

- [KEN 77] KENDALL M., STUART A., *The Advanced Theory of Statistics, Distribution Theory*, volume 1, C. Griffin, 1977.
- [MAL 98] MALLAT S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1998.
- [MCC 87] MCCULLAGH P., *Tensor Methods in Statistics*, Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, 1987.
- [MEY 92] MEYER Y., *Les ondelettes. Algorithmes et applications*, Armand Colin, Paris, 1992.
- [RAV 98a] RAVIER P., Détection de transitoires par ondelettes adaptées. Critères d'adaptation fondés sur les statistiques d'ordre supérieur, Thèse de doctorat, INPG, juillet 1998.
- [RAV 98b] RAVIER P., AMBLARD P.O., « Combining an adapted wavelet analysis with fourth order statistics for transient detection », *Signal Processing*, vol. 70, p. 115-128, 1998.
- [RAV 01] RAVIER P., AMBLARD P.O., « Wavelet packets for detecting transient signals », *Signal Processing*, vol. 81, p. 1909-1926, septembre 2001.
- [TRE 68] VAN TREE H.L., *Detection, Estimation and Modulation Theory*, volume 1, John Wiley and Sons, 1968.
- [WIC 94] WICKERHAUSER M.V., *Adapted Wavelet Analysis: From Theory to Software*, A.K. Peters, 1994.

2.4. Détection temps-fréquence et réallocation

2.4.1. Introduction

Généralement, on fait correspondre au terme « chirp signal » (ou simplement « chirp ») un signal dont l'expression peut s'écrire en fonction du temps comme :

$$x(t) = a(t) e^{i\phi(t)} \quad [2.46]$$

l'amplitude $a(t)$ étant une fonction positive dont l'évolution est lente comparée aux oscillations de la phase $\phi(t)$. Nous traduirons ceci simplement (sans entrer dans les subtilités mathématiques que présente une définition précise [JAF 96, MEY 97]) par les deux conditions suivantes :

$$\left| \frac{\dot{a}(t)}{a(t)\dot{\phi}(t)} \right| \ll 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\ddot{\phi}(t)}{\dot{\phi}^2(t)} \right| \ll 1 \quad [2.47]$$

où « ' » et « '' » sont les dérivées première et seconde, respectivement.

La première condition garantit que, sur une pseudo-période (locale) $T(t) = 2\pi/\dot{\phi}(t)$, l'amplitude $a(t)$ ne subisse aucune variation relative appréciable, tandis que la seconde condition impose que $T(t)$ soit elle-même une fonction

lentement variable, donnant ainsi un sens à la notion de pseudo-période. Définis ainsi, les chirps sont destinés à servir de modèle pour les signaux monocomposantes modulés à la fois en amplitude et en fréquence. Leur fréquence « instantanée » est alors supposée être reliée aux oscillations « locales » de la phase.

Intuitivement, un chirp $x(t)$ est associé à une description temps-fréquence qui, si elle est faite à l'aide d'une représentation conjointe $\rho_x(t, f)$ correctement définie, devrait exister essentiellement – dans le plan temps-fréquence – dans un voisinage étroit autour d'une ligne caractéristique \mathcal{L} . Cette ligne peut alors être aussi bien interprétée comme une « fréquence instantanée » (fréquence en fonction du temps) ou – dans une perspective duale – comme un « retard de groupe » (temps en fonction de la fréquence). En supposant que ceci soit vérifié, il devient naturel de proposer un schéma heuristique pour la détection d'un chirp, basé sur la recherche d'une telle ligne dans la distribution temps-fréquence de l'observation $r(t)$, par exemple en utilisant la stratégie de détection suivante :

$$\Lambda(r) = \int_{\mathcal{L}} \rho_r(t, f) dl \quad [2.48]$$

et en la comparant à un seuil choisi à partir d'hypothèses faites sur le bruit.

Qui plus est, dans le cas où la courbe \mathcal{L} dépend d'un vecteur de paramètres inconnus θ , en introduisant la quantité paramétrée suivante :

$$\Lambda(r; \theta) = \int_{\mathcal{L}(\theta)} \rho_r(t, f) dl \quad [2.49]$$

et en regardant son maximum selon θ , on peut imaginer d'effectuer non seulement la détection de $x(t)$, mais également l'estimation de θ . Une telle stratégie évoque clairement celle des transformations de Radon ou de Hough généralisées.

Au-delà de ces considérations heuristiques, le raisonnement qui aboutit à l'utilisation de la stratégie proposée ci-dessus doit néanmoins être discuté et justifié. Plus précisément, le chirp à détecter étant fixé, il s'agit de répondre aux questions suivantes :

- Quelle représentation temps-fréquence utiliser pour donner un sens à l'idée de localisation ?
- Comment une démarche heuristique basée sur l'intégration le long d'un chemin dans le plan temps-fréquence peut-elle être rendue optimale selon des critères statistiques précis ?

Après avoir rappelé quelques résultats importants concernant la détection optimale (2.4.2), nous commencerons la discussion avec le cas plus simple des chirps *linéaires*, pour lesquels les résultats sont connus et établis depuis longtemps (2.4.3).

Ceci nous offrira les lignes directrices pour effectuer la généralisation à des situations non linéaires (2.4.4). Une attention spéciale sera portée au cas spécifique des chirps en « loi de puissance », à cause de leur importance dans le contexte de la détection des ondes gravitationnelles, dont nous nous servirons comme exemple illustratif (2.4.5). On y verra en particulier comment les distributions réallouées sont amenées à jouer un rôle naturel dans le problème de décision considéré.

2.4.2. Détection

2.4.2.1. Détection optimale

La détection d'un signal est généralement formulée en un problème de test binaire d'hypothèses (voir par exemple [FLA 03, WHA 71]) :

$$H_0 : r(t) = n(t) \quad [2.50]$$

$$H_1 : r(t) = n(t) + s(t) \quad [2.51]$$

avec $-T/2 \leq t \leq T/2$ et où $s(t)$ est le signal de référence à détecter (supposé connu et d'énergie finie sur $[-T/2, T/2]$), $n(t)$ est un bruit additif et $r(t)$ est l'observation disponible avec laquelle la décision doit être prise.

Dans ce cadre, l'obtention d'un détecteur « optimal » dépend non seulement de connaissances *a priori* que l'on pourrait avoir sur le signal et le bruit, mais aussi du choix d'un critère d'optimalité. Un concept pertinent pour un tel critère est celui de « test du rapport de vraisemblance » (TRV).

Par ailleurs, nous serons intéressés ici au cas où le signal suit l'expression $s(t) = x(t; \theta) \exp i\gamma$, où θ est un vecteur de paramètres inconnus que l'on aimerait estimer et γ une phase aléatoire, uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$, dont on aimerait se débarrasser. Dans cette situation, la notion de TRV doit être étendue à celle de TRV généralisé (TRVG).

Sous l'hypothèse où le bruit $n(t)$ est gaussien et stationnaire au second ordre (de densité spectrale $\Gamma_n(f)$), le TRVG conduit à la stratégie de détection suivante [WHA 71] :

$$\Lambda(r; \theta) = \left| \int_0^{+\infty} \frac{R(f) \overline{X(f; \theta)}}{\Gamma_n(f)} df \right|^2 \quad [2.52]$$

où l'on a noté \bar{X} le conjugué du nombre complexe X .

La détection est alors effective lorsque le TRVG dépasse un seuil fixé. On peut remarquer que le détecteur TRVG admet une interprétation en termes de « filtre adapté », un concept basé sur l'idée d'un filtrage des observations qui maximiserait le

rapport signal sur bruit (c'est-à-dire le contraste entre les deux hypothèses en compétition) en sortie du filtre. En raison du terme de phase aléatoire, le détecteur TRVG optimal se trouve coïncider avec un filtre adapté suivi par le calcul de son enveloppe : une structure que l'on appelle « filtrage adapté avec détection d'enveloppe » [WHA 71]. C'est à cette quantité que nous nous proposons de donner une formulation temps-fréquence équivalente.

A partir de cette stratégie modifiée, la détection reste encore basée sur la comparaison avec un seuil. L'estimation (au sens du maximum de vraisemblance) des paramètres peut alors être conduite simultanément selon :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \Lambda(r; \theta) \quad [2.53]$$

à condition toutefois que l'énergie du signal de référence $x(t; \theta)$ soit identique pour toute valeur de θ .

