

# Temps-fréquence : concepts et outils

Franz HLAWATSCH, François AUGER, Jean-Philippe OVARLEZ

19 août 2003



## Table des matières

<b>PREMIÈRE PARTIE. CONCEPTS ET OUTILS FONDAMENTAUX</b> . . . . .	11
<b>DEUXIÈME PARTIE. CONCEPTS ET OUTILS AVANCÉS</b> . . . . .	13
<b>Chapitre 9. La Réallocation</b> . . . . .	15
Éric CHASSANDE-MOTTIN, François AUGER et Patrick FLANDRIN	
9.1. Introduction . . . . .	15
9.2. Le principe de réallocation . . . . .	16
9.2.1. Les compromis traditionnels de l’analyse temps-fréquence et temps- échelle . . . . .	17
9.2.2. Les spectrogrammes et les scalogrammes revus et corrigés par la mécanique . . . . .	18
9.2.3. Généralisation à d’autres représentations . . . . .	20
9.2.4. Lien avec des approches similaires . . . . .	23
9.3. La réallocation à l’œuvre . . . . .	24
9.3.1. Algorithmes rapides . . . . .	24
9.3.2. Analyse de quelques signaux simples . . . . .	26
9.4. Caractérisation des champs de vecteurs . . . . .	31
9.4.1. Statistiques des vecteurs de réallocation du spectrogramme . . . . .	31
9.4.2. Phase géométrique et champ de gradient . . . . .	33
9.5. Deux variantes . . . . .	35
9.5.1. La réallocation supervisée . . . . .	35
9.5.2. Réallocation différentielle . . . . .	37
9.6. Une application : la partition du plan temps-fréquence . . . . .	37
9.7. Conclusion . . . . .	40
9.8. Bibliographie . . . . .	41



PREMIÈRE PARTIE

## Concepts et outils fondamentaux



DEUXIÈME PARTIE

## Concepts et outils avancés





## Chapitre 9

# La Réallocation

**Résumé :** `hermes` is a L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub> class to produce books in the Hermes Science Publications style. It calls the class `book` and redefines the page format. In addition, it supplements the class `book` with a lot of options and commands. Among others, the option `articles` should be used for books of articles written by different authors ; the option `chapters` is for conventional books with numbered chapters. Useful commands provided include switching from French to English, a single command to define page headings, include file and language. For books of articles, there are also commands to insert in a uniform way the author's name, her/his affiliation, the abstract and keywords.

**Mots-clés :** Réallocation, classe de Cohen, transformée de Fourier court-terme, spectrogramme, classe affine, transformée en ondelettes, scalogramme, partition temps-fréquence.

### 9.1. Introduction

Durant ces vingt dernières années, l'analyse temps-fréquence a fait l'objet de très nombreuses études, grâce auxquelles un grand nombre d'outils sont à présent disponibles [HLA 92, COH 95, MAL 98, FLA 99]. Mais bien que ces outils s'appuient sur des fondements théoriques clairement établis, leur champ d'application est souvent limité par des contingences pratiques. Une première contingence est liée à la difficulté d'obtenir des "images" temps-fréquence faciles à lire et à interpréter, particulièrement par des néophytes. Une autre concerne la mise en œuvre. Enfin, les outils temps-fréquence se sont souvent développés dans un but d'analyse sans tenir compte du fait que l'obtention d'une "image" temps-fréquence n'est souvent pas le but final

---

Chapitre rédigé par Éric CHASSANDE-MOTTIN, François AUGER et Patrick FLANDRIN.

de leur utilisation, mais plutôt une étape nécessaire à la formulation d'un *traitement* (mesure, détection, classification, . . . ) dont on espère alors qu'il soit performant dans des situations non stationnaires.

Apporter une réponse à ces besoins pratiques est la motivation principale à la proposition de post-traitements succédant à la première phase d'analyse (temps-fréquence). La méthode de réallocation, à laquelle ce chapitre est consacré, est une des solutions possibles. Le paragraphe 9.2 en présente d'abord le principe, qui consiste à déplacer les valeurs des représentations temps-fréquence (ou temps-échelle) afin d'améliorer leurs capacités de localisation. Le paragraphe 9.3 montre comment ce principe peut être mis en œuvre efficacement. Des calculs analytiques de représentations réallouées de signaux particuliers sont ensuite présentés, pour mettre clairement en évidence l'intérêt de la réallocation. Au paragraphe 9.4, nous présentons des résultats sur la caractérisation géométrique et statistique du champ des vecteurs de réallocation, quantité très importante lorsqu'il s'agit de comprendre comment fonctionne la méthode en pratique. Ces résultats conduisent à présenter ensuite (au paragraphe 9.5) deux variantes de la réallocation dans sa version initiale, qui consistent pour la première à n'appliquer le principe de réallocation que dans des zones de localisation de composantes déterministes (réallocation supervisée) et pour la seconde à remplacer les sauts discrets de la méthode originale par un mouvement continu régi par des équations différentielles (réallocation différentielle). Enfin, le paragraphe 9.6 présente une application de la première variante au problème du partage du plan temps-fréquence, à partir duquel peuvent être obtenus l'extraction des composantes élémentaires d'un signal et son débruitage.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont principalement repris de [CHA 98a], où le lecteur intéressé pourra trouver des compléments utiles. Des programmes MATLAB des algorithmes de réallocation présentés dans ce chapitre sont disponibles dans [AUG 96].

## 9.2. Le principe de réallocation

L'idée de la réallocation a été présentée dès 1976 par Kodera, Gendrin et de Villelary [KOD 76]. Laissée de côté jusqu'à encore récemment, la méthode a subi un renouveau catalysé par les développements théoriques en analyse temps-fréquence obtenus dans les années 80, se traduisant par des approfondissements et développements tant du point de vue de ses fondements théoriques que de sa mise en œuvre pratique. Afin d'être le plus clair possible, la réallocation va d'abord être présentée dans le cas des spectrogrammes, puis nous présenterons sa généralisation à d'autres représentations (y compris les scalogrammes et les représentations de la classe affine), et ses liens avec d'autres méthodes.

### 9.2.1. Les compromis traditionnels de l'analyse temps-fréquence et temps-échelle

La transformée de Fourier, que l'on définira dans ce chapitre par

$$\hat{x}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (9.1)$$

est une représentation naturelle des signaux "stationnaires", c'est à dire dont le contenu informationnel ne varie pas au cours du temps. Dans des situations plus réalistes, des phénomènes transitoires ou des ruptures brutales sont fréquemment observés, et il devient indispensable de considérer plutôt une description des signaux à la fois en temps et en fréquence. Le problème se pose alors de définir une telle description, et il est bien connu qu'il existe une multitude de solutions [HLA 92, COH 95, FLA 99], évoqués notamment dans les chapitres précédents de cet ouvrage.

Une première solution, intuitive, consiste à introduire une variable de description temporelle dans l'expression (9.1), afin de construire une représentation fréquentielle du signal au voisinage de l'instant d'analyse. Ceci conduit à la *transformée de Fourier à court-terme* (TFCT), que l'on définira dans ce chapitre par :

$$F_x^h(t, \omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h^*(s-t) e^{-j\omega s} ds \cdot e^{j\omega t/2}, \quad (9.2)$$

où la localisation de l'analyse autour de l'instant courant  $t$  est obtenue par une fenêtre arbitraire  $h(t)$ . La présence du facteur  $e^{j\omega t/2}$ , qui distingue la définition proposée ici de celle utilisée dans le reste de cet ouvrage, et l'utilisation de la pulsation  $\omega$  au lieu de la fréquence  $f$  seront justifiés par la suite, par des arguments de dualité temps-fréquence (voir notamment les équations (9.6) et (9.7)).

Une autre approche, voisine de la précédente, est la *transformée en ondelettes continue* (TOC) :

$$T_x^h(t, a) := \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h^* \left( \frac{s-t}{a} \right) ds.$$

Cette représentation est une fonction du temps  $t$  et du paramètre d'échelle  $a$ , mais si l'ondelette analysante  $h(t)$  vérifie certaines conditions peu contraignantes (elle doit être de valeur moyenne nulle, sa transformée de Fourier doit être unimodale et de fréquence centrale  $\omega_0$ ), elle peut également être vue comme une fonction du temps  $t$  et de la pulsation  $\omega = \omega_0/a$ .

Cependant, l'utilisation de l'un ou l'autre de ces deux outils nécessite immanquablement de trouver un compromis entre les résolutions temporelle et fréquentielle. Pour la TFCT par exemple, une fenêtre d'analyse  $h(t)$  plus étroite fournira une meilleure résolution temporelle, mais la concentration autour de l'origine de sa transformée de Fourier  $\hat{h}(\omega)$  sera nécessairement moindre, ce qui implique une plus mauvaise résolution fréquentielle. La TOC conduit à un compromis similaire, à ceci près qu'il dépend de la fréquence d'analyse : plus la fréquence d'analyse augmente,

plus la résolution temporelle s'améliore, mais aux dépens d'une moindre résolution fréquentielle.

Les sinusoïdes à modulation linéaire de fréquence (ou "chirps" linéaires) sont des signaux pour lesquels un tel compromis est difficile à trouver, puisque ni la TFCT ni la TOC ne fournissent une localisation parfaite le long de la droite de fréquence instantanée. Ceci résulte bien entendu du fait que la fenêtre d'analyse  $h(t)$  ou l'ondelette analysante  $\psi(t)$  sont choisies arbitrairement, indépendamment du signal analysé. Si au contraire celles-ci sont déduites du signal analysé, on peut imaginer améliorer la situation. En s'appuyant sur le concept de filtre adapté, un choix naturel pour la TFCT est de prendre  $h(t) = x(-t)$ , c'est-à-dire la version retournée dans le temps du signal analysé. On montre alors facilement que ce choix conduit à

$$F_x^{x-}(t, \omega) = \frac{1}{2} W_x \left( \frac{t}{2}, \frac{\omega}{2} \right),$$

où

$$W_x(t, \omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{s}{2}) x^*(t - \frac{s}{2}) e^{-j\omega s} ds$$

est la *distribution de Wigner-Ville* (DWV) du signal. Cette dernière est un élément particulièrement important de l'analyse temps-fréquence et elle possède de nombreuses propriétés théoriques, évoquées au chapitre 5. Entre autres, la DWV conduit à une localisation parfaite pour les chirps linéaires, contrairement à la TFCT ou la TOC. La contrepartie de ces bonnes propriétés de la DWV est cependant une indéniable difficulté dans l'interprétation des images qu'elle produit. Ceci provient

- des valeurs négatives que peut prendre la DWV, qui interdisent de l'interpréter comme une densité locale d'énergie,
- de ses termes d'interférence, qui résultent de la nature quadratique de la distribution et qui ajoutent des termes oscillants au voisinage du milieu de la droite joignant chaque paire de composantes en interaction [HLA 97].

Les termes d'interférence étant oscillants, ils peuvent être atténués par un lissage passe-bas de la DWV, mais une telle opération produit également un élargissement des zones de localisation des composantes du signal. Les versions lissées de la distribution de Wigner-Ville sont donc également confrontées à un compromis, tout comme la TFCT et la TOC, mais cette fois entre la précision des localisations en temps et en fréquence des composantes du signal, et l'importance des termes d'interférence.

