Fourier, un homme, plusieurs vies

• B. Maurey

Fourier est né il y a 250 ans, vingt-et-un ans avant 1789. Les événements de cette époque troublée ont fait de sa vie un roman d'aventures : la Révolution et ses dangers mortels, l'expédition de Bonaparte en Égypte et ses découvertes, puis la carrière de préfet de l'Isère, écrivant les premières versions de la *Théorie analytique de la chaleur* quand il ne s'occupait pas de la construction de la route de Grenoble à Turin ou de l'assèchement des marais de Bourgoin ; enfin, l'académicien, bien établi au cœur de la scène scientifique parisienne des années 1820-1830. En rapportant ici sur ces aspects multiples qui ne touchent pas qu'à la science, il faudra évidemment faire une place importante à la théorie de la chaleur, son œuvre majeure, et aux séries de Fourier qui en sont un élément mathématique crucial.

Des ouvrages

De nombreux auteurs ont écrit sur Fourier, notamment à partir de la deuxième moitié du xxe siècle où plusieurs documents inédits ont été publiés. Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert ont fait un travail colossal [10] que je n'ai pas hésité à piller, au prix de simplifications souvent abusives. Un nouvel ouvrage, sous la direction de Dhombres, doit paraître cette année [21] ; il visera un public plus large, contiendra un grand nombre d'illustrations et des pièces nouvelles d'archives. Ivor Grattan-Guinness a publié dans son livre de 1972 [16] le contenu du mémoire *Sur la propagation de la chaleur* présenté par Fourier à l'Académie des Sciences en décembre 1807 et resté jusque-là inédit. Umberto Bottazzini [9] a consacré deux sections [1] à l'étude du problème de la chaleur dans les années 1800-1830. Je me référerai également au livre de Jean-Pierre Kahane et Pierre Gilles Lemarié-Rieusset [23] dont la première partie, écrite par Kahane, traite de l'histoire des séries de Fourier. Le traité d'Analyse harmonique de Thomas Körner [24] expose de façon magistrale les mathématiques attachées au nom de Fourier. Il contient aussi deux courts chapitres sur la vie de Fourier [2], qui s'appuient en grande part sur le texte de John Herivel [18], très riche en informations mais en anglais : les documents français originaux y sont traduits.

1. La Révolution, l'Égypte

Jean-Baptiste Joseph Fourier naît le 21 mars 1768 à Auxerre, il est prénommé *Jean-Joseph* sur son acte de baptême. Il naît dans une famille d'artisans en voie d'ascension sociale : son père, tailleur, emploie une petite dizaine d'ouvriers. Orphelin à dix ans, Jean-Joseph est pris en charge par le clergé auxerrois ; il a un lien de parenté lointain – et incertain – avec un prêtre béatifié, on ne peut le laisser à l'abandon. Il reçoit une bonne éducation à l'École Royale Militaire d'Auxerre, tenue par des religieux. Après l'école, à 19 ans, il fait une demande pour être autorisé à passer le concours d'entrée dans l'Artillerie : elle est sèchement refusée, « Fourier n'étant pas noble » ne saurait devenir officier d'artillerie. Il se tourne vers les ordres et devient novice à l'abbaye bénédictine de Fleury, à Saint-Benoît-sur-Loire. Il y séjourne deux ans, de 87 à 89, il aurait pu être *l'abbé Fourier* : mais la Révolution a éclaté, et l'Assemblée nationale constituante a pris des décrets suspendant la prononciation de vœux religieux, juste avant qu'il ne prononce les siens en novembre 89. Au début 90, il revient à l'école d'Auxerre, comme enseignant cette fois ; à cette date, elle s'appelle « Collège National-École Militaire », il va y rester quatre ans. Il enseignera des matières diverses, histoire, philosophie, éloquence et finalement mathématiques, et deviendra « instituteur salarié par la nation ».

1. [9, sec. 2.3, 2.4]
2. [24, part VI, ch. 92 et 93]

D'abord réservé à l'égard de la Révolution, Fourier s'engage début 93 dans le *Comité de surveillance* d'Auxerre, il en sera même président en juin 94. Il est présent, sans que nous puissions savoir ce qu'il en pense, lors de scènes violentes de désacralisation d'églises, pendant la vague de déchristianisation de 93-94. Après septembre 93, le Comité d'Auxerre se trouve chargé d'exécuter les décisions de Maximilien de Robespierre et du Comité de Salut Public. Plutôt modéré, Fourier peut s'y trouver en danger, par son manque de zèle à aider les coupeurs de têtes : Victor Cousin, son successeur à l'Académie française en 1831, a rapporté dans des *Notes additionnelles à l'éloge de M. Fourier* – bien des années après les faits – que celui-ci aurait sciemment fait échouer l'arrestation à Tonnerre d'un homme condamné à l'échafaud [3]; Fourier a tout de même signé un certain nombre de mandats d'arrêts, dans le cadre de ses fonctions officielles au comité d'Auxerre. Un événement va le conduire tout près de l'emprisonnement, « l'affaire d'Orléans », qui est relatée en grand détail dans le livre de Herivel [4].

Début octobre 93, le citoyen Ichon, membre de la Convention, est dépêché pour collecter dans l'Yonne et six départements voisins, armes, matériel et chevaux en vue des opérations en Vendée. Dans ce but, il mandate six citoyens d'Auxerre – dont Fourier – pour une mission d'un mois, à partir de mi-octobre, à Orléans. La ville est agitée par de vives tensions entre sans-culottes et bourgeois. Le citoyen Laplanche, autre Conventionnel, y a été envoyé par Paris début septembre; il commence par prendre des mesures de caractère révolutionnaire, susceptibles de satisfaire les sans-culottes. Mais il cède ensuite à des pressions des milieux les plus riches et il se heurte aux « leaders » des sans-culottes. S'opposant à Laplanche, et sortant nettement du cadre de sa mission, Fourier prend parti pour ces « gauchistes », dirait-on de nos jours. Laplanche et les autorités orléanaises demandent alors à Auxerre qu'il soit rappelé, et dénoncent son comportement; leur plainte remonte à Paris. Un décret parisien destitue Fourier de toutes ses fonctions le 29 octobre 93 : « La Commission donnée [...] au citoyen Fournier [*sic*], est révoquée; le citoyen Fournier est déclaré inhabile à recevoir de pareilles Commissions »; il ne peut plus exercer de fonction publique. Ichon, qui est responsable de son envoi à Orléans, ressent une partie du blâme; furieux, il lance un mandat d'arrêt contre Fourier, qui heureusement pour lui n'est pas encore rentré; les choses sont un peu calmées à son retour à Auxerre, on le laisse tranquille. Cependant, l'affaire d'Orléans finit par ressortir à Paris. Robespierre combat sa gauche aussi bien que sa droite, les meneurs d'Orléans sont visés et Fourier par voie de conséquence : le 19 juin 94, le *Comité de Sûreté Générale* ordonne son arrestation (ce même mois de juin, la loi de « Grande Terreur » est adoptée). On sait aujourd'hui [21] que Fourier ne va pas en prison, il bénéficie d'un traitement de faveur : il est placé en résidence surveillée le 4 juillet, à son domicile d'Auxerre. Robespierre tombe fin juillet et Fourier est « libéré » le 11 août.

Fin 94, Fourier est sélectionné pour faire partie des jeunes enseignants qui seront formés par la toute nouvelle École normale, « l'École Normale de l'an III »; cette école ne fonctionnera qu'un semestre, de janvier à juin 95, il en sera un élève distingué. Mais suite au changement de climat politique, son appartenance au comité jacobin lui vaut d'autres ennuis. À l'heure de la réaction thermidorienne, on fait la chasse aux « terroristes ». Les nouvelles autorités d'Auxerre veulent obtenir son exclusion de l'École normale; on lui reproche son passé, dans une adresse à la Convention Nationale [5] :

> Nous frémissons, Représentans, quand nous pensons que les Élèves des écoles normales ont été choisis sous le règne de Robespierre et par ses protégés; il n'est que trop vrai que Balme et Fourrier [*sic*] élèves du département de l'Yonne ont longtemps proféré les principes atroces et les infernales maximes des tyrans.

Début juin 95, Fourier est mis en prison; il obtient un ordre de libération conditionnelle après quelques jours, mais l'ordre n'est pas appliqué, il reste incarcéré un mois ou plus. Il est en tout cas libre fin août, ses ennuis judiciaires sont enfin terminés et il est rétabli dans tous ses droits de citoyen.

Les premières années de la Révolution ont été dangereuses, sans doute exaltantes toutefois. Kahane [6] cite un passage d'une lettre de Fourier :

> À mesure que les idées naturelles d'égalité se développèrent on put concevoir l'espérance sublime d'établir parmi nous un gouvernement libre exempt de

3. [10, ch. III, p. 94]
4. [18, sec. 2.2]
5. [10, ch. IV, p. 150]
6. [23, ch. 1, p. 8]

rois et de prêtres, et d'affranchir de ce double joug la terre d'Europe depuis si longtemps usurpée.

Pourtant Fourier doit beaucoup à l'éducation reçue des bénédictins à l'École Royale Militaire d'Auxerre, qui lui permet d'écrire de fort belles phrases comme celle qu'on vient de citer, et qui a fait de lui un enseignant. L'extrait précédent provient d'une longue lettre adressée à l'été 95 à Edmé-Pierre-Alexandre Villetard, député de l'Yonne (reproduite par Dhombres et Robert [7]), au moment mentionné ci-dessus où Fourier, mis en cause, tente de justifier son comportement des années 93-94.

Élève emblématique de l'École normale, il s'y fait connaître de Gaspard Monge, il suit également des cours de Pierre-Simon Laplace et de l'éminent Joseph-Louis Lagrange, « le premier des savants d'Europe », écrit Fourier dans des Notes sur l'École Normale [8]. Laplace, savant reconnu sous l'Ancien Régime, a dû se faire discret pendant la Terreur ; en 95, il commence à remonter sur le devant de la scène et sera bientôt très influent. Fourier indique dans ses Notes qu'il suit aussi les cours de physique de René-Just Haüy, ceux de chimie de Claude-Louis Berthollet et ceux du naturaliste – fort âgé – Louis Jean-Marie d'Aubenton (je ne cite que les plus connus). Au moment de la fermeture de l'École normale, Fourier passe du côté des enseignants de l'École polytechnique (nous écrirons « l'École » tout court, à partir de maintenant ; elle s'est appelée *École Centrale des Travaux Publics* avant septembre 95) : recommandé par Monge, il devient *substitut* fin mai 95 à l'École – sa mission alors est d'encadrer le travail des élèves –, puis instituteur-adjoint en octobre 95. Il s'investit pleinement dans ses fonctions d'enseignant de mathématiques, pendant plus de deux années.

