplique aux fréquences double et triple de la fré-

quence fondamentale du motif principal. Le chant de l'oiseau s'approche de celui d'une flute traversière.

De plus, la transformée de Fourier à court-terme est associée à une formule de reconstruction :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_w[x](s, \nu) w(t-s) e^{j2\pi\nu t} ds d\nu. \quad (12)$$

Ce résultat permet d'envisager des procédures de traitement du signal dans le domaine temps-fréquence. La "chirurgie" temps-fréquence du signal est possible. L'ouvrage de référence sur ce sujet est certainement celui de Patrick Flandrin [7].

Les atomes temps-fréquence décrivent le plan temps-fréquence par translation en temps et en fréquence. Il est aussi possible de proposer des familles de fonctions qui recouvrent le plan par translation en temps et dilatation en échelle : les *ondelettes* [5, 10, 9]. Les ondelettes s'avèrent mieux adaptées pour les signaux large bande et ont eu beaucoup de succès en traitement d'image. Elles sont utilisées dans le standard de compression JPEG2000 par exemple. Il existe des théorèmes similaires à ceux que nous venons de décrire pour l'analyse temps-fréquence. On définit alors la notion de *scalogramme*, etc. Encore au-delà des ondelettes (*wavelets* en anglais), les années 1990-2000 ont vu naître tout une ribambelle de nouvelles familles de fonctions appelées *starlets* en référence aux ridgelets, curvelets, bandlets, snakelets... résumées par l'abréviation "*-lets" qui se lit "star-lets" en anglais.

3.3 Ondes gravitationnelles

La première détection d'une onde gravitationnelle par le capteur LIGO en 2016 [1] a fait beaucoup de bruit. Les fréquences mises en jeu appartiennent d'ailleurs au domaine audible si l'on envoie le signal sur un haut-parleur, même si les phénomènes physiques n'ont rien à voir. La figure 5 est extraite de l'article [1] publié en 2016 pour annoncer cette fantastique découverte. Le lecteur reconnaîtra en bas les représentations temps-fréquence des signaux mesurés à Hanford et Livingston. Il s'agit en réalité d'une version légèrement modifiée de la transformée de Fourier fenêtrée présentée plus haut qui permet de visiter une large gamme de fréquences avec une résolution fréquentielle adaptée au signal étudié. On y reconnaît clairement (surtout sur le signal de Hanford) un chirp hyperbolique, c'est-à-dire une évolution explosive de la fréquence du signal de 50 à 500 Hz en 0,1 seconde environ. Cette observation est caractéristique de la coalescence d'une binaire de trous noirs : elle était prédite par la théorie astrophysique.

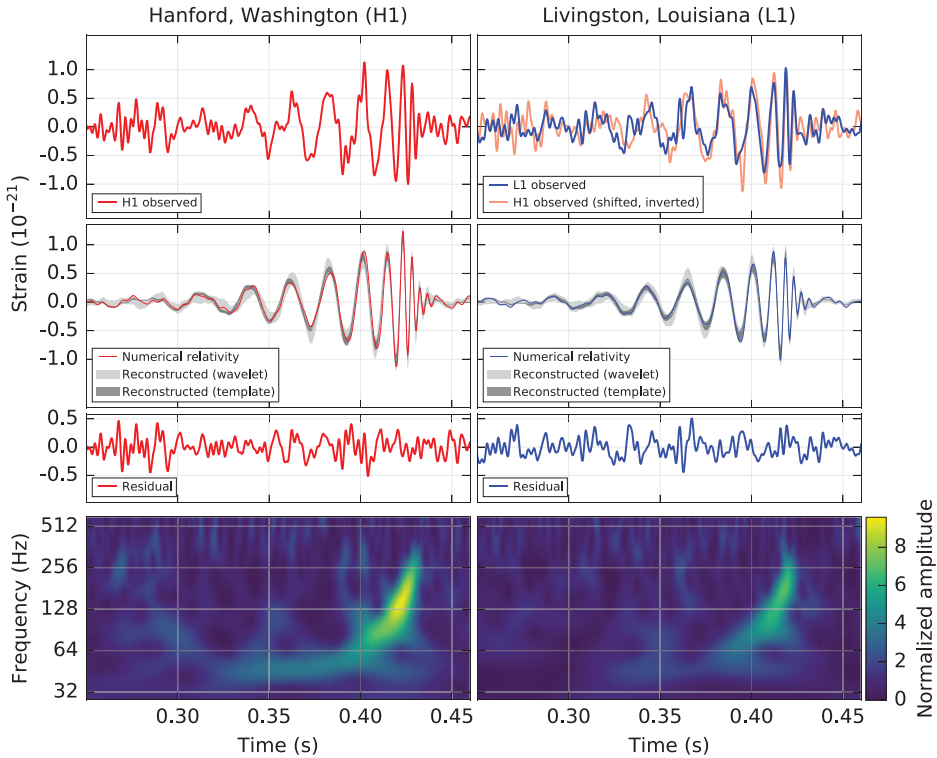
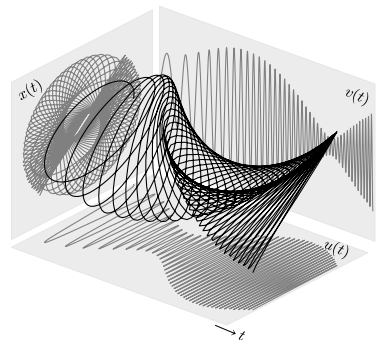


FIGURE 5 – Signaux et représentations temps-fréquence mesurés par LIGO lors du passage de la première onde gravitationnelle jamais détectée.

4 Analyse temps-fréquence des signaux bivariés

Toutes les notions présentées jusqu'ici sont bien établies depuis les années 1980-90 et font désormais partie de la culture générale en traitement du signal. De nombreux prolongements ont été étudiés et proposés dans la littérature depuis. Rappelons par exemple qu'Yves Meyer, mathématicien français, a obtenu le prestigieux Prix Abel en 2017 "pour son rôle majeur dans le développement de la théorie mathématique des ondelettes" dans les années 1980. Cette dernière partie a pour objectif de présenter brièvement nos travaux en cours sur la construction d'une analyse temps-fréquence pour les signaux bivariés, autrement dit à valeurs dans \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{C}) et non dans \mathbb{R} . Dans ce



cas, le signal est de nature vectorielle : la vitesse (horizontale) du vent mesurée par un anémomètre, une onde sismique transverse mesurée par un accéléromètre, un champ radio-électrique polarisé (radar)... La figure ci-dessus représente la trajectoire de l'extrémité d'un

vecteur $\mathbf{x}(t) = (u(t), v(t))$ au cours du temps ; les plans latéraux représentent ses deux composantes.

