Invariance d'échelle brisée et accroissements stationnaires

Pierre BORGNAT[1], Pierre-Olivier AMBLARD[2], Patrick FLANDRIN[1]

[1]Laboratoire de Physique (UMR CNRS 5672)
École normale supérieure de Lyon, 69364 Lyon cedex 07, France

[2]Laboratoire des Images et des Signaux (UMR CNRS 5083)
ENSIEG, BP-46 38402 Saint Martin d'Hères cedex, France

Pierre.Borgnat@ens-lyon.fr, Bidou.Amblard@lis.inpg.fr, Patrick.Flandrin@ens-lyon.fr

Résumé – Nous étudions diverses manières de s'écarter des contraintes strictes d'auto-similarité ou d'accroissements stationnaires pour des processus aléatoires. En réinterprétant l'auto-similarité avec accroissements stationnaires comme l'invariance sous un déplacement dans le plan temps-échelle, nous étudions des modifications des opérateurs affines qui conduisent à d'autres classes de processus à invariance brisée (commme celle sous effet de taille finie ou l'auto-similarité locale).

Abstract – We study various ways for stochastic processes to depart from exact self-similarity with stationary increments (Hss-si). An interpretation of Hss-si as invariance under affine time-scale deplacement operators is used and introducing modified dilations or increments allows to discuss processes with broken self-similarity, including finite size scale invariance and local self-similarity.

1 Invariance d'échelle et accroissements stationnaires

Définitions introductives. L'invariance d'un signal, ou d'un système, à travers les échelles est une hypothèse largement utilisée en physique comme dans d'autres domaines : physique statistique, turbulence, télécommunications, géophysique, etc. Rappelons la définition pour les processus aléatoires [16].

Définition 1 *Un processus aléatoire $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit autosimilaire d'indice H (ou H-ss) si et seulement si*

$$(\mathcal{D}_\lambda^H X)(t) \hat{=} \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t). \tag{1}$$

$\mathcal{D}_\lambda^H$ note la dilatation de rapport d'échelle λ et $\stackrel{d}{=}$ désigne l'égalité en distribution. L'exemple de base est le classique mouvement brownien fractionnaire $B_H(t)$ d'exposant d'autosimilarité H [11]. La modélisation des phénomènes auto-similaires est en général conciliée avec une forme de stationnarité des signaux en supposant que le signal étudié a des accroissements stationnaires, noté ***a.s.*** [20].

Définition 2 *Un processus aléatoire $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est à accroissements stationnaires, noté* **a.s.**, *si pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, l'incrément $\{Z(\tau, t) = X(t+\tau) - X(t), t\}$ est stationnaire :*

$$(\mathcal{T}_b Z)(\tau, t) \hat{=} Z(\tau, t+b) \stackrel{d}{=} Z(\tau, t). \tag{2}$$

$\mathcal{T}_b$ désigne ici l'opérateur de translation en temps de b. Les mouvements browniens fractionnaires $B_H(t)$, paradigmes des processus invariants en échelle, possèdent ces deux propriétés.

Brisure des symétries. Nous étudions dans la suite des processus qui dévient de l'une ou l'autre de ces deux propriété. Pour de nombreuses applications concrètes, il faut en effet assouplir l'invariance en échelle pour n'en garder qu'une symétrie brisée, par exemple en échelle [8] : évolution non stationnaire en échelle en traffic internet [15], bornes sur les échelles en turbulence [7], invariance d'échelle discrète pour des systèmes statistiques complexes [18, 4, 5], etc.

La partie 2 propose des variations où l'invariance en échelle est brisée tandis que les accroissements sont conservés stationnaires. L'objet de la partie 3, avant notre conclusion, est de considérer l'invariance d'échelle définie seulement localement en temps, et d'en donner une approche avec un générateur localement stationnaire.

Avant cela, il est bon de rappeler comment les deux symétries que nous considérons reviennent à supposer l'invariance pour une représentation à deux paramètres du processus. C'est dans ce cadre que nous introduirons ensuite les brisures de symétries spécifiques considérées.

