

## Chapitre 1

# Temps-fréquence énergétique : quelques introductions

**Résumé :** Les outils de base de l'analyse temps-fréquence énergétique peuvent être introduits de différentes manières, qui trouvent leurs racines théoriques aussi bien dans la mécanique quantique ou la théorie des opérateurs pseudo-différentiels que dans la théorie du signal. Chacun de ces points de vue apporte aux mêmes objets mathématiques un éclairage propre et des interprétations complémentaires (en termes d'atomes, d'appareils, de covariances, de corrélations, de probabilités, de mesures, de symétries. . . ), dont quelques-unes sont esquissées ici.

**Mots-clés :** Distributions d'énergie, classes générales, principes de covariance, appareils de mesure, opérateurs.

### 1.1. Introduction

Jusqu'à un passé encore récent, le traitement du signal «classique» était confronté à une situation paradoxale. D'un côté, il était clairement reconnu que la plupart des signaux issus de systèmes naturels et/ou artificiels présentaient différentes formes de dépendance temporelle de leurs propriétés structurelles (contenu spectral, lois statistiques, fonction de transfert. . . ). D'un autre côté cependant, les outils standard utilisés pour analyser et traiter de tels signaux reposaient généralement sur des hypothèses de régime permanent ou de «stationnarité». Dans la mesure où les «non-stationnarités» ne sont non seulement d'aucune manière exceptionnelles, mais où elles véhiculent très souvent l'essentiel de l'information relative à un signal, il s'avéra nécessaire de développer des approches générales, susceptibles par exemple d'aller au-delà de ce qu'au-

---

Chapitre rédigé par Patrick FLANDRIN.

torisent les méthodes de type Fourier. Dans cet esprit, la notion de «temps-fréquence» a progressivement émergé comme un paradigme naturel (et de mieux en mieux accepté), une de ses caractéristiques essentielles étant la non-unicité de ses outils, à la fois révélatrice de la diversité des formes possibles de non-stationnarités et corollaire des limitations intrinsèques existant entre variables canoniquement conjuguées (i.e., liées par transformation de Fourier).

Ainsi que le prouve leur développement historique (voir par exemple [FLA 98, Chap. 2] et [MEY 93]), il apparaît que les distributions de base de l'analyse temps-fréquence peuvent être introduites d'un grand nombre de façons qui trouvent leur origine non seulement en théorie du signal, mais aussi en mécanique quantique, en statistiques ou en théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Chacun de ces points de vue offre en fait un éclairage spécifique sur les mêmes objets mathématiques, ainsi que des interprétations complémentaires en termes d'atomes, d'appareils, de covariances, de corrélations, de probabilités, de mesures, d'analogies mécaniques ou optiques, de symétries. . .

L'objet de ce chapitre est d'ordonner le paysage des multiples voies conduisant à des distributions temps-fréquence, en se restreignant au cas des distributions énergétiques (et donc essentiellement quadratiques), et en insistant sur l'utilité — et les raisons d'être — d'un petit nombre de distributions-clés.

On notera que la plupart des distributions quadratiques mentionnées ici (spectrogramme, scalogramme, Wigner-Ville, Bertrand. . .) jouent un rôle central en analyse temps-fréquence et mériteraient des discussions spécifiques qui leur soient dévolues. L'objectif de ce court texte n'est cependant pas d'offrir au lecteur une présentation exhaustive de ces méthodes, ni même de les comparer (on pourra pour cela se reporter par exemple à [BOU 96, COH 95, FLA 98, HLA 92, HLA 95, MEC 97] ou [AUG 97]), mais bien davantage de faire porter l'accent sur les différentes motivations ayant pu conduire à leur introduction.

## 1.2. Atomes

Avant même de considérer une analyse temps-fréquence en termes énergétiques, une approche intuitive est de décomposer *linéairement* un signal sur un ensemble de «briques de base» auxquelles on est en droit d'imposer de «bonnes» propriétés de localisation, en temps comme en fréquence. D'une manière plus précise, la valeur que prend un signal  $x(t)$  en une date  $t_0$  peut s'exprimer de façon équivalente selon

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta_t(t_0) dt$$

(où  $\delta_t(\tau) := \delta(t - \tau)$  est la distribution de Dirac en  $t$ ), ou

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e_f(t_0) df,$$

en notant symboliquement  $e_f(t) := \exp(j2\pi ft)$ . Si la première décomposition privilégie la description temporelle, la deuxième (dans laquelle  $\hat{x}(f)$  s'identifie à la transformée de Fourier du signal  $x(t)$ ) repose sur une interprétation duale en terme d'ondes. Ce sont bien sûr ces deux points de vue antinomiques qu'une description mixte, en temps et en fréquence, se propose de concilier. Pour ce faire, les deux décompositions précédentes peuvent être remplacées par une troisième, intermédiaire, qui s'écrit

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_x(t, f) g_{t,f}(t_0) dt df. \quad (1.1)$$

Les fonctions  $g_{t,f}(\cdot)$  ainsi mises en jeu permettent une transition entre les situations extrêmes précédentes (retrouvant une localisation parfaite en temps et nulle en fréquence lorsque  $g_{t,f}(\cdot) \rightarrow \delta_t(\cdot)$ , parfaite en fréquence et nulle en temps lorsque  $g_{t,f}(\cdot) \rightarrow e_f(\cdot)$ ). Elles jouent en fait un rôle d'*atomes* temps-fréquence dans la mesure où on leur demande à la fois d'être des *constituants* de tout signal et de jouir de propriétés de *localisation* conjointe aussi idéales que possible («élémentarité», dans la limite de ce qu'autorisent les inégalités temps-fréquence de type Heisenberg-Gabor [FOL 97, GAB 46]). Pour qu'une telle décomposition prenne tout son sens, il faut naturellement qu'elle soit *inversible*, de telle sorte que l'on ait<sup>1</sup>

$$\lambda_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) g_{t,f}^*(t_0) dt_0, \quad (1.2)$$

ce qui fait de  $\lambda_x(t, f)$  une *représentation* temps-fréquence linéaire de  $x(t)$ .

Il y a évidemment un grand arbitraire dans le choix d'une telle représentation. Une façon simple de procéder consiste à engendrer la famille des atomes  $g_{t,f}(\cdot)$  par l'action d'un groupe de transformations agissant sur un élément primordial unique  $g(\cdot)$ . C'est ainsi que le choix  $g_{t,f}(s) := g(s - t) \exp(j2\pi fs)$  conduit à la famille des *transformées de Fourier à court-terme* de fenêtre  $g(\cdot)$ , tandis qu'imposer  $g_{t,f}(s) := \sqrt{f/f_0} g((f/f_0)(s - t))$  (avec  $f_0 > 0$  et  $g(\cdot)$  de moyenne nulle) donne naissance à la famille des *transformées en ondelettes*.