2.4.2.2. Détection temps-fréquence

Ainsi que le met en évidence la structure du TRVG, la détection optimale repose sur une mesure de corrélation – comprise comme un module carré d'un produit scalaire – entre l'observation et une référence. Cette corrélation peut être exprimée de manière équivalente en temps ou en fréquence. Ceci suggère naturellement qu'une troisième approche équivalente soit possible : celle selon laquelle le produit scalaire pourrait être écrit conjointement en temps et en fréquence par l'utilisation d'une distribution temps-fréquence convenable, que l'on peut penser comme une « signature » bien adaptée aux signaux non stationnaires.

L'idée est donc d'introduire une distribution temps-fréquence $\rho_x(t, f)$ (qui doit être au moins quadratique en x) telle que nous ayons, pour tous signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, une relation du type :

$$|\langle x_1, x_2 \rangle_t|^2 = |\langle X_1, X_2 \rangle_f|^2 = \langle \langle \rho_{x_1}, \rho_{x_2} \rangle \rangle_{tf} \quad [2.54]$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ et $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{tf}$ désignent des produits scalaires convenablement choisis opérant en temps, en fréquence et à la fois en temps et en fréquence, respectivement (les définitions explicites de ces produits scalaires seront détaillées dans la suite pour donner un sens précis aux égalités précédentes).

Une telle équivalence n'a, bien sûr, aucune raison d'être vérifiée par toutes les distributions temps-fréquence quadratiques. Ceci n'est, par exemple, pas le cas pour les plus simples des distributions auxquelles on peut penser, nommément le *spectrogramme* (module carré de la transformée de Fourier à court terme) et le *scalogramme* (module carré de la transformée en ondelettes). Ceci peut être vérifié directement, mais cette affirmation (et, avec elle, le moyen de trouver une distribution convenable qui dépasse les limitations des spectrogrammes et scalogrammes) peut être justifiée

d'une façon plus intéressante en considérant des classes générales de distributions auxquelles les spectrogrammes et scalogrammes appartiennent.

La classe de toutes les distributions quadratiques temps-fréquence qui sont covariantes aux translations en temps et en fréquence est appelée *classe de Cohen* [COH 95, FLA 98] et se définit par :

$$C_x^{(\phi)}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi, \tau) A_x(\xi, \tau) e^{-i2\pi(\xi t + \tau f)} d\xi d\tau \quad [2.55]$$

avec :

$$A_x(\xi, \tau) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{x\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{i2\pi\xi t} dt \quad [2.56]$$

et où $\phi(\xi, \tau)$ est une fonction de paramétrisation arbitraire telle que $\phi(0, 0) = 1$.

A l'intérieur de cette classe, le sous-ensemble des distributions temps-fréquence *unitaires* est particulièrement intéressant pour notre problème de détection. Il s'agit des membres de la classe de Cohen qui satisfont la relation suivante :

$$\left| \int x_1(t) \overline{x_2(t)} dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{x_1}^{(\varphi)}(t, f) \overline{C_{x_2}^{(\varphi)}(t, f)} dt df \quad [2.57]$$

relation que l'on doit rapprocher de l'équation [2.54]. En partant de la définition [2.55], il est facile d'établir la propriété suivante [JAN 82] : une distribution temps-fréquence appartenant à la classe de Cohen est unitaire si et seulement si la fonction de paramétrisation $\phi(\xi, \tau)$ est de module unité.

La conséquence de ce résultat est que le spectrogramme de fenêtre h ne peut pas être unitaire puisqu'il est bien connu [COH 95, FLA 98] qu'il appartient à la classe de Cohen avec $\phi(\xi, \tau) = \overline{A_h(\xi, \tau)}$, une quantité qui ne peut pas être de module unité sur le plan (ξ, τ) en entier. Un résultat similaire peut être établi pour le scalogramme, que l'on sait être un membre de la *classe affine* [FLA 98]. Il apparaît donc que ces distributions (spectrogrammes et scalogrammes) ne peuvent *a priori* servir de base à un détecteur temps-fréquence optimal, bien qu'ils puissent être mis en avant à ce sujet et que leur utilité ait été prouvée pour l'obtention de détecteurs sous-optimaux [ALT 80, INN 96, INN 97, MOR 03]. Des distributions optimales au sens de la détection peuvent être néanmoins trouvées. Nous nous focaliserons sur le cas spécifique de la détection de chirp. Nous renvoyons le lecteur intéressé par une discussion plus générale sur la détection temps-fréquence optimale à [FLA 03] et aux références auxquelles il renvoie.

2.4.3. Détecter les chirps linéaires

Un chirp est un *chirp linéaire* s'il admet une représentation du type de l'équation [2.46] dans laquelle $\phi(t)$ est un polynôme quadratique en t :

$$\phi(t) = 2\pi \left(\frac{\alpha}{2} t^2 + \beta t + \gamma \right) \quad [2.58]$$

où α , β et γ sont réels et $\alpha \neq 0$.

Un tel signal voit sa fréquence varier linéairement avec le temps comme on peut le vérifier en examinant sa «*fréquence instantanée*» définie par $f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t)$. Notons que cette interprétation n'est pas toujours valide puisque la définition de la fréquence instantanée présuppose que le signal soit *analytique* (c'est-à-dire tel que $\Re\{x(t)\}$ et $\Im\{x(t)\}$ forment une paire de Hilbert ou, de manière équivalente, tel que le spectre de $x(t)$ soit non nul aux fréquences positives seulement), ce qui n'est pas nécessairement le cas pour un chirp linéaire ainsi défini (une discussion plus précise sur les possibilités d'interprétation de la dérivée de la phase du signal analytique en termes de fréquence instantanée est donnée dans [PIC 97]).

Les conditions selon lesquelles un chirp linéaire est presque analytique peuvent être précisées dans quelques cas quand une forme explicite est donnée à l'amplitude $a(t)$. En particulier, dans le cas important d'une amplitude gaussienne, il devient simple de prouver qu'un chirp linéaire d'amplitude gaussienne $e^{-\pi\delta t^2}$ devient presque analytique (c'est-à-dire s'annule presque pour les fréquences négatives) dans la limite à bande étroite où $(\alpha^2 + \delta^2)/\delta\beta^2 \rightarrow 0$. Ceci provient d'un calcul direct selon lequel :

$$|X(f)| = C e^{-\pi \frac{\delta}{\alpha^2 + \delta^2} (f - \beta)^2} \quad [2.59]$$

où $X(f)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$. Nous obtenons ainsi le résultat que la fréquence centrale d'un chirp linéaire d'amplitude gaussienne est β , tandis que sa largeur de bande est proportionnelle à $\sqrt{\delta + \alpha^2/\delta}$, sous la condition de bande étroite.

La détection temps-fréquence optimale des chirps linéaires a été considérée, la première fois, dans [KAY 85]. Il apparaît que les chirps linéaires sont intimement liés au membre de la classe de Cohen associé à la fonction de paramétrisation $\phi(\xi, \tau) = 1$, la distribution de Wigner-Ville [COH 95, FLA 98] :

$$W_x(t, f) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{x\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad [2.60]$$

En effet, quand elle est appliquée au chirp linéaire [2.58] avec $a(t) = 1$, la distribution de Wigner-Ville [2.60] est parfaitement localisée, ce qui s'écrit :

$$W_x(t, f) = \delta\left(f - \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t)\right) \quad [2.61]$$

Puisque la fonction de paramétrisation de la distribution de Wigner-Ville est $\phi(\xi, \tau) = 1$, elle est bien évidemment de module unité, ce qui garantit son unitarité. Dans le cas où $x_1(t) = r(t) \mathbf{1}_{[-T/2, T/2]}(t)$ (avec $\mathbf{1}_I(t)$ la fonction indicatrice de l'intervalle I) et $x_2(t)$ est un chirp linéaire $x_2(t) = a(t) \exp i(\phi(t) - 2\pi\gamma)$, nous obtenons en appliquant [2.57] (et grâce à la propriété de conservation de support de la distribution de Wigner-Ville et à sa compatibilité avec les modulations [COH 95, FLA 98]) :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-T/2}^{T/2} r(t) a(t) e^{i(\phi(t) - 2\pi\gamma)} dt \right|^2 \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \int W_{r,a}(t, f) \delta\left(f - \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t)\right) dt df \end{aligned} \quad [2.62]$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\int W_a\left(t, \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t) - \xi\right) W_r(t, \xi) d\xi \right) dt \quad [2.63]$$

On en déduit que la détection optimale au sens du TRVG (dans un bruit blanc gaussien centré) d'un chirp linéaire de paramètres inconnus $\theta = (\alpha, \beta)$ peut être accomplie en utilisant comme stratégie la quantité suivante, basée sur une écriture temps-fréquence :

$$\Lambda(r; \alpha, \beta) = \int_{-T/2}^{T/2} \rho_r(t, \alpha t + \beta) dt \quad [2.64]$$

avec :

$$\rho_r(t, f) = \int W_a(t, f - \xi) W_r(t, \xi) d\xi \quad [2.65]$$

Etant donné le modèle du chirp linéaire [2.58], l'énergie du signal à détecter ne dépend pas des paramètres inconnus α et β , ce qui autorise leur estimation au sens du maximum de vraisemblance par $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \operatorname{argmax}_{\alpha, \beta} \Lambda(r; \alpha, \beta)$.