### 9.2.2. Les spectrogrammes et les scalogrammes revus et corrigés par la mécanique

Pour étayer cette affirmation, considérons à nouveau le cas des spectrogrammes et des scalogrammes, c'est-à-dire des distributions quadratiques associées aux transformées de Fourier à court-terme et aux transformées en ondelettes continues. Pour

une TFCT  $F_x^h$  et une TOC  $T_x^\psi$ , les définitions usuelles du spectrogramme  $S_x^h$  et du scalogramme  $\Sigma_x^h$  sont respectivement

$$S_x^h(t, \omega) := |F_x^h(t, \omega)|^2$$

et

$$\Sigma_x^h(t, a) := |T_x^h(t, a)|^2, \quad (9.3)$$

mais ils peuvent également s'écrire sous la forme :

$$S_x^h(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(s, \eta) W_h(s - t, \eta - \omega) \frac{ds d\eta}{2\pi} \quad (9.4)$$

et

$$\Sigma_x^h(t, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(s, \xi) W_h\left(\frac{s - t}{a}, a\eta\right) \frac{ds d\eta}{2\pi}, \quad (9.5)$$

ce qui montre explicitement qu'ils réalisent un lissage bidimensionnel de la DWV. Par conséquent, lorsqu'on calcule le spectrogramme d'un signal, la valeur obtenue en un point  $(t, \omega)$  ne peut pas être considérée comme une mesure de l'énergie du signal uniquement en ce point. Bien au contraire, l'expression (9.4) la fait apparaître explicitement comme la somme de toutes les valeurs de la DWV contenues dans un domaine délimité par les largeurs temporelle et fréquentielle de la fenêtre d'analyse. C'est donc toute une distribution de valeurs qui est résumée en un seul nombre, celui-ci étant affecté au centre géométrique du domaine sélectionné.

Si l'on fait une analogie avec la mécanique, ceci revient à affecter la masse totale d'un solide à son *centre géométrique*. Un tel choix est en général complètement arbitraire, sauf lorsque la distribution est uniforme. Une autre possibilité, qui semble plus pertinente, consiste à affecter la masse totale au *centre de gravité* de la distribution. C'est exactement le sens de la réallocation. À chaque point du plan temps-fréquence où le spectrogramme est calculé, deux quantités complémentaires  $\hat{t}$  et  $\hat{\omega}$  sont également évaluées. Elles correspondent aux coordonnées du centre de gravité des valeurs de la DWV  $W_x$ , pondérées par la fenêtre temps-fréquence  $W_h$  (centrée en  $(t, \omega)$ ), et c'est au point  $(\hat{t}, \hat{\omega})$  que la valeur du spectrogramme calculée en  $(t, \omega)$  est ré-affectée. Le spectrogramme réalloué est alors défini par :

$$\check{S}_x^h(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^h(s, \eta) \delta(t - \hat{t}_x(s, \eta), \omega - \hat{\omega}_x(s, \eta)) \frac{ds d\eta}{2\pi},$$

où  $\delta(x, y)$  est l'impulsion de Dirac bidimensionnelle, pour laquelle

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0)$$

pour toute fonction  $f$  appartenant à  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Les quantités  $\hat{t}$  et  $\hat{\omega}$  qui interviennent dans la réallocation peuvent être déduites de la *phase* de la transformée de Fourier à court-terme, une information dont on ne tient généralement pas compte lorsqu'on utilise le spectrogramme (voir éq. (9.2.2)). Plus précisément, si  $\varphi(t, \omega)$  est la phase de la TFCT et si on utilise la notation abrégée  $\partial_u \varphi := \partial \varphi / \partial u$ , les deux opérateurs de réallocation s'écrivent :

$$\hat{t}_x(t, \omega) = \frac{t}{2} - \partial_\omega \varphi(t, \omega); \quad (9.6)$$

$$\hat{\omega}_x(t, \omega) = \frac{\omega}{2} + \partial_t \varphi(t, \omega). \quad (9.7)$$

Conceptuellement, la réallocation peut donc être vue comme la seconde étape d'un processus en deux phases :

- 1) un *lissage*, qui permet de faire disparaître les termes d'interférence oscillants, mais qui élargit en contrepartie les composantes localisées,
- 2) une *compression*, qui vise à reconcentrer les contributions qui ont survécu au lissage.

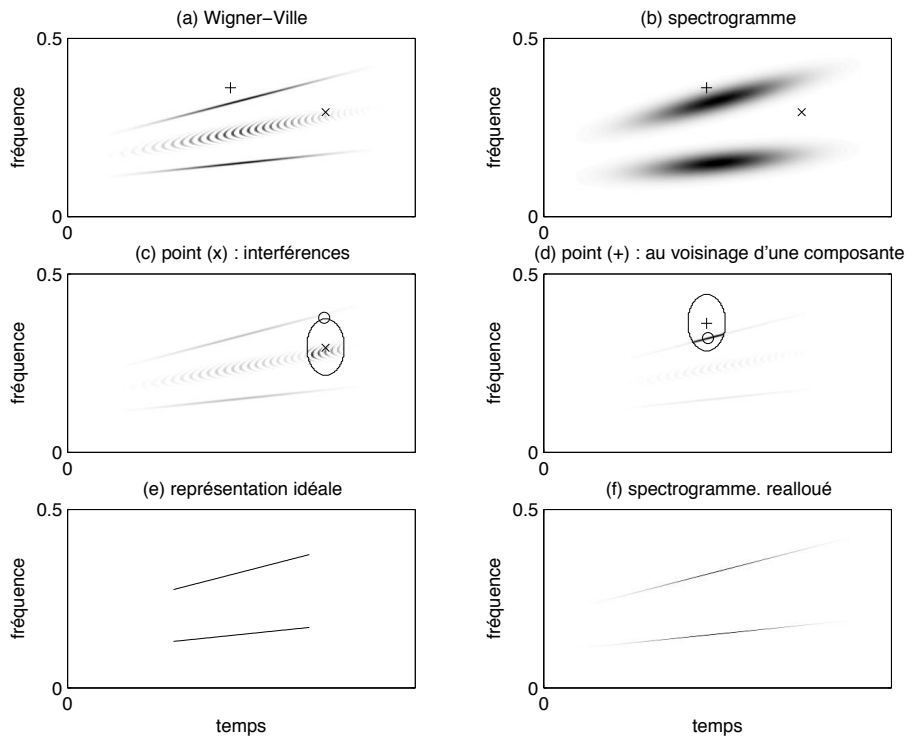
On peut alors vérifier aisément que la propriété de localisation parfaite sur des droites du plan temps-fréquence, satisfaite par la DWV, sera conservée après le processus de réallocation, puisque le centre de gravité de l'énergie distribuée sur une droite du plan temps-fréquence est nécessairement sur la droite support. Plus généralement, un résultat similaire peut être obtenu lorsque le signal analysé se comporte *localement* comme un chirp, le caractère local étant lié au support temps-fréquence de la fenêtre de lissage. Un exemple de comportement de ce type est présenté en Fig. 9.1.

### 9.2.3. Généralisation à d'autres représentations

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à la réallocation dans le cas du spectrogramme, distribution obtenue par le lissage de la DWV avec un noyau défini à partir de la fenêtre d'analyse. Il n'y a *a priori* aucune raison de se limiter à la catégorie de noyaux de lissage utilisés pour le spectrogramme et on peut assez naturellement envisager de généraliser l'emploi du principe de réallocation présenté à d'autres types de lissage et donc à d'autres représentations.

Une première possibilité consiste à prendre comme noyau de lissage un filtre passe-bas quelconque (i.e., qui n'est pas nécessairement la DWV d'une fonction fenêtre). En notant  $\Pi(t, \omega)$  un tel noyau<sup>1</sup>, la réallocation peut alors être appliquée à des

1. Notons que par rapport au noyau de lissage  $\phi_{t-f}(t, f)$  employé notamment au chapitre 5,  $\Pi(t, \omega) = \phi_{t-f}(-t, -\frac{\omega}{2\pi})$ .



**Figure 9.1.** Principe de la réallocation. Les distributions bilinéaires réalisent nécessairement un compromis entre la réduction des termes d'interférence et la localisation des termes propres. La distribution de Wigner-Ville (a) fournit une bonne localisation des deux "chirps" présents dans le signal analysé, mais elle comporte également des termes d'interférence oscillants indésirables. À l'inverse, le spectrogramme (b) ne comporte pas ces termes d'interférence supplémentaires, mais il localise mal les composantes du signal. Cette absence de termes d'interférences (comme par exemple au point "x") et cette moins bonne localisation des composantes (comme par exemple au point "+") se justifient par le fait que le spectrogramme correspond à un moyennage des valeurs de la DWV contenues dans un domaine centré sur l'instant d'analyse (éq (9.4)). Dans le premier cas (c), la valeur moyenne est faible, ce qui réduit les termes d'interférence. Dans le second cas (d), cette valeur moyenne n'est pas nulle, ce qui provoque un élargissement des composantes. Le principe de réallocation consiste alors à déplacer cette valeur moyenne du centre géométrique du domaine de moyennage au centre de gravité "o" des contributions énergétiques contenues dans ce domaine. Ce procédé permet de rétablir la concentration des termes propres après l'opération de lissage, et fournit une distribution (f) comparable à la représentation idéale (e) du signal.

distributions généralisant l'expression (9.4), de la forme

$$C_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(s, \xi) \Pi(s - t, \xi - \omega) \frac{ds d\xi}{2\pi}.$$

Cette expression correspond à la forme générale des éléments de la classe de Cohen, qui comprend toutes les distributions d'énergie bilinéaires invariantes par translations temporelles et fréquentielles, et dont le spectrogramme n'est qu'un élément particulier (voir le chapitre 5). Pour un élément  $C_x(t, \omega)$  de cette classe, les coordonnées des centres de gravité locaux sont données par

$$\hat{t}_x(t, \omega) = \frac{1}{C_x(t, \omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s W_x(s, \eta) \Pi(s - t, \eta - \omega) \frac{ds d\eta}{2\pi}; \quad (9.8)$$

$$\hat{\omega}_x(t, \omega) = \frac{1}{C_x(t, \omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta W_x(s, \eta) \Pi(s - t, \eta - \omega) \frac{ds d\eta}{2\pi}, \quad (9.9)$$

et la distribution réallouée correspondante (qui n'est plus bilinéaire, mais demeure une distribution d'énergie invariante par translations temporelles et fréquentielles) est définie par

$$\check{C}_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_x(s, \eta) \delta(t - \hat{t}_x(s, \eta), \omega - \hat{\omega}_x(s, \eta)) \frac{ds d\eta}{2\pi}. \quad (9.10)$$

Dans le cas du spectrogramme, on peut encore démontrer que les définitions (9.6) et (9.7) se ramènent à (9.8) et (9.9). Nous verrons au paragraphe 9.3.1 que  $\hat{t}$  et  $\hat{\omega}$  peuvent être calculés d'une manière encore plus efficace, ce qui est aussi le cas pour un bon nombre des distributions les plus couramment utilisées.