Accroissements et déplacements temps-échelle affines. Il est habituel de réunir les deux propriétés d'un processus H-ss à ***a.s.*** en une seule équation que l'on écrit en général

$$X(t+\lambda\tau) - X(t) \stackrel{d}{=} \lambda^H (X(\tau) - X(0)). \tag{3}$$

Cette combinaison des deux propriété des définitions 1 et 2 est réécrite ensuite pour apparaître comme une invariance sous un seul groupe de symétrie.

Propriété 1 *Un processus $X(t)$ est H-ss à* **a.s.** *si et seulement si ses processus accroissements $\{Z(\tau, t), t \in \mathbb{R}\}$ sont invariants en distribution sous le groupe des déplacements temps-échelle affines défini comme $\{D_{(\lambda,b)}^H \hat{=} \mathcal{D}_\lambda^H \mathcal{T}_b, (\lambda, b) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}\}$.*

On rappelle la loi de composition affine sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$: $(\lambda, b) \cdot (\alpha, t) = (\lambda\alpha, \lambda t + b)$. L'ensemble des déplacements temps-échelle $D_{(\lambda,b)}^H$ est une représentation du groupe affine (groupe de la droite $ax+b$) puisque $D_{(\lambda',b')}^H D_{(\lambda,b)}^H = D_{(\lambda,b)\cdot(\lambda',b')}^H$.

Ce sont des opérateurs de déplacement au sens de [9] : tout point du plan temps-échelle (α', t') peut être atteint de n'importe quel autre point (α, t) en choisissant le déplacement de paramètres $(\alpha/\alpha', t' - \alpha t/\alpha')$.

Une démonstration peu rigoureuse de la proposition tient par le calcul suivant.

$$\begin{aligned}(D^H_{(\lambda,b)} Z)(\tau, t) &= \lambda^{-H}\big(X(\lambda t + \lambda\tau + b) - X(\lambda t + b)\big)\\ &\overset{d}{=} X(t + \tau + b/\lambda) - X(t + b/\lambda)\\ &\overset{d}{=} X(t+\tau) - X(t) = Z(\tau, t).\end{aligned}$$

La deuxième égalité exprime l'auto-similarité de X et la suivante la stationnarité de ses accroissements. Cette propriété découle en fait directement des définitions. Dans cette lecture de l'autosimilarité avec ***a.s.*** la taille d'incrément τ prend le sens d'une échelle.

Représentation à deux paramètres de H-ss et *a.s.* L'approche plus générale que nous adopterons est alors de définir ces symétries non pas sur le processus mais sur une représentation quelconque de type temps-échelle. Puisque les $D^H_{(\lambda,b)}$ sont des opérateurs de déplacement du plan, il existe des représentations $T_X[a, t]$ covariantes pour ces déplacements temps-échelle [9].

$$T_{D^H_{(\lambda,b)}X}[\alpha, t] = (D^H_{(\lambda,b)} T_X)(\alpha, t) = f(\lambda^{-H}) T_X[(\lambda, b)\cdot(\alpha, t)],$$

où f décrit la renormalisation. Nous venons de rappeler que les accroissements $Z(\tau, t)$ entrent dans cette catégorie. Dans cette écriture, l'action du déplacement sur $X(t)$ est formellement $(D^H_{(\lambda,b)} X)(t) = X(b + \lambda t)$ mais, pour un processus aléatoire, cette forme est à utiliser avec précautions.

Plus généralement on sait que, si elles sont linéaires, elles doivent être de type transformée en ondelettes

$$T_X[\alpha, t] = \int X(u) \frac{1}{\alpha} \psi\Big(\frac{u - t}{\alpha}\Big)\, \mathrm{d}u,$$

tandis que la classe quadratique affine est l'équivalent pour les représentations de type densité d'énergie. Sous condition que l'on peut reconstruire le signal ainsi représenté (admissibilité pour les ondelettes), imposer les symétries H-ss et ***a.s.*** est équivalent à imposer l'invariance en distribution de $T_X[\alpha, t]$ sous les déplacements temps-échelle. Spécifions cela pour les ondelettes.