2.4.4. Détecter les chirps en loi de puissance

La situation de quasi-analyticité des chirps linéaires contraste avec celle des chirps en loi de puissance, qui, eux, sont analytiques par construction. Un chirp est un *chirp en loi de puissance* (d'indices $r \in \mathbb{R}$ et $k \leq 0$) s'il admet comme représentation fréquentielle :

$$X_{r,k}(f) = C f^{-(r+1)} e^{i\Psi_k(f)} \mathbf{1}_{[0, +\infty]}(f) \quad [2.66]$$

avec $\Psi_k(f) = -2\pi(cf^k + t_0f + \gamma)$ si $k < 0$, $\Psi_0(f) = -2\pi(c \log f + t_0f + \gamma)$, $(C, c, t_0, \gamma) \in \mathbb{R}^4$.

Les chirps en loi de puissance étant définis à travers leurs transformées de Fourier, il est plus naturel de les caractériser par leur loi de retard de groupe

$t_X(f) = -\dot{\Psi}_k(f)/(2\pi) = t_0 + ckf^{k-1}$ (quantité duale de la fréquence instantanée). Bien que la définition [2.66] puisse s'étendre pour des valeurs positives du paramètre k , nous nous restreindrons dans la suite au cas $k \leq 0$, pour lequel le retard de groupe correspond à des hyperboles généralisées dans le plan temps-fréquence.

Dans le cas des chirps en loi de puissance, la distribution de Wigner-Ville n'est plus un bon candidat puisque, bien qu'unitaire, il lui manque la propriété de localisation qui permet d'obtenir une solution sous la forme d'intégrale de chemin. Dans le cas particulier des chirps hyperboliques (c'est-à-dire, $k = 0$), une solution possible a été proposée dans [PAP 94] sur la base d'une variante de la distribution de Wigner-Ville (que l'on appelle la distribution de Altes-Marinovic), obtenue par une anamorphose (*warping operation*). Nous ne suivons pas cette approche ici à cause de deux limitations : d'abord le fait que la stratégie qui en résulte n'est pas invariante par les translations en temps (ce qui est un problème si l'origine temporelle du chirp est inconnue et doit être estimée) et ensuite parce que cette technique développée pour le cas $k = 0$ ne peut pas être directement étendue à des valeurs de k quelconques.

Le cadre que nous proposons plutôt d'utiliser est celui des *distributions temps-fréquence affines*, comme l'ont développé J. et P. Bertrand [BER 92]. Ces distributions forment une classe entière de distributions temps-fréquence. Mais, en comparaison avec la précédente classe de Cohen, son introduction exige la covariance des distributions qu'elle contient, par rapport à chacune des extensions à trois paramètres du groupe affine. Ceci résulte en la construction d'une famille de distributions paramétrées pour laquelle nous adopterons la définition suivante [BER 92].

DÉFINITION 2.1.— *La distribution de Bertrand (d'indice $k \in \mathbb{R}$) d'un signal analytique $X(f)$ est donnée par :*

$$P_X^{(k)}(t, f) = f^{2(r+1)-q} \int \mu_k(u) X(f\lambda_k(u)) \overline{X(f\lambda_k(-u))} e^{i2\pi t f \zeta_k(u)} du \quad [2.67]$$

avec :

$$\zeta_k(u) = \lambda_k(u) - \lambda_k(-u) \quad [2.68]$$

Dans cette définition, r et q sont des paramètres réels quelconques et $\mu_k(u)$ est une fonction arbitraire, tandis que la forme explicite de la fonction de paramétrisation $\lambda_k(u)$ est fixée par :

$$\lambda_k(u) = \left(k \frac{e^{-u} - 1}{e^{-ku} - 1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad [2.69]$$

si $k \neq 0, 1$, les deux cas spéciaux associés à $k = 0$ et $k = 1$ étant définis par continuité par :

$$\lambda_0(u) = \frac{u}{1 - e^{-u}} \quad [2.70]$$

et :

$$\lambda_1(u) = \exp\left(1 + \frac{u e^{-u}}{e^{-u} - 1}\right) \quad [2.71]$$

On peut remarquer qu'une distribution de Bertrand est à valeurs réelles sous la condition de symétrie hermitienne $\mu_k(u) = \overline{\mu_k(-u)}$, une condition que nous supposons satisfaite dans la suite.

Pour obtenir la formulation temps-fréquence pour le détecteur de chirp en loi de puissance, nous aurons besoin de quelques résultats sur les distributions de Bertrand. Nous les résumerons dans les propositions 2.1 à 2.3 suivantes, dont les preuves peuvent être trouvées dans [BER 91] et [BER 92].

Localisation

Etant entendu que la distribution de Wigner-Ville est naturellement adaptée aux chirps linéaires parce que parfaitement localisée, la même adéquation entre les distributions de Bertrand et les chirps en loi de puissance peut être prouvée par la proposition suivante [BER 92].

PROPOSITION 2.1.– *Quand elle est appliquée à un chirp en loi de puissance [2.66], la distribution de Bertrand d'indice k [2.67] est parfaitement localisée sur la courbe de retard de groupe $t_X(f) = t_0 + ckf^{k-1}$ et s'écrit :*

$$P_{X_{r,k}}^{(k)}(t, f) = C^2 f^{-(q+1)} \delta(t - t_X(f)) \quad [2.72]$$

si et seulement si la fonction de pondération arbitraire $\mu_k(u)$ est donnée par :

$$\mu_k(u) = \zeta_k(u) (\lambda_k(u) \lambda_k(-u))^{r+1} \quad [2.73]$$

Unitarité

Le deuxième ingrédient dont nous aurons besoin est l'unitarité, pour lequel – en introduisant des produits scalaires convenables sur la demi-droite des fréquences positives et sur le demi-plan temps-fréquence associé – nous avons le résultat suivant [BER 92].

PROPOSITION 2.2.– *Une distribution de Bertrand est unitaire, c'est-à-dire satisfait :*

$$\left| \int_0^{+\infty} X(f) \overline{Y(f)} f^{2r+1} df \right|^2 = \int \int_0^{+\infty} P_X^{(k)}(t, f) P_Y^{(k)}(t, f) f^{2q} dt df \quad [2.74]$$

pour tous signaux $X(f)$ et $Y(f)$, si et seulement si la fonction de pondération arbitraire $\mu_k(u)$ est donnée par :

$$\mu_k(u) = \zeta_k^{1/2}(u) (\lambda_k(u) \lambda_k(-u))^{r+1} \quad [2.75]$$

Unitarité étendue

En corollaire aux propositions 2.1 et 2.2, les propriétés requises de localisation et d'unitarité peuvent être simultanément remplies si et seulement si $\dot{\zeta}_k(u) = 1$, équation dont la seule solution en k est $k = 0$ (ceci peut être clairement établi en notant que nous avons la relation $\lambda_k(u) = e^u \lambda_k(-u)$, quel que soit k [BER 92]). A moins que nous ne voulions considérer seulement le cas des chirps hyperboliques, il semble que les deux propriétés de localisation et d'unitarité ne puissent être combinées directement, de manière à imiter ce qui a été préalablement fait dans le cas des chirps linéaires. Une échappatoire est cependant possible, qui repose sur la proposition suivante [BER 92].

PROPOSITION 2.3.– *Etant donné une distribution de Bertrand localisée $P_X^{(k)}(t, f)$ avec $k < 0$, il existe une distribution auxiliaire $\tilde{P}_X^{(k)}(t, f)$ caractérisée par :*

$$\tilde{\mu}_k(u) = (\lambda_k(u) \lambda_k(-u))^{r+1} \quad [2.76]$$

et telle que :

$$\left| \int_0^{+\infty} X(f) \overline{Y(f)} f^{2r+1} df \right|^2 = \int \int_0^{+\infty} \tilde{P}_X^{(k)}(t, f) P_Y^{(k)}(t, f) f^{2q} dt df \quad [2.77]$$

pour tous signaux $X(f)$ et $Y(f)$.

