

# DÉCOMPOSITION MODALE EMPIRIQUE

Échantillonnage et résolution

Gabriel Rilling, Patrick Flandrin

École Normale Supérieure de Lyon

`gabriel.rilling@ens-lyon.fr, flandrin@ens-lyon.fr`

GdR ISIS — 13 décembre 2004

# Décomposition Modale Empirique

*Objectif* — réaliser une décomposition de la forme

$$x(t) = \sum_{k=1}^K d_k(t) + m_K(t)$$

où pour tout  $k$ ,  $d_k(t)$  est une fonction centrée AM–FM au sens large et  $m_K(t)$  est un résidu de décomposition.

*Modes  $d_k(t)$*  — Fonctions *centrées* de type *AM-FM* :

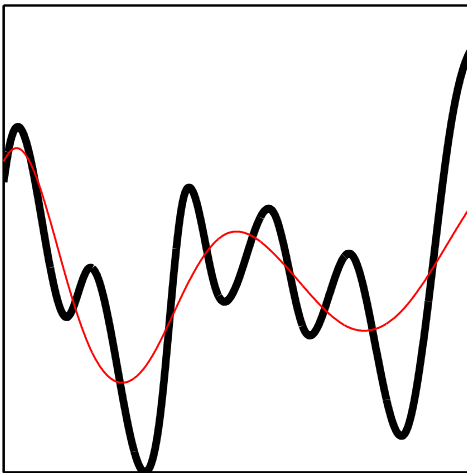
“Intrinsic Mode Functions” (IMF). Deux caractéristiques :

1. les maxima (resp. minima) locaux sont strictement positifs (resp. négatifs)
2. les modes sont *localement de moyenne nulle*

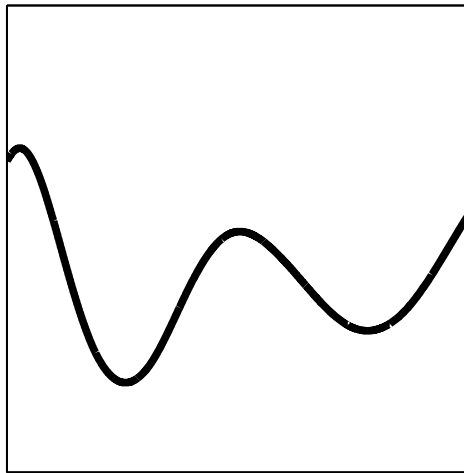
*Fondement de la décomposition* — Tout signal est la somme d'*oscillations rapides* et d'*oscillations plus lentes*.

# Fondement de la DME

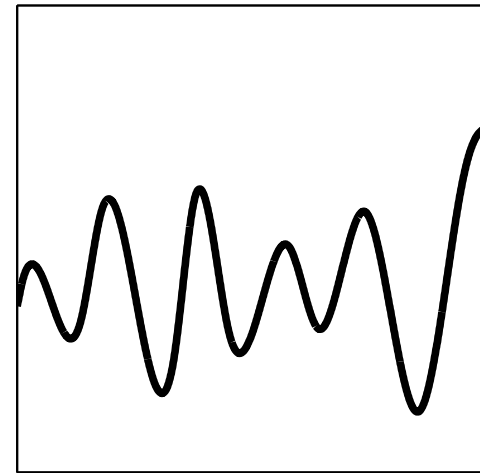
signal =



oscillation lente...