Nous n'entrerons pas ici plus avant dans le détail des approches linéaires, renvoyant aux chapitres 3 et 4 de cet ouvrage et, par exemple, à [CAR 98, DAU 92, MAL 97, GRÖ 01]. Nous nous contenterons de retenir le principe d'existence de décompositions linéaires, en notant surtout que le choix de celles-ci peut être guidé par une modélisation *a priori* du signal, ou des transformations que ce dernier est susceptible de subir.

---

1. En toute généralité, l'atome «d'analyse» intervenant dans (1.2) n'est pas nécessairement identique à l'atome «de synthèse» utilisé dans (1.1).

### 1.3. Énergie

Dans bien des applications, les grandeurs physiques pertinentes (voire même les seules grandeurs observables) sont de type *énergétique*, ce qui conduit à rechercher des décompositions, non du signal lui-même, mais de son énergie.

#### 1.3.1. Distributions

Par définition, et par la propriété d'isométrie de la transformation de Fourier, l'énergie  $E_x$  d'un signal  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  a pour expressions équivalentes

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{x}(f)|^2 df. \quad (1.3)$$

Par suite, et par un raisonnement analogue à celui suivi pour les décompositions linéaires, vouloir distribuer conjointement l'énergie de  $x(t)$  sur les deux variables temps et fréquence revient à chercher une *distribution d'énergie*  $\rho_x(t, f)$  telle que

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, f) dt df. \quad (1.4)$$

La question qui se pose alors est de définir une telle quantité, ce qui donne lieu à un grand nombre d'approches différentes.

#### 1.3.2. Appareils

Une première façon d'aborder la définition de  $\rho_x(t, f)$  est d'adopter un point de vue «opérationnel», qui consiste à considérer une distribution d'énergie comme potentiellement *mesurable* par un appareil, fût-il idéalisé. En voici quelques exemples [FLA 98] (voir également le chapitre 5 de cet ouvrage).

**Spectrogramme, sonagramme, scalogramme.** La solution la plus simple en ce sens est d'utiliser les relations de base continue (1.1)-(1.2) et d'adopter pour définition

$$\rho_x(t, f) := |\lambda_x(t, f)|^2,$$

en normalisant l'atome élémentaire  $g(\cdot)$  de telle sorte que (1.4) soit satisfaite. Dans le cas des analyses de Fourier à fenêtre, la quantité obtenue admet deux lectures complémentaires, liées chacune à un appareil constructible. En lisant le plan temps-fréquence sous l'aspect de la fréquence en fonction du temps, on peut en effet la voir comme mesurant à tout instant une densité spectrale d'énergie locale (on parle alors de *spectrogramme*) :

$$S_x^g(t, f) := \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(s) g^*(s-t) e^{-j2\pi f s} ds \right|^2. \quad (1.5)$$

En considérant inversement le temps comme fonction de la fréquence, c'est l'évolution temporelle de la puissance de sortie d'une batterie de filtres identiques mis en

parallèle qui est observée (*sonagramme*). Cette deuxième interprétation se prête naturellement à toutes les variations dans lesquelles le banc de filtres n'est plus uniforme mais par exemple à surtension constante (ce qui rejoint les analyses en ondelettes, on parle alors de *scalogramme*<sup>2</sup> [RIO 92]), ou encore à variation plus complexe, comme ce peut être le cas pour s'approcher de modèles d'audition [D'A 92].

**Page.** Une des insuffisances de l'analyse de Fourier classique est de gommer toute dépendance temporelle. On peut imaginer d'y remédier en rendant causal le calcul du spectre du signal et en s'intéressant aux variations temporelles du spectre cumulé ainsi calculé. C'est ce qu'a proposé C.H. Page [PAG 52], en introduisant comme définition

$$P_x(t, f) := \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_{-\infty}^t x(s) e^{-j2\pi fs} ds \right|^2, \quad (1.6)$$

quantité physiquement calculable et vérifiant (1.4).

**Rihaczek.** Un point de vue différent est de considérer l'énergie locale d'un signal dans un domaine temps-fréquence de surface  $\delta T \times \delta B$ , centré en un point  $(t, f)$ , comme l'énergie d'interaction entre la restriction de ce signal à l'intervalle  $[t - \delta T/2, t + \delta T/2]$  et la filtrée de ce même signal dans la bande  $[f - \delta B/2, f + \delta B/2]$ . Par passage à la limite (appareil idéalisé), cette procédure conduit A.W. Rihaczek [RIH 68] à définir pour *densité complexe d'énergie* la quantité

$$R_x(t, f) := \lim_{\delta T \delta B \rightarrow 0} \frac{1}{\delta T \delta B} \int_{t - \delta T/2}^{t + \delta T/2} x(s) \left[ \int_{f - \delta B/2}^{f + \delta B/2} \hat{x}(\xi) e^{j2\pi \xi s} d\xi \right]^* ds,$$

dont on vérifie facilement qu'elle s'identifie à

$$R_x(t, f) = x(t) \hat{x}^*(f) e^{-j2\pi ft}$$

et vérifie ainsi la condition (1.4).

Ces quelques exemples n'épuisent évidemment pas la totalité des solutions envisageables ou ayant été envisagées. Leur multiplicité et leur diversité (tant dans la forme que dans la façon dont ils ont été obtenus) posent néanmoins la question de liens éventuels qui existeraient entre eux, c'est-à-dire de l'existence de *classes* de solutions.

---

2. On peut d'ailleurs remarquer que, historiquement, de telles structures sont les premières à avoir été introduites [KGEN 46, PIM 62].

### 1.3.3. Classes

Essayer de classer les solutions admissibles, de les paramétrer ou de les regrouper en ensembles homogènes peut se faire d'au moins deux manières. La première est d'*observation*, et consiste à trouver dans des objets préexistants des caractères de ressemblance qui en révèlent la parenté : c'est essentiellement de la zoologie (ou de la botanique). La deuxième est de *déduction*, et prend le problème à contre-pied de la première en construisant des familles sur des ensembles de postulats ou de prérequis.