Ceci nous offre un degré de liberté supplémentaire dans la manipulation des distributions de Bertrand, en assouplissant la contrainte stricte d'unitarité associée à une distribution donnée *via* l'introduction d'une paire de distributions et une relation de dualité qui les lie. Dans le cas spécifique $k = -1$, cette dualité est identique à celle évoquée par A. Unterberger (voir [UNT 84]), qui a inventé les termes d'« active » et de « passive » pour distinguer les distributions correspondantes, termes que nous reprendrons pour des valeurs arbitraires de k en appelant la distribution auxiliaire $\tilde{P}_X^{(k)}(t, f)$, la distribution *passive* associée à $P_X^{(k)}(t, f)$, cette dernière étant qualifiée d'*active*.

Filtrage

Finalement, il nous est nécessaire de caractériser la distribution de Bertrand lorsque l'on sort de la classe des signaux pour lesquels elle est parfaitement localisée. Par exemple, quand un signal est filtré, la proposition suivante (dont la démonstration utilise des résultats similaires obtenus sur la distribution active [BER 91] et une écriture explicite du lien de dualité qui unit les distributions active et passive [CHA 99]) montre que sa distribution de Bertrand passive est filtrée en conséquence.

PROPOSITION 2.4.– *Quand elle est appliquée au produit $X(f) = M(f)Y(f)$, la distribution de Bertrand passive $\tilde{P}_X^{(k)}(t, f)$ s'écrit :*

$$\tilde{P}_X^{(k)}(t, f) = f^{q+1} \int \tilde{P}_{M_r}^{(k)}(t - \theta, f) P_Y^{(k)}(\theta, f) d\theta \quad [2.78]$$

avec :

$$M_r(f) = f^{-(r+1)} M(f) \quad [2.79]$$

Tous les résultats obtenus jusqu'ici peuvent maintenant être combinés, ce qui mène au résultat central.

PROPOSITION 2.5.– *Etant donné le problème de détection où le signal $x(t; \theta_0)$ à détecter est un chirp en loi de puissance [2.66] de loi de retard de groupe $t_X(f) = t_0 + c_0 k f^{k-1}$ avec les paramètres inconnus $\theta_0 = (t_0, c_0)$, et où le bruit additif $n(t)$ est gaussien, centré, stationnaire et de densité spectrale de puissance $\Gamma_n(f)$, la stratégie optimale admet la formulation temps-fréquence suivante :*

$$\Lambda^w(r; t, c) = \int_0^{+\infty} \rho_R(t + ckf^{k-1}, f) df \quad [2.80]$$

avec :

$$\rho_R(t, f) = C^2 f^{2q} \int \tilde{P}_A^{(k)}(t - s, f) P_R^{(k)}(s, f) ds \quad [2.81]$$

et :

$$A(f) = \frac{f^{-(3r+2)}}{\Gamma_n(f)} U(f) \quad [2.82]$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\theta_0 = (t_0, c_0)$ est connu. Dans ce cas, à partir des résultats de la proposition 2.1 (localisation) et 2.3 (unitarité étendue), nous obtenons [BER 92] clairement, pour tout signal $Z(f)$:

$$\left| \int_0^{+\infty} Z(f) \overline{X_{r,k}(f)} f^{2r+1} df \right|^2 = \int \int_0^{+\infty} \tilde{P}_Z^{(k)}(t, f) P_{X_{r,k}}^{(k)}(t, f) f^{2q} dt df \quad [2.83]$$

$$= C^2 \int_0^{+\infty} \tilde{P}_Z^{(k)}(t_X(f), f) f^{q-1} df \quad [2.84]$$

Il s'ensuit que le membre de gauche de l'équation ci-dessus s'identifie exactement à la stratégie [2.52] si $Z(f) = R(f)f^{-(2r+1)}/\Gamma_n(f)$ et $X(f; \theta_0) = X_{r,k}(f)$. En conséquence, le membre de droite de la même équation nous donne une formulation temps-fréquence alternative pour le problème de détection de chirps en loi de

puissance et, en utilisant les résultats établis en proposition 2.4 (filtrage), ceci nous conduit finalement au résultat énoncé, avec $\theta = \theta_0$, c'est-à-dire $t = t_0$ et $c = c_0$. Dans le cas plus réaliste où le vecteur de paramètres θ_0 est inconnu, la même stratégie doit être utilisée en remplaçant θ_0 par un ensemble de valeurs tests $\theta = (t, c)$. La détection est alors effective quand :

$$\max_{(t,c)} \Lambda(r; t, c) > \eta \quad [2.85]$$

où η est un seuil prescrit, tandis que l'estimation de θ_0 peut être conduite avec :

$$\hat{\theta}_0 = (\hat{t}_0, \hat{c}_0) = \arg \max_{(t,c)} \Lambda(r; t, c) \quad [2.86]$$

Selon ce résultat, les chirps en loi de puissance noyés dans un bruit gaussien peuvent être détectés de manière optimale *via* une stratégie d'intégration de chemin dans le plan temps-fréquence. Leurs paramètres peuvent être estimés par une transformée de Radon ou de Hough généralisée, appliquée à une distribution bien définie. Une application potentielle de ce résultat va maintenant être discutée.

2.4.5. L'exemple des ondes gravitationnelles

Alors que l'existence des ondes gravitationnelles a été prédite par la théorie de la relativité générale depuis longtemps, aucune preuve expérimentale n'a été obtenue jusqu'ici. Ce n'est que depuis un passé très récent que la construction de détecteurs (tels le franco-italien Virgo, l'américain Ligo et le germano-britannique GEO600 pour ne citer que les plus importants) a été lancée avec l'objectif d'une mesure directe.

Dans son principe, le détecteur est un interféromètre géant (de plusieurs centaines de mètres, voire quelques kilomètres) permettant la conversion de la distorsion locale de l'espace-temps causée par le passage d'une onde gravitationnelle en un mouvement détectable de franges d'interférences. Parce que les effets d'une telle distorsion observables sur terre sont extrêmement faibles, leur détection est soumise à l'obtention d'une sensibilité de mesure de l'ordre de 10^{-22} . Etant donné les limitations dues au bruit, ceci devrait être néanmoins possible dans une « fenêtre » fréquentielle comprise entre quelques dizaines et quelques centaines de hertz.

Les seuls phénomènes physiques qui s'accompagnent de l'émission de radiations gravitationnelles d'amplitude suffisante sont d'origine astrophysique et mettent généralement en jeu des objets très massifs. Une grande variété de situations peut être considérée [SCH 89], chacune correspondant à un type de signal, plus ou moins bien caractérisé. Parmi les sources les plus prometteuses en termes de détection d'ondes gravitationnelles, on met beaucoup d'espoir dans les coalescences de systèmes binaires d'étoiles à neutrons, la seule situation que nous considérerons ici. En

ce qui concerne la détection (du point de vue du traitement du signal), la question-clé est d'obtenir des informations *a priori* sur les structures possibles des formes d'ondes attendues.

2.4.5.1. Un modèle pour la coalescence de binaires

Une « binaire coalescente » est un système de deux objets astrophysiques massifs (par exemple des étoiles à neutrons ou des trous noirs), en rotation l'un autour de l'autre. Au cours de leur mouvement orbital, de l'énergie est rayonnée sous forme gravitationnelle. Le système perdant de l'énergie, les deux objets se rapprochent en faisant augmenter la fréquence de rotation jusqu'à la coalescence. On comprend intuitivement que les binaires coalescentes devraient donner naissance à des ondes gravitationnelles au comportement pseudo-périodique accéléré et donc à une structure proche de celle d'un chirp.

En première approximation (newtonienne), une forme explicite peut être donnée à la forme d'onde espérée. A un terme de phase près, elle peut être exprimée comme la partie réelle du signal à valeurs complexes [SAT 91, THO 87] :

$$x(t; t_0, d) = A (t_0 - t)^{-\alpha} e^{-i2\pi d(t_0 - t)^\beta} \mathbf{1}_{[-\infty, t_0[}(t) \quad [2.87]$$

où $\alpha = 1/4$ et $\beta = 5/8$. Dans cette expression, t_0 est le temps de coalescence et d et A sont des constantes qui dépendent principalement des masses individuelles des objets et, bien sûr, d'autres quantités géométriques comme la distance de la binaire à la terre ou bien l'orientation relative des fronts d'ondes et du détecteur. Etant donné deux objets de masses individuelles m_1 et m_2 , et pour une orientation relative optimale entre le détecteur et la binaire, la forme d'onde se trouve en fait complètement caractérisée par deux paramètres : la distance terre-binaire r (que l'on exprimera en Mpc) et la « chirp mass » [THO 87] définie par $\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5}$ où $M = m_1 + m_2$ est la « masse totale » et μ la « masse réduite » telle que $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$. Les constantes d et A se déduisent de ces deux paramètres par les relations suivantes [MOH 96, SAT 91] :

$$d = 160 \times 3^{3/8} \mathcal{M}_\odot^{-5/8} \approx 241 \mathcal{M}_\odot^{-5/8} \quad [2.88]$$

$$A = \left(\frac{4}{3^{3/4}} \right) 1,92 \times 10^{-21} \frac{\mathcal{M}_\odot^{5/4}}{r} \approx 3,37 \times 10^{-21} \frac{\mathcal{M}_\odot^{5/4}}{r} \quad [2.89]$$

avec $\mathcal{M}_\odot = \mathcal{M}/M_\odot$ et où M_\odot désigne la masse solaire.