4.1 Signaux bivariés

Bien sûr, il est toujours possible d'imaginer travailler en algèbre linéaire avec un vecteur à deux composantes $\mathbf{x}(t) = (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$, les opérateurs linéaires étant représentés par des matrices 2×2 . L'analyse des auto- et inter-corrélations, des spectres et inter-spectres fourniront des informations dans le domaine fréquentiel. Pourtant une telle approche ne permet pas de produire l'équivalent du spectrogramme défini plus haut pour les signaux univariés. L'un des objectifs de nos travaux est de définir un spectrogramme justifié mathématiquement, portant une information sur la géométrie (l'état de polarisation) du signal bivariable, interprétable de façon univoque, la correspondance entre fréquences mathématique et physique étant garantie. Plus généralement, nous souhaitons construire une approche complète et algébrique du traitement des signaux bivariés, de leur analyse à leur traitement (filtrage linéaire par exemple).

L'approche proposée décrit les signaux bivariés par un signal à valeurs complexes $x(t) = u(t) + i v(t) \in \mathbb{C}$. Ces signaux bidimensionnels sont ensuite plongés dans un espace de dimension deux fois plus grande, le corps des *quaternions* \mathbb{H} . Ce plongement (plongeon ?;-) dans un espace de dimension plus grande joue un rôle similaire à celui des signaux à valeurs réelles dans \mathbb{C} : il permettra la définition d'un *plongement quaternionique* ayant une forme polaire faisant apparaître amplitude, phase temporelle et état de polarisation instantané du signal.

Par la suite, nous ferons souvent référence aux ondes vectorielles telles qu'une onde plane électromagnétique décrite par ses deux composantes dans le plan d'onde, $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ par exemple. Cet exemple est particulièrement utile car la notion de *polarisation* s'avère très pertinente pour décrire la géométrie d'un signal bivariable $x(t)$. La notion de polarisation permet de décrire géométriquement l'évolution d'un signal bivariable en faisant référence à la trajectoire décrite au cours du temps par l'extrémité du vecteur considéré, par exemple $\mathbf{E}(t)$. Sur l'exemple de l'introduction, on observe clairement une trajectoire quasi-circulaire au début (on parlera de polarisation circulaire) et une évolution progressive vers une trajectoire rectiligne à la fin (on parlera de polarisation rectiligne ou linéaire).

4.2 Polarisation et sphère de Poincaré

États de polarisation. La polarisation elliptique, qui inclut comme cas extrêmes les polarisations circulaires et linéaires, joue un rôle central dans la définition d'un état de polarisation instantané du signal. La figure 6a représente la paramétrisation de la polarisation instantanée d'un signal bivariable selon un état de polarisation elliptique. Deux paramètres caractérisent cette ellipse : θ est l'orientation de l'axe principal de l'ellipse, χ est l'ouverture angulaire du triangle rectangle défini par les axes de l'ellipse ; $\text{sign}(\chi)$ indique le sens de parcours de l'ellipse. Remarquons en passant que, à l'instant t , le signal bivariable suit une évolution tangente à cette ellipse au point de position angulaire φ . Par exemple, $\chi = 0$ correspond à une polarisation rectiligne dans la direction θ tandis que $\chi = \pm\pi/4$ correspond à une polarisation circulaire gauche ou droite selon le signe de χ . La valeur du grand axe est proportionnelle à l'amplitude du signal.

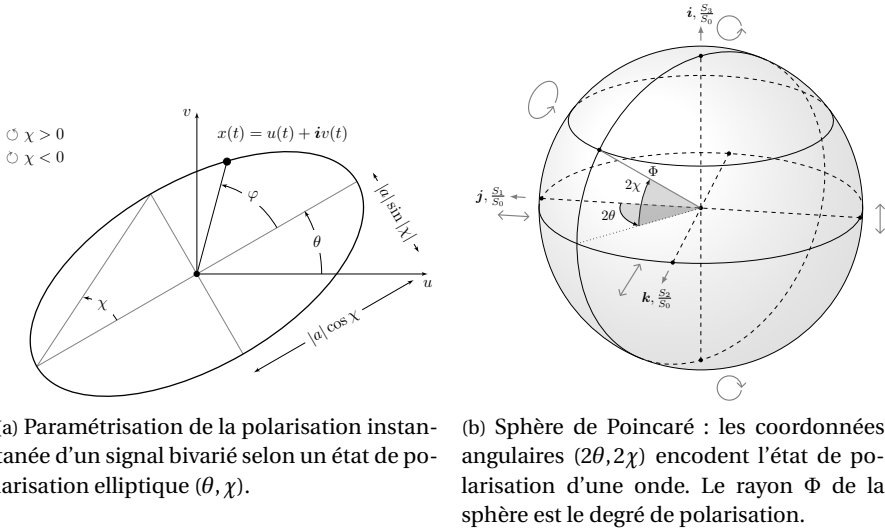


FIGURE 6

Sphère de Poincaré Les opticiens et les radaristes ont l'habitude de décrire l'état de polarisation d'une onde en utilisant la sphère de Poincaré, voir fig. 6b. Un état de polarisation est résumé par trois paramètres (Φ, θ, χ) correspondant au degré de polarisation Φ de l'onde et aux paramètres d'un état de polarisation elliptique (θ, χ) . Par exemple, les points de l'équateur où $\chi = 0$ correspondent à une polarisation rectiligne dans la direction θ tandis que les pôles où $\chi = \pm\pi/4 \Leftrightarrow 2\chi = \pm\pi/2$ correspondent à une polarisation circulaire. Un état de polarisation est associé à un point sur la sphère de Poincaré et l'évolution de cet état au cours du temps correspond à une trajectoire sur la sphère. On effleure ici la notion de phase géométrique.

4.3 Transformée de Fourier quaternionique

Pour représenter en même temps le contenu temps-fréquence d'un signal bivarié $x(t)$ et sa géométrie, donc l'évolution de son état de polarisation, nous allons avoir besoin d'une nouvelle version adaptée de la transformée de Fourier, la transformée de Fourier quaternionique. La raison pour laquelle nous allons faire appel aux quaternions, des objets de dimension 4, est similaire à la raison pour laquelle nous avons plongé les signaux réels ($\in \mathbb{R}$) dans les signaux à valeurs complexes ($\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$). Les fonctions exponentielles complexes s'écrivent sous forme polaire $ae^{j\varphi}$ en fonction d'un module, qui encode leur amplitude, et d'une phase, dont la dérivée est la fréquence. La phase φ d'un signal réel $x(t)$ est l'argument du signal analytique (complexe) associé $x_+(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$. Pour les signaux bivariés, nous avons besoin d'une forme polaire plus riche qui encode aussi l'état de polarisation instantané. Les quaternions, dont l'ensemble est noté \mathbb{H} ci-dessous permettent précisément d'obtenir une telle forme polaire en adjoignant à la phase usuelle φ , deux autres arguments χ et θ associés à l'état de polarisation décrit plus haut.

Les quaternions, en bref.

Les quaternions ont été imaginés par Sir William Rowan Hamilton en 1843. Hamilton avait compris les liens qui unissent les nombres complexes à la géométrie plane et chercha un équivalent pour la géométrie tri-dimensionnelle.

