Une fréquence peut-elle être instantanée ?

Patrick Flandrin

CNRS & Ecole normale supérieure de Lyon

Résumé : *Enregistrer un événement, mesurer l'évolution d'un système, transmettre une information : autant de situations donnant naissance à des séries temporelles qu'il convient d'analyser, de modéliser, de transformer. On sait depuis Fourier ce que de tels traitements peuvent gagner à quitter l'espace direct et naturel du domaine temporel pour aller dans celui des fréquences, mais au prix d'un paradoxe d'interprétation physique. Alors même l'expérience quotidienne nous conforte dans l'idée que rythmes et oscillations peuvent changer sans cesse, la fréquence mathématique est un concept immuable, éternel et invariant dans le temps. La question est donc de donner sens à l'oxymore d'une « fréquence instantanée » qui réconcilierait la théorie et la pratique. On discute ici des limitations intrinsèques à ce type d'approche, en lien en particulier avec diverses formes de « principes d'incertitude », et on présente quelques-unes des réponses partielles possibles à cette question toujours ouverte.*

I. FREQUENCE ?

Peut-on parler du temps sans parler de fréquence ? Le temps qu'on pense intuitivement connaître, ce temps inséparable de sa flèche, qui glisse et fuit continûment, ne se laisse pas facilement cerner. À dire vrai, si un temps absolu existe, il n'accède pour nous à un état de réalité tangible que de façon relative, lorsqu'on l'arrête « de temps en temps », les marqueurs qu'on peut en donner fournissant ainsi en quelque sorte, par la comparaison qu'ils offrent d'un « avant » et d'un « après », une forme de preuve de son existence ancrée dans la différence, la répétition, la périodicité[1].

Parler de périodicité et, ce faisant, de fréquence peut se voir comme une autre façon de parler du temps.

I.1 Physique

Lier le temps à une fréquence via une périodicité d'événements a depuis longtemps été de pratique courante en physique. De l'horloge à balancier à l'horloge atomique, la construction d'un référentiel de temps se fait en comptant, rapportant une durée à un nombre de motifs élémentaires se répétant périodiquement, et force est de constater que rythmes, cycles et oscillations sont omniprésents dès lors que l'on observe la Nature. L'astronomie nous offre à suivre dans les cieux le mouvement périodique des astres et, sur terre, leur effet quotidien (marées, saisonnalités), la science y trouvant une expression de son pouvoir de prédiction, y compris dans des cas plus rares comme le retour des comètes ou des éclipses. La physique n'est presque qu'ondes et vibrations, de l'électromagnétisme (optique, radio) à l'acoustique (parole, musique), et la biologie elle-même n'échappe pas à la règle (rythme cardiaque, rythmes circadiens, ondes cérébrales). Les productions humaines enfin sont elles aussi une source intarissable d'objets technologiques (moteurs, turbines, machines tournantes) qui sont autant de matérialisations de l'idée de fréquence. Si nous vivons ainsi dans un monde auquel nombre de phénomènes bien cadencés donnent une image d'ordre, ceux-ci sont naturellement loin d'épuiser

---

[1] On peut rapprocher ce point de vue de celui développé dans l'essai que Gilles Mora a consacré au travail photographique de Denis Roche (Mora, 2001).

la réalité dont le désordre se rappelle à nous de multiples manières, que ce soit sous forme de « bruits » au sens large (turbulence, fluctuations thermiques, boursières), d'événements fugitifs et a priori imprédictibles (séismes, tsunami, explosions), ou encore l'occurrence de « formes » irrégulières, non périodiques et semblant tracées au hasard.

I.2 Mathématiques

Le paradigme mathématique de description d'une périodicité est celui des fonctions dites « circulaires », autrement dit des sinus et des cosinus. Celles-ci forment une famille à trois paramètres permettant de décrire une oscillation harmonique en termes d'une *amplitude*, d'une *fréquence* (l'inverse d'une période) et d'une *phase*. En termes musicaux où une telle oscillation modélise une note (émise par la vibration d'un diapason, par exemple), l'amplitude correspond au volume de celle-ci et la fréquence à sa hauteur, la phase servant quant à elle à se situer entre la forme « sinus » et la forme « cosinus ». Une telle modélisation a trois conséquences : l'amplitude étant supposée constante, l'oscillation est a priori *éternelle* ; la fréquence étant fixe, la description est celle d'une onde *monochromatique* ; la phase étant libre, elle peut servir à fixer une référence pour l'*origine des temps*.