La forme d'onde [2.87] peut être interprétée comme un chirp à condition que l'amplitude $a(t) = (t_0 - t)^{-\alpha}$ et la phase $\phi(t) = 2\pi d(t_0 - t)^\beta$ respectent les conditions [2.47] :

$$\left| \frac{\dot{a}(t)}{a(t)\dot{\phi}(t)} \right| = \frac{\alpha}{2\pi d\beta} (t_0 - t)^{-\beta} \ll 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\ddot{\phi}(t)}{\dot{\phi}^2(t)} \right| = \frac{|\beta - 1|}{2\pi d\beta} (t_0 - t)^{-\beta} \ll 1 \quad [2.90]$$

Ces deux conditions sont redondantes [FIN 93] et n'en font en réalité qu'une à partir de laquelle on peut définir l'intervalle de temps dans lequel le modèle [2.87] peut être vu comme un chirp. Cet intervalle est délimité par :

$$t_0 - t \gg t_c = \left(\frac{\max\{\alpha, |\beta - 1|\}}{2\pi d\beta} \right)^{1/\beta} \quad [2.91]$$

où l'instant critique t_c s'écrit avec les valeurs des constantes dont nous disposons :

$$t_c = 3 \times (1600\pi)^{-8/5} \mathcal{M}_\odot \approx 3,6 \times 10^{-6} \mathcal{M}_\odot \quad [2.92]$$

Dans cet intervalle de temps, la forme d'onde [2.87] est un chirp dont la fréquence suit (approximativement) l'évolution suivante :

$$f_x(t) = \frac{5d}{8} (t_0 - t)^{-3/8} \quad [2.93]$$

restreinte par la condition [2.91] à l'intervalle de fréquence caractérisé par :

$$f \ll f_c = f_x(t_c) = 100 \times (1600\pi)^{3/5} \mathcal{M}_\odot^{-1} \approx 1,66 \times 10^4 \mathcal{M}_\odot^{-1} \quad [2.94]$$

En conséquence, les conditions [2.90] sont vérifiées à condition que [2.94] définisse un intervalle d'extension plus grande que la fenêtre fréquentielle d'observation (c'est-à-dire que la fréquence critique f_c soit plus grande que la fréquence de coupure haute du détecteur).

Ayant fixé la fréquence de coupure haute du détecteur à 500 Hz environ, on vérifie dans la figure 2.30 la validité de cette condition pour une grande plage de scénarios observables (c'est-à-dire quand m_1 varie entre $1M_\odot$ et $20M_\odot$, et quand $m_2 = k m_1$, avec $1 \leq k \leq 10$).

De plus, on peut obtenir la transformée de Fourier du signal gravitationnel dans la bande fréquentielle utile. Le calcul du spectre de Fourier de [2.87] revient à évaluer l'intégrale oscillante :

$$X(f; t_0, d) = e^{-i2\pi f t_0} \int_0^{+\infty} a(t) e^{i\psi(t)} dt \quad [2.95]$$

avec $a(t) = A t^{-\alpha}$ et $\psi(t) = -2\pi(dt^\beta - ft)$, ce qui peut être réalisé par une approximation de phase stationnaire [CHA 98, CHA 99].

Il suit que [2.95] coïncide exactement avec un chirp en loi de puissance [2.66]. L'approximation précise les indices de l'enveloppe et de la phase $r = (\alpha - \beta/2)/(\beta - 1)$ et $k = \beta/(\beta - 1)$, le décalage de phase $\gamma = \pi/4$, le taux de modulation :

$$c = -\frac{\beta - 1}{\beta} (d\beta)^{-1/(\beta-1)} \quad [2.96]$$

et l'amplitude :

$$C = \frac{A}{\sqrt{|\beta - 1|}} (d\beta)^{(\alpha-1/2)/(\beta-1)} \quad [2.97]$$

Outre la forme proprement dite de l'approximation, on trouvera dans [CHA 98] les conditions pour que celle-ci soit valide. L'évaluation de phase stationnaire s'apparente, pour chaque fréquence, à un développement de Taylor dont le résultat de l'approximation serait le premier terme. On peut obtenir [CHA 98] une bonne évaluation du reste intégral de ce développement. Le domaine de validité est alors obtenu par une majoration du reste ainsi évalué, ce qui revient alors à fixer une erreur relative maximale de l'approximation.

Deux remarques peuvent être faites à ce point. Premièrement, alors que les « conditions de chirp » [2.47] sont couramment présentées de manière heuristique comme validant l'approximation de phase stationnaire (voir par exemple [FIN 93], [SAT 91] ou [DEL 92]), la validité de l'approximation de phase stationnaire s'avère en fait contrôlée par un critère finalement plus compliqué (voir [CHA 98] pour la forme générale que prend ce critère).

Deuxièmement, si l'on applique ce critère au cas des ondes gravitationnelles, on obtient que, pour une erreur relative d'approximation au plus égale à x %, la fréquence doit être bornée par :

$$f \leq 7,18 \times 10^4 x^{3/5} \mathcal{M}_{\odot}^{-1} \quad [2.98]$$

ce qui est en accord avec les conditions (de chirp) qualitatives en [2.94]. Les critères exact et heuristique sont donc *a posteriori* de même nature, mais le résultat de [CHA 98] apporte la possibilité supplémentaire d'un contrôle quantitatif de l'approximation.

La figure 2.30, qui présente un exemple typique d'une forme d'onde, illustre l'efficacité de l'approximation de phase stationnaire.

2.4.5.2. Un détecteur temps-fréquence simplifié

A strictement parler, le détecteur temps-fréquence optimal [2.80] nécessite le calcul d'une version filtrée (en temps) de la distribution de Bertrand de l'observation, ce qui est en pratique difficile à mettre en œuvre à cause d'un coût de calcul important. Pour aboutir à une solution pratiquement exploitable, il est obligatoire de considérer une description temps-fréquence plus simple (mais toujours précise) à la place de la fonction exacte $\rho_R(t, f)$ donnée en [2.81]. Alors qu'une simplification ne semble pas possible dans le cas général, il apparaît qu'elle peut être effectuée dans le cas spécifique des ondes gravitationnelles, grâce aux valeurs des paramètres physiques qui sont impliqués.