De même qu'un signal réel est classiquement associé à un signal complexe, il est possible de plonger un signal complexe dans un espace de plus grande dimension, le corps des quaternions \mathbb{H} . Il s'agit d'un corps à 4 dimensions de base canonique $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, où $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont des imaginaires purs $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$. Ils sont reliés par

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i}, \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1. \quad (13)$$

Le produit est non commutatif, *i.e.* pour $p, q \in \mathbb{H}$, $pq \neq qp$ en général. Tout quaternion q s'écrit sous forme cartésienne

$$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad (14)$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Le conjugué de q est $\bar{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$. Son module est $|q|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. On introduit aussi la conjugaison d'axe \mathbf{j} :

$$q^{*j} \triangleq a + b\mathbf{i} - c\mathbf{j} + d\mathbf{k}. \quad (15)$$

Les quaternions englobent les nombres complexes, ce qui permet d'extraire des *sous-corps complexes* de \mathbb{H} isomorphes à \mathbb{C} , par exemple $\mathbb{C}_i = \text{vect}\{1, \mathbf{i}\} = \mathbb{R} + \mathbf{i}\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}_j = \text{vect}\{1, \mathbf{j}\}$. Les quaternions peuvent aussi s'écrire sous forme polaire. Notons en particulier la forme polaire d'Euler [3]

$$q = |q| \exp(\mathbf{i}\theta) \exp(-\mathbf{k}\chi) \exp(\mathbf{j}\varphi), \quad (16)$$

pour $q \in \mathbb{H}$ et $(\theta, \chi, \varphi) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/4, \pi/4] \times [-\pi, \pi]$. La décomposition explicite est donnée dans [3, 6]. Pour plus de détails sur les quaternions, on se référera à [4].

Définition de la transformée de Fourier quaternionique.

La transformée de Fourier quaternionique (TFQ) d'un signal $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ est définie par

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-\mathbf{j}2\pi\nu t) dt \in \mathbb{H} \quad (17)$$

et son inverse par

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \exp(\mathbf{j}2\pi\nu t) d\nu. \quad (18)$$

De même que la TF d'un signal réel est à valeurs complexes, la TFQ d'un signal complexe est à valeurs quaternioniques. La TFQ diffère de la TF classique en deux points. Par convention, l'exponentielle est positionnée à droite du signal à analyser. Ce choix est important car le produit dans \mathbb{H} est non commutatif. Les axes \mathbf{i} et \mathbf{j} prennent des sens très différents : l'axe \mathbf{i} encode une information géométrique (la direction de la composante $\nu(t)$ d'un signal $x(t) = u(t) + \mathbf{i}\nu(t) \in \mathbb{C}_i$) tandis que l'axe \mathbf{j} encode une information de phase temporelle (en argument de $\exp(\mathbf{j}2\pi\nu t)$). Cette définition de la TFQ hérite des propriétés de la TF usuelle [6], à la différence des autres définitions de TFQ dans la littérature. Un théorème de Parseval-Plancherel généralisé montre que la TFQ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$. Un théorème de Gabor-Heisenberg peut également être formulé, démontrant que la TFQ obéit aux

mêmes limitations de localisation temps-fréquence que la TF usuelle. Enfin, notons qu’une version discrète peut aussi être proprement définie : le calcul de la TFQ est rapide puisqu’il se résume au calcul de deux FFT (transformées de Fourier rapides).

Les signaux bivariés $(u(t), v(t))$ peuvent être vus comme des signaux complexes $x(t) = u(t) + \mathbf{i}v(t) \in \mathbb{C}_i$. Dans ce cas, la TFQ présente deux propriétés supplémentaires importantes. À tout signal complexe $x(t) \in \mathbb{C}_i$ est associée une représentation spectrale $X(\nu) \in \mathbb{H}$. Celle-ci vérifie de plus une symétrie \mathbf{i} -hermitienne⁸ :

$$X(-\nu) = -\mathbf{i}X(\nu)\mathbf{i} \tag{19}$$

Ainsi, les fréquences négatives ne portent aucune information complémentaire aux fréquences positives dans cette représentation. Nous allons pouvoir établir une correspondance univoque entre fréquence mathématique et fréquence physique.

4.4 Plongement quaternionique

Definition

La symétrie \mathbf{i} -hermitienne (19) de la TFQ des signaux complexes montre que le spectre des fréquences négatives n’apporte pas d’information supplémentaire par rapport au spectre des fréquences positives. Dès lors il est possible de construire un analogue bivarié du signal analytique, voir paragraphe 1.4, par suppression des fréquences négatives. On appelle ce nouvel objet le *plongement quaternionique d’un signal complexe*, défini explicitement par

$$x_+(t) = 2 \cdot \int_0^{+\infty} X(\nu) \exp(\mathbf{j}2\pi\nu t) \, d\nu, \tag{20}$$

où le facteur 2 traduit le repliement des fréquences négatives sur les fréquences positives. Le plongement quaternionique $x_+(t)$ est par construction à valeurs sur \mathbb{H} . Ceci va permettre d’extraire directement des attributs physiques instantanés pertinents. Notons qu’une construction similaire de $x_+(t)$ est décrite dans [8], mais diffère dans l’interprétation physique qui suit.

Attributs physiques instantanés

La forme polaire d’Euler (16) permet d’interpréter $x_+(t)$ sous la forme :

$$x_+(t) = a(t)e^{\mathbf{i}\theta(t)}e^{-\mathbf{k}\chi(t)}e^{\mathbf{j}\varphi(t)} \tag{21}$$

avec $a(t) \geq 0$, $\theta(t) \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\chi(t) \in [-\pi/4, \pi/4]$ et $\varphi(t) \in [-\pi, \pi]$. Cette décomposition est unique. On retrouve le signal original $x(t)$ par projection de $x_+(t)$ sur \mathbb{C}_i :

$$x(t) = a(t) [\cos\varphi(t) \cos\chi(t) + \mathbf{i} \sin\varphi(t) \sin\chi(t)]. \tag{22}$$

L’équation (22) est un analogue bivarié direct du modèle univarié $x(t) = a(t)\cos[\varphi(t)]$. Le plongement quaternionique associe un *quadruplet canonique* $[a(t), \theta(t), \chi(t), \varphi(t)]$ à tout signal complexe. Son interprétation physique peut se faire sous des conditions usuelles [11] adaptées au cas bivarié *i.e.* dès lors que $\varphi(t)$ varie bien plus rapidement que le triplet $[a(t), \theta(t), \chi(t)]$ et que $x(t)$ est localement monochromatique.

8. Ces propriétés sont détaillées dans [6].

Les quantités $a(t)$, $\varphi(t)$ sont standards : il s'agit respectivement de l'amplitude instantanée et de la phase instantanée du signal. Les autres quantités sont spécifiques au cas bivarié : il s'agit de l'orientation instantanée $\theta(t)$ et de l'ellipticité instantanée $\chi(t)$. Ensemble, elle montrent qu'un signal bivarié à bande étroite a une trajectoire localement elliptique.