Propriété 2 *Un processus $X(t)$ est H-ss à* **a.s.** *si et seulement si sa transformée en ondelettes $T_X[\alpha, t]$ est invariante en distribution sous le groupe des déplacements affines $\{D^H_{(\lambda,b)}, (\lambda, b) \in \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}\}$.*

Ce résultat combine différentes propriétés connues. Dans le sens direct, partant d'une transformée en ondelettes T_X qui est invariante sous les $D^H_{(\lambda,b)}$, elle l'est aussi sous toutes les translations en temps puisque $\mathcal{T}_b = D^H_{(1,b)}$ et on prouve qu'alors X est à accroissements stationnaires (si ψ est à moyenne nul sans autre moment nul) [6]. De même, $\mathcal{D}^H_\lambda = D^H_{(\lambda,(1-\lambda)t_0)}$ donc T_X regardé en un temps fixé t_0 est auto-similaire et $X(t)$ l'est aussi au sens de la définition 1 [6]. Inversement, si X est un processus H-ss à ***a.s.***, sa représentation en ondelettes est stationnaire en temps [12], et invariante en échelle (ou auto-similaire) [19]. Ces deux propriétés se regroupent pour dire que T_X est alors invariante sous le groupe affine, propriété remarquée au second ordre dans [21].

Dans la suite nous envisageons comment modifier l'une ou l'autre partie de l'invariance. La dilatation qui conduit à une invariance d'échelle exacte fut introduite comme une opération multiplicative sur les échelles et nous allons voir certains cas qui rendent compte d'une invariance brisée en modifiant les lois de dilatation. Nous étudions principalement la possibilité d'imposer des limites aux zones où l'invariance est vérifiée, avant de commenter sur les situations où les propriétés d'un processus ne s'expriment pas comme des lois de puissance.

2 Briser les lois en échelle - taille finie

Lois d'échelle sous effet de taille finie. Les travaux de Nottale [13], étendus ensuite par Dubrulle (par exemple [7]), proposent de tenir compte d'effets de taille finie en échelle en introduisant cette fois des opérations de dilatations de manière à borner les échelles accessibles. Des arguments de symétrie permettent d'introduire une loi d'addition $\odot$ pour les échelles bornées $s \in]s_-, s_+[= \mathbb{S}$ (échelle additive correspondant à $s = \ln \alpha$). Sa forme est :

$$s_1 \odot s_2 = \frac{s_1 + s_2 - s_1 s_2 (1/s_- + 1/s_+)}{1 - s_1 s_2 / s_- s_+} \tag{4}$$

$(\mathbb{S}, \odot)$ a une structure de groupe d'élément neutre 0 (donc $s_- < 0 < s_+$) et le morphisme qui le relie à $(\mathbb{R}, +)$ est $S_\odot : (\mathbb{S}, \odot) \to (\mathbb{R}, +)$ qui prend la forme

$$\begin{aligned}S_\odot(s) &= \frac{s_- s_+}{s_- - s_+} \log\Big(\frac{1 - s/s_-}{1 - s/s_+}\Big)\\ &= -s_\pm \log\Big(1 - s/s_\pm\Big) \text{ si } s_\mp \longrightarrow +\infty\\ &= s \text{ si de plus } s_\pm \longrightarrow -\infty\end{aligned}$$

Dans la suite, nous simplifions les écritures en adoptant en général les formes multiplicatives, en convenant de travailler avec l'échelle $\alpha = e^s \in \mathbb{A}$, soumise à la loi de composition $a_1 \tilde{\odot} \alpha_2 = e^{\ln \alpha_1 \odot \ln \alpha_2}$. Le morphisme multiplicatif est $M_\odot(\cdot) = \exp(S_\odot(\ln \cdot))$ qui transforme $\tilde{\odot}$ en une multiplication, loi des échelles usuelles.

Dilatations sous effet de taille finie. De même que les dilatations $\mathcal{D}^H_\lambda$ sont des représentations du groupe usuel des échelles $(\mathbb{R}^+_*, \times)$, nous introduisons les dilatations de taille finie comme des représentations du groupe des échelles bornées, d'abord pour les échelles additives puis multiplicatives :

$$(\mathcal{D}^{add}_{g,\mu} U)(s) = g(\mu) \otimes U(\mu \odot s),$$
$$\text{ou bien : } (\mathcal{D}^g_\lambda X)(a) = \tilde{g}(\lambda) \tilde{\otimes} X(\lambda \tilde{\odot} \alpha)$$