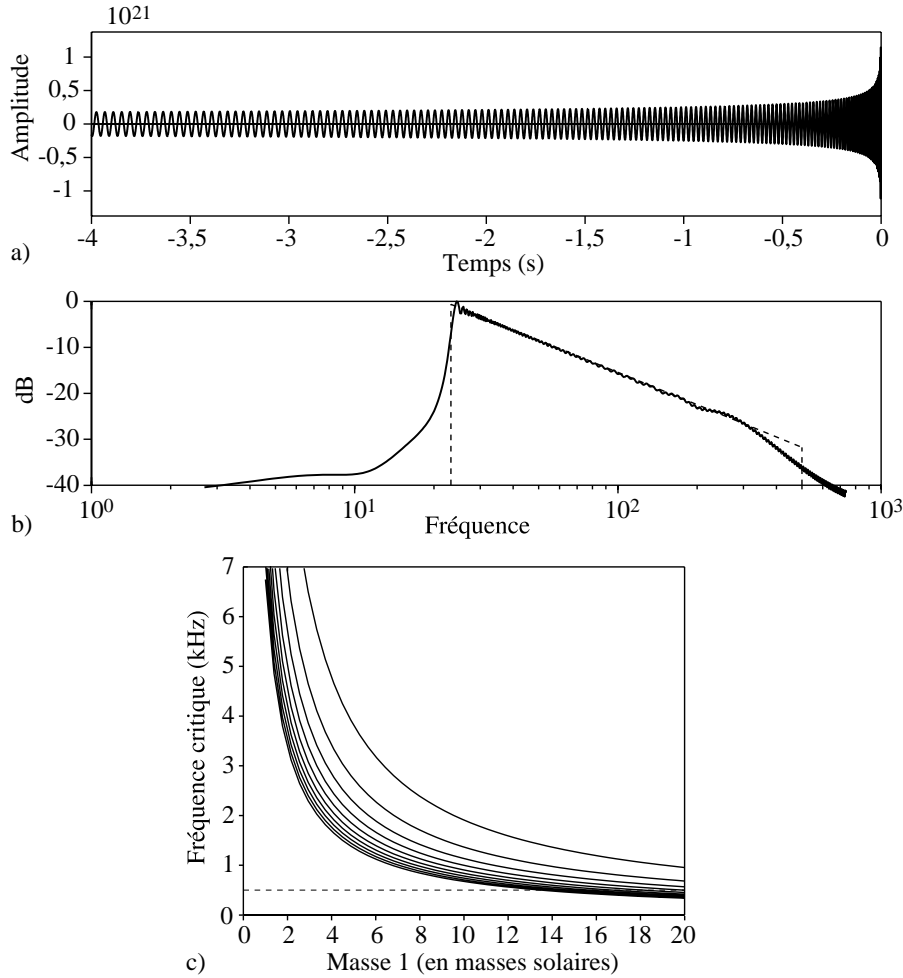


Figure 2.30. Validité de l'approximation de phase stationnaire des ondes gravitationnelles. Le signal (a) représente le modèle newtonien de l'onde gravitationnelle émise par une binaire coalescente composée de deux objets de $1 M_{\odot}$ et $10 M_{\odot}$ située à une distance de 200 Mpc. Le spectre de ce signal (b) (ligne pleine) est bien approchée par son approximation de phase stationnaire (ligne pointillée) dans la plage de fréquence définie par le critère [2.98]. On vérifie (c) que cette approximation fonctionne dans la bande fréquentielle d'observation (fixée par les fréquences de coupure haute et basse du détecteur) pour une variété de couples de masses (m_1 , m_2) possibles pour les objets de la binaire (m_1 varie entre $1 M_{\odot}$ et $10 M_{\odot}$, et $m_2 = k m_1$, avec $1 \leq k \leq 10$). La ligne pointillée (placée arbitrairement à 500 Hz) désigne la fréquence de coupure haute du détecteur, ce qui permet d'avoir une borne approchée pour la validité de l'approximation.

De Bertrand filtré à Bertrand. Approximation bande étroite

En effet, si nous revenons à [2.81], nous pouvons écrire d'une façon équivalente :

$$\int \rho_R(t, f) e^{-i2\pi\xi t} dt = C^2 f^{2r+1-q} h(u) \int P_R^{(k)}(t, f) e^{-i2\pi\xi t} dt \quad [2.99]$$

avec :

$$h(u) = \frac{(\lambda_k(u)\lambda_k(-u))^{r+1}}{\zeta_k(u)} A(f\lambda_k(u)) A(f\lambda_k(-u)) \quad [2.100]$$

et :

$$u = \zeta_k^{-1} \left(\frac{\xi}{f} \right) \quad [2.101]$$

A cause des limitations aux basses fréquences (bruit sismique) et aux hautes fréquences (bruit de photons), la largeur effective d'observation est nécessairement restreinte à un intervalle en fréquence passe-bande $f_- \leq f \leq f_+$ (avec comme valeurs typiques, que l'on pourrait raisonnablement choisir, $f_- \approx 50$ Hz et $f_+ \approx 500$ Hz). Ceci a pour conséquence que le spectre de Fourier :

$$\begin{aligned} & \int P_R^{(k)}(t, f) e^{-i2\pi\xi t} dt \\ &= f^{2r+1-q} (\lambda_k(u)\lambda_k(-u))^{r+1} R(f\lambda_k(u)) \overline{R(f\lambda_k(-u))} \end{aligned} \quad [2.102]$$

est non nul seulement dans la bande :

$$|u| \leq u_+ = \log \frac{f_+}{f_-} \quad [2.103]$$

A l'intérieur de la bande de fréquence définie ci-dessus, on peut considérer (voir par exemple [INN 96, INN 97]) que la densité spectrale de puissance $\Gamma_n(f)$ du bruit d'observation $n(t)$ varie, en moyenne, continûment et se comporte¹ en $\Gamma_n(f) = \sigma^2 f^{-\epsilon}$, avec $\epsilon \approx 1$. En supposant donc que :

$$A(f) = \sigma^{-2} f^{\epsilon-(3r+2)} \quad [2.104]$$

pour $f_- \leq f \leq f_+$, nous obtenons de [2.100] que :

$$h(u) = \sigma^{-4} \frac{(\lambda_k(u)\lambda_k(-u))^{\epsilon-(2r+1)}}{\zeta_k(u)} \quad [2.105]$$

1. Notons que ceci n'est qu'une première approximation et que, dans le cas des détecteurs réels, des raffinements doivent être faits sur la base de modèles plus réalistes.

pour $|u| \leq u_+$. Dans le cas des binaires coalescentes ($k = -5/3$, $r = 1/6$) et d'un bruit en « $1/f$ » ($\epsilon = 1$), ceci se réduit alors à :

$$\sigma^4 h(u) = \frac{(\lambda_{-5/3}(u)\lambda_{-5/3}(-u))^{-1/3}}{\zeta_{-5/3}(u)} \quad [2.106]$$

quantité approximativement égale à 1 dans la bande considérée.

La transformation résultant de l'application du préfacteur en $h(u)$ dans [2.99] laisse donc inchangée la distribution de Bertrand $P_R^{(k)}(t, f)$, ce que l'on illustre figure 2.31 en comparant cette transformation à l'élément neutre de la convolution dans l'espace des fonctions définies sur un intervalle limité en u .

Quand l'approximation ci-dessus est valide, ceci conduit alors à un détecteur semblable à [2.80], mais avec la simplification :

$$\rho_R(t, f) \approx \frac{C^2}{\sigma^4} f^{q+2\epsilon-(4r+3)} P_R^{(k)}(t, f) \quad [2.107]$$

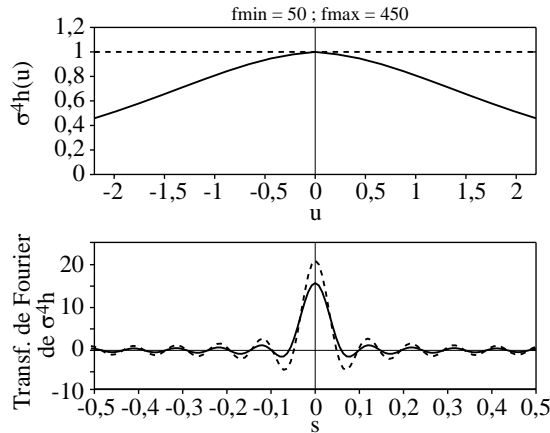


Figure 2.31. Quand la bande passante du détecteur est limitée, la fonction temps-fréquence à utiliser peut être bien approchée par une distribution de Bertrand à condition que la fonction $\sigma^4 h(u)$, définie en [2.106], agisse comme l'élément neutre de la convolution dans l'espace de fonction à support borné en u . La validité de cette approximation est illustrée ici en montrant dans le diagramme du haut $\sigma^4 h(u)$ (ligne pleine) et la fonction indicatrice de l'intervalle en u associée à la bande de fréquence 50 Hz – 450 Hz (ligne pointillée), et en comparant dans le diagramme du bas leurs transformées de Fourier.

De Bertrand au spectrogramme réalloué. Approximation à fort rapport signal sur bruit

En partant de cette structure simplifiée, le problème final est de trouver une approximation précise et facile à mettre en œuvre de la distribution de Bertrand $P_R^{(k)}(t, f)$. Puisque la caractéristique-clé de cette distribution est sa localisation parfaite [2.72] sur les chirps « adaptés », la solution que nous proposons est de la remplacer par un *spectrogramme réalloué* [AUG 95, AUG 03, BAR 96] $\check{S}_x^h(t, f)$ qui, lorsqu'il est appliqué au même chirp en loi de puissance, se comporte approximativement en :

$$\check{S}_{x_{r,k}}^h(t, f) \approx C^2 f^{-2(r+1)} \delta(t - t_X(f)) \quad [2.108]$$

L'efficacité de cette approximation est illustrée en figure 2.32.