I.3 Fourier

La modélisation d'une oscillation par un sinus (ou un cosinus) « pur » est clairement une idéalisation mathématique, et on est en droit de s'interroger sur sa pertinence pour rendre compte de la complexité du monde réel. De manière tout à fait remarquable, Joseph Fourier a cependant montré en 1811 — dans un travail qui ne sera publié qu'une dizaine d'années plus tard (Fourier, 1822) — que *toute forme d'onde (ou presque) pouvait se représenter comme une superposition (éventuellement infinie) d'ondes monochromatiques*. Ce résultat fondamental a ceci d'inattendu qu'il s'applique aussi bien aux situations « ordonnées » (pour lesquelles l'intuition accepte assez volontiers l'idée de réduction à une superposition d'oscillations simples) que désordonnées (dans lesquelles les ingrédients de base — oscillation éternelle et monochromatique — sont clairement invalidés).

La « représentation de Fourier » a, depuis, connu 200 ans de succès et est devenu un outil incontournable dans presque tous les domaines de la science. Une des raisons en est qu'elle a sa place tant du côté de la physique (résoudre l'équation de chaleur est à la base de sa motivation) que de celui des mathématiques (avec le développement de l'analyse harmonique qui en a assis et élargi les bases (Körner, 1989)) et de l'informatique (via des algorithmes rapides et efficaces, comme la « Fast Fourier Transform » (Cooley and Tukey, 1965), sans lesquels la théorie serait restée lettre morte).

Du point de vue de l'interprétation cependant, le fait qu'elle repose sur des ondes monochromatiques éternelles, quelle que soit la fonction à décomposer, n'est pas pleinement satisfaisant. Ceci a bien sûr été remarqué à plusieurs reprises, une citation classique à cet égard étant celle due à Jean Ville (Ville, 1948) :

> *Si nous considérons en effet un morceau [de musique] contenant plusieurs mesures (ce qui est le moins qu'on puisse demander) et qu'une note, la par exemple, figure une fois dans le morceau, l'analyse harmonique [de Fourier] nous présentera la fréquence correspondante avec une certaine amplitude et une certaine phase, sans localiser le la dans le temps. Or, il est évident qu'au cours du morceau il est des instants où l'on n'entend pas le la. La représentation est néanmoins mathématiquement correcte, parce que les phases des notes voisines du la sont agencées de manière à détruire cette note par interférence lorsqu'on ne l'entend pas et à la renforcer, également par interférence, lorsqu'on l'entend ; mais s' il y a dans cette conception une habileté qui honore l'analyse mathématique, il ne faut pas se dissimuler qu'il y a également une défiguration de la réalité : en effet, quand on n'entend pas le la, la raison véritable est que le la n'est pas émis.*

Une autre façon d'exprimer le même point de vue se retrouve sous la plume de Louis de Broglie (de Broglie, 1966) :

La considération exclusive des ondes monochromatiques conduit à une […] conception qui me paraît erronée. Si l'on considère une grandeur qui peut être représentée, à la manière de Fourier, par une superposition de composantes monochromatiques, c'est la superposition qui a un sens physique et non les composantes de Fourier considérées isolément.

Dans les deux cas, l'accent est mis sur la disjonction qui peut exister entre la possibilité mathématique d'une représentation au moyen de fonctions élémentaires et la réalité physique qu'elles sont censées décrire. Comme souligné par les deux auteurs, le paradoxe apparent est levé par l'intervention du processus de combinaison qui, dans ce cas, repose de façon centrale sur les phases relatives entre composantes. Ainsi, suivant le jeu de relations que leurs phases entretiennent entre elles, une même famille d'ondes monochromatiques peut se combiner pour donner des résultats très différents. L'exemple le plus extrême de cette situation est sans doute celui qui différencie le « bruit blanc » (fluctuations désordonnées à tous les temps) et l'impulsion dite « de Dirac » (signal nul partout sauf à un instant). Si l'on ne s'en tient qu'à leurs composantes constitutives individuelles en termes d'amplitudes et de fréquences, rien ne distingue ces deux situations, l'une comme l'autre se caractérisant par un spectre continu et « plat » : le bruit blanc comme l'impulsion ont tous deux une représentation de Fourier dans laquelle toutes les fréquences possibles sont présentes, avec égale amplitude. La différence majeure est que, dans le premier cas, les phases relatives de ces différentes fréquences sont distribuées aléatoirement, l'incohérence de celles-là se traduisant par la structure désordonnée de la superposition de celles-ci. Dans le deuxième cas au contraire, il existe un instant particulier où toutes les composantes sont « en phase », se renforçant mutuellement dans leur superposition et créant ainsi une localisation qu'aucune des composantes individuelles ne possède.