**Unifications.** En adoptant la première manière, une étude attentive des définitions données précédemment permet de conclure que toutes sont des formes quadratiques du signal. Cette remarque, qui permet une comparaison de différentes définitions dans un cadre commun, a été initiée dans [BLA 55] et a trouvé sa forme la plus aboutie dans [COH 66] : il apparaît en effet que toutes les formes pré-citées admettent en fait une même paramétrisation

$$C_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{r-d}(\tau, \xi) x\left(s + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(s - \frac{\tau}{2}\right) e^{j2\pi[\xi(t-s) - f\tau]} ds d\tau d\xi, \quad (1.7)$$

moyennant l'introduction d'une fonction spécifique  $\phi_{r-d}(\tau, \xi)$  bien choisie (ainsi, la distribution de Page est obtenue en choisissant  $\phi_{r-d}(\tau, \xi) = \exp(-j\pi|\tau|\xi)$  et celle de Rihaczek en prenant  $\phi_{r-d}(\tau, \xi) = \exp(-j\pi\tau\xi)$ ). C'est cette démarche qui a été suivie par L. Cohen au milieu des années soixante (dans un contexte de mécanique quantique sur lequel on reviendra), donnant naissance, par (1.7), à ce qu'il est convenu depuis d'appeler *classe de Cohen* [COH 66] (voir aussi les chapitres 5 et 6 de cet ouvrage).

Une telle unification a représenté une avancée importante, car elle permet d'accéder facilement aux propriétés d'une distribution quelconque de la classe par l'intermédiaire d'une propriété de structure associée de sa fonction de paramétrisation. Elle permet de plus d'engendrer de façon immédiate nombre de nouvelles représentations par une spécification *a priori* de cette même fonction. Il s'avère en particulier que le choix le plus simple, à savoir  $\phi_{r-d}(\tau, \xi) = 1$ , conduit à la définition

$$W_x(t, f) := \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (1.8)$$

dans laquelle on reconnaît la proposition faite en 1932 par E.P. Wigner [WIG 32] (mécanique quantique) et en 1948 par J. Ville [VIL 48] (théorie du signal).

**Covariances.** La deuxième possibilité de construction de classes de solutions consiste à imposer une structure *a priori* très générale et à en déduire des paramétrisations plus restrictives par l'imposition progressive de contraintes jugées «naturelles». Bien qu'il ne soit pas strictement nécessaire, le choix communément admis est de partir d'une forme bilinéaire du signal,

$$\rho_x(t, f) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(s, s'; t, f) x(s) x^*(s') ds ds',$$

caractérisée par un noyau dépendant *a priori* de quatre variables, avec de plus la contrainte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(s, s'; t, f) dt df = \delta(s - s'),$$

de façon à garantir à la forme bilinéaire de définir une distribution d'énergie au sens de (1.4). Ceci étant posé, il suffit d'imposer des contraintes additionnelles de *covariances* pour réduire l'espace des solutions admissibles [FLA 98, HLA 03]. D'une manière raccourcie, ceci revient à demander que soit satisfaite l'équation

$$\rho_{\mathbf{H}x}(t, f) = (\tilde{\mathbf{H}}\rho_x)(t, f),$$

dans laquelle  $\mathbf{H} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  représente un opérateur de transformation agissant sur le signal (et  $\tilde{\mathbf{H}} : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$  l'opérateur correspondant, agissant dans le plan temps-fréquence), c'est-à-dire à imposer que la distribution recherchée «suive» le signal dans les transformations qu'il subit.

L'exemple le plus simple est celui des *translations* en temps et en fréquence, pour lesquelles le principe de covariance :

$$\tilde{x}(t) := x(t - \tau) e^{j2\pi\xi t} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\tilde{x}}(t, f) = \rho_x(t - \tau, f - \xi)$$

conduit le noyau général à prendre la forme particulière

$$K(s, s'; t, f) = K_0(s - t, s' - t) e^{-j2\pi f(s - s')},$$

où  $K_0(s, s')$  est une fonction arbitraire ne dépendant plus que de *deux* variables (cette situation est évidemment à rapprocher de la covariance par les seules translations temporelles qui transforme un opérateur linéaire quelconque en un *filtre* linéaire). Le fait remarquable est que le résultat obtenu s'identifie alors à la classe de Cohen (1.7) introduite précédemment sur des arguments d'observation, moyennant l'identification

$$\phi_{r-d}(\tau, \xi) := \int_{-\infty}^{\infty} K_0\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j2\pi\xi t} dt.$$

Ainsi, la classe de Cohen acquiert un statut particulier qui va au-delà de la seule description phénoménologique : c'est elle et elle seule qui regroupe la totalité des distributions temps-fréquence bilinéaires covariantes par translations.

Par généralisation, il est possible d'introduire de façon *déductive* d'autres classes de distributions sur la base de principes de covariance différents des translations (voir le chapitre 7 pour une présentation plus détaillée). Ainsi, conserver la covariance par rapport aux translations temporelles tout en lui adjoignant celle relative aux *dilatations* conduit — dans l'espace des signaux analytiques, i.e., des signaux dont le spectre

s'annule identiquement sur la demi-droite réelle des fréquences négatives  $f > 0$  — à la classe dite *affine*, dont une formulation admissible est donnée par [RIO 92]

$$\Omega_x(t, f) = \frac{f}{f_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\xi, \zeta) \widehat{x}\left(\frac{\zeta - \xi/2}{f_0/f}\right) \widehat{x}^*\left(\frac{\zeta + \xi/2}{f_0/f}\right) e^{-j2\pi(f/f_0)\xi t} d\xi d\zeta,$$

où  $\pi(\xi, \zeta)$  est un noyau (bi-fréquentiel) arbitraire et  $f_0 > 0$  une fréquence de référence. Un élément central de cette classe est la *distribution unitaire de Bertrand* [BER 92], caractérisée par le choix spécifique :

$$\pi(\xi, \zeta) = \frac{\xi/2f_0}{\sinh(\xi/2f_0)} \delta\left(\zeta - \frac{\xi}{2} \coth \frac{\xi}{2f_0}\right),$$

et dont la définition usuelle s'écrit [BER 92] :

$$B_x(t, f) := f \int_{-\infty}^\infty \sqrt{\lambda(u)\lambda(-u)} \widehat{x}(f\lambda(u)) \widehat{x}^*(f\lambda(-u)) e^{-j2\pi u t f} du, \quad (1.9)$$

avec  $\lambda(u) := (u/2) e^{-u/2} / \sinh(u/2)$ . Par bien des aspects, cette distribution est l'analogue de la distribution de Wigner-Ville pour les signaux analytiques (à large bande), et on peut montrer que celle-là se réduit à celle-ci dans la limite à bande étroite [BER 92].