On a une idée des cours que Fourier a donnés en 1796-1797 à partir de notes prises par des élèves [9], conservées à l'Institut de France et à l'École des Ponts et Chaussées [10]. Ces cours ne s'appuient pas sur les manuels du XVIIIe siècle (le traité d'Étienne Bézout par exemple), mais sont plutôt inspirés des cours donnés à l'École normale par Lagrange et Laplace ; on y sent aussi l'esprit géométrique de Monge. Dès novembre 95, Fourier est chargé du cours *d'Analyse algébrique*, qui prépare au cours de calcul différentiel ; il assure en janvier 96 une partie du cours d'Analyse de Prony, incluant le calcul des variations ; en mars 96, il montre aux élèves l'existence des racines complexes des polynômes au moyen de la méthode présentée par Laplace à l'École normale [26]. Cette preuve originale de Laplace s'applique au cas des coefficients réels ; elle met le degré n du polynôme sous forme $n = 2^i s$ où s est impair, et procède par une récurrence subtile sur i, le cas $i = 0$ étant réglé par la propriété des valeurs intermédiaires – qui passe pour une évidence –. Fourier simplifie et généralise un peu : si on admet que les polynômes à coefficients complexes de degré impair ont une racine complexe, on peut les factoriser en facteurs complexes du premier degré. En mai 96, il traite le calcul différentiel et intégral. En 97, il succède à Lagrange à la chaire d'Analyse et Mécanique. Titulaire, il aurait pu comme d'autres y passer de longues années, mais les événements politiques vont détourner le cours de son existence.

L'expédition d'Égypte est un épisode saillant dans la vie de Fourier. Au début 98, les autorités du *Directoire exécutif* lui enjoignent de prendre part à une opération entourée de beaucoup de secret : à ce moment, peu de ses membres en connaissent la destination exacte. Fin mars 98, il quitte Paris, comme un bon nombre d'élèves ou d'anciens de l'École, des promotions de 94 – la première – à 97, qui ont pu l'avoir pour enseignant. Jean-Baptiste Prosper Jollois et Édouard de Villiers du Terrage (« Devilliers » à l'École, Révolution oblige), ingénieur et futur ingénieur des Ponts et Chaussées, âgés de 22 et 18 ans, sont parmi eux [11] ; ils écriront quantité de pages de l'ouvrage monumental *Description de l'Égypte* qui paraîtra à partir de 1809 et consignera, dans les textes et illustrations de nombreux collaborateurs, les découvertes de l'expédition ; Fourier écrira une longue préface. Les illustrateurs comptent Vivant Denon et Henri-Joseph Redouté (peintre, frère de Pierre-Joseph Redouté qui est connu pour ses aquarelles représentant des roses). Des savants et ingénieurs, comme Monge, Berthollet, Étienne Geoffroy Saint-Hilaire, Nicolas-Jacques Conté, Pierre-Simon Girard sont aussi du voyage. De retour en France, Girard, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, dirigera la construction du canal de l'Ourcq ; il y aura sous ses ordres en 1809 le jeune Augustin Louis Cauchy, 20 ans, aspirant ingénieur des Ponts et Chaussées.

7. [10, Annexe IV, p. 709]
8. [10, Annexe II]
9. [10, ch. IV, p. 158]
10. [16, ch. 1, p. 6-7]
11. ils sont représentés dans [7] ; Fourier en est absent.

Fourier s'embarque à Toulon mi-mai. Un corps expéditionnaire de plus de 30000 hommes part de France et d'Italie. La campagne d'Égypte ne sera pas une promenade tranquille : parmi beaucoup d'autres victimes, plusieurs jeunes polytechniciens n'en reviendront pas – 7 sur 42 [12] –. L'expédition débarque à Alexandrie début juillet. Début août, à Rosette (lieu de découverte de la fameuse *pierre* en juillet 99, à quelque 50 km d'Alexandrie), Fourier devient responsable du *Courrier de l'Égypte*, un journal dont une des missions est de promouvoir l'action du général en chef Napoléon Bonaparte. Fin août 98, il est nommé Secrétaire perpétuel de l'Institut d'Égypte créé au Caire par Bonaparte. Il joue un rôle d'administrateur et un rôle politique, en particulier de négociateur avec les autorités locales. Dhombres et Robert signalent qu'au moment où Bonaparte se lance en Syrie (février-juin 99), Fourier se trouve de fait à gouverner la Basse-Égypte, sans en avoir officiellement le titre. Quand Bonaparte, et Monge, retournent en France en août 99, il reste la principale autorité civile, particulièrement après la mort du général Jean-Baptiste Kléber, assassiné au Caire en juin 1800, dont il prononce l'éloge funèbre (Fourier sait écrire les discours, et il parle bien). Il se charge du lien entre les civils et les militaires de l'expédition. Il négocie encore à la fin de l'aventure, cette fois avec les Anglais qui tiennent les ports égyptiens, pour obtenir que les savants français puissent repartir dans les meilleures conditions possibles, en gardant l'essentiel de leurs notes et découvertes, au moment de la reddition du général Menou en septembre 1801. Mais la pierre de Rosette partira pour l'Angleterre ; elle y est toujours.

L'activité de Fourier en Égypte ne se limite pas à l'administration et à la politique. En octobre 98, il se fait examinateur de l'École polytechnique : il interroge avec Monge des élèves de la promotion 96 venus en Égypte. Il participe à des expéditions scientifiques et archéologiques, notamment en Haute-Égypte en septembre-octobre 99. Il effectue des recherches mathématiques, présente plusieurs communications à l'Institut d'Égypte, sur des sujets algébriques, travaux plutôt mineurs et restés inédits, et un *Mémoire sur l'analyse indéterminée*, jugé plus convaincant par Dhombres-Robert [10] et Grattan-Guinness [16] qui y voient une ébauche de ce que nous appelons la *programmation linéaire*. Fourier reprendra cette question beaucoup plus tard, dans des mémoires à l'Académie des Sciences en 1823 – pour simplifier, nous désignerons par *Académie des Sciences* l'institution qui s'est appelée aussi *Académie Royale des Sciences* ou *Classe des Sciences de l'Institut* – et dans un article de 1826 au *Bulletin des Sciences, par la Société philomathique*.

2. Grenoble, Paris, l'œuvre

De retour d'Égypte, Fourier débarque à Toulon en novembre 1801 ; rentré à Paris début janvier 1802, il revient très brièvement à l'École. Mais Bonaparte l'envoie à Grenoble, le nommant préfet de l'Isère en février 1802, à la mort du préfet en poste Gabriel Ricard ; Fourier ne refuse pas, il y arrive mi-avril. C'était peut-être en partie une brimade, cependant, il fallait aussi pour occuper cette fonction un homme capable et sûr, des qualités démontrées en Égypte. À Grenoble, il commence à travailler sur la théorie de la chaleur et écrit en 1805 un essai non publié, une sorte de brouillon de la théorie. Fin 1807, il présente à l'Académie un premier mémoire sur la propagation de la chaleur. Les quatre rapporteurs, inscrits au procès-verbal de la séance du 21 décembre, sont Lagrange, Laplace, Monge et Sylvestre Lacroix. Le texte n'est pas bien reçu par Lagrange [13], [14], un peu mieux par Laplace qui, dans un mémoire de 1809-1810 [25], reconnaîtra à Fourier la paternité de l'équation de la chaleur.

Ce mémoire de 1807 de Fourier, resté inédit, a été publié et commenté par Grattan-Guinness en 1972 [16] ; il était conservé à l'École nationale des Ponts et Chaussées, où Claude Louis Marie Henri Navier, proche de Fourier, a été professeur. Navier a été « exécuteur testamentaire » des manuscrits de Fourier. Gaston Darboux, l'éditeur des *Œuvres* de Fourier (parues en 1888 et 1890), avait découvert le mémoire à la fin des années 1880 mais ne l'avait pas exploité. Jointes au « Mémoire » se trouvaient des documents transmis par Fourier à l'Académie en 1808 et 1809 : on comprend qu'il a été informé des objections des « examinateurs » et qu'il y a répondu ; parmi ces documents figurent un *Extrait* soumis en 1809 (dont seules les dix premières pages ont été conservées), courte présentation non mathématique du contenu du mémoire, et un ensemble de dix pages de *Notes* répondant aux objections [15].

12. [27, annexe]
13. [16, p. 24, fin du ch. 1]
14. [9, Note([5]) pour le ch. 2]
15. [16, ch. 1, p. 24]

L'Académie reste silencieuse sur le travail présenté par Fourier en 1807. Un compte rendu assez froid, écrit par Siméon Denis Poisson, paraît en mars 1808 au *Bulletin des Sciences*, il mentionne l'équation de la chaleur mais pas le traitement par les séries « de Fourier ». En 1809, Fourier finit de rédiger la *Préface Historique* de la *Description de l'Égypte* ; cette rédaction lui pèse, à un moment où la chaleur occupe son esprit, où il voudrait voir son mémoire de 1807 reconnu. La Préface, document sensible de 90 pages, est soumise à la lecture de Napoléon. Fourier « monte » à Paris pour la lui présenter : il a dû se faire historien pour rapporter sur l'histoire de l'Égypte, ancienne et contemporaine, styliste pour livrer un texte qu'il puisse estimer irréprochable, et diplomate pour savoir parler *comme il fallait* de l'action en Égypte de celui qui est devenu l'Empereur. Körner rapporte qu'un égyptologue de ses connaissances juge que cette *Préface* représente « a masterpiece and a turning point in the subject » [16], et que cet égyptologue a été surpris d'apprendre que l'auteur était également assez connu en tant que mathématicien! Afin de réaliser sa tâche, Fourier a reçu l'aide de Jacques-Joseph Champollion-Figeac, féru d'égyptologie ; son jeune frère Jean-François, né en 1890, élève en 1804 au *lycée impérial* institué à Grenoble la même année, est passionné de langues anciennes ; il participe (un tout petit peu) à la préparation de la *Préface*. Jean-François Champollion déchiffrera les hiéroglyphes à partir de 1822 ; mort en 1832, il est enterré – selon son souhait – près de Fourier au Père-Lachaise (et Fourier, lui, est enterré non loin de Monge).

En 1811, Fourier remanie sensiblement son texte de 1807 et obtient, enfin, un prix de l'Académie en janvier 1812. Lagrange est toujours là pour s'opposer (mais il meurt l'année suivante) : le rapport décernant ce prix n'est pas sans réserves, « [...] la manière dont l'Auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et [...] son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur ». Bien qu'honoré par le prix, Fourier est blessé, il proteste auprès du secrétaire perpétuel pour les Sciences mathématiques, Jean-Baptiste Joseph Delambre, mais il n'y a pas grand-chose à faire. Et les années qui suivent amènent de grands bouleversements politiques qui vont occuper et toucher le préfet de l'Isère : 1814 et 1815 voient le premier départ de Napoléon, puis son retour de l'île d'Elbe et sa chute.