+ oscillation rapide



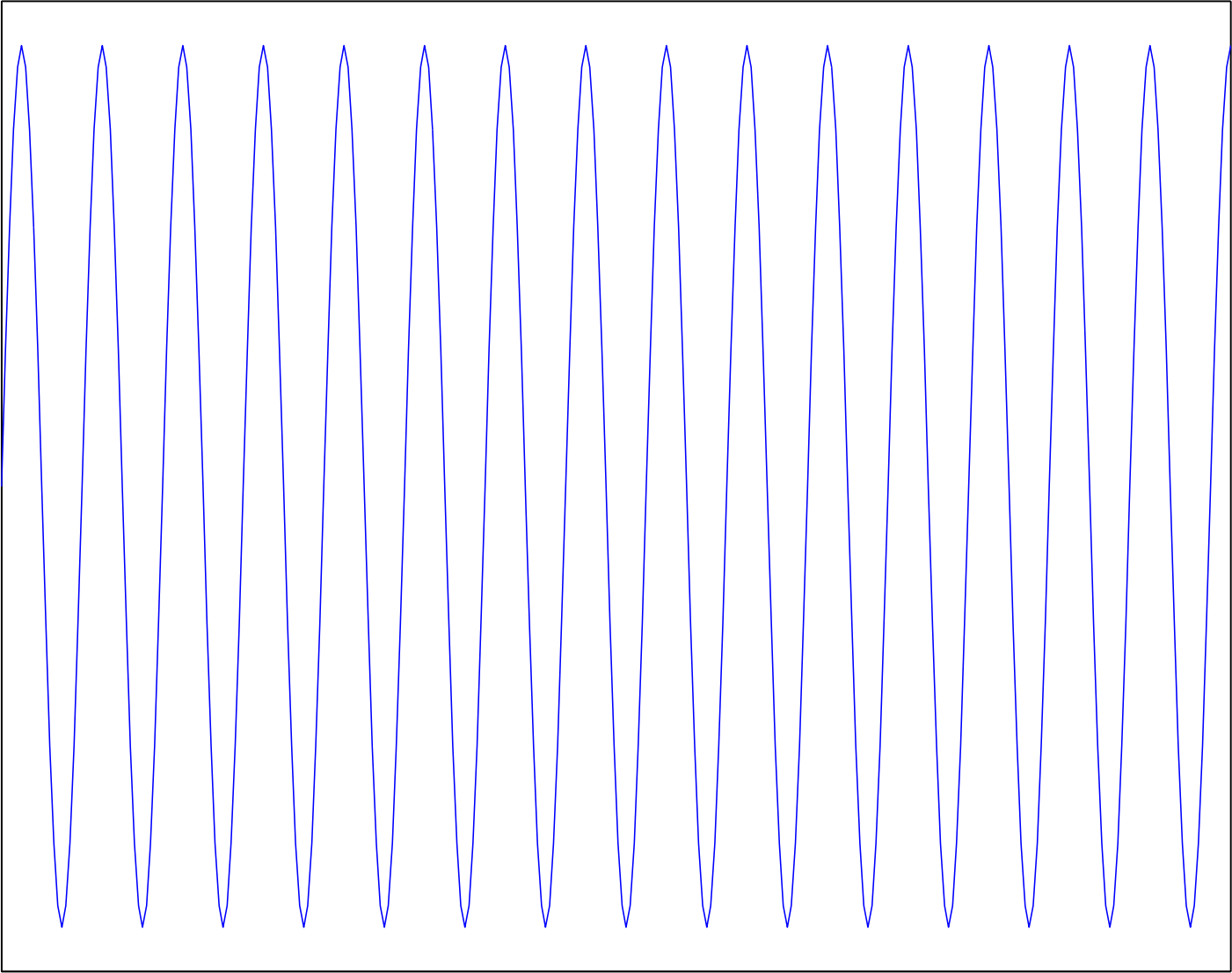
# Algorithme de la DME