La figure 6a montre la trajectoire elliptique tracée par le modèle (22) avec $a(t) = a$, $\theta(t) = \theta$ et $\chi(t) = \chi$ constants. La valeur de a contrôle la taille de l'ellipse. Son orientation est donnée par θ , tandis que sa forme est contrôlée par χ . Pour $\chi = 0$, l'ellipse devient un segment, alors qu'à l'extrême pour $\chi = \pm\pi/4$ on obtient un cercle. La phase $\varphi(t)$ donne la position instantanée de $x(t)$ dans l'ellipse, et enfin le signe de χ donne le sens de rotation. La description en ellipse instantanée peut être vue comme une description de l'état de polarisation instantané du signal bivarié, par analogie avec la polarisation des ondes électromagnétiques. L'extraction de paramètres physiques instantanés à partir du plongement quaternionique d'un signal complexe se heurte aux mêmes limitations que dans le cas du signal analytique. L'approche ne fonctionne plus dès lors que le signal est multicomposante, ce qui motive l'introduction de la transformée de Fourier à court terme quaternionique.

4.5 Spectrogramme de polarisation

Soit $w(t)$ une fenêtre réelle, symétrique et normalisée $\|w\|_2 = 1$. La transformée de Fourier à court terme quaternionique (TFCT-Q) est définie par [6]

$$\mathcal{S}_w x(s, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) w(t-s) e^{-j2\pi\nu t} dt. \quad (23)$$

La TFCT-Q est caractérisée par un théorème fondamental que nous avons démontré dans [6].

Théorème 1 (inversion, conservation). Soit $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$. La formule de reconstruction donne

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \iint \mathcal{S}_w x(s, \nu) w(t-s) e^{j2\pi\nu t} ds d\nu. \quad (24)$$

Deux quantités sont conservées : l'énergie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \iint |\mathcal{S}_w x(s, \nu)|^2 ds d\nu, \quad (25)$$

et les propriétés de polarisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t)^* j dt = \frac{1}{2\pi} \iint \mathcal{S}_w x(s, \nu) \mathcal{S}_w x(s, \nu)^* j ds d\nu. \quad (26)$$

Non seulement ce théorème étend les résultats usuels (24) et (25) à la TFCT-Q, mais il montre aussi la conservation (26) d'une quantité liée aux propriétés géométriques (ou de polarisation) du signal bivarié. La quantité $\mathcal{S}_w x(t, \nu) \mathcal{S}_w x(t, \nu)^* j$ est appelée *spectrogramme de polarisation* de x . De façon remarquable, cette quantité quaternionique s'exprime directement en fonction des *paramètres de Stokes*, utilisés par les physiciens dans la description de l'état de polarisation des ondes électromagnétiques [2]. Plus précisément,

$$\mathcal{S}_w x(t, \nu) \mathcal{S}_w x(t, \nu)^* j = S_1(t, \nu) + \mathbf{i} S_2(t, \nu) - \mathbf{k} S_3(t, \nu), \quad (27)$$

où S_1, S_2, S_3 sont des paramètres de Stokes *temps-fréquence* et $S_0 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$: S_0 correspond au spectrogramme usuel de x . Ces paramètres décrivent de manière équivalente l'information contenue par le triplet (a, θ, χ) .

Deux représentations temps-fréquence-polarisation équivalentes et donnant lieu à une interprétation mathématiquement fondée et physiquement significatives sont ainsi possibles. La première consiste en la densité d'énergie temps-fréquence $S_0(t, \nu)$ et les valeurs de $\theta(t, \nu)$ et $\chi(t, \nu)$. La deuxième représentation, moins facile à interpréter et non illustrée ici, consiste à représenter directement $S_1(u, \xi), S_2(u, \xi), S_3(u, \xi)$ obtenus via (27). Dans tous les cas, il faut considérer simultanément trois figures, voir figure 7. Par concision, toutes deux seront appelées spectrogramme de polarisation de $x(t)$. Ainsi, nous disposons d'une description complète du contenu temps-fréquence-polarisation d'un signal bivarié.

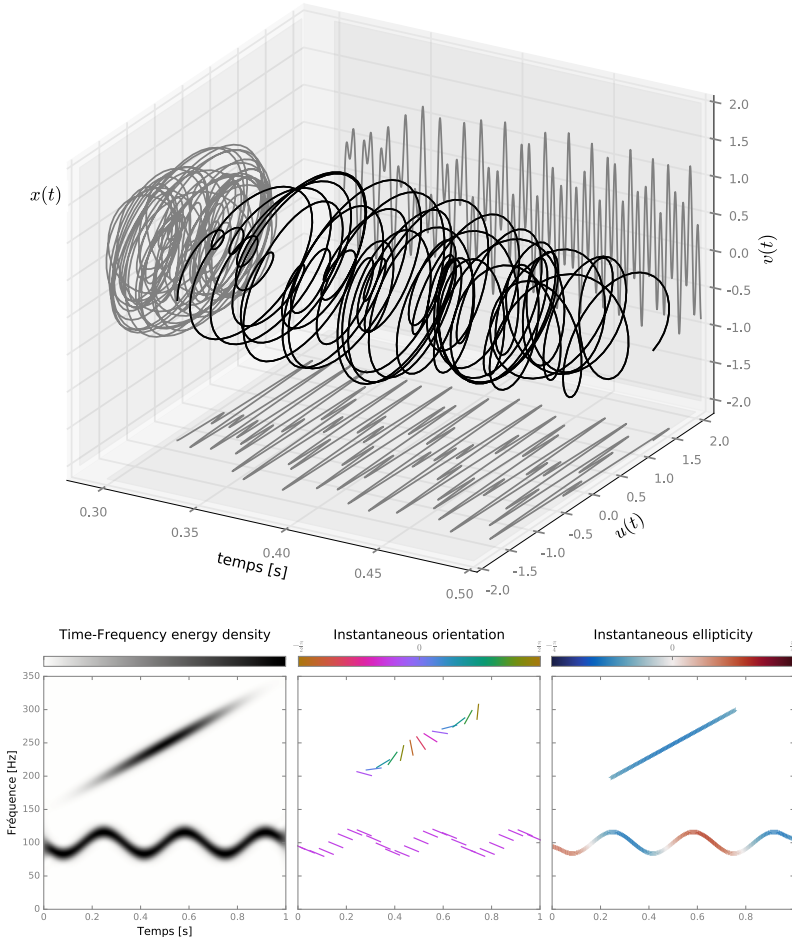


FIGURE 7 – Contenu temps-fréquence d'un signal bivarié $x(t) = u(t) + i v(t)$: (haut) amplitude du signal enregistré au cours du temps ; (bas) spectrogramme de polarisation du signal : densité d'énergie par unité de temps et de fréquence et évolution de l'état de polarisation $(\theta(t, \nu), \chi(t, \nu))$ temps-fréquence.