En comparant [2.72] et [2.108], nous sommes conduits à choisir $q = 2r + 1$, ce qui donne la forme finale du détecteur optimal approché :

$$\Lambda(r; t, c) \approx \frac{C^2}{\sigma^4} \int_0^{+\infty} \check{S}_r^h(t + ckf^{k-1}, f) f^{2(\epsilon - (r+1))} df \quad [2.109]$$

Dans le cas spécifique des binaires coalescentes, nous préférons paramétrer le signal à détecter à l'aide de son temps de coalescence t et de sa « chirp mass » réduite \mathcal{M}_\odot . Avec les constantes correctes, nous obtenons finalement (à un facteur d'amplitude près) :

$$\Lambda(r; t, \mathcal{M}_\odot) \propto \int_{\mathcal{L}(t, \mathcal{M}_\odot)} \check{S}_r^h(\tau, f) f^{-2/3} df \quad [2.110]$$

avec :

$$\mathcal{L}(t, \mathcal{M}_\odot) = \left\{ (\tau, f) \mid t - \tau = 3 \times 100^{8/3} \mathcal{M}_\odot^{-5/3} f^{-8/3} \right\} \quad [2.111]$$

2.4.5.3. Une illustration

Pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée, nous présentons en figure 2.33 deux exemples différents basés sur une des situations typiques discutées dans [INN 96, INN 97]. Dans ces deux exemples, on suppose que la binaire est constituée de deux objets de $1 M_\odot$ et $10 M_\odot$ (temps de coalescence fixé à $t = 0$). La binaire est localisée à une distance de 200 Mpc de la terre dans le premier exemple et à 1 Gpc dans le deuxième exemple. La simulation a été faite en altérant les données par un bruit additif gaussien, avec $\epsilon = 1$ et $\sigma^2 = 0,7 \times 10^{-42}$ sur une plage de fréquence de 50 Hz – 500 Hz. La stratégie proposée, basée sur le spectrogramme réalloué, n'atteint pas la performance idéale prédite par la théorie du filtre adapté, à cause de la précision limitée des différentes approximations impliquées pour son obtention (en particulier, la nature à bande limitée du signal implique que la distribution de Bertrand ne peut

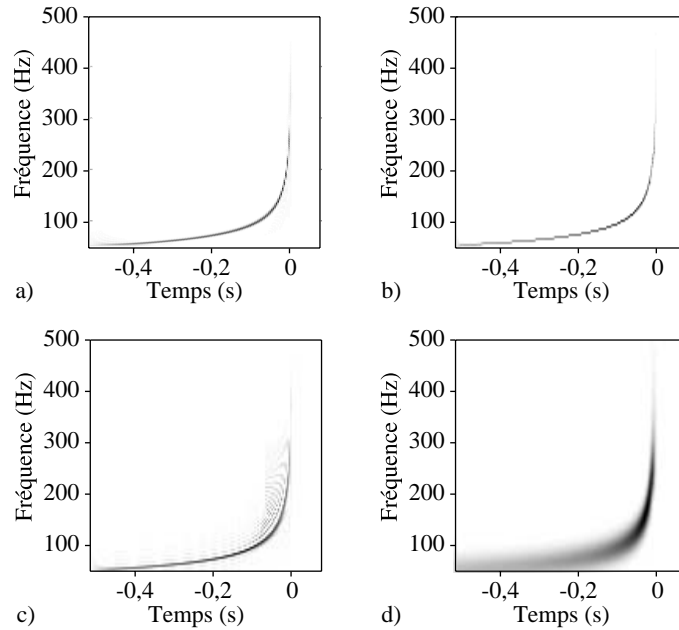


Figure 2.32. Distributions temps-fréquence pour les ondes gravitationnelles. Etant donné une onde gravitationnelle émise par une binaire coalescente (temps de coalescence fixé à $t_0 = 0$), on attend d'une distribution temps-fréquence « adaptée » qu'elle soit aussi localisée que possible sur la ligne de fréquence instantanée. Cette figure compare certaines distributions candidates. Du point de vue théorique, il est connu que la distribution que l'on désire est obtenue en utilisant la distribution de Bertrand adaptée ($k = -5/3$): ceci est illustré en (a), où l'algorithme décrit dans [GON 96] a été utilisé. Une bonne approximation, simple à mettre en œuvre, est donnée par le spectrogramme réalloué (b). Ces deux situations contrastent avec celles obtenues par la distribution de Wigner-Ville (c) et le spectrogramme (d).

être localisée le long de la ligne de retard de groupe). Cependant, cette figure met en évidence que cette stratégie permet clairement la détection du chirp et qu'elle présente des performances qui dépassent celles d'une simple intégration de chemin faite sur le spectrogramme standard.

Dans l'exemple de la figure 2.33, la « chirp mass » \mathcal{M}_\odot a été implicitement supposée connue, ce qui n'est en aucun cas vrai en pratique. Si l'on suppose que \mathcal{M}_\odot est inconnue, une stratégie plus sophistiquée consiste alors à appliquer la précédente en parallèle en évaluant autant d'intégrales de chemin que nécessaire pour échantillonner convenablement les valeurs de \mathcal{M}_\odot sur un intervalle raisonnable de valeurs. La figure 2.34 montre l'application de cette stratégie pour le spectrogramme réalloué et le spectrogramme standard, respectivement. Ce problème de détection-estimation

conjointe permet donc également une estimation de \mathcal{M}_\odot . Il doit être noté que, lorsque l'on parcourt les valeurs tests de \mathcal{M}_\odot , l'énergie du signal de référence est modifiée. La sortie de chaque détecteur doit donc être divisée par un facteur proportionnel au module carré de l'amplitude du signal de référence (qui varie en $\mathcal{M}_\odot^{5/3}$) pour pouvoir comparer les résultats de façon cohérente.

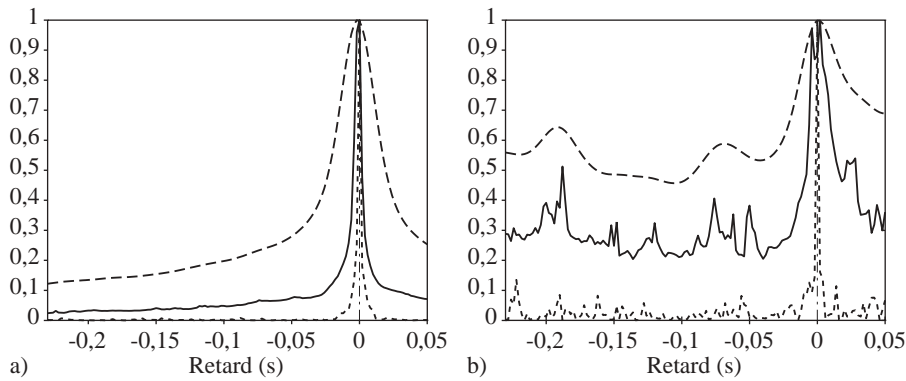


Figure 2.33. Détection d'une onde gravitationnelle. Cette figure illustre l'efficacité d'une détection temps-fréquence optimale d'une onde gravitationnelle issue d'une binaire (temps de coalescence $t = 0$) composée de deux objets de $1 M_\odot$ et $10 M_\odot$ à une distance de 200 Mpc dans le cas (a) et 1 Gpc dans le cas (b). Puisque la distance entre la binaire et la terre change simplement l'amplitude du signal, le rapport signal sur bruit est le seul paramètre qui est modifié entre ces deux exemples. Chaque graphique compare le module carré de l'enveloppe du signal en sortie du filtre adapté (trait mixte) avec une stratégie temps-fréquence basée sur une intégration de chemin sur le spectrogramme classique (trait pointillé) et sa version réallouée (trait plein). Pour faire apparaître clairement ce qui est gagné en termes de contraste, le maximum de chacune de ces courbes a été arbitrairement normalisé à l'unité.