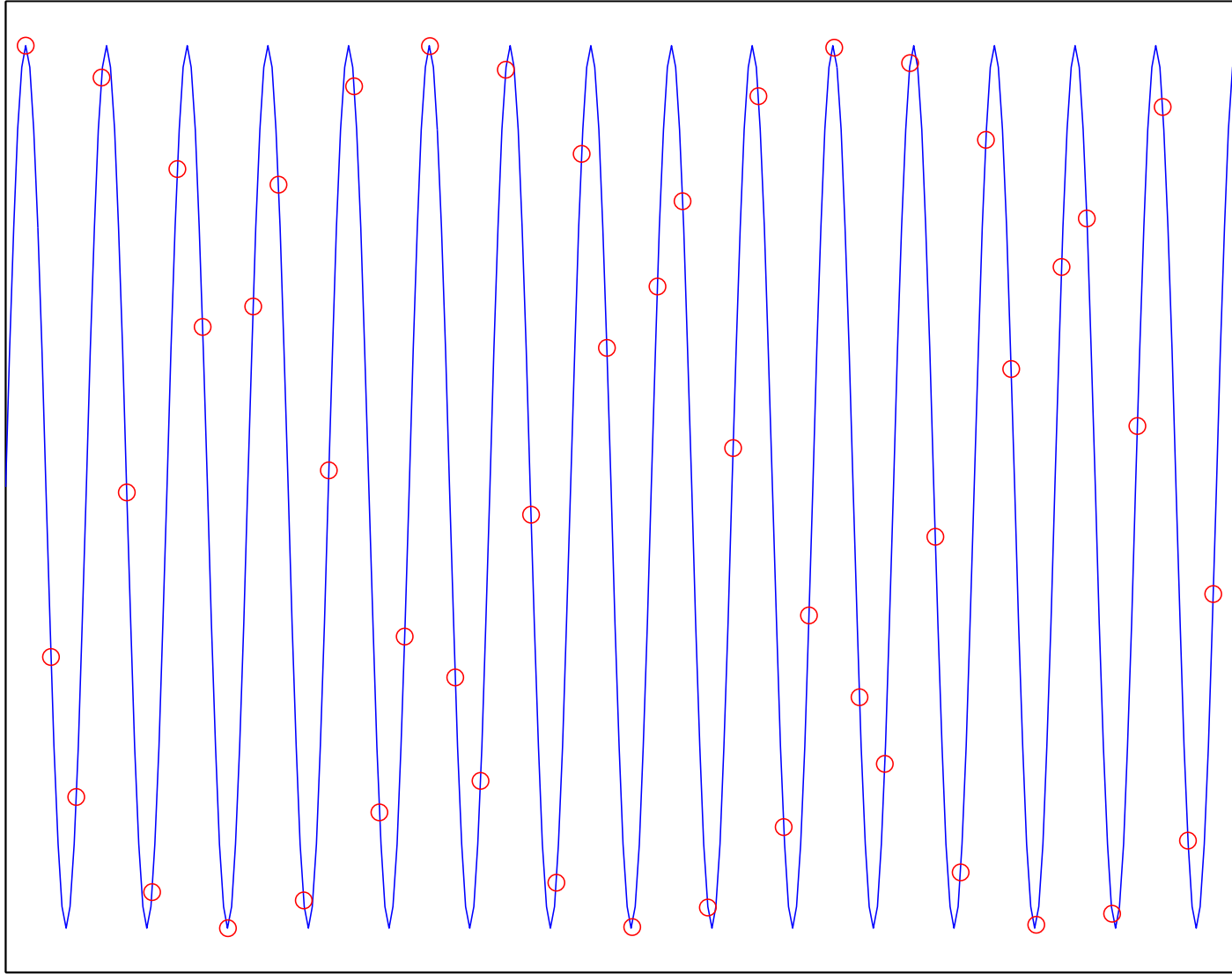
## *Principe de la décomposition*

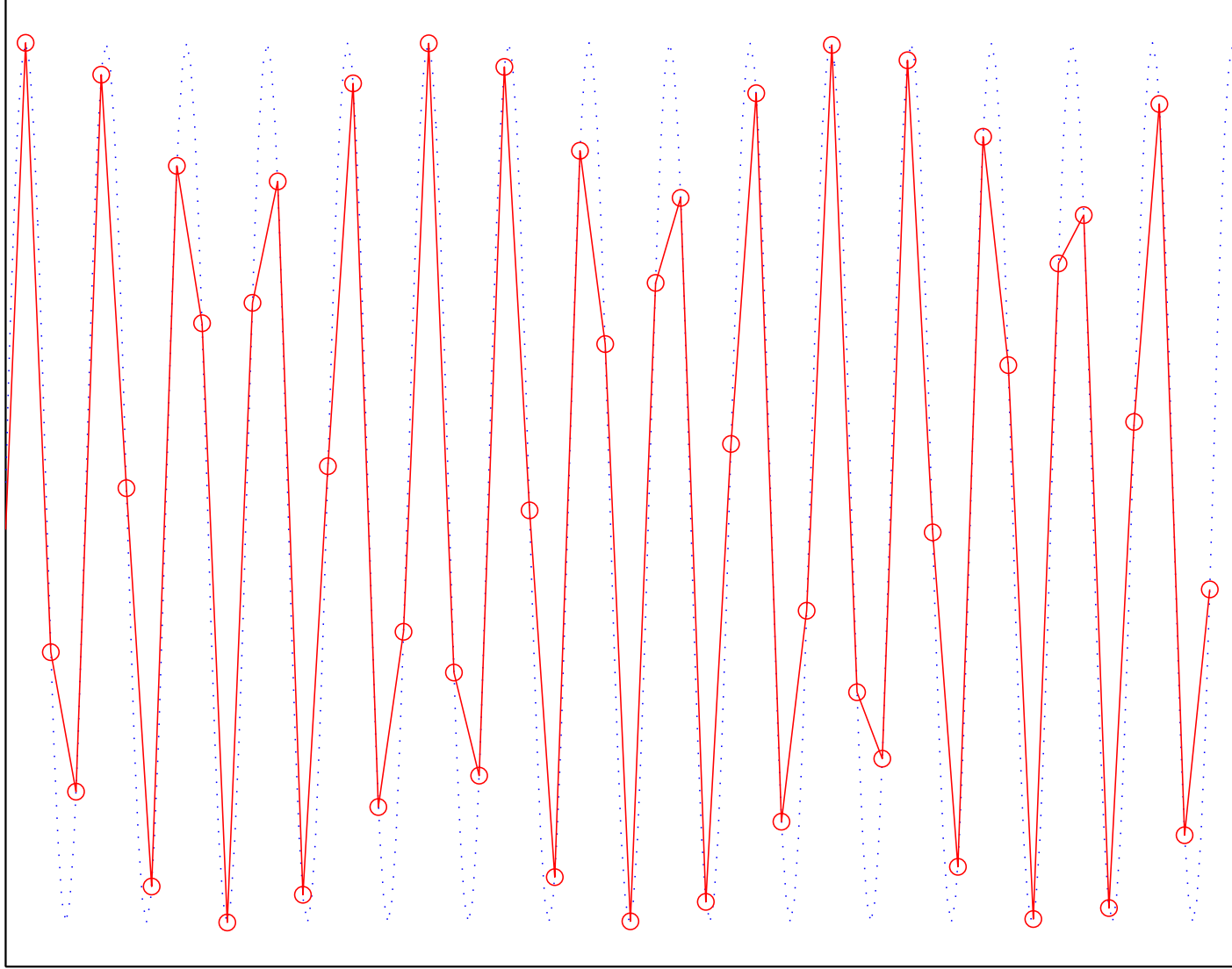
1. Identifier la partie “oscillations rapides”
2. La soustraire au signal
3. Itérer sur la différence