Une deuxième extension possible de l'emploi de la réallocation au-delà du spectrogramme consiste à considérer le cas des scalogrammes. En effet, si on compare l'expression (9.4) à l'expression (9.5), il apparaît clairement que le scalogramme résulte lui aussi d'un lissage de la DWV. Mais contrairement au spectrogramme, ce lissage dépend de la fréquence d'analyse. Plus généralement, l'ensemble des distributions temps-échelle quadratiques qui utilisent un lissage de ce type forme la classe affine [RIO 92], qui, de manière similaire à la classe de Cohen, regroupe toutes les représentations temps-échelle invariantes par translation temporelle et par changement d'échelle (voir le chapitre 7 pour une formulation temps-fréquence de la classe affine). L'expression générale des éléments de cette classe,

$$\Omega_x(t, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(s, \eta) \Pi\left(\frac{s-t}{a}, a\eta\right) \frac{ds d\eta}{2\pi},$$

ne diffère de l'expression (9.5) que par le remplacement de la DWV de l'ondelette analysante  $h$  par un noyau bidimensionnel de type passe-bande. Dans ce contexte, l'opérateur de réallocation en temps s'écrit

$$\hat{t}_x(t, a) = \frac{1}{\Omega_x(t, a)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s W_x(s, \eta) \Pi\left(\frac{s-t}{a}, a\eta\right) \frac{ds d\eta}{2\pi},$$



tandis que l'opérateur de réallocation en échelle nécessite un passage intermédiaire par une variable fréquentielle : il faut d'abord calculer un opérateur de réallocation en fréquence,

$$\hat{\omega}_x(t, a) = \frac{1}{\Omega_x(t, a)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta W_x(s, \eta) \Pi\left(\frac{s-b}{a}, a\eta\right) \frac{ds d\eta}{2\pi},$$

qui est ensuite converti en une variable d'échelle par la relation

$$\hat{a}_x(t, a) = \frac{\omega_0}{\hat{\omega}_x(t, a)}, \quad \text{où} \quad \omega_0 := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \Pi(t, \omega) \frac{dt d\omega}{2\pi} \quad (9.11)$$

est la fréquence centrale du noyau  $\Pi(t, \omega)$ , supposé être d'intégrale unité sur  $\mathbb{R}^2$ .

Par des raisonnements similaires, d'autres généralisations sont possibles. En fait, toute distribution qui résulte d'un lissage d'une distribution "idéale" peut être réallouée. Si la distribution "idéale" fournit une localisation parfaite pour des signaux particuliers, les opérateurs de réallocation peuvent être construits de manière à retrouver cette localisation parfaite après lissage. C'est le cas par exemple pour la classe hyperbolique, pour la classe de puissance et la S-distribution [AUG 94, DJU 99].

#### 9.2.4. Lien avec des approches similaires

Bien qu'il soit original sur bien des points, le concept de réallocation présente des points communs avec d'autres approches proposées par ailleurs. Dans la plupart des cas, ces approches s'appuient, implicitement ou explicitement, sur un modèle "sinusoïdal" de la forme

$$x(t) = \sum_{n=1}^N A_n(t) e^{j\theta_n(t)}$$

avec des hypothèses supplémentaires de variations lentes de la fréquence instantanée et de l'enveloppe par rapport à la variation de phase

$$\left| \frac{\theta_n''(t)}{\theta_n'(t)^2} \right| \ll 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{A_n'(t)}{A_n(t)} \right| \ll |\theta_n'(t)|.$$

De tels modèles conviennent pour de nombreux signaux (en particulier ceux de parole), qui peuvent être considérés comme des sommes de signaux quasi-sinusoïdaux. L'objectif sous-jacent de ces modèles est de construire une représentation simplifiée de ces signaux sous la forme d'amplitudes et de fréquences évoluant au cours du temps.

C. Berthomier est l'un des pionniers de cette approche [BER 75]. Plus récemment, des techniques appelées "analyse spectrale différentielle" [GIB 82] ou "arêtes et squelettes" ("ridges and skeletons") [DEL 92b, DEL 92a, GUI 92] sont apparues. Leur objectif commun est de poursuivre des évolutions fines des fréquences, en se basant sur le concept de phase stationnaire. De telles approches sont bien évidemment liées avec

la réallocation, dans la mesure où les “arêtes” correspondent aux points fixes des opérateurs de réallocation. Deux autres approches encore plus proches de la réallocation sont la “densité de fréquence instantanée” [FRI 85] et le “synchro-squeezed scalogram” [MAE 95], dans lesquelles non seulement des trajectoires fréquentielles sont détectées, mais aussi des composantes fréquentielles voisines sont regroupées. Une présentation plus détaillée de ces techniques et des éléments de comparaison peuvent être trouvés dans [CHA 98a].

### 9.3. La réallocation à l'œuvre

Après avoir présenté le principe de la réallocation, nous allons nous intéresser dans ce paragraphe à la mise en œuvre des opérateurs de réallocation, et à leur coût de calcul. Nous allons également examiner différentes situations où des calculs analytiques complets des spectrogrammes ou des scalogrammes réalloués sont possibles.

#### 9.3.1. Algorithmes rapides

Nous avons déjà vu que les opérateurs de réallocation du spectrogramme peuvent être définis soit comme des moments locaux de la DWV (éqs. (9.8) et (9.9)), soit à partir des dérivées partielles de la phase de la TFCT (éqs. (9.6) et (9.7)). Dans [AUG 95], une troisième formulation a été proposée, où interviennent des rapports de TFCT :

$$\hat{t}_x(t, \omega) = t + \operatorname{Re} \left( \frac{F_x^{th}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right); \quad (9.12)$$

$$\hat{\omega}_x(t, \omega) = \omega - \operatorname{Im} \left( \frac{F_x^{dh/dt}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right), \quad (9.13)$$

où  $F_x^{th}$  et  $F_x^{dh/dt}$  correspondent aux transformées de Fourier court-terme utilisant respectivement les fenêtres  $th(t)$  et  $\frac{dh}{dt}(t)$ . Ces expressions sont très importantes pour la mise en œuvre du spectrogramme réalloué, car elles constituent une alternative efficace au calcul direct des centroïdes locaux (dont le coût de calcul est trop élevé) et à l'utilisation de valeurs approchées des dérivées de la phase (les algorithmes permettant de “dérouler” la phase sont instables et/ou très compliqués).

L'algorithme complet peut être résumé de la façon suivante [AUG 96, FLA 03] :

- 1) calculer trois TFCT sur la base des trois fenêtres  $h(t)$ ,  $th(t)$  et  $dh/dt$ ,
- 2) les combiner selon (9.12) et (9.13),
- 3) calculer le spectrogramme selon (9.2.2),
- 4) réallouer les valeurs du spectrogramme selon (9.10).

Hormis la dernière étape, le coût total est en  $O(NM \log M)$  opérations, pour un échantillonnage du plan temps-fréquence en  $N$  points en temps et  $M$  points en fréquence, ce qui rend envisageable l'utilisation de la réallocation dans des tâches effectives de traitement du signal. De plus, une mise en œuvre récursive de l'algorithme a récemment été proposée [RIC 97], ouvrant la voie à de possibles applications en temps réel.

Des expressions similaires existent pour le scalogramme [AUG 95] :

$$\hat{t}_x(t, a) = t + a \operatorname{Re} \left( \frac{T_x^{th}(t, a)}{T_x^h(t, a)} \right); \quad (9.14)$$

$$\hat{a}_x(t, a) = - \frac{a\omega_0}{\operatorname{Im} \left( T_x^{dh/dt}(t, a) / T_x^h(t, a) \right)},$$

où  $\omega_0$  est la fréquence centrale de référence de l'ondelette  $h$  (voir (9.11) avec  $\Pi = W_h$ ).

Ainsi qu'il en sera fait usage plus loin dans ce chapitre, il est possible d'exprimer les vecteurs de réallocation sous la forme de nombres complexes. Ceci conduit au *vecteur de réallocation normalisé* :

$$r_x^h(t, \omega) = \frac{\hat{t}_x(t, \omega) - t}{\Delta t_h} + j \frac{\hat{\omega}_x(t, \omega) - \omega}{\Delta \omega_h} \quad (9.15)$$

$$= \frac{1}{\Delta t_h} \operatorname{Re} \left( \frac{F_x^{th}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) - \frac{j}{\Delta \omega_h} \operatorname{Im} \left( \frac{F_x^{dh/dt}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right), \quad (9.16)$$

expression dans laquelle les facteurs de normalisation sont, respectivement, la durée temporelle  $\Delta t_h$  et la bande fréquentielle  $\Delta \omega_h$  de la fenêtre (supposée d'énergie unité) :

$$\Delta t_h := \left( \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |h(t)|^2 dt \right)^{1/2}; \quad \Delta \omega_h := \left( \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{h}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \right)^{1/2}. \quad (9.17)$$

Dans les sections suivantes, nous utiliserons des fenêtres gaussiennes,

$$h(t) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{\lambda}} e^{-t^2/(2\lambda^2)}, \quad (9.18)$$

pour lesquelles  $\Delta t_h = \lambda/\sqrt{2}$  et  $\Delta \omega_h = 1/(\sqrt{2}\lambda)$ . Dans une telle situation, seules deux TFCT sont nécessaires au calcul (car les fenêtres  $th(t)$  et  $dh/dt$  sont alors proportionnelles :  $dh/dt = -(1/\lambda^2)th(t)$ ), et le champ des vecteurs de réallocation normalisés admet alors la forme particulièrement compacte :

$$r_x^h(t, \omega) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \frac{F_x^{th}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)}. \quad (9.19)$$

### 9.3.2. Analyse de quelques signaux simples

Cette section rassemble un certain nombre de situations pour lesquelles il est possible d'obtenir une forme exacte du champ des vecteurs de réallocation normalisés. Nous nous restreindrons ici au cas des spectrogrammes à fenêtre gaussienne. Nous donnerons, dans chacun des six cas considérés, l'expression analytique du spectrogramme  $S_x^h(t, \omega)$ , du champ des vecteurs de réallocation normalisés  $r_x^h(t, \omega)$  (exprimé dans le plan complexe selon (9.15)) et du spectrogramme réalloué correspondant  $\check{S}_x^h(t, \omega)$ .

**Impulsions et exponentielles complexes.** Les calculs complets sont faciles à obtenir dans le cas d'une impulsion de Dirac en  $t_0$  :  $x(t) = \delta(t - t_0)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} S_x^h(t, \omega) &= \frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}} e^{-(t-t_0)^2/\lambda^2}, \\ r_x^h(t, \omega) &= \frac{\sqrt{2}}{\lambda} (t - t_0), \\ \check{S}_x^h(t, \omega) &= \delta(t - t_0). \end{aligned} \quad (9.20)$$

Le cas dual d'une fréquence pure  $\omega_0$ , définie par l'exponentielle complexe  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ , conduit à :

$$\begin{aligned} S_x^h(t, \omega) &= \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{2} e^{-(\omega-\omega_0)^2\lambda^2}, \\ r_x^h(t, \omega) &= j\lambda\sqrt{2}(\omega - \omega_0), \\ \check{S}_x^h(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Comme illustré à la Figure 9.2(a), tous les vecteurs de réallocation pointent vers l'instant  $t_0$  de l'impulsion (resp., vers la fréquence  $\omega_0$ ), garantissant une localisation parfaite du spectrogramme réalloué.