2.4.6. Conclusion

L'objectif de cette section était de combiner des éléments empruntés à la théorie de la détection optimale et à l'analyse temps-fréquence pour traiter le problème de la détection temps-fréquence optimale de chirps. Nous en avons extrait un cadre général dans lequel nous montrons que les stratégies intuitives de détection de chirps par des intégrations le long de chemins dans le plan temps-fréquence revêtent la propriété d'optimalité sous plusieurs conditions, la plus importante d'entre elles étant l'utilisation d'une distribution temps-fréquence *unitaire*, à la *localisation parfaite* sur la loi de fréquence instantanée (ou de retard de groupe) du signal à détecter. Cette distribution est généralement difficile à calculer numériquement. Nous suggérons de la remplacer par une *approximation* à l'aide d'une distribution réallouée simple à mettre en œuvre

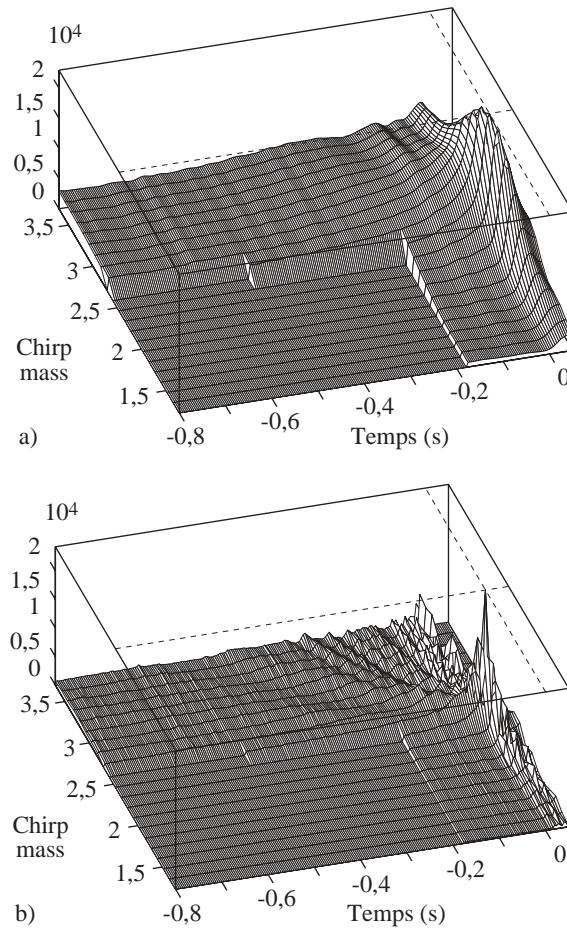


Figure 2.34. Détection-estimation conjointe d'une onde gravitationnelle. Dans le cas où le paramètre de « chirp mass » \mathcal{M}_{\odot} est inconnu, différentes intégrations de chemin (similaires à celles faites en figure 2.33, mais sur un certain nombre de courbes temps-fréquence) doivent être évaluées, ici sur le spectrogramme standard (a) et sa version réallouée (b). Ceci résulte en une surface dont le maximum permet la détection de l'onde gravitationnelle (quand il dépasse un seuil prescrit) et l'estimation à la fois du temps de coalescence et de la « chirp mass » (les valeurs réelles sont indiquées par des lignes pointillées). L'utilisation de la réallocation améliore notablement l'acuité du pic de détection et le contraste entre son maximum et le niveau du bruit.

(comme le spectrogramme ou le scalogramme). On dispose alors d'un moyen systématique pour obtenir des stratégies de détection *quasi optimale* de chirp. A ce titre, l'exemple des ondes gravitationnelles (émises par les binaires coalescentes) est un

cas d'importance particulière et la possibilité de leur détection temps-fréquence a été discutée avec une certaine attention. Les conditions d'une stratégie quasi optimale de détection ont été établies. Ceci met par ailleurs une nouvelle fois en évidence, dans un exemple précis, que la méthode de réallocation peut prendre part à une chaîne de traitement du signal dans un but différent de celui de l'analyse. La question est maintenant de discuter plus avant ce qui peut être réellement gagné par une telle approche en termes de flexibilité et de robustesse.

2.4.7. Bibliographie

- [ALT 80] ALTES R.A., « Detection, estimation and classification with spectrograms », *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 67, n° 4, p. 1232-1246, 1980.
- [AUG 95] AUGER F., FLANDRIN P., « Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. SP-43, n° 5, p. 1068-1089, 1995.
- [AUG 03] AUGER F., FLANDRIN P., CHASSANDE-MOTTIN E., « La réallocation », dans Hlawatsch F., Auger F., Ovarlez J.P. (dir.), *Temps-fréquence : concepts et outils*, Hermès, Paris, 2003 (à paraître).
- [BAR 96] BARBAROSSA S., LEMOINE O., « Analysis of nonlinear FM signals by pattern recognition of their time-frequency representation », *IEEE Signal Processing Letters*, vol. SPL-3, n° 4, p. 112-115, 1996.
- [BER 91] BERTRAND J., BERTRAND P., « Some practical aspects of the affine time-frequency distributions », dans *Actes du treizième colloque GRETSI*, p. 25-28, Juan-les-Pins, France, 1991.
- [BER 92] BERTRAND J., BERTRAND P., « A class of affine Wigner distributions with extended covariance properties », *Journal of Mathematical Physics*, vol. 33, n° 7, p. 2515-2527, 1992.
- [CHA 98] CHASSANDE-MOTTIN E., FLANDRIN P., « On the stationary phase approximation of chirp spectra », dans *Proceedings of the IEEE International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, p. 117-120, Pittsburgh, 1998.
- [CHA 99] CHASSANDE-MOTTIN E., FLANDRIN P., « On the time-frequency detection of chirps », *Appl. Comp. Harm. Anal.*, vol. 6, n° 9, p. 252-281, 1999.
- [COH 95] COHEN L., *Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall, Englewoods Cliffs (New Jersey), 1995.
- [DEL 92] DELPRAT N., ESCUDIÉ B., GUILLEMAIN P., KRONLAND-MARTINET R., TCHAMITCHIAN P., TORRÉSANI B., « Asymptotic wavelet and Gabor analysis: Extraction of instantaneous frequencies », *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-38, n° 2, p. 644-673, 1992.
- [FIN 93] FINN L.S., CHERNOFF D.F., « Observing binary inspiral in gravitational radiation: One interferometer », *Physical Review D*, vol. 47, n° 6, p. 2198-2219, 1993.
- [FLA 98] FLANDRIN P., *Temps-fréquence*, Hermès, Paris, deuxième édition, 1998.

- [FLA 03] FLANDRIN P., « Temps-fréquence et décision – une introduction », dans Doncarli C., Martin N. (dir.), *Décision temps-fréquence*, Hermès, Paris, 2003 (ce volume).
- [GON 96] GONÇALVÈS P., BARANIUK R.G., « A pseudo-Bertrand distribution for time-scale analysis », *IEEE Signal Processing Letters*, vol. SPL-3, n° 3, p. 82-84, 1996.
- [INN 96] INNOCENT J.M., TORRÉSANI B., A multiresolution strategy for detecting gravitational waves generated by binary coalescence, Rapport technique CPT-96/P.3379, CPT-CNRS, Marseille, 1996.
- [INN 97] INNOCENT J.M., TORRÉSANI B., « Wavelets and binary coalescences detection », *Appl. Comp. Harm. Anal.*, vol. 4, n° 2, p. 113-116, 1997.
- [JAF 96] JAFFARD S., MEYER Y., *Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions*, *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 123, n° 587, 1996.
- [JAN 82] JANSSEN A.J.E.M., « On the locus and spread of pseudo-density functions in the time-frequency plane », *Philips J. Res.*, vol. 37, n° 3, p. 79-110, 1982.
- [KAY 85] KAY S.M., BOUDREAUX-BARTELS G.F., « On the optimality of the Wigner distribution for detection », dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, p. 1017-1020, Tampa, 1985.
- [MEY 97] MEYER Y., XU H., « Wavelet analysis and chirps », *Appl. Comp. Harm. Anal.*, vol. 4, n° 4, p. 366-379, 1997.
- [MOH 96] MOHANTY S.D., DHURANDHAR S.V., « Hierarchical search strategy for the detection of gravitational waves from coalescing binaries », *Physical Review D*, vol. 54, n° 12, p. 7108-7128, 1996.
- [MOR 03] MORDIVONE M., TORRESANI B., « Time-scale approach for chirp detection », *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, vol. 1, n° 1, p. 19-49, 2003.
- [PAP 94] PAPANDREOU A., KAY S.M., BOUDREAUX-BARTELS G.F., « The use of hyperbolic time-frequency representations for optimum detection and parameter estimation of hyperbolic chirps », dans *Proceedings of the IEEE International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, p. 369-372, Philadelphie, 1994.
- [PIC 97] PICINBONO B., « On instantaneous amplitude and phase of signals », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. SP-45, n° 3, p. 552-560, 1997.
- [SAT 91] SATHYAPRAKASH B.S., DHURANDHAR D.V., « Choice of filters for the detection of gravitational waves from coalescing binaries », *Physical Review D*, vol. 44, n° 12, p. 3819-3834, 1991.
- [SCH 89] SCHUTZ B.F., « Gravitational wave sources and their detectability », *Classical and Quantum Gravity*, vol. 6, p. 1761-1780, 1989.
- [THO 87] THORNE K.S., « Gravitational radiation », dans Hawking S.W., ISRAEL W. (dir.), *300 Years of Gravitation*, p. 330-458, Cambridge University Press, 1987.
- [UNT 84] UNTERBERGER A., « The calculus of pseudo-differential operators of Fuchs type », *Communications on Partial Differential Equations*, vol. 9, p. 1179-1236, 1984.
- [WHA 71] WHALEN A.D., *Detection of Signals in Noise*, Academic Press, San Diego, 1971.