D'autres choix sont possibles, à volonté. Par exemple, des contraintes de covariance par rapport à des translations *fonctionnellement dépendantes de la fréquence* (retards de groupe non linéaires) ont été proposées, conduisant aux classes dites *hyperbolique* ou *de puissance* [BOU 96, HLA 99, PAP 93, PAP 98].

#### 1.4. Corrélations

Si la transformation de Fourier met en dualité les variables de temps et de fréquence, il est également notoire que, d'un point de vue *énergétique* ou de *puissance*, elle met en dualité les concepts de *distribution d'énergie* et de *fonction de corrélation*. Ce point de vue permet une introduction des distributions d'énergie différente des précédentes, et en offre une interprétation nouvelle.

On peut prendre pour cela comme point de départ les relations de type «Wiener-Khintchine» selon lesquelles une densité spectrale (d'énergie ou de puissance)  $\Gamma_x(f)$  est image de Fourier d'une fonction de corrélation (déterministe ou aléatoire)  $\gamma_x(\tau)$  selon

$$\Gamma_x(f) = \int_{-\infty}^\infty \gamma_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau,$$

la notion même de corrélation étant relative, dans les deux cas, à une interaction entre le signal et ses translatées en temps. Du point de vue de l'estimation (dans le cas

aléatoire), une méthode comme le *corrélogramme* réalise alors une transformation de Fourier *pondérée* (par une fenêtre  $w(\cdot)$ ) d'une estimée  $\hat{\gamma}_x(\tau)$  de la fonction de corrélation aléatoire, telle qu'elle peut être fournie par une corrélation déterministe :

$$\hat{\Gamma}_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) \hat{\gamma}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (1.10)$$

Le schéma évoqué ci-dessus prend tout son intérêt dans le cas des signaux stationnaires pour lesquels la description spectrale ne change pas au cours du temps. Si l'on s'intéresse par contre au cas non stationnaire et si l'on admet d'interpréter une distribution temps-fréquence comme une densité spectrale évolutive, il devient naturel, pour en construire une définition, de recourir à l'approche stationnaire en lui rajoutant une variable d'évolution. On est ainsi amené à généraliser la notion de corrélation au temps *et* à la fréquence, ce qui correspond en fait à considérer les *fonctions d'ambiguïté* [FLA 98], celles-ci offrant en effet une mesure d'interaction entre un signal et ses translatées en temps et en fréquence. Il est alors remarquable de constater que, si l'on choisit de définir une fonction d'ambiguïté par la forme symétrisée

$$A_x(\tau, \xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\xi t} dt,$$

l'extension temps-fréquence de la procédure (1.10) conduit à calculer

$$\rho_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{r-d}(\tau, \xi) A_x(\tau, \xi) e^{i2\pi(\xi t - \tau f)} d\tau d\xi,$$

soit, exactement et encore, la classe de Cohen (1.7).

Parmi de nombreux intérêts, ce point de vue permet de rationaliser le choix de la fonction  $\phi_{r-d}(\tau, \xi)$ , *a priori* arbitraire. En particulier, la structure corrélative de  $A_x(\tau, \xi)$  permet de localiser, dans le plan des ambiguïtés, les zones associées à des interférences dans le plan temps-fréquence, et donc d'en réduire l'importance par un choix adapté de la pondération  $\phi_{r-d}(\tau, \xi)$  [BAR 93, FLA 84, HLA 97, FLA 98].

## 1.5. Probabilités

Une façon différente encore d'introduire et d'interpréter les distributions temps-fréquence est d'user d'une analogie avec la notion de *densité de probabilité*, relative au temps et à la fréquence [FLA 98]. On peut noter que ce point de vue a été adopté de façon récurrente au fil des ans, l'interprétation d'une représentation conjointe en termes de densité de probabilité étant très souvent la motivation première des auteurs.

**Fonction caractéristique.** Si le premier à avoir fait usage de la notion de «quasi-densité de probabilité» est sans doute E.P. Wigner [WIG 32], la construction de J. Ville

a quant à elle abouti à un résultat semblable en suivant le schéma évoqué au paragraphe précédent, et en définissant explicitement la distribution conjointe recherchée comme transformée de Fourier d'une «forme acceptable de fonction caractéristique» du temps et de la fréquence [VIL 48].

**Fonction de répartition.** On peut également considérer que la définition de Page mentionnée précédemment en (1.6) s'accorde d'une idée semblable, mais cette fois en usant de l'analogie entre densité spectrale cumulative et fonction de répartition, de façon à définir une densité de probabilité par dérivation de cette dernière.

**Marginales.** Si l'on revient à la relation de Parseval (1.3), on peut considérer les intégrands comme des densités d'énergie (temporelle et fréquentielle) :

$$\rho_x(t) := |x(t)|^2 \quad ; \quad \rho_x(f) := |\widehat{x}(f)|^2,$$

ou encore, pour des signaux d'énergie unité, comme des densités de probabilité relatives aux variables de temps et de fréquence. Dans cette interprétation, une distribution temps-fréquence devient une densité conjointe, dont il est normal d'exiger que les distributions marginales s'identifient aux densités individuelles :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, f) dt = \rho_x(f) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, f) df = \rho_x(t). \quad (1.11)$$

De telles contraintes peuvent alors être traduites en conditions d'admissibilité à l'intérieur d'une classe de distributions (par exemple, dans le cas de la classe de Cohen, les conditions marginales imposent que  $\phi_{r-d}(0, \xi) = \phi_{r-d}(\tau, 0) = 1$ ).

**Conditionnelles.** Poursuivant l'analogie, on peut envisager de définir (par la formule de Bayes) des densités *conditionnelles* selon

$$\rho_x(t, f) = \rho_x(t|f) \rho_x(f) = \rho_x(f|t) \rho_x(t).$$

Ceci permet d'interpréter le comportement local (en temps ou en fréquence) d'une distribution en termes de *moyennes conditionnelles*, et par exemple d'assurer que ces dernières fournissent directement les quantités physiques locales que sont le *retard de groupe*  $t_x(f)$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \rho_x(t|f) dt = t_x(f) := -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \arg \widehat{x}(f)$$

et la *fréquence instantanée*  $f_x(t)$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \rho_x(f|t) df = f_x(t) := \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg x(t).$$

De telles contraintes peuvent à nouveau être traduites en conditions d'admissibilité à l'intérieur de la classe de Cohen, à savoir [FLA 98] :

$$\left. \frac{\partial \phi_{\text{r-d}}(\tau, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial \phi_{\text{r-d}}(\tau, \xi)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0,$$

soit un jeu de conditions qui est en particulier vérifié par la distribution de Wigner-Ville.