4.6 Exemple

Pour illustrer la pertinence de l'outil, nous considérons un signal synthétique $x(t)$ à deux composantes : un chirp linéaire d'ellipticité constante et d'orientation variable et un signal modulé en fréquence et en ellipticité dont l'orientation est constante. Le signal est défini pour $t \in [0, 1]$ par $N = 1024$ échantillons. La TFCT-Q est calculée en utilisant une fenêtre de Hanning de longueur 101 échantillons de façon à avoir une bonne résolution temps-fréquence. La figure 7 (haut) présente un extrait de ce signal $x(t)$.

La figure 7 (bas) montre les trois figures du spectrogramme de polarisation de $x(t)$: $S_0(t, \nu)$ et les valeurs de $\theta(t, \nu)$ et $\chi(t, \nu)$ extraites des *ridges* (lignes de maxima) de la TFCT-Q, *i.e.* les maxima locaux de $S_0(t, \nu)$. Les figures 7 (bas) donnent respectivement la densité d'énergie temps-fréquence $S_0(t, \nu)$, ainsi que les valeurs de l'orientation $\theta(t, \nu)$ et de l'ellipticité $\chi(t, \nu)$ le long des lignes de maxima de $S_0(t, \nu)$. On identifie alors de façon très lisible les deux composantes dans le plan temps-fréquence et leurs propriétés géométriques. Sur la figure en bas à droite, nous pouvons lire directement l'évolution instantanée de l'ellipticité de chaque composante. Par exemple, l'alternance des couleurs sur la composante modulée montre une oscillation basse-fréquence entre polarisations circulaires droite et gauche. De façon similaire, nous observons que la composante de chirp linéaire a une polarisation elliptique avec $\chi \simeq -\pi/8$; l'alternance des couleurs sur la figure centrale indique que l'orientation θ de l'ellipse tourne au cours du temps.

5 Conclusion

Nous avons mis en lumière une partie du chemin parcouru quant à l'analyse du contenu fréquentiel des signaux depuis la construction de la transformée de Fourier. Nous avons notamment présenté la notion de spectrogramme, un outil bien établi mathématiquement et interprétable physiquement, analogue mathématique de la partition musicale. Les applications sont nombreuses pour l'analyse des chants d'animaux marins, de la parole, pour la séparation de sources (locuteurs ou instruments dans le problème de la cocktail party), des signaux sismiques en géologie, ou encore pour la détection et l'identification des ondes gravitationnelles. L'analyse temps-fréquence est très liée à des questions d'analyse fonctionnelle, et nous avons évoqué la famille des *starlets*, dont les ondelettes, qui ont enrichi la famille des atomes temps-fréquence. Par exemple, le format de compression JPEG2000 utilise une transformée en ondelettes.

Au-delà des outils déjà connus, la dernière partie a permis d'introduire des méthodes et outils en cours de gestation au cœur de nos travaux de recherche actuels sur l'analyse et le traitement des signaux bivariés. Ces signaux apparaissent notamment dans les ondes vectorielles, électromagnétiques ou élastiques (sismiques). Nous proposons une méthode très générale basée sur la transformée de Fourier quaternionique permettant de définir une analyse temps-fréquence-géométrie des signaux bivariés. La généralisation de cette approche se fait grâce à la transformée de Fourier quaternionique à court terme, ce qui conduit à la définition du spectrogramme de polarisation d'un signal bivarié. La validité de l'approche est assurée par des théorèmes qui garantissent par exemple l'existence d'une formule de reconstruction ainsi que la conservation des propriétés énergétiques et géométriques. Dans le même cadre, nous pouvons aussi écrire une analyse spectrale des signaux aléatoires et une théorie du filtrage linéaire élégantes qui rendent le traitement des signaux bivariés plus naturel et interprétable qu'une approche s'appuyant simplement sur l'algèbre

linéaire classique. Une implémentation numérique des outils proposés est mise à disposition grâce à une toolbox Python⁹. Ces nouveaux outils ouvrent de nombreuses perspectives telles que l'identification et la séparation de sources en traitement du signal bivarié. Parmi elles, les ondes gravitationnelles, qui sont elles aussi polarisées.

Bibliographie

- [1] Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116(6), 2016.
- [2] Max Born and Emil Wolf. *Principles of optics*. CUP Archive, 2000.
- [3] Thomas Bulow and Gerald Sommer. Hypercomplex signals-a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(11) :2844–2852, 2001.
- [4] John Horton Conway and Derek A Smith. *On quaternions and octonions : their geometry, arithmetic, and symmetry*. AK Peters, 2003.
- [5] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [6] Julien Flamant, Nicolas Le Bihan, and Pierre Chainais. Time–frequency analysis of bivariate signals. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2017.
- [7] P. Flandrin. *Temps-Fréquence (2ème éd., revue et corrigée)*. Hermès, Paris, 1998.
- [8] Nicolas Le Bihan, Stephen J Sangwine, and Todd A Ell. Instantaneous frequency and amplitude of orthocomplex modulated signals based on quaternion fourier transform. *Signal Processing*, 94 :308–318, 2014.
- [9] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing - The sparse way*. Academic Press - 3rd ed., 2009. with contrib. of G. Peyré.
- [10] S.G. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [11] Bernard Picinbono. On instantaneous amplitude and phase of signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(3) :552–560, 1997.

9. BiSPy toolbox, <https://github.com/jflamant/bispy>

Comptes rendus de stages

■ **Transmission et traitement optique de l'information,**

à l'IMT Atlantique, Brest, le 15 avril 2018

Nous sommes sept stagiaires pour cette journée organisée par Bruno Fracasso. Nous sommes tous physiciens, majoritairement de filière PC.

Après une rapide présentation de l'école et de l'organisation des enseignements à l'IMT, M. Fracasso nous parle de communication par fibres optiques. Nous avons apprécié son approche historique et concrète, avec beaucoup de grandeurs chiffrées actuelles, utiles pour enrichir nos cours sur les signaux, la réfraction, la dispersion.

La deuxième partie de la matinée est consacrée à la diffraction et au filtrage spatial. Après une rapide présentation théorique, direction le labo, où un jeune ingénieur nous montre une expérience de diffraction dynamique par une cellule à cristaux liquides.

En début d'après midi, Kévin Heggarty nous explique la fabrication de figures de diffraction par transformée de Fourier inverse : il s'agit de déterminer l'objet diffractant de façon à afficher une figure de diffraction imposée. L'IMT dispose des moyens de calcul et de fabrication, et travaille avec de nombreux industriels sur cette thématique. Cela est l'occasion pour nous de voir faire par des professionnels l'expérience de filtrage spatial que nous devons présenter aux étudiants en filière PC. Nous repartons chacun avec un échantillon d'objets diffractants étonnants !