Après la défaite de Napoléon en Russie, c'est le territoire français qui est menacé dès la fin de 1813 par une coalition comprenant principalement l'Angleterre, l'Autriche, la Prusse et la Russie. Henry Beyle, 30 ans, qui n'est pas encore l'écrivain Stendhal, est attaché à la section de la guerre du Conseil d'État ; il est envoyé dans le Dauphiné en novembre 1813 afin de seconder le *commissaire extraordinaire* chargé des mesures à prendre pour la protection de la région. En janvier 1814, Grenoble craint l'arrivée des troupes autrichiennes qui ont pris Genève. Avec les militaires et avec Stendhal, le préfet doit organiser la défense. Stendhal n'apprécie pas Fourier, qui selon lui temporise et entrave l'action militaire ; il aura des mots très méprisants sur ce préfet : « Une des sources de mon ennui à Grenoble était le petit savant spirituel à l'âme parfaitement petite et à la politesse basse de domestique revêtu, nommé Fourier » [17]. Paris tombe le 31 mars, Napoléon abdique le 6 avril ; le 12 avril, il signe le traité de Fontainebleau et se met en route vers son nouveau royaume, l'île d'Elbe. Les troupes autrichiennes sont à Grenoble, Fourier et l'essentiel des membres de sa préfecture se rallient à la « première Restauration » le 16 avril. Sur son chemin, Napoléon passe près de Grenoble, au grand embarras de Fourier, qui va rester presque un an encore à son poste de préfet.

En 1815, au retour de l'île d'Elbe, Napoléon entre à Grenoble et Fourier en sort pour l'éviter ; après l'avoir suspendu et menacé d'arrestation le 9 mars, Napoléon se ravise et le nomme préfet du Rhône le 11 mars. Fourier se remet au travail à son nouveau poste, mais finit par refuser d'appliquer les mesures d'épuration de Napoléon et de son ministère de l'Intérieur – le ministre est Lazare Carnot –; il est révoqué le 3 mai 1815.

À la seconde Restauration, la pension de Fourier est supprimée : il est trop marqué comme serviteur du régime napoléonien, en particulier par sa participation aux Cent Jours. Il reçoit alors un appui bienvenu du préfet de la Seine, Gaspard Chabrol de Volvic. Chabrol est un ancien élève de l'École (promotion 94), qui a eu Fourier pour professeur et qui était de plus présent en Égypte ; il était déjà préfet de la Seine sous Napoléon, mais il n'a pas participé aux Cent Jours et il restera à ce même poste jusqu'en 1830. Chabrol confie à Fourier la direction d'un bureau de statistiques du département de la Seine. Fourier s'adonne à cette tâche avec intérêt et publie des *Recherches statistiques sur la Ville de*

16. [24, fin du ch. 92]
17. [10, ch. VI, p. 347]

Paris et le département de la Seine, en quatre volumes parus entre 1821 et 1829. Il ne s'agit pas – loin s'en faut – de travaux théoriques de probabilités ou statistiques du niveau de ceux de Laplace, mais Körner, encore lui, mentionne que certains démographes ne connaissent de Fourier que l'homme qui a joué un rôle important dans le développement des statistiques gouvernementales en France [18].

En 1817, les bouleversements politiques étant amortis, Fourier est élu académicien, après une première candidature et une élection en 1816 qui n'a pas été validée par le roi Louis XVIII. Il devient secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences cinq ans plus tard, à la mort de Delambre. Académicien de premier plan, il a l'occasion d'être en contact avec Sophie Germain, ils échangent une correspondance assez régulière entre 1820 et 1827; il lui procure des places pour assister aux séances publiques de l'Institut, lui apporte son soutien contre Poisson, qui travaille aussi sur la théorie des surfaces élastiques; elle le soutient pour le poste de secrétaire perpétuel en 1822. On peut penser que Laplace, sur ses vieux jours (il a 73 ans en 1822), s'est rapproché de Fourier et l'a également soutenu. Fourier prononcera un éloge funèbre de Laplace (mort en 1827), encore un beau discours. En 1822, il fait éditer la version définitive de la *Théorie analytique de la chaleur*; le mémoire de 1811 finit par paraître, en 1824! Il est élu à l'Académie française en 1826; les réactions ne sont pas unanimes : son œuvre littéraire, il est vrai, est un peu mince.

La fin de la vie de Fourier a été rendue pénible par la maladie. Il souffrait de rhumatisme chronique (à Grenoble déjà), et avait peut-être contracté une affection tropicale en Égypte; il était devenu extrêmement frileux, Grattan-Guinness [19] plaisante : « [illness] caused him to discourage the diffusion of heat in his quarters », au point qu'il portait des vêtements épais en laine et chauffait en toute saison. Pendant ces années, il a été absent de bien des séances de l'Académie. Ses derniers mois ont été particulièrement difficiles, il devait passer ses journées dans une chaise spéciale [20] où il pouvait toutefois travailler. La maladie a pu aussi amoindrir ses facultés intellectuelles, au moment où le *secrétaire perpétuel* aurait dû mieux s'occuper du fameux mémoire d'Évariste Galois, présenté en 1829 puis en 1830. Fourier meurt le 16 mai 1830 à Paris, à l'âge de 62 ans.

18. [24, fin du ch. 93]
19. [16, fin du ch. 22]
20. [16, fin du ch. 22]

Pour nous, Fourier est essentiellement l'homme d'une œuvre unique, la théorie de la chaleur. Il a publié d'autres travaux moins connus, parmi lesquels des mémoires sur la statique en 1798 (un article de mécanique rationnelle, contenant trois preuves du principe des puissances virtuelles, utilisant la notion de moment), sur les statistiques entre 1821 et 1829; il a laissé une masse de manuscrits, beaucoup se trouvent à la Bibliothèque nationale. Un thème en particulier doit être mentionné : Fourier a poursuivi, sur une très longue période, des recherches sur la détermination du nombre des racines réelles d'un polynôme qui sont situées dans un segment donné, et sur les méthodes de calcul de valeurs approchées de ces racines. La question l'intéressait déjà en 1787, et même au cours de ses jeunes années [21]; il a présenté une communication à l'Académie le 9 décembre 1789 sur ce sujet, sujet dont il parlait aussi dans ses cours à l'École en 1796 et 1797, sur lequel il travaillait encore en Égypte, puis à Grenoble en 1804 : ces précisions sont données par Navier, voir plus bas. Fourier a publié dans la même direction plusieurs articles à partir de 1818, soumis des mémoires à l'Académie pendant les années 1820-1830. Ses recherches mènent à une borne supérieure pour le nombre des racines; Jacques Charles-François Sturm trouve en 1829 la règle qui porte son nom (le mémoire paraît en 1835) et qui permet de trouver le nombre *exact* des racines; Sturm déclare : « le théorème dont le développement est l'objet de ce Mémoire a beaucoup d'analogie avec celui de Fourier ».

Dans ses dernières années, Fourier prépare un ouvrage intitulé « Analyse des équations déterminées » qu'il ne pourra pas terminer, et qui devait rassembler en deux volumes les travaux algébriques mentionnés ci-dessus. Navier en publiera les parties existantes en 1831, il écrira un « Avertissement de l'éditeur » de 24 pages destiné à affirmer la priorité de Fourier sur des résultats vieux de plus de quarante ans pour certains. Navier cite les documents en sa possession : il insiste sur un manuscrit *Recherches sur l'algèbre*, d'avant 1789, dû à Fourier (mais pas de sa main, et incomplet : seules étaient conservées les 28 premières pages), mentionne des notes prises par un élève aux cours de Fourier à l'École en 1797, puis un texte écrit à Grenoble en 1804. Navier insiste aussi sur l'existence de témoignages permettant de dater chacun de ces documents. La priorité était contestée par François Budan de Boislaurent, docteur en médecine en 1803, inspecteur général de l'Instruction Publique en 1808, mathématicien compétent quoiqu'« amateur » : il avait soumis un mémoire à l'Académie en 1803, publié un article en 1807 et un livre en 1822 sur la même question du nombre des racines [21]. La querelle a été très vive, elle paraît secondaire aujourd'hui ; si la méthode analytique de Fourier a conduit au résultat de Sturm, celle de Budan, combinatoire et de nature algorithmique, a trouvé de nos jours des répercussions en calcul formel.

3. Des séries trigonométriques

Fourier évidemment n'a pas inventé les séries trigonométriques : Leonhard Euler, Daniel Bernoulli et bien d'autres les ont utilisées avant lui ; il faut peut-être partir de Brook Taylor, l'homme de la *formule de Taylor*, et un des premiers à avoir lié vers 1715 la vibration des cordes aux courbes sinusoïdes, appelées à l'époque « compagnes de la cycloïde ». Mais Fourier en a donné de beaux exemples, et surtout, il a systématisé la relation entre fonction et série « de Fourier » ; ce faisant, il a contribué à modifier et préciser la conception des fonctions en mathématiques, une tâche complétée quelque vingt ans plus tard par Dirichlet. Fourier a calculé un bon nombre de développements en série trigonométrique de fonctions 2π-périodiques non nécessairement continues, dont plusieurs se trouvent déjà dans son essai de 1805 : il a retrouvé le développement de la fonction égale à x quand $|x| < \pi$, mentionnant bien sûr qu'il était dû à Euler, et précisant clairement qu'il fallait en limiter la validité à $|x| < \pi$ [22] ; il a développé en série de sinus la fonction impaire qui vaut $\cos x$ pour $0 < x < \pi$ (un fait qui choquera Lagrange et même Laplace), ou la fonction égale à $\operatorname{sh} x$ pour $|x| < \pi$, et beaucoup d'autres. En lisant le livre de Grattan-Guiness [16] on se rend compte de l'ampleur du contenu mathématique des travaux de Fourier sur la chaleur. Je vais insister maintenant sur l'exemple sans doute le plus connu.