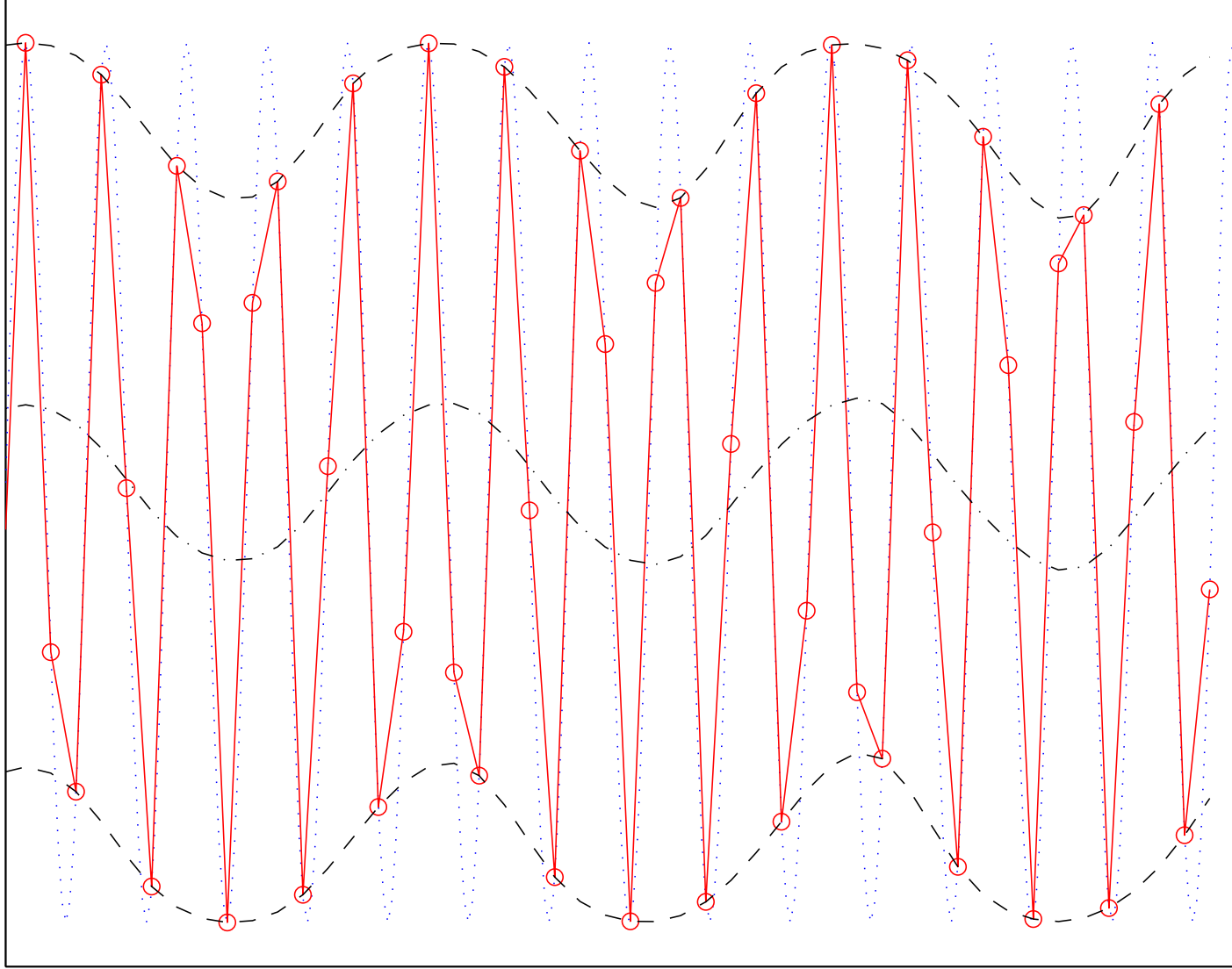
## *Algorithme usuel (Huang 1998)*

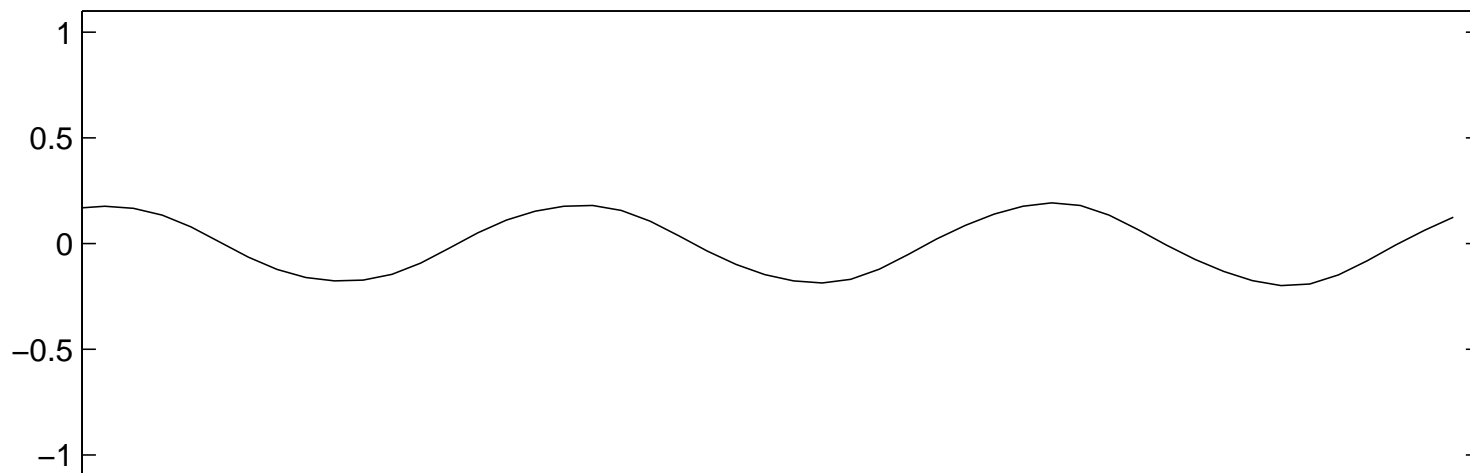
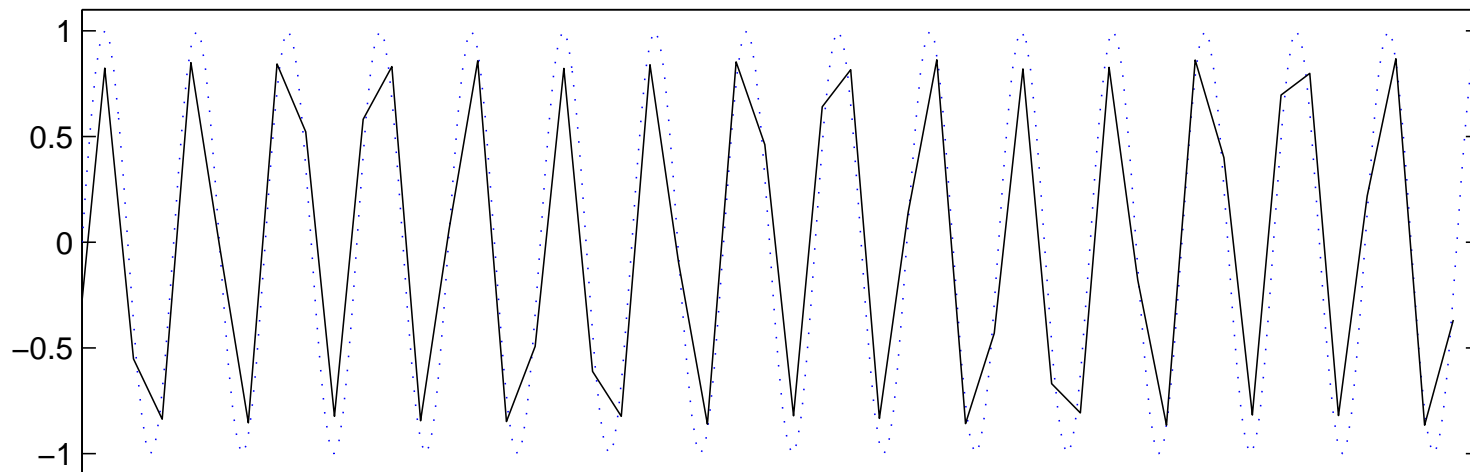
- 1: **répète**
- 2: Identifier les maxima et minima locaux du signal
- 3: En déduire une enveloppe supérieure et une enveloppe inférieure par interpolation (spline cubique)
- 4: Calculer la moyenne des enveloppes et la soustraire au signal
- 5: **jusqu’à** “moyenne des enveloppes = 0”
- 6: Soustraire le mode ainsi obtenu au signal
- 7: Itérer sur la différence











# Problématique

*Un signal sinusoïdal échantillonné n'est pas un IMF*

*D'autres fréquences apparaissent lors de la décomposition*

# Quantification de l'erreur

*signal analysé*

$$x_{f,\varphi}[n] = \cos(2\pi fn + \varphi), \text{ avec } 1 \leq n \leq N \text{ et}$$