Au labo, Marie-Laure Moulinard nous présente un banc expérimental de communication par fibre optique à 2,5 Gbit/s. Les appareils sont imposants. Nous découvrons le fameux diagramme de d'œil, permettant de visualiser et de quantifier la qualité de la transmission. Les effets de dispersion et le multiplexage sont visibles sur un analyseur de spectre.

Pour terminer, nous simulons cette transmission optique avec un logiciel et pouvons retrouver les allures des spectres et du diagramme de l'œil.

En conclusion, cette journée dense, au programme très cohérent, a été parfaitement organisée et très enrichissante. Le contenu est utile aux enseignants de toutes les filières.

À reconduire !

Maxime Bonis

■ **Recyclage de matériel informatique pour la conception d'instruments à bas coût,**

à l'Institut d'Optique Graduate School, du 2 au 4 mai 2018

L'Institut d'Optique Graduate School organisait du 2 au 4 mai un stage *Recyclage de matériel informatique pour la conception d'instruments à bas coût*.

Nous sommes accueillis mercredi à 9 h, autour d'un café, par François BALEMBOIS, Directeur Général Adjoint à l'Enseignement, Directeur de l'Entrepreneuriat et de l'Innovation.

François BALEMBOIS nous présente l'école et ses trois sites, puis le déroulement du cursus. Enfin, il nous parle plus spécifiquement de la filière innovation entrepreneurs (FIE) en pleine expansion depuis sa création il y a une dizaine d'années. Les étudiants s'y initient en trois ans à la création de produits photoniques et à leur vente ; ils disposent pour cela d'un laboratoire de fabrication permettant de développer leurs produits : c'est le FabLab.

Nous visitons ensuite les salles de TP de l'école (optique et électronique). Les étudiants nous décrivent rapidement le TP (4 h 30) ou le mini-projet sur lequel ils travaillent.

En fin de matinée, nous rejoignons le 503, c'est l'ancien bâtiment de l'Institut d'Optique, consacré maintenant au FabLab et aux entreprises qui en sont issues. François PIUZZI, Président de la commission *Physique sans frontières* de la Société Française de Physique, visiblement passionné par son sujet, nous initie au concept d'*innovation frugale* : développer des produits par recyclage, dans un souci économique, écologique, mais également pour doter des régions pauvres (exemple d'une centrifugeuse à plasma rudimentaire, mais qui fonctionne sans électricité!).

Pause déjeuner. Pour ne pas perdre de temps des plateaux repas nous sont servis sur place.

Avec l'aide de Mejdî NCIRI, responsable du FabLab, Ambroise de VRIES et François PIUZZI, l'après-midi est consacré au démontage de déchets informatiques : lecteurs de CD-ROM et de DVD, imprimantes, vidéoprojecteurs, pour en extraire moteurs, engrenages, fourches optiques, filtres optiques..., et à leur identification : moteurs pas à pas, DC, brushless. Chacun travaille sur le matériel qui lui est échu et les échanges sont nombreux et constructifs.

Le jeudi est consacré à une visite rapide du FabLab et à la commande des moteurs récupérés la veille, grâce à une carte Arduino et au protocole de communication utilisant le bus I2C. À midi nous nous rendons au CROUS où le repas est pris en charge par l'école, et en fin de journée chaque binôme arrive tant bien que mal, et avec l'aide de nos formateurs, à faire tourner un moteur pas à pas : joie et bonheur!

Le vendredi matin est consacré à la découverte (pour la plupart d'entre nous) du Raspberry Pi, un PC à 40 €, et au pilotage d'une webcam depuis le terminal ; ça fonctionne aussi!

Le stage proprement dit se termine à midi autour d'un buffet, après un débriefing avec François BALEMBOIS et l'ensemble des formateurs. Nous sommes ensuite invités à visiter les projets que les étudiants de la FIE présentent l'après midi sur des stands dans le hall d'entrée de l'IOGS. Les dates du stage ont en effet été choisies pour nous permettre de participer à cette présentation. Les projets sont variés : conception de TP, mesure de gradient d'indice par speckle, jeu d'échec en réalité virtuelle, mesure de la vitesse d'une tornade par effet Doppler, etc. Les idées foisonnent et les étudiants présentent leur travail avec beaucoup d'enthousiasme et de compétence!

Pour conclure, un stage très novateur et très stimulant, à l'évidence très bien préparé, et au cours duquel nos formateurs n'ont ménagé ni leur temps ni leurs efforts, pour aider chacun à son rythme. Malgré les grandes disparités de connaissances initiales des participants,

nous avons tous beaucoup appris et ce stage nous a ouvert des perspectives. Nous avons apprécié également la mixité du public (UPS et UPSTI) qui a permis d'enrichir les échanges. Cerise sur le gâteau, nous repartons chacun avec un Rapsberry Pi3, une carte et un module caméra. Il n'y a plus qu'à appliquer!

Nous repartons aussi avec une image de l'IOGS dynamique, créatrice, offrant une grande diversité de parcours et de centres d'intérêt aux étudiants!

Bravo et merci à l'IOGS et à nos formateurs, compétents et disponibles, pour ce stage qui a fait l'unanimité, et qui devrait être reconduit par l'école.

Hélène Mensch et Marc Strubel

Olivier Cervera 1964–2018

Témoignage de la famille, de collègues et amis



Olivier nous a quittés le 25 février dernier, à l'âge de 53 ans. Il a perdu le combat qu'il menait depuis plus de deux ans avec discrétion et dignité contre sa maladie.

Riche des origines diverses que peut comporter une famille française présente en Algérie depuis le milieu du XIX^e siècle, Olivier naît à Alger le 4 mai 1964 ; il est l'héritier d'une longue tradition pédagogique. Son enfance se déroule en Corse, ressourcée chaque année autour du village de Renno et de la marine de Sagone. En même temps se forment en lui le goût du savoir, l'amour de la musique et le goût des objets, qui lui a fait aimer le piano avec passion.

C'était la prédiction d'une gueradza à l'angle d'une rue d'Alger : « cet enfant-là, que tu attends, il sera le soleil de ta vie ». Il naît blond, surprenant les infirmières par sa tonicité, qui le dresse debout, rubicond, dès qu'elles le soulèvent. Le plaisir intense qu'il a à élaborer constructions ou cabanes, jeux et aventures dans les montagnes corses et provençales,

à grimper les vallons enneigés de Vergio, plonger des rochers à Grigione ou Sagone, illuminer son environnement. Son sens inné de la perfection, son oreille absolue, lui rendent douloureuses les « fausses notes ». De même, l'injustice ou la médiocrité peut l'arc-bouter dans des colères écarlates et trépidantes. Il fait ses études secondaires, puis sa classe préparatoire en mathématiques supérieures puis en classe de spéciale P' au lycée Masséna de Nice avec comme professeur Yves et Catherine Carin en physique, Jean Ferriou et Colette Champel en mathématiques. De cette période chérie de sa vie naissent de solides et fidèles amitiés. En 1984, il entre à l'ENS Fontenay dans l'une des dernières promotions de l'école dont il regretta le déménagement à Lyon (il s'amusait à se définir comme ancien élève d'une école qui n'existe pas). Après l'agrégation (8^e), il commence sa carrière d'enseignant au lycée Chaptal, puis est nommé en spéciale au lycée Schweitzer du Raincy, avant de revenir en 1995 au lycée Masséna auquel il est toujours resté très attaché, en classe de M' puis de MP*.