**"Chirp" linéaire à enveloppe gaussienne.** Des résultats exacts peuvent aussi être obtenus dans le cas d'un *chirp* linéaire à enveloppe gaussienne. Si l'on définit un tel chirp par

$$x(t) = e^{-t^2/(2T^2)} e^{j\beta t^2/2},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} S_x^h(t, \omega) &= 2\sqrt{\pi k} \lambda \exp\left(-k\left(\frac{t^2}{\sigma_t^2} - 2\sigma_{\omega t} \omega t + \frac{\omega^2}{\sigma_\omega^2}\right)\right), \\ r_x^h(t, \omega) &= \sqrt{2k} \left[ \left(-\frac{\lambda^2}{\sigma_t^2} + j\sigma_{\omega t}\right) \frac{t}{\lambda} + \left(\sigma_{\omega t} - j\frac{1}{\sigma_\omega^2 \lambda^2}\right) \lambda \omega \right], \end{aligned} \quad (9.22)$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_\omega^2 &= 1/(\lambda^2 \delta_{\omega t}) \quad ; \quad \sigma_t^2 = 1/(\sigma_{\omega t}^2/\lambda^2 + \delta_{\omega t}/T^2), \\ \sigma_{\omega t} &= \lambda^2 \beta \quad ; \quad \delta_{\omega t} = 1 + \lambda^2/T^2, \\ k^{-1} &= \sigma_{t\omega}^2 + \delta_{t\omega}^2. \end{aligned}$$

On peut extraire quelques cas particuliers intéressants de ces résultats en fixant les valeurs de certains paramètres. Ainsi, si l'on choisit  $\beta = 0$  et  $T = \lambda = 1$ , le signal  $x(t) = e^{-t^2/2}$  est un *logon gaussien* centré à l'origine  $(0, 0)$  du plan temps-fréquence. Ceci conduit à  $\sigma_{t\omega} = 0$ ,  $\delta_{t\omega} = 2$ ,  $\sigma_t = \sigma_\omega = 1/\sqrt{2}$ ,  $k = 1/4$  et

$$\begin{aligned} S_x^h(t, \omega) &= \sqrt{\pi} \exp(-(t^2 + \omega^2)/2) ; \\ r_x^h(t, \omega) &= -(t + j\omega) / \sqrt{2} , \\ \check{S}_x^h(t, \omega) &= 4\sqrt{\pi} \exp(-2(t^2 + \omega^2)) . \end{aligned} \quad (9.23)$$

Le spectrogramme et sa version réallouée sont tous deux radialement symétriques dans un plan temps-fréquence dont les axes sont normalisés. La réallocation a pour effet de contracter la distribution initiale de manière homogène, par une transformation homothétique centrée en  $(0, 0)$ .

Lorsque  $T \rightarrow \infty$ , le signal  $x(t)$  tend vers un *chirp linéaire*  $x(t) = e^{j\beta t^2/2}$ . Posant  $\lambda = \beta = 1$  par simplicité, on obtient  $\sigma_{\omega t} = 1$ ,  $\delta_{\omega t} = 1$ ,  $\sigma_t = 1$ ,  $\sigma_\omega = 1$  et  $k = 1/2$ , d'où

$$\begin{aligned} S_x^h(t, \omega) &= \sqrt{2\pi} \exp(-(\omega - t)^2/2) , \\ r_x^h(t, \omega) &= \frac{(1-j)(\omega-t)}{\sqrt{2}} ; \\ \check{S}_x^h(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - t) . \end{aligned} \quad (9.24)$$

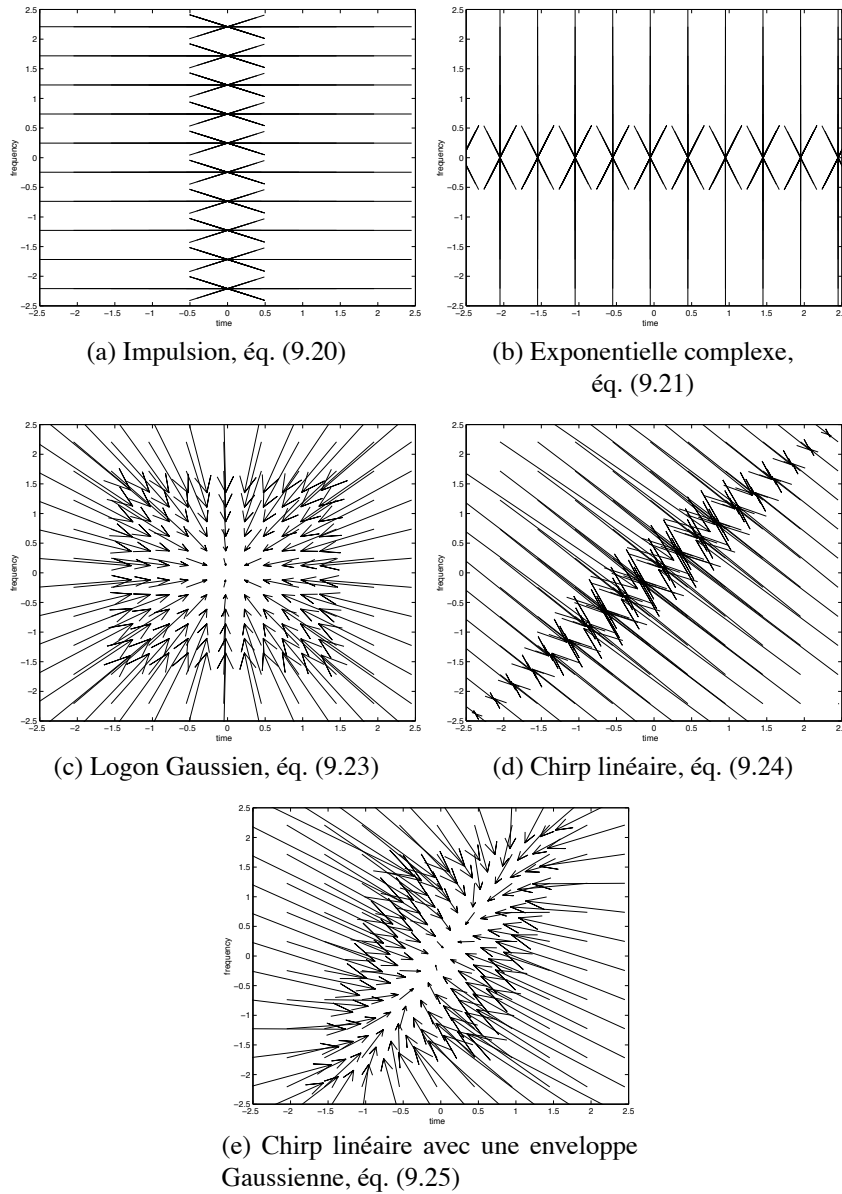
De façon analogue au cas des impulsions et des fréquences pures, les vecteurs de réallocation pointent tous vers la droite de fréquence instantanée  $\omega = \beta t$  (avec ici  $\beta = 1$ ). Ceci fournit une preuve directe (dans le cas particulier d'une fenêtre gaussienne) de l'argument présenté en Sect. 9.2.2, et selon lequel un spectrogramme réalloué hérite de la propriété de localisation parfaite de la DWV sur les chirps linéaires.

La Figure 9.2(e) illustre le cas d'un chirp linéaire à enveloppe gaussienne, dans lequel tous les paramètres ont été fixés à 1. Les Eqs. (9.22) se simplifient alors selon :

$$\begin{aligned} S_x^h(t, \omega) &= 2\sqrt{\pi/5} \exp(-(3t^2 - 2\omega t + 2\omega^2)/5) , \\ r_x^h(t, \omega) &= \frac{\sqrt{2}}{5} [(-3 + j)t + (1 - 2j)\omega] , \\ \check{S}_x^h(t, \omega) &= 2\sqrt{5\pi} \exp(-(7t^2 - 8\omega t + 3\omega^2)) . \end{aligned} \quad (9.25)$$

La transformation géométrique effectuée par la réallocation combine ainsi les deux transformations décrites précédemment dans les cas des logons et des chirps.

**Somme de deux impulsions proches.** Il est intéressant de traiter également le cas d'un signal composé de deux impulsions de Dirac successives (ou, par dualité entre le temps et la fréquence, de deux exponentielles complexes). Un tel exemple nous fournira en effet une information sur la résolution (i.e., la capacité de pouvoir distinguer deux composantes) que l'on peut attendre d'un spectrogramme réalloué.



**Figure 9.2.** Champ des vecteurs de réallocation pour les différents signaux tests évoqués au paragraphe 9.3.2. Chaque flèche va du point de calcul  $(t, \omega)$  au point de réallocation  $(\hat{t}, \hat{\omega})$ .

Considérons à cet effet un signal  $x(t)$ , composé de deux composantes distinctes :  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ , et convenons d'affecter à chaque quantité que l'on calculera

un indice correspondant à celui de la composante correspondante. Alors, en partant de (9.19) et en utilisant la linéarité de la TFCT, le champ des vecteurs de réallocation normalisés de  $x(t)$  peut être ré-écrit comme une somme pondérée de  $r_1^h$  et  $r_2^h$ ,

$$r_x^h = \frac{F_1^h}{F_1^h + F_2^h} r_1^h + \frac{F_2^h}{F_1^h + F_2^h} r_2^h, \quad (9.26)$$

expression dans laquelle les poids ont des valeurs complexes (correspondant à une modification en module et en phase) et dépendent du signal. Ces poids s'additionnent à 1, montrant que (9.26) peut s'interpréter comme une moyenne arithmétique.

Si l'on se place alors dans le cas où  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont deux impulsions de Dirac séparées de l'origine de l'axe des temps par une même distance  $t_0$ , la combinaison des résultats donnés en (9.20) et (9.26) conduit à l'expression suivante pour le champ des vecteurs de réallocation :

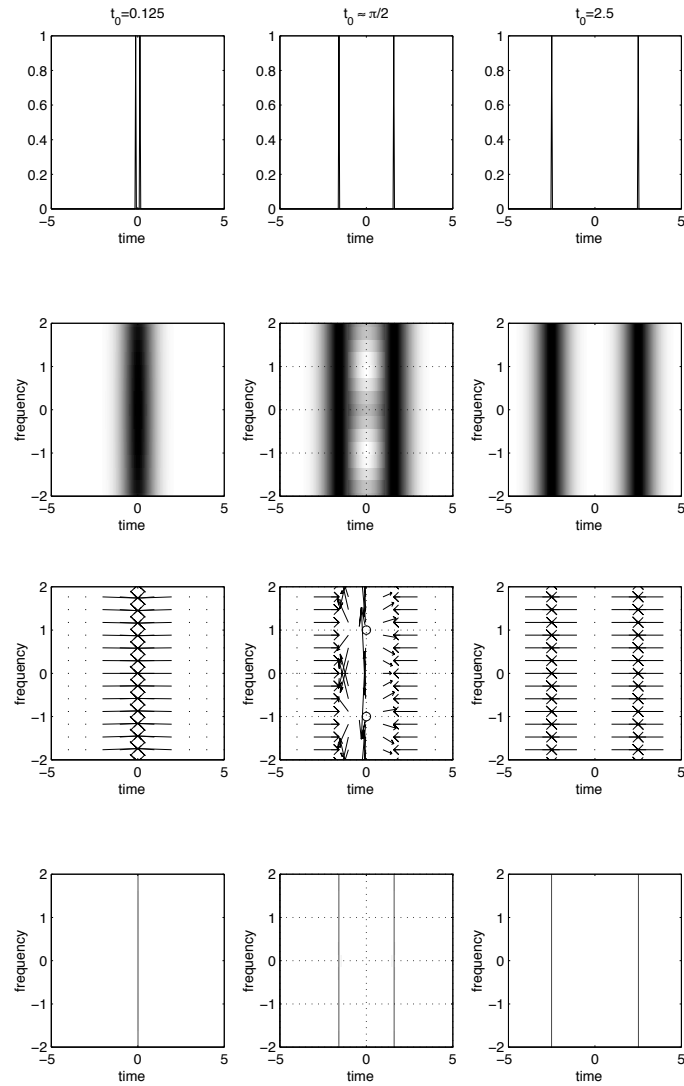
$$r_x^h(t, \omega) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \left( \frac{t_0 - t}{1 + \exp(-\frac{2t_0}{\lambda}(\frac{t}{\lambda} + j\lambda\omega))} - \frac{t_0 + t}{1 + \exp(\frac{2t_0}{\lambda}(\frac{t}{\lambda} + j\lambda\omega))} \right). \quad (9.27)$$