Après avoir posé des principes physiques pour comprendre l'évolution de la température des corps et établi *l'équation de la chaleur* à l'intérieur d'un solide,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa \Delta v, \qquad \kappa > 0,$$

Fourier propose [23] de déterminer explicitement la température d'équilibre $v(x,y,z)$ dans un solide infini limité par deux plans parallèles et un troisième perpendiculaire aux deux autres, en supposant que la température soit fixée au bord. Le solide est mis en équation de sorte que la géométrie et la température ne dépendent pas de la coordonnée z : on se ramène à un problème en x, y à l'art. 165, une lame rectangulaire, qu'on modélise comme l'ensemble $\{(x,y) : x \geqslant 0, |y| \leqslant \pi/2\}$. Au bord, la température v est égale à 1 quand $x = 0$ et $|y| < \pi/2$, égale à 0 quand $x \geqslant 0$ et $|y| = \pi/2$. L'équation d'équilibre dans la lame est $\Delta v = 0$. La condition au bord étant paire en y, Fourier recherche des solutions paires en y : il envisage une solution combinaison de fonctions $e^{-kx}\cos(ky)$, où la nullité de v dans le cas $|y| = \pi/2$ impose que k soit un entier impair, et où on a $k > 0$ pour des raisons de vraisemblance physique [24]. La méthode des variables séparées était déjà apparue chez Jean d'Alembert et Euler, la superposition (même d'une infinité) de solutions chez Bernoulli. Fourier cherche donc v sous la forme

$$v(x,y) = a e^{-x}\cos y + b e^{-3x}\cos 3y + c e^{-5x}\cos 5y + \cdots$$

La condition $v = 1$ pour $x = 0$ lui fait rechercher un développement qui vérifie

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \cdots \tag{1}$$

quand $|y| < \pi/2$. Il va déterminer d'abord le coefficient a de $\cos y$, puis il trouvera pareillement les coefficients suivants $b, c, \ldots$ Afin d'y parvenir, il dérive l'équation (1) un nombre pair de fois et écrit pour j entier > 0 l'égalité

$$0 = a\cos y + b3^{2j}\cos 3y + c5^{2j}\cos 5y + \cdots. \tag{2}$$

Pour calculer les coefficients, Fourier suppose pour commencer qu'il n'y a que m inconnues $a, b, \ldots, r$, et il considère un système de m équations, la première provenant de (1) et les $m-1$ dernières, quand $j = 1, \ldots, m-1$, étant

$$0 = a\cos y + b3^{2j}\cos 3y + c5^{2j}\cos 5y + \cdots + r(2m-1)^{2j}\cos(2m-1)y.$$

Prenant $y = 0$, il obtient un système de Vandermonde, le résout pour trouver une valeur approchée $a^{(m)}$ de la solution a, et il passe à la limite avec m

21. voir Jacques Borowczyk [8]
22. par exemple [15, art. 184]
23. [15, ch. III, art. 163, p. 159 et suiv.]
24. [14, art. 33], à lire dans [16, p. 138]

en faisant appel à la formule du produit de Wallis qui fournit $a = 4/\pi$.

Entrons un peu plus dans les détails. Écrivant $x_1, \dots, x_m$ au lieu de $a, b, \dots, r$, et posant $k_i = (2i-1)^2$, $i = 1, \dots, m$, les m équations considérées par Fourier sont

$$k_1^j x_1 + k_2^j x_2 + \cdots + k_m^j x_m = \delta_{j,0}, \qquad j = 0, \dots, m-1,$$

où $\delta_{j,0}$ est le symbole de Kronecker. Fourier travaille « à la main » au long de quatre pages de calculs, mais nous pouvons de notre côté utiliser la règle de Cramer, qui exprime x_1, la valeur approchée $a^{(m)}$ à l'étape m, à partir d'un quotient de deux déterminants de Vandermonde,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{k_2 \dots k_m \prod_{1<i<\ell\leqslant m}(k_\ell - k_i)}{\prod_{1\leqslant i<\ell\leqslant m}(k_\ell - k_i)} = \frac{k_2 \dots k_m}{\prod_{1<\ell\leqslant m}(k_\ell - 1)} \\ &= \frac{3.3.5.5\dots(2m-1)(2m-1)}{2.4.4.6\dots(2m-2)(2m)}, \end{aligned}$$

qui nous amène bien à Wallis. Le calcul pour $x_2, x_3, \dots$ est analogue.

Fourier observe plus avant que la valeur 1 à gauche de l'équation (1) sera changée en -1 si on ajoute π à y. Cette remarque essentielle lui fait comprendre quelles sont les valeurs de l'extension 2π-périodique qui correspond à sa solution constante sur l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$: il a obtenu [25] le développement en série trigonométrique d'une fonction « en créneau »,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(\cos y) &= \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y \\ &\quad + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \cdots. \qquad (3) \end{aligned}$$

La formule est déjà dans le manuscrit de 1805, et l'étude de 1822 de ce problème se trouve aussi dans le mémoire de 1807 [26]. Bien plus loin dans le texte, Fourier arrive aux formules intégrales « de Fourier » pour le calcul des coefficients. Il ne les a pas utilisées pour l'exemple précédent, il a suivi l'approche calculatoire évoquée ci-dessus. Ensuite, il repasse par cette même approche pour établir les formules intégrales, dans un premier temps au moins. Défaut pour les uns, qualité pour certains, Fourier n'est pas concis : il engage une longue preuve, commençant à l'art. 207, premier article de la Section VI, *Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques* [15] ; il part d'une fonction périodique impaire, écrit son développement en série de Taylor en 0, supposé exister. Égalant la série de Taylor à la série trigonométrique (en sinus) recherchée pour cette même fonction, il calcule les coefficients « de Fourier » au moyen d'équations ressemblant à celles qu'il a données dans le cas de la fonction créneau. Cela mène à l'art. 218, les intégrales apparaissent à l'art. 219. Fourier ne se contente pas d'une seule preuve : à l'art. 221, il propose enfin de multiplier la somme de la série trigonométrique par $\sin nx$ et d'intégrer terme à terme de 0 à π, utilisant l'orthogonalité qui sera si fondamentale en analyse. Il utilise cette méthode depuis 1807 au moins [27] ; on n'en est pas encore, bien entendu, à justifier l'intégration terme à terme. Dans sa démarche progressive et « pédagogique », il est parti d'une fonction régulière pour pouvoir appliquer la première preuve (qui dans une faible mesure pourrait prouver *l'existence* du développement), et il remarque à la fin qu'il peut traiter maintenant, à l'aide des formules intégrales, les fonctions « générales ».

De retour à la physique, Fourier multiplie les exemples « limités » dans l'espace, l'un d'entre eux étant le cas de *l'armille*, un anneau métallique (ch. IV). L'étude de la chaleur dans un cylindre de longueur infinie fait apparaître des fonctions de Bessel : elles ont été présentées par Friedrich Bessel en 1816-1817 à l'Académie de Berlin, publiées en 1819 ; mais Fourier avait étudié cet exemple dès 1807 [16, ch. 15 et 16], et il avait écrit la série entière de J_0 bien avant la publication de Bessel (après Euler cependant, en 1766 et 1784 [28]). Fourier résout par série entière l'équation différentielle $u'' + u'/x + \kappa u = 0$ ($\kappa > 0$, u est liée à la fonction de Bessel J_0 par $u(x) = cJ_0(\sqrt{\kappa}x)$), et il s'en sert afin de produire pour le cylindre des « modes propres » – ce sont ses mots –, qui sont orthogonaux. La constante κ est déterminée par la condition (7) à la surface du cylindre (donnée plus loin), qui amène une suite de valeurs possibles, liées aux solutions $\kappa_i > 0$ d'une équation de la forme $J_0(\sqrt{\kappa_i}r) + \sqrt{\kappa_i}J_0'(\sqrt{\kappa_i}r) = 0$, $r > 0$ étant le rayon du cylindre. Finalement, le cas de l'espace illimité, occulté en 1807, voit arriver la transformation de Fourier sur la droite : elle apparaît dans le mémoire primé en 1812 (art. 71) et à l'article 346 du dernier chapitre du livre de 1822, avec sa transformation

25. [15, ch. III, art. 177-180]
26. [14, art. 32-43]
27. [14, art. 63]
28. [17, sec. 3.4.4, sec. 9.2.8]

inverse. Ce chapitre IX est intitulé tout simplement *De la diffusion de la chaleur*.

Je trouve difficile pour l'historien amateur d'évaluer la preuve qui a conduit à l'équation (3) donnant la *fonction créneau*, et qui a usé d'arguments qu'on peut juger totalement faux suivant les critères de rigueur : les séries dérivées (2) écrites par Fourier sont grossièrement divergentes ; on comprend que des mathématiciens du milieu du XIX^e siècle aient pu le prendre pour un fumiste mathématique. On peut aujourd'hui prétendre que ces séries convergent au sens des distributions, mais Fourier utilise la valeur ponctuelle des sommes partielles ; Kahane [29] veut y voir la recherche de polynômes trigonométriques de plus en plus « plats » en 0, et qui convergent vers la solution. On est tenté toutefois de se dire que Fourier n'a pas été malchanceux sur ce coup-là. Et encore ! Aimant accumuler les indices concordants, il calcule explicitement la dérivée de la somme partielle de (1), quand on y remplace les coefficients indéterminés $a, b, c, \ldots$ par les valeurs trouvées ; cette dérivée vaut $(-1)^m \sin(2mx)/(2\cos x)$, et il en déduit que les primitives, sommes partielles de (1), sont de plus en plus proches de fonctions constantes sur $(-\pi/2, \pi/2)$ [30].

Niels Henrik Abel [3] et Peter Gustav Lejeune Dirichlet [11] sont vite venus apporter de la rigueur dans le traitement des séries de fonctions. Abel n'a pas, à proprement parler, envisagé les séries trigonométriques dans son article de 1826 (qu'il a rédigé en français [31] ; l'article a été traduit en allemand par August Leopold Crelle, le « patron » du *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, voir [2, préface p. III] ; voir aussi Bottazzini [9, sec. 3.1] pour une analyse de cet article). Abel, à l'occasion de l'étude de la série du binôme de Newton, qu'il trouve insuffisamment justifiée chez Cauchy (bien qu'il vante le traité d'Analyse de ce dernier), établit des principes pour l'étude des séries de fonctions, en particulier pour celle des séries entières de variable complexe, dont il prouve la continuité dans le disque ouvert de convergence. Par ailleurs, Abel écrit également le nombre complexe $z = a + ib$ sous la forme $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et obtient alors des séries de Fourier. Ses bons principes ne l'empêchent pas de produire lui aussi des énoncés trop optimistes et en conséquence faux [32].

4. Compétition pour la chaleur, inimitiés

L'étude de la chaleur était un sujet sérieux autour de 1800, notamment avec l'essor de la machine à vapeur. Jean-Baptiste Biot, un élève de la première promotion de l'École polytechnique en 1794, disciple de Laplace, est membre de l'Institut dès 1803 ; il restera connu principalement pour la loi de Biot-Savart (1820), ainsi que pour la loi de rotation du plan de polarisation de la lumière traversant un liquide (1835). En 1804, il publie un *Mémoire sur la propagation de la chaleur* [6] [33] ; dans ce mémoire, très révérencieux à l'égard de « M. La Place », il traite de la température d'équilibre dans une barre chauffée à son extrémité, un sujet déjà beaucoup étudié dans plusieurs pays d'Europe, expérimentalement et avec des tentatives de mathématisation. On peut citer le livre du mathématicien et physicien Johann Heinrich Lambert, *Pyrometrie oder vom Maaße des Feuers und der Wärme*, paru en 1779, deux ans après sa mort ; ce livre est imprimé en gothique, pour ne pas nous aider, il a pu être peu lu en France et y avoir un impact assez faible. Il faut aussi remonter à un article (anonyme) d'Isaac Newton en 1701 qui fixe un premier principe, qu'on va grossièrement résumer ainsi : la température d'un corps chaud, refroidi dans un courant d'air de température basse et constante, est une fonction exponentielle décroissante du temps.