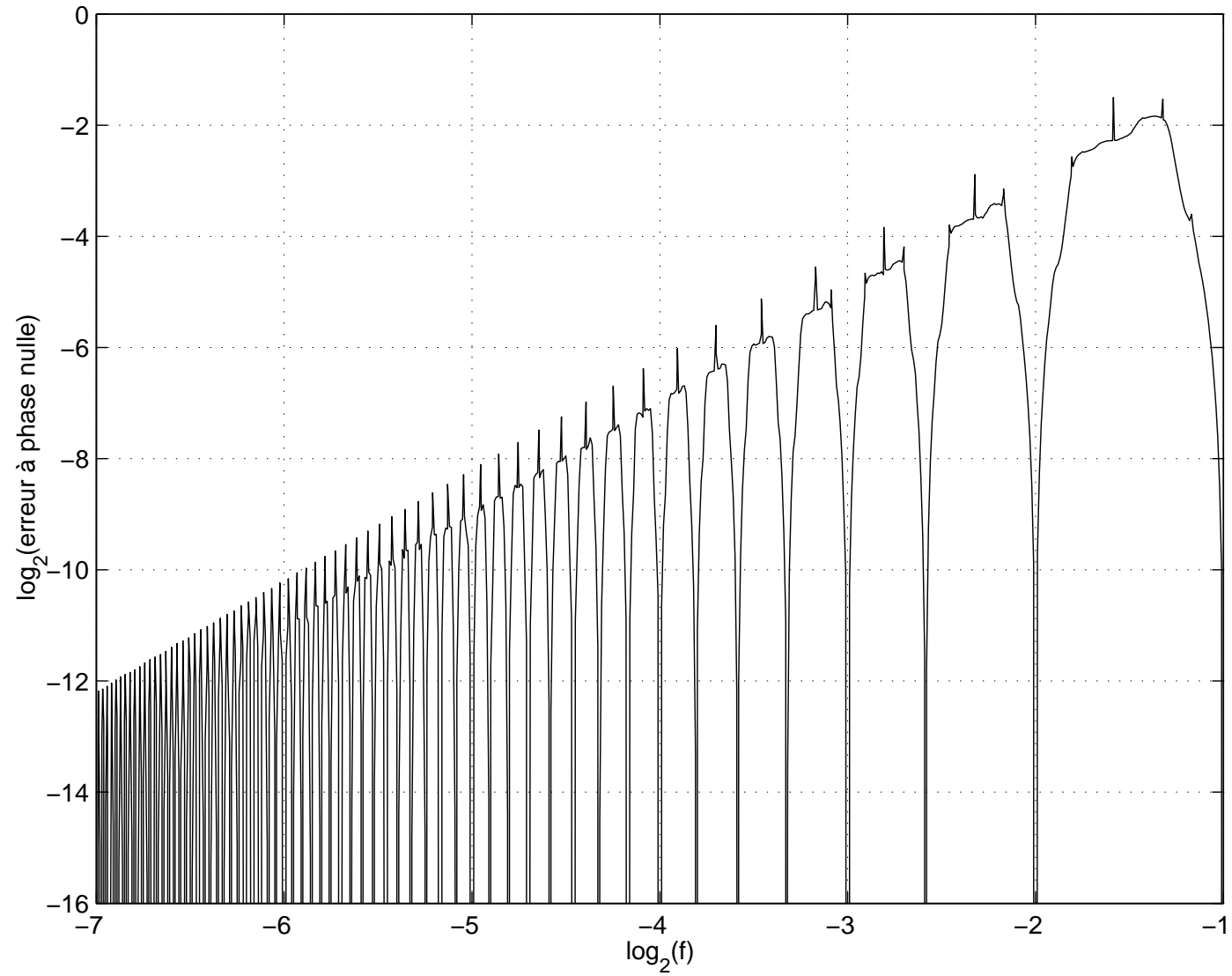
*erreur* — critère basé sur la modification de  $x_{f,\varphi}$  par la DME

$$e(f, \varphi) = \left( \frac{\sum_{n=1}^N (x_{f,\varphi}[n] - d_1[n])^2}{\sum_{n=1}^N x_{f,\varphi}^2[n]} \right)^{1/2}$$