Il est important de remarquer que les fractions mises en jeu en (9.27) ne sont pas nécessairement définies pour tous les temps  $t$  et toutes les fréquences  $\omega$ . Si l'on se place en effet à l'instant  $t = 0$ , on a

$$r_x^h(0, \omega) = \sqrt{2} \frac{t_0}{\lambda} \tan(t_0\omega), \quad (9.28)$$

et le champ des vecteurs de réallocation diverge périodiquement lorsque la fréquence est égale à  $\omega_k = k\pi/(2t_0)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  (cette divergence est à rapprocher de celle observée lorsque l'on évalue la fréquence instantanée associée au battement de deux fréquences proches [COH 95]). Lorsque l'on évalue le spectrogramme en ces points, un calcul direct montre que sa valeur s'annule. Par suite, l'impossibilité de réallouer les points singuliers  $(0, \omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est en fait de peu d'importance puisque rien n'est à réallouer. Il n'en reste pas moins vrai que, autour des points singuliers, le vecteur de réallocation prend de grandes valeurs, ce qui pose problème d'un point de vue tant conceptuel qu'algorithmique.

La Figure 9.3 présente plusieurs configurations relatives à la distance totale  $d = 2t_0$  séparant les deux impulsions. Lorsque celles-ci sont suffisamment rapprochées (relativement à la durée  $\lambda$  de la fenêtre, fixée ici à 1), le spectrogramme, le champ des vecteurs de réallocation et le spectrogramme réalloué sont approximativement égaux à ce que l'on obtiendrait pour une impulsion unique. Si  $d$  est de l'ordre de  $\lambda$ , les points singuliers mentionnés précédemment apparaissent. La distance  $d$  a été choisie de telle sorte que ces points (marqués par un cercle) soient séparés d'une distance de 2 en unités normalisées. Les faibles valeurs du spectrogramme qui apparaissent entre les deux impulsions (la dynamique de représentation de cette image est logarithmique, alors que celle des autres est linéaire) peut s'interpréter comme des termes d'interférence.



**Figure 9.3.** Réallocation du spectrogramme d'un signal constitué de deux impulsions. Cette figure montre (de haut en bas) l'allure des signaux, leurs spectrogrammes, leurs champs de vecteurs de réallocation et leurs spectrogrammes réalloués, pour des écarts entre les impulsions augmentant de gauche à droite. Dans les deux cas extrêmes, les impulsions très proches (à gauche) ou très éloignées (à droite), la réallocation aboutit à une représentation formée d'une ou deux lignes. Dans la situation intermédiaire (colonne du milieu), il apparaît un phénomène de battement (voir texte).



Enfin, lorsque l'écart  $d$  est assez grand pour que les interactions entre impulsions disparaissent, le champ des vecteurs de réallocation peut être approché par la somme des champs de vecteurs obtenus pour chaque impulsion prise séparément.

On peut noter que, dans le cas du scalogramme, des résultats exacts peuvent être obtenus sur d'autres types de signaux (e.g. Singularités hölderiennes). Une présentation détaillée de ces résultats peut être trouvée dans [CHA 98a].

#### 9.4. Caractérisation des champs de vecteurs

##### 9.4.1. Statistiques des vecteurs de réallocation du spectrogramme

Au paragraphe précédent, nous avons montré qu'il était possible de caractériser complètement les mécanismes de réallocation du spectrogramme ou du scalogramme dans plusieurs cas de signaux déterministes. Dans le cas de signaux bruités, il est également possible d'établir une caractérisation statistique des opérateurs de réallocation.

Dans le cas du spectrogramme à fenêtre gaussienne (cas qui se généralise aisément au scalogramme), le calcul repose sur le fait que le vecteur de réallocation normalisé, caractérisé par son image dans le plan complexe, s'écrit (à une constante près) comme le rapport  $F_x^{th}/F_x^h$ . Pour commencer, considérons le cas "bruit seul", où le signal analysé  $x(t)$  est un bruit  $n(t)$  centré blanc gaussien et analytique (et donc circulaire [PIC 94]), ce qui se résume formellement par les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} n(t) &= n_r(t) + i n_i(t), \\ \text{tel que } \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{E}[n_r(t) n_r(s)] &= \mathbb{E}[n_i(t) n_i(s)] = \frac{\sigma^2}{2} \delta(t - s); \\ \mathbb{E}[n_r(t) n_i(s)] &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, les propriétés du filtrage linéaire et de circularité impliquent que  $F_x^h$  et  $F_x^{th}$  sont deux variables gaussiennes centrées, circulaires et statistiquement indépendantes, de densité de probabilité conjointe

$$f(F_x^h, F_x^{th}) = \frac{1}{\pi^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2} \exp\left(-\frac{|F_x^h|^2}{\sigma_1^2} - \frac{|F_x^{th}|^2}{\sigma_2^2}\right),$$

avec  $\sigma_1^2 := \mathbb{E}[|F_x^h|^2] = 2\sigma^2$  et  $\sigma_2^2 := \mathbb{E}[|F_x^{th}|^2] = \sigma^2 \lambda^2$ . Le changement de variable  $F_x^{th} = (\lambda/\sqrt{2}) r_x^h F_x^h$ , dont le jacobien est  $(\lambda^2/2) |F_x^h|^2$ , permet alors d'obtenir, après quelques calculs, une expression simple de la densité de probabilité (ddp) de  $r_x^h$ :

$$\begin{aligned} f(r_x^h) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(F_x^h, \frac{\lambda}{\sqrt{2}} r_x^h F_x^h\right) \frac{\lambda^2}{2} |F_x^h|^2 d\text{Re}(F_x^h) d\text{Im}(F_x^h) \\ &= \frac{1}{\pi (1 + |r_x^h|^2)^2}. \end{aligned} \tag{9.29}$$

Il faut souligner que cette ddp ne dépend ni de la variance du bruit  $\sigma^2$ , ni de la largeur de la fenêtre  $\lambda$ , ni des variables temporelles et fréquentielles  $t$  et  $\omega$ . Puisque cette densité de probabilité a une symétrie radiale, on peut conclure que les parties réelle et imaginaire de  $r_x^h$  sont centrées et décorréelées, et que leurs ddp ont la même expression :

$$\mathbb{E}[r_r r_i] = 0; \quad f(r_r) = \frac{1}{2(1+r_r^2)^{3/2}}; \quad f(r_i) = \frac{1}{2(1+r_i^2)^{3/2}},$$

avec  $r_x^h = r_r + j r_i$ . Les variances de  $r_r$  et  $r_i$  sont donc infinies, mais il est possible de montrer que  $\mathbb{E}[|r_r|] = \mathbb{E}[|r_i|] = 1$ .

En utilisant des coordonnées polaires, on peut également écrire le vecteur de réallocation sous la forme  $r_x^h = \rho \exp(j\theta)$ . Les densités de probabilité respectives de  $\rho$  et de  $\theta$  sont

$$f(\rho) = \frac{2\rho}{(1+\rho^2)^2}; \quad f(\theta) = \frac{1}{2\pi},$$

Ceci permet de conclure que  $\theta$  suit une loi uniforme (le vecteur de réallocation n'a donc pas de direction privilégiée) et que pour une probabilité  $P$  donnée, le module maximum  $\rho_{\max}$  tel que  $\Pr\{0 \leq \rho \leq \rho_{\max}\} = P$  est égal à  $\rho_{\max} = \sqrt{P/(1-P)}$ . Cette valeur peut être interprétée comme le rayon du disque contenant les vecteurs de réallocation, avec une probabilité  $P$ .

Cette approche peut être étendue au cas d'un mélange "signal+bruit", où le signal analysé est de la forme  $x(t) = s(t) + n(t)$ ,  $s(t)$  étant une composante déterministe. L'objectif sous-jacent est alors de savoir de combien  $r_x^h$  s'écarte du vecteur de réallocation de la composante déterministe  $r_s^h = (\sqrt{2}/\lambda) (F_s^{th}/F_s^h)$ . Dans ce cas, la ddp conjointe de  $F_x^h$  et  $F_x^{th}$  est

$$f(F_x^h, F_x^{th}) = \frac{1}{\pi^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2} \exp\left(-\frac{|F_x^h - F_s^h|^2}{\sigma_1^2} - \frac{|F_x^{th} - F_s^{th}|^2}{\sigma_2^2}\right),$$

et un changement de variable identique à celui utilisé dans le cas "bruit seul" conduit à une expression plus compliquée :

$$f(r_x^h) = \frac{1}{\pi(1+|r_x^h|^2)^2} \left(1 + \frac{S}{2\sigma^2} \frac{|1+r_x^h(r_s^h)^*|^2}{1+|r_x^h|^2}\right) \exp\left(-\frac{S}{2\sigma^2} \frac{|r_x^h - r_s^h|^2}{1+|r_x^h|^2}\right), \quad (9.30)$$

avec  $S := |F_x^h|^2$ . Cette ddp dépend à la fois du vecteur de réallocation déterministe  $r_s^h$  et d'une quantité homogène à un rapport signal sur bruit local  $\text{RSB} := S/(2\sigma^2)$ . On peut alors vérifier que l'expression (9.30) tend vers (9.29) lorsque  $\text{RSB}$  tend vers 0, et tend vers une distribution de Dirac  $\delta(r_x^h - r_s^h)$  lorsque  $\text{RSB}$  tend vers l'infini. Cette expression montre également que lorsque  $\text{RSB}$  est grand et lorsque le vecteur de réallocation est petit ( $|r_s^h| \ll 1$ ), alors la ddp de  $r_x^h$  est proche d'une gaussienne de moyenne  $r_s^h$  et de variance  $2\sigma^2/S = 1/\text{RSB}$ .

Des algorithmes d'extraction d'information à partir du champ des vecteurs de ré-allocation devraient pouvoir être construits en se basant sur ces caractérisations statistiques. Ces dernières ont été présentées ici pour le spectrogramme utilisant une fenêtre d'analyse gaussienne, mais nous avons pu montrer [CHA 96a, CHA 98b] que la ddp (9.29) obtenue dans le cas bruit seul ne dépend pas du choix de la fenêtre (si celle-ci vérifie des conditions presque toujours vérifiées). Un résultat similaire, obtenu par une approche très différente, a été publiée dans [DEC 80]. Dans le cas d'un mélange "signal+bruit", des calculs analytiques n'ont pas pu aboutir, mais plusieurs simulations numériques n'ont pas permis de mettre en évidence de différences significatives entre la ddp (9.30) et les histogrammes des vecteurs de ré-allocation calculés avec des fenêtres d'analyse non gaussiennes.