Tous ceux qui l'ont rencontré, que ce soit comme collègue, au sein de l'UPS, ou dans les jurys de concours, connaissaient son intelligence, la détermination avec laquelle il défendait les causes pour lesquelles il s'engageait. Ses emportements aussi et ses frustrations quand les choses n'avançaient pas assez vite, telle son amertume à voir se déliter la qualité de l'enseignement scientifique dans le secondaire. Tous ceux qui ont eu la chance de bien le connaître savaient sa délicatesse, sa sensibilité, son extrême fidélité à ses amis et à ses idées, sa générosité, la cohérence, l'originalité et la pertinence de sa pensée.

Partout où il est passé il a agi pour le bien collectif : rénovation des laboratoires au lycée Albert Schweitzer puis de l'ensemble du pôle physique-chimie et de l'internat au lycée Masséna, au prix d'une lutte difficile avec le conseil régional. C'était un ardent défenseur des classes préparatoires et des sciences, il participa activement à leur défense, notamment au sein de l'UPS. Au lycée Masséna, il fut aussi un membre vigilant du conseil d'administration, fustigeant la diminution du nombre d'heures de sciences, la dégradation des conditions de travail et se dressant sans cesse contre les frilosités et les incohérences de l'administration. Son implication allait parfois jusqu'au dévouement, comme en témoigne cette anecdote du début de cette année où il entreprit, à l'occasion de la disparition programmée du service de reprographie, de venir les week-ends faire les photocopies de ses collègues.

Olivier était un excellent pianiste (premier prix du conservatoire de Nice), et un grand connaisseur de musique classique. Sa modestie l'empêchait d'en faire état, mais il tenait infiniment à s'occuper également de l'organisation du traditionnel concert des classes préparatoires du Lycée Masséna, qui est devenu au fil des années un événement majeur de la vie de l'établissement et au-delà. Il n'est pas exagéré de dire que sans lui le lycée Masséna ne serait pas ce qu'il est aujourd'hui.

Sa classe, la MP* (il continuait à l'appeler M' à la fois par goût des traditions et avec une certaine nostalgie), c'est-à-dire ses élèves mais aussi ses collègues directs, et toutes les personnes qui y intervenaient d'une façon ou d'une autre, était pour lui comme une seconde famille. À la fois protecteur et exigeant, il s'y dévouait corps et âme. Il est resté fidèle au poste jusqu'à l'extrême limite physique de ses possibilités.

C'était un passeur de science et il fourmillait d'idées pour développer chez les élèves l'amour de la physique : invention d'expériences ludiques, rencontres avec des chercheurs, visites de laboratoires... Il proposait tous les automnes un week-end à l'observatoire de Calern, et parfois des visites à Paris pour faire découvrir l'École normale supérieure, le Palais de la découverte ou l'École polytechnique. Il était très attaché à la traditionnelle sortie ski dont il

assurait également l'organisation. C'était pour lui un grand bonheur, à cette occasion, de découvrir sous un jour différent ses élèves et de lier avec eux des relations moins formelles. Nombreux sont ceux avec lesquels il était resté en contact bien longtemps après leur passage dans sa classe, et dont il racontait avec joie les réussites professionnelles et personnelles. Il était fréquent qu'en cours d'année un ancien élève frappe inopinément à la porte de la salle et vienne saluer la MP*. Le cours était alors interrompu et l'élève invité à partager ses expériences et ses conseils, à échanger son contact, participant ainsi au lien entre les générations de cette grande famille.

Son courage discret, allié à son don de lui-même, avait le panache des héros de son enfance. Il n'était pas exempt de l'orgueil qui anime les grandes âmes; cet orgueil qui lui faisait rechercher l'exploit pourra plus tard le rendre cassant, et escamoter son extrême bonté et sa fragilité. La déloyauté lui était insupportable.

Les mots ne pourront pas dire l'émotion et la tristesse qui se sont emparées de tous ceux qui l'ont connu, ni le vide que va laisser sa disparition. Olivier nous a profondément marqués. Il a choisi la Corse, terre de son cœur et de ses origines, pour dernière demeure. À son épouse Sylvia, ses deux enfants Marc et Matthieu, et sa famille, nous adressons nos plus sincères condoléances.

Concluons cette évocation avec quelques mots de son frère, de ses amis et de ses élèves.

Il a été mon dieu... mon ami... mon frère... mon héros... mon confident... mon enfant parfois... Courageux à l'excès, faible à l'excès... Le créateur de nos jeux, le bouclier de mes peurs, le partenaire de ma vie de 0 à 25 ans... Les parties de foot jour après jour, les poèmes lus la nuit dans nos lits superposés à Renno, la pêche, la montagne, Ninu, Capitellu, les bagarres, les déchiffrages de sonates, de chaconnes, les rigolades d'histoires de filles, les étoiles filantes une nuit là-haut près du cirque de la solitude (des milliards..!!)... Et puis mon plus grand chagrin d'amour... Nuit après nuit depuis des siècles...

Il faudrait un livre pour écrire toute cette enfance si riche! Notre force... Et notre détresse... Face à ce mur qu'il a pu ériger et sa mort...

Mais je crois en lui en nous pour toujours... D'agneaux, nous sommes devenus des lions... Grâce à lui et nous, ensemble!

Bertrand Cervera

J'ai connu Olivier Cervera lorsque nous nous sommes retrouvés en 1994 colistiers sur une liste « d'opposition » à l'UPS et je le vois encore débarquant sur sa moto pour venir donner un coup de main au local rue de l'École Polytechnique où il était vite devenu le spécialiste des tâches ingrates telles que les comptes rendus d'assemblées générales ou la réparation du fax.

C'est ensuite la confection d'une dizaine de sujets pour le concours Centrale de 1995 à 2005 qui nous a rapprochés et m'a valu quelques escapades niçoises dont je garde précieusement le souvenir, occasion de découvrir aussi l'époux et le père de famille. Curieux de tout, Olivier était bourré d'idées de sujets, parfois inspirées d'observations toutes simples comme les stalactites de glace sur la rambarde de son balcon. On peut voir en photo sur un autre sujet le bras de son fils Marc qui fait tourner un tuyau crénelé en plastique acheté sur un site de gadgets de physique. Cet été, malgré ses soucis de santé, il a encore produit un sujet pour

le concours Mines-Ponts, toujours avec la même patte faite de profondeur, de rigueur et d'originalité.