Biot décrit son expérience, constate qu'on ne peut pas échauffer sensiblement l'extrémité de la barre de fer de 2 mètres de long et 3 centimètres de section, si on place l'autre extrémité dans un feu intense. À l'équilibre thermique, il trouve une décroissance exponentielle de la température des points de la barre quand on s'éloigne de la source, avance une preuve mathématique verbale, mais n'écrit pas d'équation. Il explique l'équilibre qui s'établit en chaque point de la barre entre la chaleur reçue de la source, la chaleur transmise aux points de la barre plus éloignés et la chaleur perdue en surface, mais sans écrire de symbole ; il ne cite pas Lambert, quoique ces considérations soient quasiment identiques à celles de l'art. 326 de ce dernier [34].

29. [23, sec. 2.4]
30. [14, art. 43]
31. [2, XIV, p. 219]
32. [9, sec. 3.5]
33. [9, sec. 2.3.a]
34. [18, sec. 8.1, p. 163]

Biot mentionne que les résultats dépendent d'une équation différentielle du second ordre (on imagine qu'elle est de la forme $u'' = \kappa u$, $\kappa > 0$) où apparaît le quotient de la *rayonnance* et de la *conductivité* de la barre, deux coefficients qu'il distingue bien, mesurant la déperdition vers l'extérieur et la conduction intérieure. Il indique sans formule que la solution usuelle de l'équation différentielle (en $ae^{\sqrt{\kappa}x} + be^{-\sqrt{\kappa}x}$) ne contient ici qu'un terme, puisqu'elle doit rester bornée quand x devient grand (positif). Il signale aussi, avec des mots seulement, que le traitement mathématique conduira, en dehors de l'état d'équilibre, à une équation aux dérivées partielles du second ordre faisant intervenir le temps. Biot propose également, afin d'évaluer la température d'une source très chaude, de se servir de la loi exponentielle trouvée : on pourra mesurer, sur une barre dont une extrémité est placée au contact de la source trop chaude pour le thermomètre, la température d'un point convenablement éloigné de cette extrémité, et en déduire la température de la source chaude.

Le premier essai de Fourier en 1805 contient déjà des équations générales pour la propagation de la chaleur ; il n'est pas publié : ce sont plutôt des notes personnelles, comprenant quelque 80 pages. Fourier va plus loin que Biot : il s'occupe de températures d'équilibre $v(x,y)$ ou $v(x,y,z)$ qui dépendent de plusieurs variables d'espace, et traite aussi la variation avec le temps. Il écrit cependant l'équation différentielle (4) ci-dessous, en x simplement, pour la température d'équilibre de la barre chauffée à un bout, et il mentionne courtoisement [35] le travail de Biot de 1804. Dans cet essai, l'équation de la chaleur n'a pas encore sa forme correcte, Fourier faisant figurer dans l'équation à l'intérieur d'un solide le terme $h(v - v_e)$ de l'équation (7) donnée plus loin, terme qui ne doit apparaître qu'à la surface [36] ; on peut voir toutefois dans une note ajoutée en marge qu'il n'est pas sûr que ce terme doive être présent [37]. La formalisation du phénomène physique n'est pas encore satisfaisante [38] : Biot et Fourier ont des problèmes *d'homogénéité différentielle* dans l'analyse infinitésimale du problème, une « difficulté analytique » que Fourier contourne par une contorsion artificielle. En revanche, l'essai contient des parties mathématiques déjà achevées, on y trouve plusieurs des développements en série trigonométrique [39] qu'on reverra par la suite : la fonction créneau, la fonction en dents de scie entre autres.

Dans son mémoire soumis à l'Académie [14] en 1807, Fourier donne pour la température d'équilibre v de la « barre de Biot » l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2h}{K\ell} v \tag{4}$$

qui fait intervenir la largeur $\ell/2$ de la barre, cependant, le nom de Biot a disparu – je n'ai pas su trouver pourquoi –. Fourier pratique à cette date une analyse physique qui ne changera (presque) plus, en présentant sa notion de *flux de chaleur* (qui règle son problème d'homogénéité). L'analyse de Biot tenait compte des conductivités h, K – le *quotient* mentionné par Biot, évoqué précédemment –, mais elle ne tenait pas compte de ℓ. Plus tard, Fourier, s'estimant mal traité par Biot, se fera un plaisir d'insister à plusieurs reprises dans des lettres sur « l'erreur » de ce dernier : il est faux de prétendre qu'une tige de fer de 2 mètres de long chauffée à un bout ne peut s'échauffer à l'autre extrémité, si sa section est petite.

Biot était un excellent scientifique, Fourier l'a pourtant traité souvent par le mépris. Ils n'étaient pas du même bord politique et idéologique – Biot était un conservateur catholique – mais surtout, à diverses occasions, Biot a dénigré le travail de Fourier. Celui-ci avait peut-être mal commencé avec ce mémoire de 1807, dont il a transmis une copie à Biot et à Poisson. À tort ou à raison, Biot a pu estimer que Fourier se servait de son article de 1804, en tout cas sans le nommer maintenant, et en être ulcéré. Poisson aussi a attaqué les mathématiques de Fourier. Biot et Poisson, deux jeunes ambitieux et talentueux, étaient dans l'orbite de Laplace ; il semble que le « patron » soit resté au-dessus de cette mêlée.

Laplace écrit à son tour sur la propagation de la chaleur en 1809, dans un mémoire qui traite de bien d'autres sujets de la physique, comme le titre l'indique [25] ; pour la chaleur, il adopte [40] le principe de la transmission par action à courte distance. Il retrouve les équations de la chaleur, admet la priorité de Fourier : « Je dois observer que M. Fourier est déjà parvenu à ces équations, » cependant il ajoute

35. [16, fin du ch. 8, p. 186]
36. [9, fin de 2.3.a, p. 65-66]
37. [16, ch. 5, p. 111]
38. [18, 8.1, p. 164-165]
39. [16, fin du ch. 8, p. 184]
40. [25, Note, p. 290 dans les Œuvres de Laplace, t. XII]

« dont les véritables fondements me paraissent être ceux que je viens de présenter ». Biot publie en octobre 1809 au *Mercure de France* un article [5] rendant compte du livre *Du calorique rayonnant*, de Pierre Prévost ; il y cite de nombreux savants, Laplace et Lavoisier (1784), Pictet, Rumford, Leslie ; il explique le point de vue de Prévost sur le rayonnement, décrit des expériences concrètes pour appréhender le phénomène. Jusque là, rien pour trop fâcher Fourier qui, à l'époque, ne s'occupe pas particulièrement du rayonnement. Mais Biot continue :

> C'est ce qui a conduit un grand géomètre (2) [*renvoi à une note de bas de page, voir ci-après*] à étendre le rayonnement même dans l'intérieur des corps solides ; [...] Ces considérations donnent immédiatement les lois mathématiques de la chaleur transmise conformément aux phénomènes, et elles ont l'avantage de faire disparaître une difficulté analytique qui a jusqu'ici arrêté tous ceux qui ont voulu soumettre au calcul, la propagation de la chaleur à travers les corps.

Pas une seule fois le nom de Fourier n'apparaît dans les douze pages de l'article de Biot. La note (2) est ainsi formulée : « (2) M. Laplace. Ce que l'on rapporte ici a été recueilli dans ses conversations, et forme l'objet d'un travail sur la chaleur, qu'il n'a pas encore publié » – mais Laplace a déjà « lu » un texte à l'Académie pendant la séance du lundi 30 janvier 1809, prélude au mémoire [25] de 1810 –. De fait, Biot attribue à Laplace tout le crédit des découvertes récentes sur la théorie de la chaleur, et sans citer Fourier, il conteste implicitement la validité de ses résultats : « une difficulté analytique [...] qui a [...] arrêté *tous ceux* qui [...] ». Ce passage, particulièrement, choque et vexe Fourier. Il réagit et formule des reproches très vifs à l'égard de Biot dans des lettres à plusieurs correspondants [41], [42]. S'il répugne à polémiquer dans les revues savantes, Fourier est aussi un politique qui a des soutiens : pour faire avancer sa cause, il peut, il sait écrire à des personnes qui ont du poids (il apprendra, par ailleurs, que le silence est plus efficace dans certaines circonstances). Il communique également avec Laplace, en termes fort civils ; il doit tout de même lui garder une rancune qui lui fera oublier de citer, tout au long de son œuvre majeure [15], le nom de Laplace [43].

Biot s'est opposé à Fourier, mais il a quitté assez rapidement la recherche sur la théorie de la chaleur, contrairement à Poisson. Biot parle cependant de la chaleur dans son grand *Traité de physique expérimentale et mathématique* en quatre volumes de 1816 [44] ; dans une longue note au bas de la page 669 du tome 4, il revendique d'avoir été le premier à établir dans son article de 1804 l'équation correcte du cas stationnaire. Fourier n'a eu aucun mal à contredire cette prétention de priorité [45]. Dans la même note, Biot cite encore Laplace comme découvreur de l'équation générale de la chaleur, que Fourier n'aurait fait que *retrouver* : omettant celui de 1807, il mentionne le mémoire primé en 1812 de Fourier, postérieur au mémoire de Laplace. Pour finir, Biot met en avant les travaux de Poisson, dont il vante le traitement du problème de la chaleur, supérieur selon lui à celui de Fourier par les séries trigonométriques. On ne trouve plus trace de la polémique après 1816, tout au moins du vivant de Fourier. Mais à 68 ans, Biot aura encore un peu de fiel à déverser : dans le cours d'un article à la *Revue des Savants* en 1842, consacré d'après le titre à la parution commencée en 1836 des *Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie*, il s'en prendra à la gestion du secrétaire perpétuel Fourier, à la qualité de son éloge de Laplace, etc. etc.

5. La vie parisienne

Kahane [46] parle des concurrents de Fourier, à savoir Cauchy et surtout Poisson dont il réhabilite les mathématiques s'il en était besoin ; il veut peut-être contrebalancer Grattan-Guinness qui, dans un de ses livres [16], a été très négatif à son sujet. Poisson a été un concurrent, sinon un adversaire de Fourier. Dans un séminaire cette année, j'ai entendu Gilles Lebeau parler de Poisson comme d'un grand homme. Il est amusant de voir comment l'avait perçu un futur grand homme, le jeune Abel, 24 ans, séjournant quelque temps à Paris (pour être précis, du 10 juillet au 29 décembre 1826). Les lettres d'Abel ont paru dans un recueil [1] publié en 1902 à

41. [10, ch. VI, p. 340]
42. [18, Appendix, lettres XVII et XVIII]
43. [10, ch. VIII, p. 479])
44. [17, sec. 7.7, 9.4.2]
45. [18, ch. 7, p. 158]
46. [23, sec. 3.5]

l'occasion du centenaire de sa naissance. Heureusement pour nous Français, elles y sont traduites dans notre langue (mais les mots de cette traduction ne sont pas toujours les mêmes que dans les courts extraits des lettres déjà parus et traduits dans les Œuvres [2] en 1881). Abel espérait entrer en contact avec les mathématiciens français, l'été n'était pas le meilleur moment. Il écrit :

« Je n'ai vu Poisson que sur une promenade publique ; il m'a paru très épris de lui-même. Il parait pourtant qu'il ne l'est pas. » (Lettre XVI, à Hansteen, 12 août 1826).

et plus tard :

« Poisson est un petit homme avec un joli petit ventre. Il porte son corps avec dignité. De même Fourier. » (Lettre XVIII, à Holmboe, 24 octobre 1826).