#### 9.4.2. Phase géométrique et champ de gradient

Dans ce qui précède, nous avons caractérisé le champ des vecteurs de ré-allocation pour certains types de signaux. D'autres résultats peuvent être donnés sur les propriétés géométriques générales des vecteurs de ré-allocation (quel que soit le signal analysé).

**Phase géométrique.** Lorsque la TFCT est définie selon (9.2), l'expression quasi-symétrique du vecteur de ré-allocation

$$v_x^h(t, \omega) := (\hat{t}_x - t \quad \hat{\omega}_x - \omega)^T = (-t/2 - \partial_\omega \varphi \quad -\omega/2 - \partial_t \varphi)^T$$

suggère tout d'abord que ce vecteur suit les courbes de niveau d'une fonction bidimensionnelle à définir. Puisque  $\hat{t}$  et  $\hat{\omega}$  sont invariants par les translations temporelles et fréquentielles, cette fonction doit vérifier ces mêmes propriétés et ce, contrairement à la phase  $\varphi(t, \omega)$  de la TFCT. Ceci signifie que cette fonction ne doit pas dépendre de l'origine du plan temps-fréquence. Pour cela, nous avons défini une nouvelle fonction  $\Phi_{t_0, \omega_0}(t, \omega)$ , appelée *phase géométrique*. Lorsque l'origine du plan temps-fréquence est choisie en  $(t_0, \omega_0)$ ,  $\Phi_{t_0, \omega_0}(t, \omega)$  est par définition égale à la phase de la TFCT calculée au point de coordonnées  $(t, \omega)$  dans le nouveau repère. Définir l'opérateur de Weyl par  $[\mathbf{W}_{t, \omega} h](s) := h(s - t) \exp(j \{ \omega s - \omega t / 2 \})$  permet d'écrire  $F_x^h$  sous la forme  $F_x^h(t, \omega) = \langle x, \mathbf{W}_{t, \omega} h \rangle$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  correspond au produit scalaire habituel dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et permet d'écrire la phase géométrique sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi_{t_0, \omega_0}(t, \omega) &= \arg \langle \mathbf{W}_{-t_0, -\omega_0} x, \mathbf{W}_{t, \omega} h \rangle \\ &= \arg \langle x, \mathbf{W}_{t_0, \omega_0} \mathbf{W}_{t, \omega} h \rangle \\ &= \varphi(t + t_0, \omega + \omega_0) + \frac{\omega_0 t - \omega t_0}{2}. \end{aligned}$$

Ceci montre alors que le vecteur de ré-allocation au point  $(t_0, \omega_0)$  est tangent aux courbes de niveau (et donc orthogonal au gradient) de  $\Phi_{t_0, \omega_0}(0, 0)$  :

$$v_x^h(t_0, \omega_0) = (\partial_\omega \Phi_{t_0, \omega_0}(0, 0) \quad -\partial_t \Phi_{t_0, \omega_0}(0, 0))^T. \quad (9.31)$$

Ce premier résultat montre que le vecteur de réallocation  $r_x^h$  peut être localement analysé selon des principes géométriques.

**Champ de gradient.** Un second résultat permet de relier le vecteur de réallocation à un potentiel scalaire. Si, comme le propose Bargmann [BAR 61], la TFCT est écrite sous la forme  $F_x^h(t, \omega) = \mathcal{F}(z, z^*) \exp(-|z|^2/4)$ , avec  $z = \omega + jt$  et  $z^*$  son conjugué, alors les deux fonctions  $F_x^h$  et  $\mathcal{F}(z, z^*)$  ont la même phase. Les déplacements produits par la réallocation peuvent donc être exprimés en fonction des dérivées partielles de  $\mathcal{F}$  :

$$\begin{aligned} \hat{t}_x - t &= -\frac{t}{2} - \operatorname{Im} \left( \frac{\partial_\omega \mathcal{F}}{\mathcal{F}} \right) \\ &= -\frac{t}{2} - \operatorname{Im} \left( \frac{\{\partial_z \mathcal{F} + \partial_{z^*} \mathcal{F}\}}{\mathcal{F}} \right) ; \end{aligned} \quad (9.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_x - \omega &= -\frac{\omega}{2} + \operatorname{Im} \left( \frac{\partial_t \mathcal{F}}{\mathcal{F}} \right) \\ &= -\frac{\omega}{2} + \operatorname{Re} \left( \frac{\{\partial_z \mathcal{F} - \partial_{z^*} \mathcal{F}\}}{\mathcal{F}} \right). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Le calcul des dérivées partielles de  $\log(F_x^h)$  fournit deux autres équations,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial_t F_x^h}{F_x^h} \right) &= \frac{\partial_t |F_x^h|}{|F_x^h|} = -\frac{t}{2} - \operatorname{Im} \left( \frac{\{\partial_z \mathcal{F} - \partial_{z^*} \mathcal{F}\}}{\mathcal{F}} \right), \\ \operatorname{Re} \left( \frac{\partial_\omega F_x^h}{F_x^h} \right) &= \frac{\partial_\omega |F_x^h|}{|F_x^h|} = -\frac{\omega}{2} + \operatorname{Re} \left( \frac{\{\partial_z \mathcal{F} + \partial_{z^*} \mathcal{F}\}}{\mathcal{F}} \right) \end{aligned}$$

qui, combinées à (9.32) et (9.33) conduisent à

$$\begin{aligned} \hat{t}_x - t &= \partial_t \log |F_x^h| - 2 \operatorname{Im} (\partial_{z^*} \log \mathcal{F}), \\ \hat{\omega}_x - \omega &= \partial_\omega \log |F_x^h| - 2 \operatorname{Re} (\partial_{z^*} \log \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Ces deux dernières équations montrent que le vecteur de réallocation est la somme du gradient d'un potentiel scalaire  $\log |F_x^h|$  et d'un terme supplémentaire lié au caractère non-analytique de la fonction  $\mathcal{F}$  [CHA 97a].

Lorsque  $h(t)$  est une fenêtre gaussienne de variance unité ( $\lambda = 1$ ), alors  $\mathcal{F}$  est une fonction entière et  $\partial_{z^*} \log \mathcal{F} = 0$ . Dans ce cas, le champ des vecteurs de réallocation est le gradient du potentiel scalaire  $\log |F_x^h|$ , donc un *champ de gradient*, et les déplacements de réallocation pointent dans la direction des maxima du module de

la TFCT, donc dans la direction des maxima du spectrogramme. La conjonction des équations montre également que le module et la phase de la TFCT sont alors liés (à une constante près), et portent donc la même information.

Lorsque  $h(t)$  est une fenêtre quelconque, il a été démontré dans [CHA 98a] que

$$\begin{cases} -2 \operatorname{Im} (\partial_{z^*} \log \mathcal{F}) &= \operatorname{Re} \left( \frac{F_x^{dh/dt + th}}{F_x^h} \right) \\ -2 \operatorname{Re} (\partial_{z^*} \log \mathcal{F}) &= -\operatorname{Im} \left( \frac{F_x^{dh/dt + th}}{F_x^h} \right). \end{cases} \quad (9.34)$$

L'importance du terme correctif qui rend le champ de réallocation différent d'un champ de gradient est donc liée à la dissemblance des résolutions temporelles et fréquentielles de la TFCT : plus  $\Delta t_h$  et  $\Delta \omega_h$  s'éloignent l'une de l'autre, plus le module de  $F_x^{dh/dt + th}$  est grand, et plus le champ des vecteurs de réallocation s'éloigne d'un champ de gradient.

## 9.5. Deux variantes

Accroître la lisibilité des distributions temps-fréquence n'est pas le seul but de la réallocation. Comme nous l'avons montré précédemment, de l'information utile (portée par le champ des vecteurs de réallocation) peut être extraite de manière à obtenir une caractérisation plus "intelligente" du signal.

### 9.5.1. La réallocation supervisée

Comme il a été montré dans [AUG 95], le spectrogramme réalloué d'un chirp ne dépend pas de la fenêtre d'analyse. Mais ceci n'est plus vérifié lorsque du bruit est ajouté, la représentation devenant alors dépendante de la fenêtre choisie. De plus, en présence de bruit large bande, la concentration de la distribution d'énergie temps-fréquence résultant de l'action de la réallocation cause la formation de "pics d'énergie" dans certaines régions "bruit seul" du plan temps-fréquence, alors qu'une distribution lisse y serait plutôt attendue.

Pour remédier à cet inconvénient, on a proposé dans [CHA 96b] une amélioration de la méthode de réallocation que l'on appelle *réallocation supervisée*. On opère en deux étapes : il s'agit d'abord de discriminer les régions "signal+bruit" et "bruit seul" de sorte à n'appliquer la réallocation que dans les premières. On utilise ensuite une procédure *multi-fenêtres* de manière à réduire la dépendance de la représentation finale vis-à-vis de la longueur de la fenêtre d'analyse.

La première étape repose sur l'observation que, dans le voisinage d'une composante déterministe, le vecteur de réallocation suit une loi d'évolution spécifique à mesure que la longueur de la fenêtre varie, alors qu'il varie de manière erratique dans les régions bruit seul. Cette observation est confirmée quantitativement par les résultats présentés en Section 9.4.1.

Si le signal peut être localement approché dans un voisinage du plan temps-fréquence du point  $(t, \omega)$  par une modulation linéaire de fréquence (“chirp linéaire”) de pente  $\beta$ , alors les vecteurs de réallocation normalisés du spectrogramme (avec les conventions données en éq. (9.17)) s’écrivent :

$$\frac{\hat{t}_x - t}{\Delta t_h} = \frac{\sqrt{2}\beta(\omega - \beta t)}{\lambda(1/\lambda^4 + \beta^2)}; \quad \frac{\hat{\omega}_x - \omega}{\Delta \omega_h} = \frac{\sqrt{2}(\omega - \beta t)}{\lambda^3(1/\lambda^4 + \beta^2)},$$

expression dont on peut déduire la direction de réallocation  $\theta$  :

$$\tan(\theta) = \frac{(\hat{\omega}_x - \omega)/\Delta \omega_h}{(\hat{t}_x - t)/\Delta t_h} = -\frac{1}{\lambda^2 \beta}.$$

En supposant que le paramètre  $\lambda$  est une variable aléatoire suivant une distribution uniforme entre  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$ , alors la densité de probabilité (ddp) de  $\theta$  est

$$f(\theta) = \frac{C}{2\sqrt{|\beta|}} \left| \frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan^{3/2} \theta} \right|, \quad \forall \theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}],$$

où  $C$  est une constante de normalisation. Cette ddp (“théorique”) peut être comparée à celle estimée (par un histogramme)  $\hat{f}(\theta)$  des directions des vecteurs de réallocation obtenues avec une collection de  $N$  fenêtres de longueur différentes. Pour ceci, on utilise une distance de Kullback-Leibler [BAS 89] :

$$d(\hat{f}, f) = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \hat{f}(\theta) \log \frac{\hat{f}(\theta)}{f(\theta)} d\theta.$$

Lorsque cette distance dépasse un seuil fixé, on considère que le point  $(t, \omega)$  appartient à une région “bruit seul”, et on inhibe la réallocation. Cette première étape nécessite donc le calcul de  $N$  spectrogrammes, associés à  $N$  fenêtres gaussiennes aux longueurs uniformément distribuées et de leurs  $N$  champs de vecteurs de réallocation.