Pendant plus de vingt ans, Olivier a interrogé à l'oral de physique du concours Mines-Ponts, laissant derrière lui une mine d'exercices originaux qui ont dû laisser perplexes bien des candidats : peut-on nager dans une piscine spatiale ? pourquoi le ventilateur au plafond fait-il s'envoler la feuille de papier posée sur la table ? Il avait une manière très particulière de dire sur un ton parfaitement lisse au candidat « passons à autre chose » dès que celui-ci avait montré ce qu'il attendait, préférant alors le sonder sur une autre facette. Olivier était courageux face à toutes les autorités hiérarchiques comme en témoigne son rapport sur la première session après la mise en place de la réforme du lycée. Tout en rendant hommage aux candidats, il y dénonçait les effets catastrophiques d'un enseignement superficiel au lycée et la vacuité des incantations du programme de cpge au sujet des compétences, en prenant l'image d'un footballeur à qui on expliquerait comment effectuer un drible après lui avoir coupé les deux jambes.

Olivier a beaucoup donné dans de nombreux registres, tout en cherchant toujours à rester dans l'ombre. Profondément lucide face aux défauts de notre système scolaire, Olivier a été toute sa vie un moteur pour tenter d'en améliorer le fonctionnement, guidé par un optimisme sans faille : un combat perdu n'était qu'une page à tourner, la page suivante devenant un nouveau combat à mener.

Stéphane Olivier

Olivier, je l'ai rencontré par hasard, à un stage d'électronique de l'UPS, à Paris. Et ma rencontre avec lui a de très loin été la meilleure chose que m'ait apporté ce stage. Te souviens-tu, Olivier, comme ils étaient difficiles ces débuts d'après-midi dans les locaux surchauffés de l'ISEP ? Alors, bien sûr, nous avons un peu parlé d'électronique, mais nous avons surtout découvert que nous étions tous les deux niçois, que nous avons tous les deux été des élèves de Catherine Carin et que nous étions restés tous les deux très attachés à Nice. Vous habitiez alors, avec Sylvia, à côté du parc de Sceaux. Marc et Matthieu n'étaient pas encore là... mais je me souviens parfaitement d'un balcon entièrement dévolu à sept chiots et leur maman. Je suis allé découvrir ton lycée, au Raincy. Le nom de la gare faisait déjà rêver : « Allée de la Tour Rendez-vous ». Et puis tu m'as montré le labo de physique du lycée, dont tu t'occupais activement, pour lequel tu te démenais (alors que moi, à l'époque, je laissais plutôt les autres se démener...). C'était impressionnant.

Nous nous sommes vus à Paris, bien sûr, et puis nous nous sommes revus à Nice. Et puis un jour je me souviens très bien que tu m'as appelé en me demandant si j'étais assis. Je me suis assis et tu m'as alors annoncé ta nomination au lycée Masséna, à Nice, en classe de MP*. Je ne crois pas me tromper en me disant que tu étais vraiment heureux.

Bien sûr cela a été une grosse affaire de quitter la région parisienne, de s'installer d'abord près de tes parents, au Ray (à « Nice-Nord », selon la belle terminologie actuelle), puis d'acheter un terrain à l'Aire Saint-Michel, avec une vue à faire tourner la tête. Et il ne s'agissait pas seulement d'acheter : il s'agissait aussi de faire construire, mais de façon moderne, « autre », écologique déjà, avec des architectes et des entrepreneurs amis.

Je te revoyais alors plus souvent dans le Midi. Et puis vos deux fils sont nés. Je n'oublierai pas ta venue avec Marc pour te baigner au lac de Castillon, en Haute-Provence, près duquel je me trouvais. Je n'oublierai pas non plus une randonnée avec Catherine et toi, au Boréon.

Comment oublier aussi le rôle d'agent électoral que tu as accepté de jouer pour ma mère, qui ne pouvait plus se déplacer ? Il est vrai que nos idées étaient proches, et nos combats, syndicaux et politiques, communs. Je me souviens, à l'époque où le Ministre de l'Éducation Nationale s'appelait Claude Allègre et nous aimait tant, nous, professeurs de prépas, d'une manifestation à Paris, où tu étais venu en emportant depuis Nice une « grosse tête » de Carnaval à l'effigie du ministre...

Olivier, la dernière fois où nous nous sommes vus, c'est en Corse, à Renno, au mois de novembre dernier. Tu étais déjà très affaibli mais tu étais joyeux, tu nous montrais que jusqu'au bout la vie pouvait être belle. Lorsque je retournerai à Renno (et j'y retournerai), nous ne pourrons plus rire, boire du vin et manger des châtaignes ensemble, mais tu seras pourtant dans mon cœur et tu y resteras jusqu'à la fin de mes jours.

Alain Lumediluna

Par-delà l'excellent enseignant, je garderai de Monsieur Cervera le souvenir d'un homme droit et surtout débordant d'activité.

Il déployait une énergie formidable pour combattre l'oisiveté et nous transmettre l'envie de constamment prendre des initiatives.

Car ce qui le comblait, je pense, plus que d'envoyer tant d'élèves à l'X ou à Centrale Paris, c'était de voir chaque jour quarante jeunes se lever tôt avec lui pour travailler ardemment – et y prendre goût.

Simon Bahadoran

Un grand merci à vous, Monsieur Cervera, pour tout ce que vous avez apporté à la MP*. Je n'oublierai jamais vos efforts quotidiens et enthousiastes pour nous enseigner la belle Physique, toujours avec humour, que ce soit sur les pistes de ski, au plateau de Calern, ou face au tableau noir, craie blanche à la main... Je vous en suis infiniment reconnaissant.

Pierre Mariotto, 2011-2013

À Monsieur Cervera, parti beaucoup trop tôt.

Il ne nous a pas seulement enseigné la physique pour que nous réussissions nos concours, il a été présent tous les jours de notre année de MP*, et même après. Un enseignant, un collègue, mais aussi un deuxième papa lorsque ça n'allait pas, il a toujours été à notre écoute et a fait en sorte que l'on se sente bien, que l'on réussisse et que l'on fasse les bons choix pour notre futur. Alors que les classes préparatoires sont souvent diabolisées, il a su enseigner avec passion et représente un symbole d'enseignant qui sait motiver ses élèves et les faire apprendre tout en gardant une bonne ambiance.

En espérant qu'il ne soit jamais oublié, en tout cas il restera dans nos cœurs

Laura Jacquemot, 2012-2013

Monsieur Cervera faisait partie intégrante du lycée Masséna. En fouillant dans l'armoire au fond de la classe, nos 5/2 ont été surpris de retrouver une photo de classe de lui déjà professeur ici en 1992. Lui qui organisait la traditionnelle semaine au ski ainsi que le magnifique Concert des prépas, dont je garde des souvenirs émus. Son absence laissera un grand vide dans l'âme de notre MP* et de notre lycée.

Enguerran Vandenbossche