II. VARIABLE ?

II.1 Exemples

On a mentionné l'exemple de la localisation comme difficulté d'interprétation de la transformation de Fourier (une fonction d'extension finie se représentant comme superposition infinie de fonctions d'extension infinie), mais il en est d'autres qui appellent des réserves de même nature. Ainsi, si l'on considère un pendule simple, de longueur fixe, ses oscillations régulières matérialisent presque à la perfection l'idée d'une oscillation monochromatique. Mais que l'on vienne à changer continûment la longueur de ce pendule alors même qu'il oscille, il en résulte une variation elle aussi continue de la « périodicité » (qui n'en est plus une) suggérant qu'une fréquence « instantanée » soit attachée à chaque instant. De la même façon, une fréquence émise de façon « pure » dans un référentiel propre est perçue différemment par un observateur en mouvement relatif par rapport à celui-ci : c'est l'effet Doppler, qui se traduit par une augmentation de la fréquence perçue lorsque la source est en approche et une baisse si elle est en éloignement. Ainsi, la sirène d'une ambulance sera perçue lors de son passage comme une source « glissant » de l'aigu vers le grave.

II.2 Oxymore

L'observation de la Nature (qui, comme disait Fourier, « *est la source la plus féconde des découvertes mathématiques* ») nous conduit donc à une contradiction apparente entre l'intuition physique d'une fréquence qui devrait pouvoir être « instantanée » et sa définition mathématique qui repose sur une permanence d'oscillation excluant toute forme de « localité » temporelle. Parler de « fréquence instantanée » est un oxymore, du moins au sens de Fourier et de la notion de fréquence mise en jeu dans sa représentation. Si l'on veut néanmoins donner sens à ce que l'intuition suggère, la question centrale est de dépasser cette conception par trop rigide pour réconcilier mathématiques et physique, formalisation et interprétation.

III. INSTANTANE VS. LOCAL ?

Afin d'aborder cette question, on peut revenir sur les termes (« instantané » et « local ») employés pour rendre compte d'une évolution temporelle. S'ils sont relativement interchangeables en ce qui concerne le qualificatif de l'objet visé (une fréquence dont la valeur pourrait être différente à chaque instant), on peut s'interroger sur le caractère indispensable d'une identification de même nature quant aux méthodes permettant d'y accéder. En d'autres termes, une propriété « instantanée » doit-elle nécessairement résulter d'une approche « locale » ?

III.1 Local

Une analyse élémentaire montre en fait rapidement les limitations de l'hypothèse « instantané = local ». En effet, l'intuition première est de localiser l'analyse de Fourier en réduisant le support temporel des ondes monochromatiques, les contraignant à ne plus être éternelles. Ce faisant, la notion de même de fréquence, qui est d'autant plus précise qu'un plus grand nombre d'oscillations identiques sont présentes, en vient à perdre de sa signification dès que la restriction « locale » du sinus ou du cosinus devient très inférieure à la longueur d'onde, et a fortiori lorsqu'on veut faire tendre l'intervalle de temps lié à cette restriction vers zéro pour atteindre une hypothétique « instantanéité ». Si l'on gagne ainsi en localité, il n'y a plus aucun sens à parler de fréquence en l'absence d'au moins une oscillation !