Nous laissons ici la liberté d'introduire une loi non multiplicative de renormalisation qui est notée $\otimes$ et s'applique à $U = \ln X$, en particulier une loi de composition de taille finie s'appliquant au champ U (forme analogue à (4) avec les bornes U_- et U_+ du champ) [1]. La fonction $g(\mu)$ est une renormalisation analogue au λ^{-H} des dilatations non bornées. Pour assurer que les $\mathcal{D}^{add}_{g,\mu}$ représentent $(\mathbb{S}, \odot)$, elles vérifient $g(\mu_1) \otimes g(\mu_2) = g(\mu_1 \odot \mu_2)$. Si la loi $\otimes$ est isomorphe à l'addition, en notant $S_\otimes$ le morphisme, on obtient de cette équation que $S_\otimes \circ g$ est proportionnel à $S_\odot$ donc que

$$g(\mu) = S_\otimes^{-1}(-H S_\odot(\mu)).$$

L'écriture multiplicative, avec les lois $\tilde{\odot}$ et $\tilde{\otimes}$, vérifie alors que $\tilde{g}(\lambda) = e^{g(\ln\lambda)} = e^{S_\otimes^{-1}(-HS_\odot(\ln\lambda))}$. Le choix d'écrire $-H$ comme constante libre permet de retrouver $g(\mu) = -H\mu$, soit $\tilde{g}(\lambda) = \lambda^{-H}$, si les bornes sur l'échelle et le champ sont infinies (auto-similarité complète). Une étude de l'auto-similarité de taille finie que ces dilatations permettent de construire est menée dans [1] (mais sans ***a.s.***).

Notons que ce formalisme s'applique aussi quand les temps ou les grandeurs considérées prennent des valeurs négatives ; il faut alors utiliser une représentation à deux variables de chaque grandeur (module et signe) et, l'écriture étant plus lourde et technique sans changer les résultats, nous renvoyons à [1] pour une discussion à ce propos.

Auto-similarité de taille finie : généralisation du groupe affine. Le groupe affine de taille finie est construit comme le groupe affine en posant les lois $\alpha\tilde{\odot}\alpha'$ (ou $s \odot s'$ en additif) au lieu de $\alpha \times \alpha'$ (ou $s + s'$) puis en opérant la même modification sur la normalisation. Il permet de combiner accroissements stationnaires et auto-similarité de taille finie.

Propriété 3 *L'ensemble* $(\mathbb{A} =]\alpha_-, \alpha_+[\times \mathbb{R}, \star)$ *muni de la loi affine avec taille finie :*

$$(\alpha_1, t_1)\star(\alpha_2, t_2) = \left(\alpha_1\tilde{\odot}\alpha_2 = e^{\log\alpha_1 \odot \log\alpha_2}, t_1 + e^{S_\odot(\ln\alpha_1)}t_2\right)$$

est un groupe non abélien, isomorphe au groupe affine par le morphisme $M_\star : (\mathbb{A} \times \mathbb{R}, \star) \to (\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \cdot)$, *tel que*

$$M_\star(\alpha, b) = (M_\odot(\alpha) = e^{S_\odot(\ln\alpha)}, b).$$

Ceci est évident à vérifier du fait des propriétés de morphisme de $M_\odot$.

Propriété 4 *Les déplacements temps-échelle avec taille finie* $D^g_{(\lambda,b)} \hat{=} \mathcal{D}^g_\lambda \mathcal{T}_b$ *forment une représentation du groupe affine avec taille finie et agissent sur un champ* $T_X[\alpha, t]$ *(variables définies sur* $\mathbb{A} \times \mathbb{R}$*) comme il suit :*

$$(D^g_{(\lambda,b)}T_X)[\alpha, t] = \tilde{g}(\lambda, b)\tilde{\otimes}T_X[(\lambda, b) \star (\alpha, t)],$$

où la fonction de normalisation s'écrit nécessairement

$$\tilde{g}(\lambda, b) = M_\otimes^{-1}(\exp\{-HS_\otimes(\ln\lambda)\}).$$

Imposer que ces déplacements représentent $(\mathbb{A} \times \mathbb{R}, \star)$ revient à avoir $\tilde{g}(\lambda, b)\tilde{\otimes}\tilde{g}(\lambda', b') = \tilde{g}\big((\lambda', b') \star (\lambda, b)\big)$, donc que $M_\otimes\tilde{g}$ soit un morphisme de la loi $\star$ vers la multiplication, c'est-à-dire $M_\star$ à une constante près.