**Modèles de mélange.** Un intérêt de l'approche probabiliste est de permettre l'utilisation de techniques visant à *modéliser* une densité conjointe. Il en est ainsi, par exemple, des *modèles de mélange* proposés en [COA 99], dans lesquels les différentes composantes constitutives d'un signal sont chacune caractérisées par une distribution gaussienne bi-dimensionnelle.

**Entropies.** D'une façon analogue, on peut imaginer de mesurer la *complexité* d'un signal non stationnaire par l'intermédiaire d'une fonctionnelle d'*entropie* appliquée à une distribution temps-fréquence. Ce point de vue se heurte cependant à une difficulté de définition du fait de la possible occurrence de valeurs négatives dans la plupart des distributions, ce qui exclut *de facto* l'utilisation aveugle de l'entropie (standard) de Shannon. Il est cependant intéressant de noter que, plutôt que de restreindre l'application d'une définition standard (Shannon) à une classe réduite de distributions admissibles (typiquement, les spectrogrammes/scalogrammes qui sont toujours non-négatifs), il est possible de faire usage de distributions possédant par ailleurs un grand nombre de bonnes propriétés théoriques (typiquement, la distribution de Wigner-Ville), moyennant l'introduction d'une modification de la notion d'entropie, comme par exemple celle offerte par l'extension due à Rényi [BAR 01].

## 1.6. Mécanique

C'est sur la base d'une analogie assez semblable que l'on peut justifier l'introduction de techniques non linéaires, telles que la *réallocation* [AUG 95], destinées à améliorer la localisation des distributions temps-fréquence usuelles. Il en est ainsi pour le spectrogramme de fenêtre  $g(\cdot)$  qui, plutôt que d'être vu sous l'angle de sa définition (1.5), peut être considéré comme un membre de la classe de Cohen, dont il est facile de voir qu'il admet la formulation équivalente :

$$S_x^g(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(s, \xi) W_g(s-t, \xi-f) ds d\xi. \quad (1.12)$$

La signification de cette reformulation est qu'un spectrogramme n'est rien d'autre qu'une distribution de Wigner-Ville *lissée*, avec pour double conséquence que (i) les valeurs négatives et les contributions oscillantes de la distribution de Wigner-Ville (donc, les termes d'interférence) sont «gommées», tandis que (ii) ses composantes localisées sont «étalées» dans le plan. Alors que la réduction interférentielle est (en

général) perçue comme étant bénéfique, la délocalisation des composantes peut être considérée comme un sous-produit indésirable du processus de lissage. Une lecture plus fine de la relation (1.12) montre alors que la valeur d'un spectrogramme en un point temps-fréquence  $(t, f)$  est *un nombre* (l'énergie locale) qui résume l'information fournie par *toute une distribution* (la distribution de Wigner-Ville sous-jacente  $W_x$ ) dans un voisinage temps-fréquence (défini qualitativement comme le support effectif de  $W_g$ ). Dans le cas général où la distribution n'est pas uniforme, affecter le nombre ainsi obtenu au centre *géométrique*  $(t, f)$  du voisinage ne présente pas grande signification. Raisonnant par analogie avec une situation *mécanique* dans laquelle on considérerait une distribution de masse sur un support donné, il est clair que la position la plus représentative de la distribution est en fait son *centre de gravité* dans le voisinage : l'idée de la réallocation [KOD 76] est alors précisément de *déplacer* la valeur du spectrogramme du point  $(t, f)$  où il a été calculé vers le centre de gravité local correspondant  $(\hat{t}(t, f), \hat{f}(t, f))$ . Procédant de cette façon, il en résulte des distributions à la fois localisées (à l'image en fait des distributions-mères dont elles sont issues par lissage) et à interférences réduites. Une présentation plus détaillée de la technique de réallocation sera donnée au chapitre 9 de cet ouvrage.

## 1.7. Mesures

On a évoqué précédemment des limitations qui sont essentiellement relatives à des interprétations locales et, *a fortiori*, ponctuelles. On peut cependant noter que ceci n'exclut en aucune manière de faire usage d'une distribution dont l'interprétation peut poser problème, dès lors qu'on ne la considère — d'un point de vue strictement opératoire — que comme un moyen convenable d'accéder à des quantités qui, elles, possèdent une signification physique. Il en est ainsi, par exemple, pour l'estimation de la fréquence instantanée : d'un côté, l'intuition tend à rejeter l'usage de la distribution de Wigner-Ville parce qu'elle présente localement des valeurs négatives, d'interprétation physique délicate, et à lui préférer un spectrogramme qui est partout non négatif ; si la question est cependant d'accéder sans biais à la fréquence instantanée, c'est pourtant la première distribution qu'il faut préférer à la seconde. En d'autres termes, indépendamment des valeurs qu'une distribution peut prendre (positives ou non), c'est bien davantage la signification d'une mesure locale (et sa possibilité) qu'il faut discuter. C'est cette fois du côté de la mécanique quantique qu'il faut se tourner pour mieux comprendre le problème [HIL 84, FLA 98].

**Observables.** Dans le formalisme de la mécanique quantique, les résultats de mesure observables (les seuls qui comptent) sont décrits comme étant valeurs moyennes d'un opérateur (représentatif d'une grandeur physique) sur les états possibles d'un système. Dans ce contexte, l'introduction d'une représentation conjointe correspond au souci de décrire le même résultat de mesure comme moyenne d'ensemble d'une fonction usuelle (associée à la grandeur physique considérée), relativement à une «densité de probabilité» des états. En transposant en termes temps-fréquence (en lieu

et place des variables de position et d'impulsion, jouant formellement un rôle similaire), ceci revient à définir une représentation conjointe  $\rho_x(t, f)$  par l'équivalence [HIL 84, WIG 32]

$$\langle \mathbf{G} \rangle_x := \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{G}x)(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t, f) \rho_x(t, f) dt df,$$

dans laquelle la fonction  $G(t, f)$  se trouve associée à l'opérateur  $\mathbf{G}$ .