Pour ce qui est de l'aspect physique, Abel préférait sans nul doute les jeunes parisiennes qu'il évoque dans la même lettre du 24 octobre à son ami norvégien. Les lettres d'Abel contiennent quelques expressions « en français dans le texte », rendues ci-dessous en italique. Par leur caractère intime, ces lettres offrent un contraste absolu avec la *sévérité* d'un Fourier [47] dont on connaît peu les émotions (on sait néanmoins qu'il était d'une nature joviale). Après avoir dit qu'il aime aller voir Mlle Mars au théâtre, et parlé des obsèques du grand comédien Talma, Abel ajoute :

> Je vais aussi de temps en temps au Palais Royal que les Parisiens appellent *un lieu de perdition*. On y voit en assez grand nombre *des femmes de bonne volonté*. Elles ne sont nullement indiscrètes. Tout ce que l'on entend est *Voulez-vous monter avec moi mon petit ami ; petit méchant*. [...] Il y en a beaucoup de fort jolies.

Abel assure aussitôt que lui, qui est fiancé en Norvège, reste très sage. Il note qu'il a croisé

« [...] Herr Le-jeune Dirichlet, un prussien, qui l'autre jour est venu me trouver, me considérant comme un compatriote ».

Ce « prussien » est né en 1805 à Düren, alors située dans la France de Napoléon, entre Cologne et Aix-la-Chapelle, et il est vrai, Düren est revenue à la Prusse après 1815 ; son grand-père était né à Verviers [48]. En mai 1822, le jeune allemand vient étudier à Paris. Il prouve en 1825 un cas – parmi deux – du « grand théorème de Fermat » pour $n = 5$, et présente son travail à l'Académie ; l'autre cas est complété rapidement par Adrien-Marie Legendre (et plus tard, par Dirichlet lui-même, dans un article de 1828 au journal de Crelle). Fin 1825, il doit déplorer la mort du général Foy, qui lui avait procuré à Paris une position confortable de précepteur depuis l'été 1823. Dirichlet faisait partie d'un cercle de « partisans » de Fourier, incluant Sturm, Sophie Germain, Navier et, un peu plus tard, Joseph Liouville autour de sa vingtième année. D'après les commentaires des éditeurs des lettres d'Abel, Fourier a recommandé Dirichlet pour son premier poste à Breslau (aujourd'hui Wrocław en Pologne) en 1827. C'est probablement sous son influence que l'arithméticien Dirichlet en vient aux séries trigonométriques. Dans son *célébrissime* article [11] de 1829 sur la question, en français, il reproduit à l'identique, sans dire le nom de Fourier mais en citant la *Théorie analytique de la chaleur* et ses articles, la formule des coefficients qu'on trouve à la fin de l'article 233 du livre de Fourier [15],

$$\frac{1}{2\pi}\int \varphi(\alpha)\,\partial\alpha +$$
$$\frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos x\int\varphi(\alpha)\cos\alpha\,\partial\alpha+\cos 2x\int\varphi(\alpha)\cos 2\alpha\,\partial\alpha....\\ \sin x\int\varphi(\alpha)\sin\alpha\,\partial\alpha+\sin 2x\int\varphi(\alpha)\sin 2\alpha\,\partial\alpha....\end{array}\right\}.$$

Naturellement, Fourier s'était approché du noyau de Dirichlet D_n et de son utilisation : il avait écrit [49] – employant la fonction aujourd'hui démodée *sinus verse* – la somme $D_n(x) = \sum_{j=-n}^{n}\cos(jx)$ sous une forme équivalente à $\cos(nx) + \sin(nx)\operatorname{cotan}(x/2)$, et avait avancé des raisons heuristiques pour un « lemme de Riemann », puis pour la convergence vers $\varphi(x_0)$ des intégrales de φ contre les translatés par x_0 de ces « noyaux ». Dirichlet a transformé ces « raisons » en preuve.

L'absence du nom de Fourier dans l'article [11] signifie-t-elle que celui-ci était si grand dans l'esprit de Dirichlet que le nommer lui semblait inutile ? C'est alors seulement que le lecteur moderne peut être sûr d'en comprendre le premier paragraphe,

> [...] Cette propriété n'avait pas échappée [*sic*] au géomètre illustre qui a ouvert une nouvelle carrière aux applications de l'analyse, en y introduisant la manière d'exprimer les fonctions arbitraires dont il est question ; elle se trouve énoncée dans le Mémoire qui

47. [10, épilogue, p. 683]
48. voir Jürgen Elstrodt [13]
49. [15, ch. IX, art. 423, p. 562]

> contient ses premières recherches sur la chaleur.

L'article de Dirichlet est ainsi présenté par le journal « de Crelle », après le titre :

> (Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

et daté en dernière page : « Berlin, Janvier 1829 », le mois avant son 24e anniversaire. Plus tard, en allemand, dans un article [12] de 1837 destiné aux physiciens-mathématiciens, Dirichlet nommera Fourier et explicitera sa considération pour lui. C'est à Cauchy, qui a proposé des preuves concernant les séries de Fourier (*Mémoire sur le développement des fonctions en séries périodiques*, 1827), que Dirichlet adresse ses critiques dans [11]. Mauvais souvenirs de Paris, de mai 1822 à 1826 ? Revenons à la lettre du 24 octobre 1826, où Abel écrit :

> Legendre est un homme extrêmement aimable mais par malheur « vieux comme les pierres » [*steinalt, en allemand dans le texte*]. Cauchy est *fou*, et il n'y a rien à faire avec lui,

il ajoute en revanche : « bien qu'il soit en ce moment le mathématicien qui sait comment traiter les mathématiques. » Plus loin, à propos d'un mémoire *Sur une certaine classe d'équations transcendantes* qu'il vient d'achever et veut présenter à l'Académie, Abel confie :

> Je l'ai montré à Cauchy ; mais c'est à peine s'il a voulu y jeter les yeux. Et j'ose dire sans me vanter qu'il est bon. Je suis curieux d'entendre le jugement de l'Institut.

C'est justement le secrétaire perpétuel Fourier qui s'en occupera, pas si bien d'ailleurs ; Legendre (un vrai spécialiste, mais âgé de 74 ans) et Cauchy sont désignés comme « commissaires », à la séance du 30 octobre 1826. Ensuite, rien ne bouge. Plus de deux ans après, Carl Jacobi écrit à Legendre de Königsberg [50], le 14 mars 1829, pour obtenir des nouvelles du mémoire d'Abel, moins d'un mois avant la mort de ce dernier. Legendre répond le 8 avril de Paris, explique que « le mémoire n'était presque pas lisible, il était écrit en encre très-blanche, les caractères mal formés », que Cauchy et lui s'étaient mis d'accord pour demander à l'auteur une copie plus lisible, ce qu'Abel ne fit pas, et les choses en étaient restées là. Legendre accable un peu Cauchy :

> M. Cauchy a gardé le manuscrit jusqu'ici sans s'en occuper [...]. Cependant j'ai demandé à M. Cauchy qu'il me remette le manuscrit qui n'a jamais été entre mes mains, et je verrai ce qu'il y a à faire, pour réparer, s'il est possible, le peu d'attention qu'il a donné à une production qui méritait sans doute un meilleur sort.

Kahane [51] parlant de Fourier nous dit de Cauchy qu'il « n'était pas son ami », un très joli « understatement ». On lit souvent que néanmoins, Cauchy lui a reconnu la paternité de la notation $\int_a^b$ de l'intégrale définie, prise entre deux bornes a et b. Un peu comme si Georg Cantor, ou Karl Weierstrass après 1885, insistait pour reconnaître à Leopold Kronecker la paternité de son symbole...

6. Réception de l'œuvre : Riemann

On peut lire dans plusieurs sources que Fourier est resté méconnu, maltraité en France – même Victor Hugo s'en est mêlé ! [52] –, en dépit de sa reconnaissance (lente) par l'Académie. Ses *Œuvres* sont publiées tardivement, en 1888 et 1890. Pourtant, Dirichlet l'a célébré, en français, sept ans à peine après la parution du livre de 1822, et il a dû transmettre à Bernhard Riemann sa haute appréciation de l'œuvre de Fourier. La partie historique du mémoire d'habilitation de Riemann [29], écrit en 1854 et publié en 1867 après sa mort, est donnée par Kahane [53] en allemand et en français (traduction de L. Laugel [28], 1873) ; Riemann indique dès la première page :

> Les séries trigonométriques, ainsi appelées par Fourier [...] jouent un rôle considérable dans la partie des Mathématiques où l'on rencontre des fonctions entièrement arbitraires.

Plus loin, après avoir rappelé d'Alembert, Euler, Bernoulli et Lagrange :

> Près de cinquante années s'étaient écoulées sans que la question de la possibilité de la représentation analytique

50. [19, p. 436]
51. [23, fin du ch. 1]
52. [23, fin du ch. 1]
53. [23, sec. 5.9]

> des fonctions arbitraires fît aucun progrès essentiel, quand une remarque de Fourier vint jeter un nouveau jour sur cet objet. Une nouvelle ère s'ouvrit pour le développement de cette partie des Mathématiques, et s'annonça bientôt d'une manière éclatante par de grandioses développements de la Physique Mathématique. Fourier remarqua que, dans la série trigonométrique [...] les coefficients se déterminent par les formules
>
> $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$
>
> $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$
>
> [*Riemann écrit* $a_n \sin nx + b_n \cos nx$*, contrairement à l'habitude moderne*] Il vit que cette détermination reste encore applicable lorsque la fonction $f(x)$ est donnée tout à fait arbitrairement.

Riemann réfute ensuite la position de Poisson, qui a voulu, chaque fois qu'il les a citées (Riemann prend pour exemple le *Traité de mécanique* de 1833, art. 323, p. 638), faire remonter ces formules à une publication de Lagrange dans *Miscellanea Taurinensia* (t. III, 1762-1765). Dans ce long travail plutôt touffu, Lagrange résout un certain nombre d'équations et de systèmes différentiels, et revient à l'art. 38 sur sa solution du problème des cordes vibrantes, où il a raisonné sur N masses égales placées en des points de la corde équidistants, faisant tendre N vers l'infini par la suite. La formule invoquée par Poisson apparaît à l'article 41. Lagrange y pose une question d'interpolation qu'on va détailler, interpolation sur $[0,1]$ par un polynôme trigonométrique somme de sinus.