Définition 3 *Un processus aléatoire* $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est dit autosimilaire avec taille finie et à* **a.s.** *si une représentation temps-échelle* T_X *est invariante sous les déplacements affines avec taille finie :*

$$T_X[\alpha, t] \stackrel{d}{=} (D^g_{(\lambda,b)}T_X)[\alpha, t].$$

La reconstruction de X à partir de la représentation $T_X[\alpha, t]$ permet alors de montrer que les processus ainsi définis ont bien des accroissements stationnaires d'une part, et obéissent à $Z(\lambda\tilde{\otimes}\tau, t) \stackrel{d}{=} \tilde{g}(\lambda)\tilde{\otimes}Z(\tau, t)$, invariance d'échelle pour les incréments de taille finie τ uniquement. Pour construire formellement des champs qui vérifient $T_X = DT_X$, nous introduisons une transformation qui fonde une équivalence des T_X avec les champs stationnaires affines, suivant l'idée de la transformation de Lamperti [10, 5].

Propriété 5 *L'opérateur* U_H *suivant construit une équivalence entre les déplacements affines et les déplacements affines avec taille finie, soit* $U_H^{-1}D^g_{(\lambda,b)}U_H = D^H_{M_\star(\lambda,b)}$ *et on a :*

$$\begin{cases} (U_H T_Y)[\alpha, t] = M_\otimes^{-1}(T_Y(M_\star[\alpha, t])) \\ (U_H^{-1}T_X)[\alpha, t] = M_\otimes(T_X(M_\star^{-1}[\alpha, t])). \end{cases}$$

Partant alors d'un champ T_Y invariant sous les déplacements temps-échelle usuels (venant par exemple de la décomposition en ondelettes d'un processus H-ss à ***a.s.***), le champ $T_X = (U_H T_Y)$ est invariant sous les déplacements généralisés $D^g_{(\lambda,b)}$ et est la décomposition d'un processus autosimilaire avec taille finie et à **a.s.**.

La synthèse en pratique d'un tel processus reste à faire. Il n'est en effet pas évident de savoir comment préciser les valeurs de $T_X[\alpha, t]$ de manière à rester dans l'espace des décompositions en ondelettes.

En terme d'analyse d'un processus ayant cette invariance, il apparaît intéressant de représenter la décomposition temps-échelle du processus en déformant les échelles en $M_\odot(\alpha)$. Cette variable doit, d'après les propriétés qui précèdent, révéler un comportement simplifié des statistiques du processus puisqu'il est auto-similaire en cette variable.

Multiscaling et loi de composition en échelle. De manière générale, on peut songer à modifier les propriétés en échelle en introduisant une déformation de celles-ci. Soit alors une fonction d'échelle $n(\alpha)$ bijective de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}$, on peut introduire les dilatations de facteur $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ avec la loi induite par n selon

$$(\mathcal{D}^{f,n}_\lambda T)[\alpha, t] = f(n(\lambda))\, T[n^{-1}(n(\lambda) + n(\alpha)), t].$$

La fonction f est un facteur de renormalisation et pour que les $\mathcal{D}^{f,n}_\lambda$ soient un groupe, on a $f(\mu_1)f(\mu_2) = f(\mu_1 + \mu_2)$ donc $f(\mu) = e^{C\mu}$. Ces dilatations permettent de prendre en compte une évolution plus ou moins rapide des propriétés en échelle, en comparant $n(a)$ et $\ln a$ (fonction à supposer pour retrouver l'auto-similarité).

Cette propriété a été analysée sous le nom *multiscaling*, où l'on introduit de plus une renormalisation différente selon l'ordre des statistiques, avec $C = -H(q)$. Supposer une invariance des statistiques du processus sous les translations et ces dilatations conduit à la propriété d'*Extended Self-Similarity* [3] puisque le champ de $\tilde{T}[e^{n(a)}, t]$ est affine stationnaire et on sait écrire les moments de T :

$$\mathbb{E}\left\{(T[\alpha, t])^q\right\} \sim e^{-H(q)(n(a)-n(1))}\mathbb{E}\left\{(T[1, t])^q\right\}.$$

Quand $H(q) = H$, une constante, l'*ESS* revient simplement à avoir modifié la loi de changement d'échelle à l'aide de $n(a)$, puis les dilatations et les opérateurs de déplacement.