Le problème de la non-unicité de  $\rho_x(t, f)$  est ainsi ramené à celui de la non-unicité d'association d'un opérateur à une fonction, lorsque celle-ci dépend de variables *canoniquement conjuguées*, c'est-à-dire dont les opérateurs élémentaires associés ne commutent pas. C'est évidemment le cas pour le temps et la fréquence, dont les opérateurs respectifs  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{F}$  sont définis par

$$(\mathbf{T}x)(t) := tx(t) \quad ; \quad (\mathbf{F}x)(t) := \frac{1}{j2\pi} \frac{d}{dt} x(t),$$

conduisant à la relation de non-commutation

$$[\mathbf{T}, \mathbf{F}] := \mathbf{T}\mathbf{F} - \mathbf{F}\mathbf{T} = \frac{j}{2\pi} \mathbf{I},$$

où  $\mathbf{I}$  est l'opérateur identité.

**Correspondances.** Dans le formalisme de la classe de Cohen, l'arbitraire d'écriture de  $\mathbf{G}$  est directement lié à la fonction de paramétrisation  $\phi_{r-d}(\tau, \xi)$ , et l'on peut montrer [COH 66, FLA 98] que l'on a

$$\mathbf{G}(\mathbf{T}, \mathbf{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{r-d}(\tau, \xi) g(\tau, \xi) e^{j2\pi(\xi\mathbf{T} - \tau\mathbf{F})} d\tau d\xi,$$

avec

$$g(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t, f) e^{-j2\pi(\xi t - \tau f)} dt df.$$

Dans le cas Wigner-Ville ( $\phi_{r-d}(\tau, \xi) = 1$ ), on retrouve la règle de quantification proposée par H. Weyl, mais d'autres choix sont possibles. Ainsi, une règle de correspondance proposée en 1925 par M. Born et P. Jordan dans un de leurs articles fondateurs de la mécanique quantique définit implicitement la paramétrisation  $\phi_{r-d}(\tau, \xi) = \sin(\pi\tau\xi)/(\pi\tau\xi)$ , et donc une distribution (dite de Born-Jordan) dont les propriétés géométriques sont très proches de celle de Choi-Williams [FLA 98], proposée en 1989 sur la base d'arguments interférentiels complètement différents...

**Noyaux et symboles.** Les opérateurs définis au sens d'une correspondance sont caractérisables au niveau de leur *noyau*  $\gamma(t, s)$ , défini par

$$(\mathbf{G}x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t, s) x(s) ds.$$

Pour une fonction  $g(\tau, \xi)$  donnée, on montre alors [COH 70, FLA 98] que ces différents noyaux peuvent tous s'écrire en fonction de la transformée de Fourier partielle :

$$\gamma_0(t, \tau) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau, \xi) e^{j2\pi\xi t} d\xi.$$

Ceci permet de leur donner un éclairage nouveau et commun en termes de valeurs moyennes de la fonction  $\gamma_0(\cdot, t-s)$  sur l'intervalle  $[\min(t, s), \max(t, s)]$ . Dans les cas Born-Jordan et (partie réelle de) Rihaczek, on obtient en effet, respectivement,

$$\phi_{\text{r-d}}(\tau, \xi) = \frac{\sin(\pi\tau\xi)}{\pi\tau\xi} \quad \Rightarrow \quad \gamma(t, s) = \frac{1}{|t-s|} \int_{\min(t,s)}^{\max(t,s)} \gamma_0(\theta, t-s) d\theta;$$

$$\phi_{\text{r-d}}(\tau, \xi) = \cos(\pi\tau\xi) \quad \Rightarrow \quad \gamma(t, s) = \frac{\gamma_0(t, t-s) + \gamma_0(s, t-s)}{2},$$

alors que, dans le cas Wigner-Ville, on a

$$\phi_{\text{r-d}}(\tau, \xi) = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma(t, s) = \gamma_0\left(\frac{t+s}{2}, t-s\right).$$

On montre alors que, dans ce même cas,

$$G(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau.$$

Dans le langage du calcul pseudo-différentiel [FOL 89], la fonction  $G(t, f)$  est le *symbole de Weyl* de l'opérateur  $G$  [GRÖ 01, MAT 98]. Passer d'un opérateur à son symbole est l'opération inverse de la règle de correspondance qui associe un opérateur à une fonction. Remarquons que, dans le cas d'un opérateur de *covariance*, le symbole s'identifie à ce que l'on appelle le *spectre de Wigner-Ville* [FLA 98, MAR 85]. Dans le chapitre 10, le symbole de Weyl et le spectre de Wigner-Ville seront utilisés pour l'estimation et la détection des processus non stationnaires.

## 1.8. Géométries

D'autres façons d'introduire les distributions temps-fréquence sont enfin d'inspiration *géométrique*.

**Tomographie.** Une première approche consiste à généraliser la contrainte (1.11) de distributions marginales à des intégrations dans le plan qui ne soient pas nécessairement parallèles aux axes temps et fréquence. Si l'on considère par exemple un «chirp»

linéaire  $x_{f_0, \beta}(t)$ , associé par construction à une droite  $f = f_0 + \beta t$  du plan, il devient naturel d'imposer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, f_0 + \beta t) dt = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x_{f_0, \beta}^*(t) dt \right|^2, \quad (1.13)$$

où le membre de droite mesure, au sens du produit scalaire, l'interaction entre le signal et le «chirp». <sup>3</sup> Le problème posé se ramène ainsi à l'inversion d'une transformation de Radon et il se trouve [BER 87] que sa solution est exactement la distribution de Wigner-Ville usuelle (1.8). Il est alors possible de conserver l'idée élégante de cette construction tomographique mais de changer la géométrie qui la sous-tend en remplaçant les droites d'intégration par d'autres courbes du plan. Si l'on choisit en particulier de s'intéresser à des *hyperboles*, une construction analogue à la précédente conduit cette fois à la distribution unitaire de Bertrand (1.9) [BER 87].

**Symétries.** Une deuxième approche géométrique s'exprime en termes de *symétries*. En effet, si l'on introduit l'opérateur de déplacement (dit de Glauber)

$$D_{t,f} = e^{j2\pi(fT - tF)},$$

on peut montrer par un calcul direct que [ROY 77]

$$W_x(t, f) = 2 \langle D_{t,f} P D_{-t,-f} \rangle_x,$$

où  $P$  est l'opérateur de *parité* défini par

$$(Px)(t) := x(-t) \quad ; \quad (P\hat{x})(f) := \hat{x}(-f).$$

Il en résulte que la valeur de la distribution de Wigner-Ville en un point du plan temps-fréquence peut s'interpréter comme la valeur moyenne d'un opérateur de symétrie autour de ce point. Là encore, l'idée de symétrie peut être conservée, mais sa définition explicite modifiée. On peut ainsi montrer que remplacer la symétrie ponctuelle usuelle (liée à une notion de moyenne arithmétique) par une *inversion* (liée à une notion de moyenne différente, par exemple *géométrique*) peut résulter en des distributions affines différentes de celle de Wigner-Ville [FLA 96].