Étant donnée une « courbe » $Y(x)$ telle que $Y(0) = Y(1) = 0$, Lagrange cherche, pour n grand mais fixé, une courbe $y(x) = \alpha\sin(x\pi) + \beta\sin(2x\pi) + \cdots + \omega\sin(nx\pi)$ qui coïncide aux points $x_k = k/(n+1)$, $k = 1,\dots,n$, avec la courbe initiale Y. Il écrit sa solution (à une différence de notation près) sous la forme

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} 2Z_j \sin(jx\pi)$$

où

$$Z_j = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} Y(x_k)\sin(jx_k\pi), \quad j = 1,\dots,n;$$

ce que Lagrange a prouvé dans les pages précédentes lui fournit la formule « inverse » $y(x_k) = Y(x_k)$, pour chaque $k = 1,\dots,n$. Ce sont bien les transformations « de Fourier » directe et inverse, sur le groupe $\mathbb{Z}/(2n+2)\mathbb{Z}$, limitées aux fonctions « impaires » (on pourrait prolonger la fonction Y en fonction impaire sur $[-1,1]$). Ensuite, Lagrange *décide de poser* $n+1 = 1/(dX)$ et $x_k = k/(n+1) = X$. Il récrit alors la formule pour Z_j comme une « intégrale étant prise depuis $X = 0$ jusqu'à $X = 1$ » ; remplaçant dans $y(x)$, il obtient une sorte de *formule intégrale de Fourier* (pour les fonctions impaires, et limitée au degré n), dont je modernise un peu la notation,

$$y(x) = 2\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^1 Y(X)\sin(jX\pi)\,dX\Big)\sin(jx\pi). \tag{5}$$

Lagrange précise qu'il a bien trouvé ainsi une fonction $y(x)$ qui *coïncide* avec la fonction donnée $Y(x)$ aux points $x_k = k/(n+1)$, $k = 1,\dots,n$ (et $k = 0, n+1$).

Il y a un problème : pour que Poisson ait tout à fait raison de contester la priorité de Fourier, il faut vraiment lire *une intégrale*. Mais pour que Lagrange ait réussi son interpolation annoncée, *il faut* qu'on ait gardé ci-dessus une somme finie. À la partialité sans surprise de Poisson à l'égard de Fourier – même après la mort de ce dernier –, Riemann répond par une petite dose de mauvaise foi, refusant de reconnaître au moins les prémices des formules intégrales, dans des « sommes de Riemann » dont le pas tend vers 0 ! Il écrit :

> Cette formule a bien le même aspect que la série de Fourier, si bien qu'au premier coup d'œil, une confusion est aisément possible ; mais cette apparence provient simplement de ce que Lagrange a employé les symboles $\int dX$, là où il aurait employé aujourd'hui les symboles $\sum \Delta X$. [...] Si Lagrange avait fait tendre n vers l'infini dans cette formule, il serait bien parvenu au résultat de Fourier ; [...] [*je me suis un peu écarté de la traduction citée* [28]].

Bien qu'introduit par Euler en 1755, le symbole de sommation $\sum$ (sans bornes indiquées, comme pour l'intégrale à cette époque) n'était pas courant avant 1800 ; Lagrange avait besoin d'un symbole afin de pouvoir écrire sur seulement deux lignes la double sommation dans la formule (5) pour $y(x)$, la somme en $X = x_k$ (qu'il traduit donc par les intégrales de 0 à 1), et celle en j qu'il écrit sous forme développée $s_1 + \cdots + s_n$; il aurait utilisé le signe $\int$

dans ce but. Riemann ajoute que Lagrange *ne croyait pas* à la possibilité de représenter les fonctions arbitraires par des séries trigonométriques, et que pour cette raison, il n'était pas arrivé aux formules de Fourier : « Bien sûr il nous semble aujourd'hui à peine pensable que Lagrange ne soit pas parvenu à la série de Fourier à partir de sa formule de sommation ». Il continue :

« C'est Fourier qui a, le premier, compris d'une manière exacte et complète la nature des séries trigonométriques. »

puis il passe aux premières *preuves générales du théorème de Fourier*, c'est-à-dire à l'article de Dirichlet [11].

7. Physique mathématique ou mathématiques pures ?

Je ne suis pas bien qualifié pour parler de la portée, évidente, proclamée dans le titre du livre de Dhombres et Robert [10], de l'œuvre de Fourier en ce qui concerne la physique mathématique. Il est clair que Fourier voulait œuvrer à la compréhension du monde, mettre en équation un phénomène naturel de la plus haute importance, comme Newton l'avait fait pour l'attraction des corps. L'ambition est grande, le point de vue de physique mathématique est énoncé dès les premières lignes du *Discours préliminaire* à la *Théorie* [15] [54] :

« La chaleur pénètre, comme la gravité, toutes les substances de l'univers [...] Le but de notre ouvrage est d'exposer les lois mathématiques que suit cet élément. Cette théorie formera désormais une des branches les plus importantes de la physique générale. »

et vers le milieu du discours préliminaire :

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. »

Fourier tient à dire au début du *Discours* qu'il a lui-même effectué de nombreuses mesures à l'appui de sa théorie, avec les instruments les plus précis. Il ne veut pas avoir à prendre en compte les divers aspects particuliers que peut prendre la chaleur ; il évite d'avoir à distinguer entre les différentes formes de propagation, par contact, par diffusion, par rayonnement. C'est aussi le point de vue de Biot en 1804 [6] :

> Je n'examinerai pas ici si la chaleur est un corps, ou si elle n'est que le résultat du mouvement intérieur des particules de la matière, mais en admettant que ses effets, lorsqu'elle devient sensible, sont mesurables par le thermomètre, je chercherai les lois de sa propagation.

Dans son mémoire de 1807, et plus définitivement à partir du mémoire primé en 1812 [55], [56], Fourier fonde sa démarche sur la notion de *flux de chaleur*, qui pourra sembler très naturelle à notre époque mais qui est bien son invention. Considérons un point P intérieur à un solide homogène, un temps t et une direction donnée par un vecteur u unitaire ; envisageons un cercle infinitésimal $d\sigma$ de centre P et contenu dans un plan affine orthogonal à u, désignons par dS l'aire de $d\sigma$, et par dq la quantité de chaleur qui traverse $d\sigma$, dans le sens de u et en une durée dt après la date t. Le flux de chaleur au point P, au temps t et dans la direction u, est la limite ϕ_u du quotient $dq/(dS\,dt)$; en termes modernes, la loi fondamentale de Fourier indique que ce flux s'exprime comme un produit scalaire, $\phi_u = -\kappa \nabla v \cdot u$, où v est la température et où le coefficient $\kappa > 0$ dépend du solide. Avec des mots différents, il le formule [57] dans les articles 96 et 97 de la section *Mesure du mouvement de la chaleur en un point donné d'une masse solide* ; en réalité, il n'y a pas de vecteur chez lui, seulement des coordonnées rectangulaires ; le flux dans le cas général est déterminé par trois valeurs, les flux dans les directions des x, y et z croissants. Dans le livre, il y arrive très progressivement, commençant par des mouvements uniformes de chaleur, et même d'abord, uniformes dans la direction d'un axe de coordonnées (ch. I, sec. 4 et sec. 7). Fourier revient au flux à l'art. 140, avant d'en déduire l'équation de la chaleur à l'art. 142.

Évidemment, Fourier n'écrit pas l'équation de la chaleur sans y faire figurer des constantes physiques caractéristiques du corps considéré. Ainsi, pour l'équation qui régit la température v à l'intérieur d'un solide, il écrit

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big), \tag{6}$$

où D est la densité, K la conductibilité interne et C la chaleur spécifique ; de plus, il est un des premiers à s'intéresser à des *équations aux dimensions* faisant intervenir les puissances positives ou

54. repris dans [10, Annexe V, p. 717] ou dans [23, sec. 2.5]
55. [18, ch. 9]
56. [14, art. 18 et suiv.]
57. [15, ch. I, sec. VIII, p. 89]

négatives des grandeurs physiques, la longueur, le temps et pour lui, la température [58] ; on n'aurait pas aujourd'hui la température mais la masse, en exprimant la chaleur en équivalent mécanique.

Fourier précise la condition aux limites pour son équation (6) aux dérivées partielles : l'équation à la frontière du solide est, en notation moderne,

$$\nabla v \cdot n = -\frac{h}{K}(v - v_e), \tag{7}$$

où n est la normale sortante, h la conductibilité externe et v_e la température à l'extérieur du solide [59] (Fourier suppose $v_e = 0$).

Dhombres et Robert [60] indiquent que l'enseignement de la propagation de la chaleur suit encore de nos jours la démarche de Fourier, ils notent

« [...] la manière quasi inchangée dont se formulent, se présentent, et se démontrent aujourd'hui les résultats essentiels que Fourier a énoncés [...] »,

précisant qu'on trouve dans les grands manuels de physique du milieu du xx^{e} siècle (Georges Bruhat, Richard Feynman parmi d'autres), pour une plaque métallique ou un anneau par exemple, des calculs essentiellement semblables à ceux de Fourier. Ils ajoutent qu'on ne démontre plus de nos jours la loi de diffusion de la chaleur dans les solides, parce que d'une part, on ne sait pas le faire à partir des lois fondamentales de la physique atomistique, et qu'à l'inverse, le raisonnement de Fourier paraît trop peu atomiste aujourd'hui.

Après la consécration, Fourier publie entre 1817 et 1825 des « contributions à l'étude de la chaleur rayonnante », le phénomène de rayonnement par lequel la chaleur (ou le froid) peut se transmettre à distance sans contact. Ce sujet devra toutefois attendre les avancées de la physique à la fin du xix^{e} siècle (loi de Stefan en 1860, retrouvée par Boltzmann en 1879) pour recevoir des réponses plus complètes. En 1824, Sadi Carnot, fils de Lazare Carnot, publie ses *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, mais Fourier reste étranger à ces recherches – il ne sera pas le seul, dans les années 1825-1830 –; le livre de Carnot participe à la naissance de la thermodynamique.

Kahane a écrit plusieurs articles sur Fourier, il a mentionné l'opposition entre les points de vue de ce dernier et ceux de certains mathématiciens « purs ». Il a cité [61] un extrait très connu d'une lettre de Jacobi à Legendre, envoyée de Königsberg le 2 juillet 1830, peu de temps après la mort de Fourier survenue mi-mai 1830. Jacobi s'adresse à Legendre en français, il demande ici et là d'être excusé des incorrections que son français pourrait comporter. Les lettres de Jacobi ont été transcrites et publiées par Joseph Bertrand [20] ; nous sommes obligés de faire confiance à Bertrand et à son éditeur pour l'exactitude de la transcription : les lettres ont brûlé en 1871 pendant la Commune de Paris, ainsi que la maison de Bertrand rue de Rivoli.