La deuxième étape vise à combiner de manière cohérente l’information portée par tous ces spectrogrammes, pour proposer une valeur de distribution d’énergie au point  $(t, \omega)$ . Une réponse à cette question requiert implicitement la détermination d’une distance optimale entre distributions temps-fréquence (qui sélectionnerait alors la bonne moyenne à utiliser pour combiner les spectrogrammes). Ce choix optimal n’étant pour l’instant pas connu (voir par ex. [BAR 93, BAR 01] pour de premiers essais), nous adopterons une approche pragmatique en choisissant, comme moyen de fusion, la moyenne arithmétique des spectrogrammes et des champs de vecteurs de réallocation (on peut montrer que ceci correspond à la sélection d’une distance du type  $L^2$  entre distributions). Pour une description complète de l’algorithme, nous renvoyons le lecteur à [CHA 96b], où des résultats satisfaisants sont également présentés.

### 9.5.2. Réallocation différentielle

La preuve apportée en Sect. 9.4.2 que les champs des vecteurs de réallocation dérivent de potentiels scalaires, motive une analogie dynamique à l'action de la réallocation sur les distributions temps-fréquence. Ce nous amène à considérer le processus dynamique suivant que nous appellerons *réallocation différentielle* [CHA 97b] : alors que la réallocation dans sa version standard (proposé par Kodera *et al.*) déplace les valeurs par des *sauts discrets* dans le plan temps-fréquence, la réallocation différentielle initie en chaque point une *trajectoire continue* définie par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} t(0) &= t, \\ \omega(0) &= \omega, \\ \frac{dt}{ds}(s) &= \hat{t}_x(t(s), \omega(s)) - t(s), \\ \frac{d\omega}{ds}(s) &= \hat{\omega}_x(t(s), \omega(s)) - \omega(s). \end{cases} \quad (9.35)$$

où  $s$  est une variable sans dimension homogène à une abscisse curviligne le long de chaque chemin.

Le champ des vecteurs de réallocation est alors considéré comme un *champ de vitesse* qui gouverne le mouvement de chaque point temps-fréquence, comme si on y avait placé une particule élémentaire. Quand la fenêtre d'analyse est une gaussienne de variance unité (éq. (9.18) avec  $\lambda = 1$ ), le champ des vecteurs de réallocation est un champ de gradient (voir Sect. 9.4.2) dont le potentiel scalaire s'écrit  $\log |F_x^h|$ . Les équations du mouvement (9.35) définissent alors un système purement dissipatif dans lequel chaque particule converge vers un maximum local du potentiel. Pour une fenêtre quelconque, la réallocation différentielle aboutit encore à une description du signal en termes d'*attracteurs*, de *bassins d'attraction* et de *lignes de partage des eaux*, notions qui peuvent être utilisées dans une grande variété de problèmes. Par exemple, un algorithme de partition (et de débruitage) est présenté en Sect. 9.6.

## 9.6. Une application : la partition du plan temps-fréquence

Pour l'instant, nous avons considéré les distributions temps-fréquence réallouées dans le cadre de l'*analyse* (temps-fréquence) du signal. L'objectif de cette section est de montrer par un exemple que les méthodes de réallocation peuvent être utiles également pour le *traitement* du signal. Dans cet exemple, la méthode de réallocation différentielle présentée en Sect. 9.5.2 est utilisée pour partager le plan temps-fréquence en régions d'intérêt, que l'on peut interpréter comme des composantes élémentaires du signal. Nous renvoyons également le lecteur au chapitre [CHA 04] d'un autre ouvrage de ce présent traité, où l'on s'intéresse entre autres à l'application des distributions réallouées pour le problème de la détection de chirps. De nombreux problèmes de traitement du signal (comme le débruitage, la classification, etc.) peuvent se reformuler intuitivement dans le plan temps-fréquence en faisant intervenir un partage adéquat du plan temps-fréquence dans lequel chaque cellule, associée à une composante du signal, peut ensuite être utilisée pour d'éventuels traitements (extraction de composantes, ...).

Construire une telle carte temps-fréquence est équivalent à décomposer un signal en composantes modulées en amplitude et/ou fréquence. Le concept de “composante” d’un signal n’admettant pas de définition claire et universelle, il est en fait difficile de trouver une solution satisfaisante dans un cadre général à ce problème. Néanmoins, il existe plusieurs méthodes qui, pour remédier à l’ambiguïté de la notion de composante, reposent généralement sur l’utilisation d’hypothèses supplémentaires. On peut diviser ces méthodes en deux familles : la première définit une composante comme une forme d’onde dont la phase présenterait une certaine cohérence et l’amplitude serait une fonction aux variations lentes. Les méthodes basées sur le modèle sinusoïdal [MCA 86] ou les méthodes “arête et squelette” [DEL 92b] font partie de cette famille. Le deuxième groupe s’appuie sur la définition d’une mesure d’encombrement dans le plan temps-fréquence [BAR 93, BAR 01] : il s’agit de compter les composantes du signal en évaluant le “volume” temps-fréquence occupé par le signal observé, puis en le comparant avec une référence donnée par le signal d’encombrement minimum.

L’idée que nous proposons ici est différente des autres en ce qu’elle définit la notion de composante à travers une certaine représentation du signal (concrètement le champ des vecteurs de réallocation) plutôt qu’en restreignant la notion de composante à une catégorie particulière de signaux.

En partant des résultats de la Sect. 9.4.2, il devient naturel de décrire et paramétrer un signal en termes d’attracteurs, de bassins d’attraction et de lignes de partage des eaux. De cette paramétrisation, on peut penser à une variété de solutions pour caractériser le signal. Intuitivement, une composante pourrait être décrite par un *centre* et un *domaine* temps-fréquence (i.e., le bassin d’attraction), support d’existence de la composante considérée. En ce sens, cette méthode partage un point de vue commun avec celui présenté dans [PIE 95]. L’algorithme de partition proposé comporte donc quatre étapes [CHA 97a] :

1) **Réallocation différentielle.** Les *opérateurs de réallocation asymptotiques*, i.e., les coordonnées du point du plan temps-fréquence où se termine la trajectoire de chaque “particule temps-fréquence”, sont calculés en appliquant un algorithme d’intégration numérique (du type Runge-Kutta) aux équations du mouvement (9.35). On arrête l’itération à l’aide d’un critère spécifique qui assure que le point ainsi obtenu se situe dans un carré de côté  $d$  centré sur la vraie valeur asymptotique. La longueur  $d$  doit être petite par rapport au pas de la grille d’échantillonnage utilisée du plan temps-fréquence.

Ce critère fonctionne dans la limite de la validité d’une approximation locale du potentiel par une forme quadratique [CHA 97a].

2) **Pré-traitement.** Ceci consiste à trier parmi le grand nombre d’opérateurs de réallocation asymptotiques calculés, ceux qui pointent vers la même position dans le plan temps-fréquence et à résumer l’information utile dans un ensemble de points plus petits. L’idée est de rassembler tous les points qui ont convergé en des points séparés d’une distance plus petite que  $\sqrt{2}d$  (i.e., la diagonale du carré de convergence mentionné plus haut). En conséquence, toutes les “particules” qui ont convergé vers la



même position asymptotique sont assignées à une même valeur de l'opérateur de ré-allocation asymptotique. Notons que cette opération revient à traiter en premier lieu les opérateurs de ré-allocation asymptotiques associés aux signaux modulés en amplitude (pour lesquels on peut montrer qu'ils doivent pointer vers un seul et unique point isolé).

3) **Classification ascendante hiérarchique.** Le traitement des points liés aux modulations de fréquence passe par un algorithme plus sophistiqué : la classification ascendante hiérarchique (CAH) [BEN 73]. La CAH fournit une structure arborescente dans laquelle les points sont classés selon la distance qui les sépare. En appliquant un seuil dans la structure donnée par la CAH, nous obtenons les ensembles des points qui sont alignés le long d'une même courbe du plan temps-fréquence. Ce seuil est fixé à  $d + D$ , le plus grand écart possible entre deux attracteurs successifs appartenant au même chemin de fréquence instantanée, où  $D$  est le pas de discrétisation de la grille temps-fréquence)

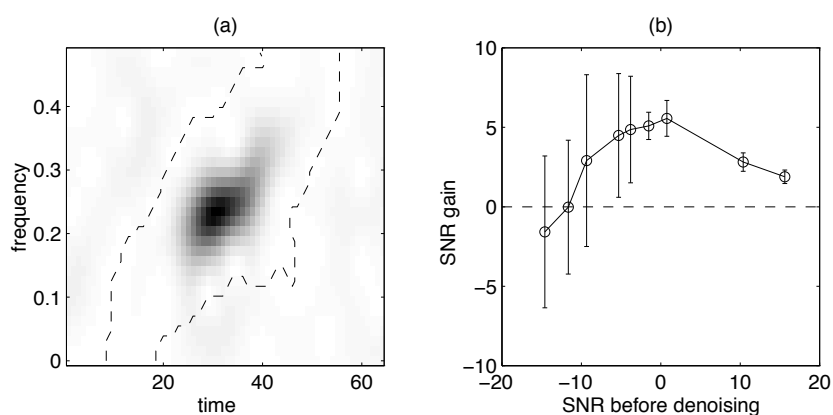
4) **Carte temps-fréquence.** La dernière étape consiste à choisir une étiquette pour chaque composante détectée, et à l'assigner à chacun des antécédents (i.e. les points de départ) des opérateurs de ré-allocation asymptotiques associés.

Si une application nécessite l'extraction d'une des composantes ainsi détectées, un filtre non stationnaire peut être obtenu via l'une des méthodes présentées dans [KOZ 92, HLA 98, MAT 03], à partir d'un gabarit donné par la restriction de la carte temps-fréquence au domaine associé à la composante considérée.

Des comparaisons entre cet algorithme de partition et d'autres méthodes aux objectifs similaires mentionnés plus haut, sont présentées dans [CHA 98a]. Dans une situation canonique impliquant un signal composé d'"atomes élémentaires" ou "logons" gaussiens, on montre par le calcul que la partition résultante est identique à celle que l'on obtiendrait en appliquant une tessellation de Voronoi [PRE 85] à l'ensemble des maxima locaux du spectrogramme. Nous montrons aussi qu'à la question "combien de composantes y-a-t'il dans le signal?", l'algorithme présenté ici répond globalement de la même manière que les méthodes basées sur des mesures d'encombrement temps-fréquence : pour un signal-test composé de deux logons séparés d'une distance que l'on fait varier, la méthode proposée identifie ces deux logons comme deux composantes distinctes quand leur distance est assez grande, et comme une seule lorsque leur distance s'annule.

Comme exemple d'illustration, nous considérons le problème de l'extraction d'un chirp linéaire d'enveloppe gaussienne du bruit blanc et Gaussien dans lequel il est plongé. Pour ceci, nous utilisons la carte temps-fréquence pour y sélectionner le domaine temps-fréquence que nous croyons appartenir au signal, et ainsi rejeter tous les autres (associés au bruit). En d'autres termes, nous construisons à partir de la partition temps-fréquence un filtre non stationnaire adapté à l'extraction du signal. En Fig. 9.4, nous comparons le gain en rapport signal sur bruit (RSB) entre le signal d'entrée et de sortie pour un RSB d'entrée allant de  $-15$  dB à  $10$  dB. Ces simulations indiquent

que pour un RSB de l'ordre de  $-5$  à  $0$  dB, le gain est d'environ  $5$  dB. Cependant, la question de la distinction d'une cellule "signal+bruit" de la partition d'une cellule "bruit seul" reste ouverte. La stratégie que nous avons adoptée ici est de sélectionner la cellule contenant la plus grande quantité d'énergie parmi toutes les cellules de la carte. Ce critère simple proposé ici comme illustration pourrait être sophistiqué (via une approche informationnelle, par exemple) de manière à étendre la région où le gain en rapport signal sur bruit est positif.