Renversant la perspective, il apparaît en fait que l'idée de symétrie est intimement liée à celle de *localisation* sur des courbes spécifiques du plan temps-fréquence. En effet, une autre façon d'exprimer que la valeur d'une distribution en un point donné résulte de contributions qui sont symétriques par rapport à ce point consiste à dire que

---

3. Le membre de droite de (1.13) mesure en fait l'énergie d'interaction entre le signal analysé et le chirp, ce qui permet de le considérer comme la densité d'énergie d'une *transformée de Fourier fractionnaire* du signal [ALM 94].

deux contributions interagissent pour en créer une troisième qui est centrée autour d'un «point-milieu» situé entre les composantes en interaction. Il suit de cette reformulation que la localisation est un sous-produit naturel de la «géométrie des interférences» correspondante [HLA 97], puisqu'elle ne peut être observée que sur des courbes qui soient lieu de tous leurs points-milieus. Dans le cas Wigner-Ville, la géométrie sous-jacente est celle, ordinaire, qui est gouvernée par la symétrie usuelle attachée à l'idée de moyenne arithmétique, et la localisation est ainsi garantie sur toutes les droites du plan (fréquences pures, impulsions, chirps linéaires). Le même principe peut alors être étendu à des situations non linéaires, moyennant l'introduction d'une géométrie modifiée et adaptée. Ainsi, on sait qu'une forme généralisée de la distribution de Bertrand (1.9) permet une localisation parfaite sur des lois de retard de groupe en lois de puissance et l'on peut montrer que cette propriété correspond à une géométrie gouvernée par une moyenne logarithmique généralisée (au sens de Stolarsky) en lieu et place de la moyenne arithmétique qui prévaut dans le cas Wigner-Ville [FLA 96, FLA 99].

## 1.9. Conclusion

Ce chapitre a tenté de justifier comment les mêmes outils de base de l'analyse temps-fréquence quadratique pouvaient être introduits de multiples façons. Bien qu'aucune définition ne puisse être retenue comme idéale à tous égards, on a montré que l'infinité potentielle des définitions admissibles pouvait en fait être substantiellement réduite sur la base d'arguments d'interprétation, et qu'un certain ordre émergeait lorsque l'on multipliait des points de vue indépendants sur le problème. A ce niveau, il peut être intéressant de remarquer que les contraintes que l'on peut imaginer d'introduire pour restreindre les classes de solutions sont empreintes d'une forme de relativisme selon laquelle l'idée même de «contrainte naturelle» dépend étroitement du champ disciplinaire dans lequel on l'applique. Ainsi, si l'on considère la communauté des praticiens du traitement du signal, on peut dire que le paradigme temps-fréquence s'est d'abord ancré dans la notion «intuitive» de spectre évolutif, et que ce n'est que par un lent glissement qu'il s'est déporté vers des concepts plus fondamentaux comme celui de distribution d'énergie, dont la distribution de Wigner-Ville est l'archétype. En mécanique quantique, la situation est exactement inverse : l'objet premier et «naturel» a été la distribution de Wigner et ce n'est qu'au cours des années 70, donc bien après la banalisation du spectrogramme (et sans référence à celui-ci), que des distributions position-impulsion «à la spectrogramme» ont été proposées. Par ailleurs, si des distributions comme celles de Wigner-Ville ou de Rihaczek se prêtent à des interprétations intéressantes (quoique différentes) aussi bien en signal qu'en mécanique quantique, on peut aussi remarquer qu'il n'en est pas de même pour la distribution de Page, par exemple, dont le principe de causalité ne présente de véritable intérêt que dans un contexte temporel.

La multiplicité fondamentale des définitions envisageables pour une distribution temps-fréquence est un corollaire nécessaire et incontournable aux limitations inhé-

rentes à tout traitement conjoint de variables canoniquement conjuguées. Cette diversité doit aussi être perçue comme une source de richesse : le renoncement à une définition unique et « objective » au profit d'un petit nombre d'outils choisis sur un principe d'« inter-subjectivité » est la clé pour apporter à l'utilisateur des solutions qui, sans être universelles, puissent être adaptées à ses besoins spécifiques.

### 1.10. Bibliographie

- [ALM 94] ALMEIDA L. B., « The fractional Fourier transform and time-frequency representations », *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, n° 11, p. 3084–3091, novembre 1994.
- [AUG 95] AUGER F., FLANDRIN P., « Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method », *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, n° 5, p. 1068–1089, mai 1995.
- [AUG 97] AUGER F., FLANDRIN P., GONÇALVÈS P., LEMOINE O., « A Time-Frequency Toolbox, for Use with Matlab », <http://www.crttsn.univ-nantes.fr/auger/tftb.html>, 1997.
- [BAR 93] BARANIUK R. G., JONES D. L., « A signal-dependent time-frequency representation : Optimal kernel design », *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, n° 4, p. 1589–1602, avril 1993.
- [BAR 01] BARANIUK R. G., FLANDRIN P., JANSSEN A. J. E. M., MICHEL O. J. J., « Measuring time-frequency information content using the Rényi entropies », *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, n° 4, p. 1391–1409, mai 2001.
- [BER 87] BERTRAND J., BERTRAND P., « A tomographic approach to Wigner's function », *Found. Phys.*, vol. 17, p. 397–405, 1987.
- [BER 92] BERTRAND J., BERTRAND P., « A class of affine Wigner functions with extended covariance properties », *J. Math. Phys.*, vol. 33, p. 2515–2527, 1992.
- [BLA 55] BLANC-LAPIERRE A., PICINBONO B., « Remarques sur la notion de spectre instantané de puissance », *Publ. Sc. Univ. Alger B*, vol. 1, p. 2–32, 1955.
- [BOU 96] BOUDREAUX-BARTELS G. F., « Mixed time-frequency signal transformations », POULARIKAS A. D., Ed., *The Transforms and Applications Handbook*, p. 887–962, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [CAR 98] CARMONA R., HWANG H. L., TORRÉSANI B., *Practical Time-Frequency Analysis*, Academic Press, 1998.
- [COA 99] COATES M. J., Time-Frequency Modelling, Thèse de Doctorat, Univ. of Cambridge, Cambridge, UK, 1999.
- [COH 66] COHEN L., « Generalized phase-space distribution functions », *J. Math. Phys.*, vol. 7, p. 781–786, 1966.
- [COH 70] COHEN L., « Hamiltonian operators via Feynman path integrals », *J. Math. Phys.*, vol. 11, p. 3296–3297, 1970.
- [COH 95] COHEN L., *Time-Frequency Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