Jacobi écrit [62] : « J'ai lu avec plaisir le Rapport de M. Poisson sur mon Ouvrage, et je crois pouvoir en être très-content ; il me paraît avoir très-bien présenté [*mon travail.*]. Mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son Rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne nous pas être occupés de préférence du mouvement de la Chaleur. » Puis :

> Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question des nombres vaut autant qu'une question du système du monde.

Jacobi poursuit en regrettant la disparition de Fourier, « [...] de tels hommes sont trop rares aujourd'hui, même en France, pour qu'il soit facile de les remplacer. » Il termine en demandant à Legendre de faire ses « civilités à Mlle Sophie Germain, dont je me félicite d'avoir fait la connaissance, et de me dire des nouvelles de sa santé [...] ». Sophie Germain souffre de la « longue maladie » qui l'emportera l'année suivante.

Quatre ans plus tôt, Abel regrettait l'engagement appliqué de Fourier et des mathématiciens français, il écrivait à Holmboe (24 octobre 1826) :

> [Cauchy] est d'ailleurs le seul qui travaille aujourd'hui dans les mathématiques pures. Poisson, Fourier, Ampère etc. etc. ne s'occupent absolument que de magnétisme et d'autres affaires de physique.

Poisson, Fourier, André-Marie Ampère : trois professeurs à l'École polytechnique. On pourrait se de-

58. [10, ch. VIII, p. 515-518]
59. [15, art. 146 p. 138 et art. 147]
60. [10, ch. IX, p. 626]
61. [23, sec. 4.6]
62. [19, vol. 1, p. 454]

mander si la prééminence scientifique de l'École en France pendant la première moitié du XIXe siècle, avec sa mission de former principalement des ingénieurs, n'est pas une des raisons du déclin de la France mathématique au milieu du même siècle, dépassée par l'université allemande. Joseph Ben-David [4] a incriminé plutôt une sclérose de l'enseignement à l'École, qui s'est laissé distancer par la marche de la science, oubliant une des missions fixées par les pères fondateurs, le deuxième terme de la pompeuse devise de 1804, « Pour la Patrie, les Sciences et la Gloire ».

La renommée mathématique de Fourier a subi une éclipse en France dans la deuxième partie du XIXe siècle, mais l'Analyse harmonique et ses séries de Fourier, sa transformation de Fourier, a trouvé sa place au XXe siècle au sein des mathématiques françaises « très pures ». Kahane y a contribué par ses articles et ses livres, où on peut voir traités les sujets les plus pointus sur des *ensembles minces*, provenant d'une étude exclusivement mathématique des séries de Fourier. Un peu paradoxalement, le même Kahane s'est fait l'avocat de la physique mathématique de Fourier. Revenant sur « l'éclipse » il voit, dans son article [22] de 2014, un retour en force des points de vue de Fourier à l'occasion d'une convergence math-physique à l'époque actuelle :

> Cette méconnaissance de Fourier est maintenant datée. Elle ne s'est maintenue en France qu'à la faveur d'un divorce entre mathématiques et physique qui est aujourd'hui complètement résorbé. L'une des plus grandes universités françaises, à Grenoble naturellement, porte le nom de Joseph Fourier.

Nous pourrons conclure avec Kahane, qui écrit dans le même texte :

> Quand j'étais jeune, et c'est encore le cas aujourd'hui parmi les jeunes, « l'honneur de l'esprit humain » sonnait plus glorieux que « l'étude approfondie de la nature ». Cependant la philosophie de Fourier me paraît plus proche que jamais de l'évolution actuelle des mathématiques et de leur portée, qualifiée parfois de « déraisonnable », dans les sciences de la nature.

La plupart des références « historiques » ci-dessous sont faciles à trouver de nos jours sur Internet, par exemple la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier ou le Mémorial rassemblant les Lettres d'Abel, sur des sites tels que EuDML, Gallica, archive.org et bien d'autres.

Repères chronologiques

Joseph-Louis Lagrange	1736-1813	Gaspard Monge	1746-1818
Pierre-Simon Laplace	1749-1827	Adrien-Marie Legendre	1752-1833
Lazare Carnot	1753-1823	François Budan de Boislaurent	1761-1840
Sylvestre-François Lacroix	1765-1843	Joseph Fourier	1768-1830
Napoléon Bonaparte	1769-1821	Jean-Baptiste Biot	1774-1862
Marie-Sophie Germain	1776-1831	Jacques-Joseph Champollion-Figeac	1778-1867
Siméon Denis Poisson	1781-1840	Henri Beyle (Stendhal)	1783-1842
Friedrich Wilhelm Bessel	1784-1846	Claude Louis Marie Henri Navier	1785-1836
Augustin Louis Cauchy	1789-1857	Jean-François Champollion	1790-1832
Nicolas Sadi Carnot	1796-1832	Niels Henrik Abel	1802-1829
Jacques Charles Sturm	1803-1855	Carl Gustav Jacobi	1804-1851
Gustav Lejeune-Dirichlet	1805-1859	Joseph Liouville	1809-1882
Évariste Galois	1811-1832	Bernhard Riemann	1826-1866

Références

[1] N. Abel. *Niels Henrik Abel : Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*. Jacob Dybward, Kristiana ; Gauthier-Villars, Paris ; William & Norgate, Londres ; B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

[2] N. Abel. *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*. Nouvelle édition publiée aux frais de l'État norvégien, par MM. L. Sylow et S. Lie. De Grøndahl & Søn, Christiana. 1881.

[3] N. Abel. « Untersuchungen über die Reihe: $1+\frac{m}{1}x+\frac{m.(m-1)}{1.2}.x^2+\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}.x^3+\ldots\ldots$ u. s. w. » *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1** (1826), p. 311–339.

[4] J. Ben-David. « The rise and decline of France as a scientific centre ». *Minerva* **8**, no 1-4 (1970), p. 160–179.

[5] J.-B. Biot. « Du calorique rayonnant par Pierre Prevost ». *Mercure de France* **38** (1809), p. 327–338.

[6] J.-B. Biot. « Mémoire sur la propagation de la chaleur, et sur un moyen simple et exact de mesurer les hautes températures ». *Journal des Mines* **99**, *203-224 (1804-1805) ; et aussi: Bibliothèque britannique* **27** (1804), p. 310–329.

[7] *Bonaparte, la campagne d'Égypte*. Film documentaire-fiction de Fabrice Hourlier. 2016.

[8] J. Borowczyk. « Sur la vie et l'œuvre de François Budan (1761-1840) ». *Historia mathematica* **18**, n° 2 (1991), p. 129–157.

[9] U. Bottazzini. *The higher calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Springer-Verlag, New York, 1986.

[10] J. Dhombres et J.-B. Robert. *Joseph Fourier, créateur de la physique mathématique*. "Un savant, une époque". Belin, Paris, 1998.

[11] P. G. L. Dirichlet. « Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données ». *Journal für die reine und angew. Math.* **4** (1829), p. 157–169.

[12] P. G. L. Dirichlet. « Ueber die Darstellung ganz willkührlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen ». *Repertorium der Physik* (1837).

[13] J. Elstrodt. « The life and work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) ». *Analytic Number Theory* (2007). A tribute to Gauss and Dirichlet. Proceedings of the Gauss-Dirichlet conference, Göttingen, Germany, June 20-24, 2005. Édité par William Duke et Yuri Tschinkel. Clay Mathematics Proceedings 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2007., p. 1–37.

[14] J. Fourier. « Sur la propagation de la chaleur ». *Mémoire présenté à l'Académie en décembre 1807. Inédit, reproduit et commenté dans [16]* (1972).

[15] J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, Paris, 1822.

[16] I. Grattan-Guinness. *Joseph Fourier 1768-1830. A survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat, presented to the Institut de France in 1807, en collaboration avec J. Ravetz*. The MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1972.

[17] I. Grattan-Guinness. *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840: from the calculus and mechanics to mathematical analysis and mathematical physics*. **4**. Science Networks. Historical Studies. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[18] J. Herivel. *Joseph Fourier, The Man and the Physicist*. Clarendon, Oxford, England, 1975.

[19] C. G. J. Jacobi. *Jacobi's Gesammelte Werke*. G. Reimer, Berlin, 1881-1891.

[20] C. G. J. Jacobi. « Lettres sur la théorie des fonctions elliptiques (publiées par Joseph Bertrand) ». In : *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. Vol. 6. Elsevier. 1869, p. 127–175.

[21] *Joseph Fourier (1768-1830), de la Révolution française à la révolution analytique. Sous la direction de Jean Dhombres.* à paraître chez Hermann.

[22] J. P. Kahane. « Qu'est-ce que Fourier peut nous dire aujourd'hui ? » *Gazette des Mathématiciens*, n° 141 (2014), p. 69–75.

[23] J.-P. Kahane et P.-G. Lemarié-Rieusset. *Séries de Fourier et ondelettes*. Cassini, Paris, 1998.

[24] T. W. Körner. *Fourier analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[25] P. S. Laplace. « Mémoire sur le mouvement de la lumière dans les milieux diaphanes ». *Œuvres complètes, t. XII* (1810), p. 267–298.

[26] *L'École Normale de l'an III. Vol. 1, Leçons de mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge. Sous la direction de Jean Dhombres. Dunod, Paris, 1992*. Version numérique (consultable en ligne) : Éditions Rue d'Ulm via OpenEdition, 2012.

[27] F. Masson. « L'expédition d'Égypte et la "Description" ». *Bulletin de la Sabix*, n° 1 (1987).

[28] B. Riemann. « Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique ». *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* **5** (1873), p. 20–48.

[29] B. Riemann. *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*. Dreizehnten Band der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1867.

Bernard Maurey

Équipe d'Analyse fonctionnelle de l'imj-prg, Sorbonne Université

bernard.maurey@imj-prg.fr

Professeur à l'université Paris 7 – Denis Diderot jusqu'en 2011, ses recherches portent principalement sur la théorie des espaces de Banach, les inégalités géométriques et fonctionnelles.

Je remercie Jean Dhombres, qui m'a autorisé à piller son ouvrage avec Jean-Bernard Robert [10], et qui m'a fait l'honneur de lire et commenter une version préliminaire de cet article ; il m'a permis de rectifier quelques-unes de mes inexactitudes. Les deux rapporteurs ont contribué à faire beaucoup progresser mon texte, en me forçant à être plus clair ou plus précis, et en m'aidant à éviter de passer à côté de points importants. L'Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche et Sorbonne Université m'ont donné les moyens nécessaires à la réalisation de ce travail.