III.2 Incertitude

La remarque qui vient d'être faite repose en fait sur une propriété très profonde liée à la transformation de Fourier, interdisant une localisation ponctuelle simultanée dans les deux domaines attachés à ses variables : on parle de « relations d'incertitude ». Tout comme pour l'analyse de Fourier elle-même qui, on l'a dit plus haut, fournit un exemple paradigmatique de l'équilibre physique/mathématique/informatique garant du succès applicatif, théorique et opérationnel d'une méthode scientifique, les relations d'incertitude (qui en sont inséparables) peuvent se lire à la lumière de la même trilogie. Initiées en physique par Werner Heisenberg (Heisenberg, 1927), qui s'est posé la question de la précision ultime d'une mesure simultanée de la position et de l'impulsion (posant ainsi un des jalons de ce qui allait devenir la Mécanique Quantique), elles ont été rapidement formalisées en termes mathématiques par Hermann Weyl qui a été un des premiers à prouver qu'elles s'appliquaient à couple de variables de Fourier, sans nécessaire interprétation d'incertitude ou d'indétermination (Weyl, 1927), et c'est en un sens spécifique au temps et à la fréquence qu'elles ont été reformulées dans l'immédiat après-guerre par Dennis Gabor, posant les bases d'analyses numériques en passe d'être rendues possibles par le développent naissant de l'informatique (Gabor, 1946).

III.3 Global

Acceptant alors l'hypothèse alternative « instantané $\neq$ local », une autre voie d'approche est possible, qui consiste à revisiter la notion classique de fréquence avant de la généraliser. Le principe en est de voir la fréquence comme liée à la vitesse de rotation d'un vecteur tournant, en analogie directe avec le retour périodique d'une planète dans sa rotation autour du soleil. Dans cette définition a priori, ce qui caractérise l'onde monochromatique de Fourier est simplement le fait que la rotation en question s'effectue de manière uniforme, tant en module (amplitude) qu'en vitesse angulaire (fréquence). Une telle représentation (dite parfois de Fresnel, ou encore diagramme d'Argand) peut s'interpréter en termes de fonction à valeurs complexes, l'oscillation physique a valeurs réelles étant complémentée d'une autre qui lui est « en quadrature », c'est-à-dire identique à une différence de phase près, qui est précisément celle faisant passer d'un cosinus à un sinus. Si l'on admet un tel point de vue, la généralisation à une situation évolutive est évidente : il suffit de garder le principe de la rotation d'un vecteur tournant, mais en autorisant ce dernier à avoir tant un module qu'une vitesse de rotation variant dans le temps, la « fréquence instantanée » se déduisant alors immédiatement de cette dernière (Gabor, 1946 ; Ville, 1948). D'un point de vue pratique, ceci nécessite de construire le vecteur tournant recherché en adjoignant à l'oscillation réelle observée une composante imaginaire qui lui soit en quadrature comme dans le cas monochromatique. La solution mathématique de cette question est connue : c'est la transformation dite de Hilbert (King, 2009), dont une des caractéristiques essentielles est d'être *non locale*, étant définie comme un opérateur intégral dont le noyau est non seulement d'extension infinie mais encore à décroissance lente. Il est ainsi possible d'accéder à une propriété instantanée, mais via une transformation globale et non locale.

III.4 Mixte

On a rappelé précédemment que les relations d'incertitude interdisent une localisation *ponctuelle* parfaite simultanée dans les deux domaines de Fourier qu'elles lient, mais ceci n'exclut pas d'autres formes possibles de localisation. En particulier, si l'on imagine de dépasser le cadre de l'analyse de Fourier où deux représentations (une en temps, une en fréquence) co-existent de manière disjointe pour aller vers une représentation conjointe en ses deux variables, on voit que les deux de degrés de liberté offerts par le plan de représentation laissent ouverte la possibilité d'une localisation, non pas sur un point (ce qui correspondrait à la localisation parfaite et simultanée, interdite par l'incertitude temps-fréquence) mais sur une *courbe* qui, si on la lit comme une fréquence fonction du temps, serait une candidate naturelle à la définition d'une fréquence instantanée.

En ce qui concerne l'incertitude au-delà de la localisation ponctuelle, une formulation explicite a été donnée par Erwin Schrödinger (Schrödinger, 1930). En autorisant un couplage entre le temps et la fréquence, celle-ci met en avant le rôle particulier joué par les fréquences instantanées linéaires, dont la propriété associée de localisation n'est pas qu'une vue théorique : elle peut être réalisée de manière effective au moyen d'une transformation adaptée (proposée par Eugene P. Wigner (Wigner, 1932)), transformation opérant elle-même de manière globale et non locale sur le signal. Inspirées par un principe analogue, d'autres méthodes ont suivi, permettant d'atteindre une localisation parfaite ou quasi-parfaite sur des courbes quelconques du plan.