**Figure 9.4.** Partition du plan temps-fréquence et débruitage. (a) Spectrogramme d'une réalisation d'un chirp gaussien bruité (RSB = 0 dB) et contour (traits pointillés) du domaine "contenant le signal", déterminé à l'aide du champ des vecteurs de réallocation. (b) Courbe du gain en rapport signal à bruit après débruitage, avec les barres d'erreurs correspondantes, en fonction du rapport signal sur bruit du signal analysé.

## 9.7. Conclusion

La réallocation a été initialement développée dans un contexte d'analyse temps-fréquence. Elle repose en effet sur un principe très général qui peut s'appliquer à un grand nombre de distributions temps-fréquence. Puisqu'elle fait d'abord disparaître les termes d'interférence oscillants à l'aide d'un lissage et qu'elle reconcentre ensuite l'énergie restante pour faire ressortir les composantes du signal, les distributions réallocationées présentent peu d'interférences (comparées à la distribution de Wigner-Ville) et fournissent une localisation précise des composantes (comparées aux spectrogrammes ou aux scalogrammes). Ceci est particulièrement vrai (et a été rigoureusement prouvé) pour des signaux modulés en fréquence avec un rapport signal sur bruit élevé. L'existence d'algorithmes rapides rend son utilisation possible pour des applications réelles d'analyse du signal, telle que celle présentée à l'adresse

<http://www.cerlsoundgroup.org/Loris>

Mais la réallocation peut aussi trouver des applications au-delà du champ de l'analyse temps-fréquence. Nous avons montré qu'il est possible d'utiliser le champ des vecteurs de réallocation pour découper la distribution temps-fréquence d'un signal, ce qui peut permettre de résoudre des applications de détection, de classification ou de débruitage.

Il faut cependant reconnaître que malgré ses nombreux aspects séduisants, cette technique est naturellement limitée dans ses applications par son coût de calcul assez important et sa sensibilité au bruit. Nous pensons cependant que par une meilleure connaissance des propriétés structurelles des champs de vecteurs de réallocation, des améliorations (notamment des algorithmes de régularisation) devraient être possibles. Ce concept attrayant deviendrait alors un outil pratique et polyvalent de traitement du signal.

## 9.8. Bibliographie

- [AUG 94] AUGER F., FLANDRIN P., «La réallocation : une méthode générale d'amélioration de la lisibilité des représentations temps-fréquence bilinéaires», *Actes Journées GdR TdSI, Temps-fréquence, ondelettes et multirésolution*, Lyon (France), p. 15.1–15.7, 1994.
- [AUG 95] AUGER F., FLANDRIN P., «Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method», *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. SP-43, n°5, p. 1068–1089, 1995.
- [AUG 96] AUGER F., FLANDRIN P., GONÇALVÈS P., LEMOINE O., Time-frequency toolbox for MATLAB, user's guide and reference guide, <http://iut-saint-nazaire.univ-nantes.fr/~auger/tftb.html>, 1996.
- [BAR 61] BARGMANN V., «On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform», *Comm. on Pure and Appl. Math.*, vol. 14, p. 187–214, 1961.
- [BAR 93] BARANIUK R. G., FLANDRIN P., MICHEL O., «Information and complexity on the time-frequency plane», *Proc. 14<sup>ème</sup> Colloque GRETSI*, Juan-Les-Pins (France), p. 359–362, 1993.
- [BAR 01] BARANIUK R. G., FLANDRIN P., JANSSEN A. J. E. M., MICHEL O., «Measuring time-frequency content using the Rényi entropies», *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 47, n°4, p. 1391–1409, mai 2001.
- [BAS 89] BASSEVILLE M., «Distance measures for signal processing and pattern recognition», *Sig. Proc.*, vol. 18, p. 349–369, 1989.
- [BEN 73] BENZECRI J., *et al.*, *L'analyse de données. Tome 1 : la taxinomie*, Dunod, Paris (France), 1973.
- [BER 75] BERTHOMIER C., «Sur une méthode d'analyse de signaux», *Ann. Geophys.*, vol. 31, n°2, p. 239–252, 1975.
- [CHA 96a] CHASSANDE-MOTTIN E., AUGER F., FLANDRIN P., Statistiques des vecteurs de réallocation du spectrogramme, Rapport interne n°96-01, Laboratoire de Physique, ENS-Lyon (URA 1325 CNRS), Lyon (France), 1996.

- [CHA 96b] CHASSANDE-MOTTIN E., AUGER F., FLANDRIN P., «Supervised time-frequency reassignment», *Proc. IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, Paris (France), p. 517–520, 1996.
- [CHA 97a] CHASSANDE-MOTTIN E., AUGER F., DAUBECHIES I., FLANDRIN P., «Partition du plan temps-fréquence et réallocation», *Proc. 16<sup>ème</sup> Colloque GRETSI*, Grenoble (France), p. 1447–1450, 1997.
- [CHA 97b] CHASSANDE-MOTTIN E., DAUBECHIES I., AUGER F., FLANDRIN P., «Differential reassignment», *IEEE Signal Proc. Lett.*, vol. SPL-4, n° 10, p. 293–294, 1997.
- [CHA 98a] CHASSANDE-MOTTIN E., Méthodes de réallocation dans le plan temps-fréquence pour l’analyse et le traitement de signaux non stationnaires, Thèse de Doctorat, Université de Cergy-Pontoise (France), 1998.
- [CHA 98b] CHASSANDE-MOTTIN E., AUGER F., FLANDRIN P., «On the statistics of spectrogram reassignment», *Multidim. Syst. and Signal Proc.*, vol. 9, n° 4, p. 355–362, 1998.
- [CHA 04] CHASSANDE-MOTTIN E., FLANDRIN P., «Détection temps-fréquence et réallocation», MARTIN N., DONCARLI C., Eds., *Traité IC2 – Décision dans le plan temps-fréquence*, Hermès, 2004, En préparation.
- [COH 95] COHEN L., *Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall, Englewoods Cliffs (NJ), 1995.
- [DEC 80] DECHAMBRE M., LAVERGNAT J., «Statistical properties of the instantaneous frequency for a noisy signal», *Sig. Proc.*, vol. 2, p. 137–150, 1980.
- [DEL 92a] DELPRAT N., Analyse temps-fréquence de sons musicaux : exploration d’une nouvelle méthode d’extraction de données pertinentes pour un modèle de synthèse, Thèse de Doctorat, Université d’Aix-Marseille II (France), 1992.
- [DEL 92b] DELPRAT N., ESCUDIÉ B., GUILLEMAIN P., KRONLAND-MARTINET R., TCHAMITCHIAN P., TORRÉSANI B., «Asymptotic wavelet and Gabor analysis : Extraction of instantaneous frequencies», *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. IT-38, n° 2, p. 644–673, 1992.
- [DJU 99] DJUROVIC I., STANKOVIC L., «Time-frequency representation based on the reassigned S-method», *Sig. Proc.*, vol. 77, n° 1, p. 115–120, 1999.
- [FLA 99] FLANDRIN P., *Time-frequency/time-scale analysis*, Academic Press, San Diego (CA), 1999.
- [FLA 03] FLANDRIN P., AUGER F., CHASSANDE-MOTTIN E., «Time-Frequency reassignment : from principles to algorithms (chap 5)», PAPANDREOU-SUPPAPPOLA A., Ed., *Applications in time-frequency signal processing*, p. 179–203, CRC Press, Boca Raton (FL), 2003.
- [FRI 85] FRIEDMAN D., «Instantaneous frequency distribution vs. time : An interpretation of the phase structure of speech», *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, Tampa (FL), p. 1121–1124, 1985.
- [GIB 82] GIBIAT V., WU F., PERIO P., CHANTREUIL S., «Analyse spectrale différentielle (A.S.D.)», *C. R. Acad. Sc. Paris, série II*, vol. 294, p. 633–636, 1982.

- [GUI 92] GUILLEMAIN P., KRONLAND-MARTINET R., « Horizontal and vertical ridges associated to continuous wavelet transforms », *Proc. of the IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, Victoria (Canada), p. 63–66, 1992.
- [HLA 92] HLAWATSCH F., BOUDREAU-BARTELS G.-F., « Linear and quadratic time-frequency signal representations », *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 9, n°2, p. 21–67, April 1992.
- [HLA 97] HLAWATSCH F., FLANDRIN P., « The interference structure of the Wigner distribution and related time-frequency signal representations », MECKLENBRAUKER W., HLAWATSCH F., Eds., *The Wigner Distribution – Theory and Applications in Signal Processing*, p. 59–133, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1997.
- [HLA 98] HLAWATSCH F., *Time-frequency analysis and synthesis of linear signal spaces : time-frequency filters, signal detection and estimation and range-doppler estimation*, Kluwer, Boston (MA), 1998.
- [KOD 76] KODERA K., DE VILLEDARY C., GENDRIN R., « A new method for the numerical analysis of nonstationary signals », *Phys. Earth and Plan. Int.*, vol. 12, p. 142–150, 1976.
- [KOZ 92] KOZEK W., HLAWATSCH F., « A comparative study of linear and nonlinear time-frequency filters », *Proc. IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, Victoria (Canada), p. 163–166, 1992.
- [MAE 95] MAES S., « The synchrosqueezed representation yields a new reading of the wavelet transform », *Proc. SPIE 95 on OE/Aerospace Sensing and Dual Use Photonics*, Orlando (FL), p. 532–559, 1995.
- [MAL 98] MALLAT S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, New York (NY), 1998.
- [MAT 03] MATZ G., HLAWATSCH F., « Linear time-frequency filters : on-line algorithms and applications (chap 6) », PAPANDREOU-SUPPAPPOLA A., Ed., *Applications in time-frequency signal processing*, p. 205–271, CRC Press, Boca Raton (FL), 2003.
- [MCA 86] MCAULAY R. J., QUATIERI T. F., « Speech analysis-synthesis based on a sinusoidal representation », *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, vol. ASSP-34, n°4, p. 744–754, 1986.
- [PIC 94] PICINBONO B., « On circularity », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 42, n°12, p. 3473–3482, 1994.
- [PIE 95] PIERSON V., MARTIN N., « Watershed segmentation of time-frequency images », *Proc. IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Proc.*, Halkidiki (Greece), p. 1003–1006, 1995.
- [PRE 85] PREPARATA F., SHAMOS M., *Computational Geometry. An Introduction*, Springer Verlag, New York (NY), 1985.
- [RIC 97] RICHARD C., LENGELLÉ R., « Joint recursive implementation of time-frequency representations and their modified version by the reassignment method », *Sig. Proc.*, vol. 60, n°2, p. 163–179, 1997.
- [RIO 92] RIOUL O., FLANDRIN P., « Time-scale energy distributions : A general class extending wavelet transforms », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. SP-40, n°7, p. 1746–1757,

44 Temps-fréquence : concepts et outils

1992.