- [D'A 92] D'ALESSANDRO C., DEMARS C., « Représentations temps-fréquence du signal de parole », *Traitement du Signal*, vol. 9, n°2, p. 153–173, 1992.
- [DAU 92] DAUBECHIES I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.
- [FLA 84] FLANDRIN P., « Some features of time-frequency representations of multicomponent signals », *Proc. IEEE ICASSP-84*, San Diego, CA, p. 41.B.4.1–41.B.4.4, 1984.
- [FLA 96] FLANDRIN P., GONÇALVÈS P., « Geometry of affine time-frequency distributions », *Appl. Comp. Harm. Anal.*, vol. 3, p. 10–39, 1996.
- [FLA 98] FLANDRIN P., *Temps-fréquence*, Hermès, Paris, France, 2<sup>e</sup> édition, 1998, traduction anglaise : *Time-Frequency/Time-Scale Analysis*, Academic Press, 1999.
- [FLA 99] FLANDRIN P., « La notion de localisation dans le plan temps-fréquence », *Traitement du Signal*, vol. 15, p. 483–492, 1999.
- [FOL 89] FOLLAND G. B., *Harmonic Analysis in Phase Space*, vol. 122 de *Ann. of Math. Studies*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.
- [FOL 97] FOLLAND G. B., SITARAM A., « The uncertainty principle : A mathematical survey », *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 3, p. 207–238, 1997.
- [GAB 46] GABOR D., « Theory of communication », *J. IEE*, vol. 93, p. 429–457, 1946.
- [GRÖ 01] GRÖCHENIG K., *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [HIL 84] HILLERY M., O'CONNELL R. F., SCULLY M. O., WIGNER E. P., « Distribution functions in physics : Fundamentals », *Physics Reports*, vol. 106, p. 121–167, 1984.
- [HLA 92] HLAWATSCH F., BOUDREAUX-BARTELS G. F., « Linear and quadratic time-frequency signal representations », *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 9, n°2, p. 21–67, avril 1992.
- [HLA 95] HLAWATSCH F., MANICKAM T. G., URBANKE R. L., JONES W., « Smoothed pseudo-Wigner distribution, Choi-Williams distribution, and cone-kernel representation : Ambiguity-domain analysis and experimental comparison », *Signal Process.*, vol. 43, n°2, p. 149–168, 1995.
- [HLA 97] HLAWATSCH F., FLANDRIN P., « The interference structure of the Wigner distribution and related time-frequency signal representations », MECKLENBRÄUKER W., HLAWATSCH F., Eds., *The Wigner Distribution — Theory and Applications in Signal Processing*, p. 59–133, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1997.
- [HLA 99] HLAWATSCH F., PAPANDREOU-SUPPAPPOLA A., BOUDREAUX-BARTELS G. F., « The power classes – Quadratic time-frequency representations with scale covariance and dispersive time-shift covariance », *IEEE Trans. Signal. Process.*, vol. 47, n°11, p. 3067–3083, novembre 1999.
- [HLA 03] HLAWATSCH F., TAUBÖCK G., « The covariance theory of time-frequency analysis », BOASHASH B., Ed., *Time-Frequency Signal Analysis and Processing*, Elsevier, 2003.
- [KOD 76] KODERA K., DE VILLEDARY C., GENDRIN R., « A new method for the numerical analysis of non-stationary signals », *Phys. Earth Plan. Int.*, vol. 12, p. 142–150, 1976.

- [KØEN 46] KØENIG R., DUNN H. K., LACY D. Y., « The sound spectrograph », *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 18, p. 19–49, 1946.
- [MAL 97] MALLAT S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1997.
- [MAR 85] MARTIN W., FLANDRIN P., « Wigner-Ville spectral analysis of nonstationary processes », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 33, n°6, p. 1461–1470, décembre 1985.
- [MAT 98] MATZ G., HLAWATSCH F., « Time-frequency transfer function calculus (symbolic calculus) of linear time-varying systems (linear operators) based on a generalized under-spread theory », *J. Math. Phys.*, vol. 39, n°8, p. 4041–4070, août 1998.
- [MEC 97] MECKLENBRÄUKER W., HLAWATSCH F., Eds., *The Wigner Distribution — Theory and Applications in Signal Processing*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1997.
- [MEY 93] MEYER Y., *Ondelettes et applications*, Armand Colin, 1993.
- [PAG 52] PAGE C. H., « Instantaneous power spectra », *J. Appl. Phys.*, vol. 23, p. 103–106, 1952.
- [PAP 93] PAPANDREOU A., HLAWATSCH F., BOUDREAUX-BARTELS G. F., « The hyperbolic class of quadratic time-frequency representations — Part I : Constant- $Q$  warping, the hyperbolic paradigm, properties, and members », *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, n°12, p. 3425–3444, décembre 1993.
- [PAP 98] PAPANDREOU-SUPPAPPOLA A., HLAWATSCH F., BOUDREAUX-BARTELS G. F., « Quadratic time-frequency representations with scale covariance and generalized time-shift covariance : A unified framework for the affine, hyperbolic, and power classes », *Digital Signal Proc.*, vol. 8, n°1, p. 3–48, janvier 1998.
- [PIM 62] PIMONOW L., *Vibrations en régime transitoire*, Dunod, 1962.
- [RIH 68] RIHACZEK A. W., « Signal energy distribution in time and frequency », *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 14, n°3, p. 369–374, mai 1968.
- [RIO 92] RIOUL O., FLANDRIN P., « Time-scale energy distributions : A general class extending wavelet transforms », *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, n°7, p. 1746–1757, juillet 1992.
- [ROY 77] ROYER A., « Wigner function as expectation value of a parity operator », *Phys. Rev. A*, vol. 15, p. 449–450, 1977.
- [VIL 48] VILLE J., « Théorie et applications de la notion de signal analytique », *Câbles et Transm.*, vol. 2ème A., p. 61–74, 1948.
- [WIG 32] WIGNER E. P., « On the quantum correction for thermodynamic equilibrium », *Phys. Rev.*, vol. 40, p. 749–759, 1932.