3 Propriétés en échelle, locales en temps

Plutôt que d'exprimer l'auto-similarité avec ***a.s.*** par l'invariance des propriétés 1 et 2 pour ensuite modifier l'opérateur de symétrie, on peut repartir de (3), $\lambda^{-H}Z(\lambda\tau, t + b) \stackrel{d}{=} Z(\tau, t)$ et modifier celle-ci. Nous étudions les processus ne la vérifiant que localement en temps.

Processus multifractionnaires. Les processus asymptotiquement localement auto-similaires, ou **lass** [2], on été introduits pour décrire une évolution en temps de l'auto-similarité.

Définition 4 *Un processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est **lass** de fonction multifractionnaire $h(t)$ si pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$\left\{\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon^{-h(t)} Z_X(\varepsilon u, t)), u \in \mathbb{R}\right\} \stackrel{d}{=} a(t)\left\{B_{h(t)}(u), u \in \mathbb{R}\right\}.$$

Le mouvement brownien fractionnaire [14, 2] est un cas spécial qui obéit exactement, pour tout ε, à l'équation dans cette définition ($\varepsilon^{-h(t)} Z_{B_H}(\varepsilon u, t+b) \stackrel{d}{=} Z_{B_H}(u,0)$). Les mouvements browniens multifractionnaires sont **lass** donc la classe n'est pas vide. On peut généraliser la définition en demandant que pour $t \in \mathbb{R}$

$$\left\{\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon^{-h(t)} Z_X(\varepsilon u, t))\right\}_{u\in\mathbb{R}} \stackrel{d}{=} a(t)\left\{C_{h(t),t}(u)\right\}_{u\in\mathbb{R}}, \quad (5)$$

avec $C_{H,t}$ un processus H-ss à ***a.s.*** qui varie avec l'instant t d'analyse.

Processus lass et générateur stationnaire local. Une manière d'étudier l'auto-similarité est de passer par le générateur stationnaire $Y(u) = (\mathcal{L}_H^{-1} X)(u) \hat{=} e^{-Hu} X(e^u)$ (transformée de Lamperti inverse de $X(t)$) processus qui est réputé être stationnaire si et seulement si X est H-ss [10, 5]. Ceci a été surtout employé pour étudier des processus auto-similaires et nous introduisons ici l'équivalent pour les auto-similarités locales.

Définissons le générateur local à l'instant t :

$$\tilde{Y}_{H,t}(s) = e^{-Hs}(X(t+e^s) - X(t))$$

Ceci se réécrit comme $\varepsilon^{-H} Z_X(\varepsilon u, t) = u^H \tilde{Y}_{H,t}(\ln \varepsilon u)$, et implique le résultat suivant.

Propriété 6 *Un processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est **lass** de fonction multifractionnaire $h(t)$ si pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$\left\{\lim_{\varepsilon\to -\infty} \tilde{Y}_{h(t),t}(u+\varepsilon)\right\}_{u\in\mathbb{R}} \stackrel{d}{=} a(t)\left\{O_{h(t)}(u)\right\}_{u\in\mathbb{R}},$$

où $O_{h(t)}(u)$ est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé.

Rappelons que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé est le générateur stationnaire de $B_H(t)$ [5], qu'il est donc stationnaire, gaussien, de moyenne nulle et de fonction de corrélation

$$\boldsymbol{\gamma}_{O_H}(t,\tau) = \sigma^2\left(\cosh(H|\tau|) - [\sinh(|\tau|/2)]^{2H}/2\right).$$

Nous avons posé $\boldsymbol{\gamma}_Y(t,\tau) \hat{=} \mathbb{E}\left\{Y(t+\tau/2)Y^*(t-\tau/2)\right\}$. Si l'on suppose la propriété étendue (5), la caractérisation de $X(t)$ par les générateurs locaux remplace $O_{h(t)}(u)$ par un processus stationnaire $S_t(u) = (\mathcal{L}_{h(t)}^{-1} C_{h(t),t})(u)$ quelconque