Ainsi, passer de la vision « temps ou fréquence » de Fourier à une idée conjointe de « temps et fréquence » permet de réconcilier local et global. On peut dire que l'approche conjointe « offre » à un signal deux degrés de liberté pour déployer son énergie, conduisant à une description par la structuration de sa localisation énergétique. La fréquence instantanée s'identifie de la sorte à une trajectoire dans le plan, sa définition étant maintenant donnée a posteriori, et son estimation accessible par divers post-traitements comme le calcul de moments, l'identification de points fixes ou encore d'invariants géométriques des transformations utilisées.

Les méthodes temps-fréquence, qui consistent en quelque sorte à écrire la partition d'un signal sur une portée mathématique, ont été l'objet d'études nombreuses depuis une trentaine d'années, ainsi que d'applications dans des domaines très variés allant de l'acoustique (parole, musique, cris d'écholocation) à l'astrophysique (systèmes d'étoiles binaires coalescentes), en passant par le génie biomédical et la mécanique (Flandrin, 1998).

IV. Conclure ?

IV.1 Solutions sous contraintes

Il suit de ce qui vient d'être présenté très brièvement que, sur la base de contraintes « naturelles », on dispose aujourd'hui de cadres de travail raisonnables pour décrire conjointement le temps et la fréquence et donner un sens opérationnel à la notion intuitive de « fréquence instantanée » Il serait néanmoins illusoire de penser que, pour puissantes qu'elles soient, les approches esquissées ici apportent une réponse ultime à la question posée. Reposant elles-mêmes sur des variantes de l'analyse de Fourier dont elles cherchent à dépasser les limites, elles portent nécessairement en filigrane une trace de ces limitations. Ce qu'elles opèrent est un changement de perspective visant davantage à privilégier d'un point de vue physique une propriété particulière au détriment d'autres jugées moins essentielles, qu'à dépasser des limites mathématiques dont on sait que, sous une forme ou sous une autre, elles sont et resteront intangibles.

Comme il n'y a pas d'unicité absolue d'une solution mais seulement des solutions partielles sous contraintes, un certain nombre de questions restent ouvertes. L'accent a été mis ici sur le seul caractère instantané de la fréquence mais on peut imaginer de prendre en compte d'autres propriétés (comme la causalité), d'adapter la notion de fréquence à des oscillations pas nécessairement harmoniques, etc.

IV.2 Pas de solutions sans contraintes

Comme en d'autres domaines, l'existence de contraintes peut être vue non seulement comme un mal nécessaire mais aussi comme un déclencheur pour accéder à des solutions. Ainsi de la création littéraire, Georges Perec écrivant un jour (Perec, 1972) « *Je cherche en même temps l'éternel et l'éphémère* », formule monovocalique résumant à merveille la quête toujours renouvelée d'une « fréquence instantanée ».

V. References

COOLEY James W. and TUKEY John W., « An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series », Math. Comput., vol. 19, 1965, p. 297-301.

DE BROGLIE Louis, *Certitudes et Incertitudes de la Science*, Paris, Albin Michel, 1966, 303 p.

FLANDRIN Patrick, *Temps-Fréquence*, Paris, Hermès, 1998, 396 p.

FOURIER Joseph, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, Firmin Didot Père et Fils, 1822, 639 p.

GABOR Dennis, « Theory of communication », *J. Inst. Electr. Eng.*, vol. 93, n° III, 1946, p. 429-457.

HEISENBERG Werner, « Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik », vol. 43, 1927, p. 172-198.

KING Frederick W., *Hilbert Transforms (vol. 2)*, coll. « Encyclopedia of Mathematics and Its Applications », n° 125, Cambridge, Cambridge University Press, 2009, 660 p.

KÖRNER Thomas W., *Fourier Analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 1989, 609 p.

MORA Gilles, *Denis Roche — Les preuves du temps*, Paris, Le Seuil, 2001, 208 p.

PEREC Georges, *Les revenentes*, Paris, Juillard, 1972, 144 p.

SCHRÖDINGER Erwin, « Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip », *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, vol. 14, 1930, p. 296–303.

VILLE Jean, « Théorie et applications de la notion de signal analytique », *Câbles et Transmissions*, 2ème A., n° 1, 1948, p. 62-77.

WEYL Hermann, « Quantenmechanik und Gruppentheorie », *Zeitschrift für Physik*, vol. 46, 1927, p. 1-46.

WIGNER Eugene P., « On the quantum correction for thermodynamic equilibrium », *Phys. Rev.*, vol. 40, n° 5, 1932, p. 749-759.