Cette caractérisation prend son sens du fait que la famille des procesus $\tilde{Y}_{h(t),t}(u)$ est localement stationnaire. On peut en effet en calculer la fonction de corrélation :

$$\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{Y}_{h(t),t}}(t, \varepsilon\tau) = |a(t)|^2 \boldsymbol{\gamma}_{S_t}(t, \varepsilon\tau), \text{ pour } \varepsilon \to 0+$$

et comme S est stationnaire, elle est de la forme $m(t)\boldsymbol{\gamma}(\tau)$ pour les petits incréments de temps τ. Les processus sont donc asymptotiquement auto-similaires, au sens de Silverman [17]. Partant de processus qui sont alors localement stationnaires, on peut faire le chemin inverse et construire un processus qui est **lass**, au sens généralisé de (5).

Conclusion

L'interprétation, étudiée ici, de l'auto-similarité avec ***a.s.*** en tant qu'invariance sous des déplacements affines offre d'autres perspectives de généralisation à des symétries de ce type briséees. Par exemple les cascades multiplicatives s'interprètent comme une façon de prescrire les propriétés statistiques par une symétrie de semi-groupe sur l'espace temps-échelle (déplacements pouvant conduire dans un seul sens sens en échelle).

Références

[1] P.O. Amblard, P. Borgnat, and P. Flandrin. Stochastic processes with finite size scale invariance. In *SPIE's Symposium on Fluctuations and Noise*, June 2003.

[2] A. Benassi, S. Cohen, J. Istas, and S. Jaffard. Gaussian processes and pseudo-differential elliptic operators. *Revista Mathematica Iberoamericana*, 13(1) :19–89, 1997.

[3] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripicione, C. Baudet, and F. Massaioli. Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E*, 48 :R29–R32, 1993.

[4] P. Borgnat, P. Flandrin, and P.-O. Amblard. Une approche stochastique de l'invariance d'échelle discrète. In *Colloque GRETSI-01*, Toulouse, 2001.

[5] P. Borgnat, P. Flandrin, and P.-O. Amblard. Stochastic discrete scale invariance. *IEEE Signal Processing Lett.*, 9(6) :181–184, June 2002.

[6] S. Cambanis and C. Houdré. On the continuous wavelet transform of second-order random processes. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 41(3) :628–642, May 1995.

[7] B. Dubrulle. Finite size scale invariance. *Eur. Phys. J. B*, 14 :757–771, 2000.

[8] B. Dubrulle, F. Graner, and D. Sornette. *Scale Invariance and Beyond*. EDP Sciences - Springer, 1997.

[9] F. Hlawatsch, G. Tauböck, and T. Twaroch. Covariant time-frequency analysis. In L. Debnath, editor, *Wavelets and Signal Processing*. Birkhäuser, Boston (MA), 2002.

[10] J. Lamperti. Semi-stable stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104 :62–78, 1962.

[11] B. Mandelbrot and J. W. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional Brownian noises and applications. *SIAM review*, 10 :422–437, 1968.

[12] E. Masry. The wavelet transform of stochastic processes with stationary increments and its application to fractional Brownian motion. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 39(1) :260–264, January 1993.

[13] L. Nottale. The theory of scale relativity. *Int. J. Mod. Phys. A*, 7(20) :4899–4936, 1992.

[14] R. Peltier and J. Lévy Véhel. Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results. Inria research report No. 2645, 1995.

[15] S.G. Roux, D. Veitch, P. Abry, L. Huang, J. Micheel, and P. Flandrin. Statistical scaling analysis of TCP/IP data using cascades. In *Proc. IEEE ICASSP-01*, May 2001.

[16] G. Samorodnitsky and M. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman&Hall, 1994.

[17] R. Silverman. Locally stationary random processes. *IRE Trans. on Information Theory*, 3 :182–187, 1957.

[18] D. Sornette. Discrete scale invariance and complex dimensions. *Physics Reports*, 297 :239–270, 1998.

[19] M. Vergassola and U. Frisch. Wavelet transforms of self-similar processes. *Physica D*, 54 :58–64, 1991.

[20] A. Yaglom. *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*. Springer-Verlag, 1987.

[21] B. Yazici and R. L. Kashyap. Affine stationary processes with applications to fractional Brownian motion. In *Proc. IEEE ICASSP-97*, pages 3669–3672, 1997.