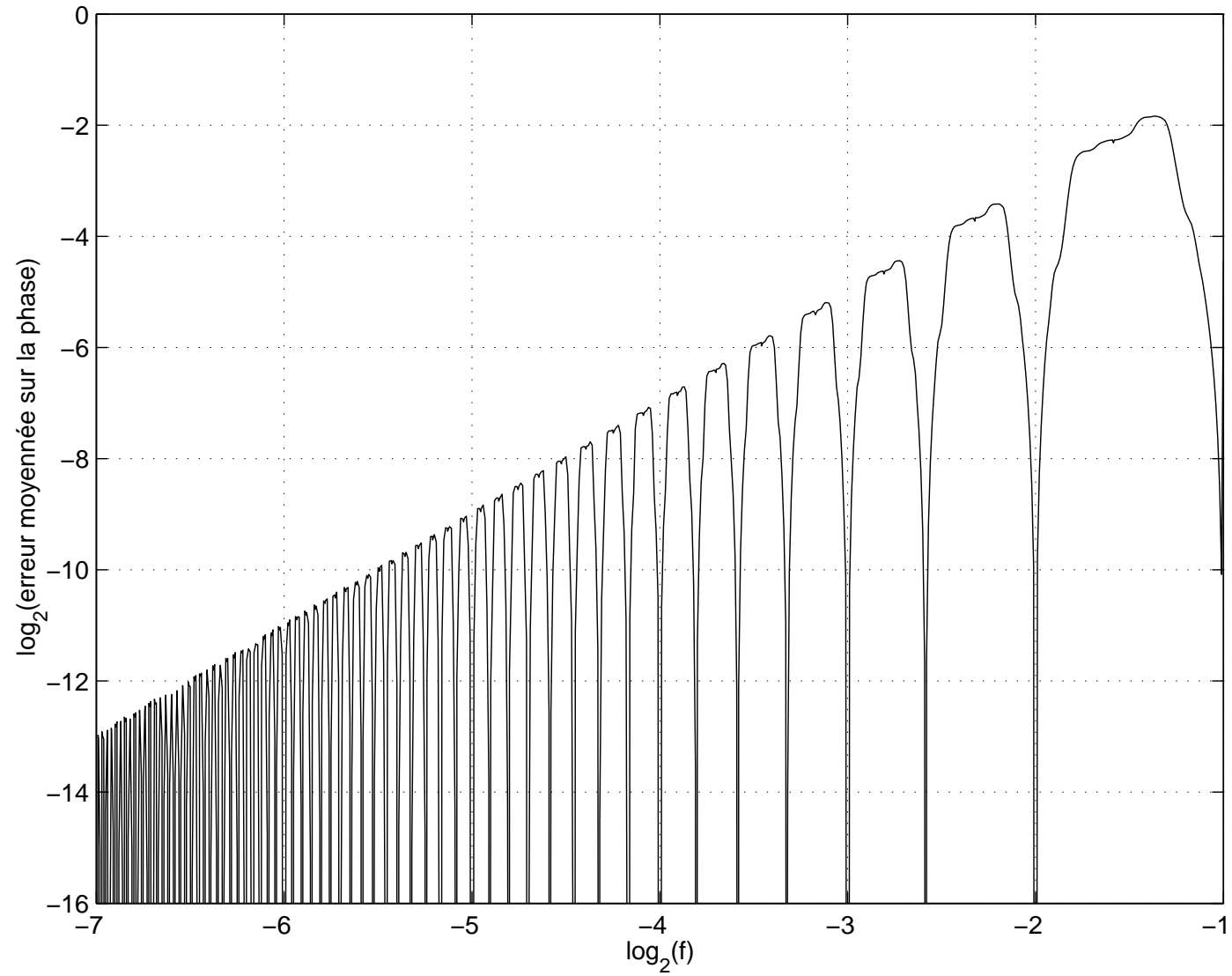
*moyenne par rapport à la phase*

$$\bar{e}(f) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} e(f, \varphi) d\varphi$$

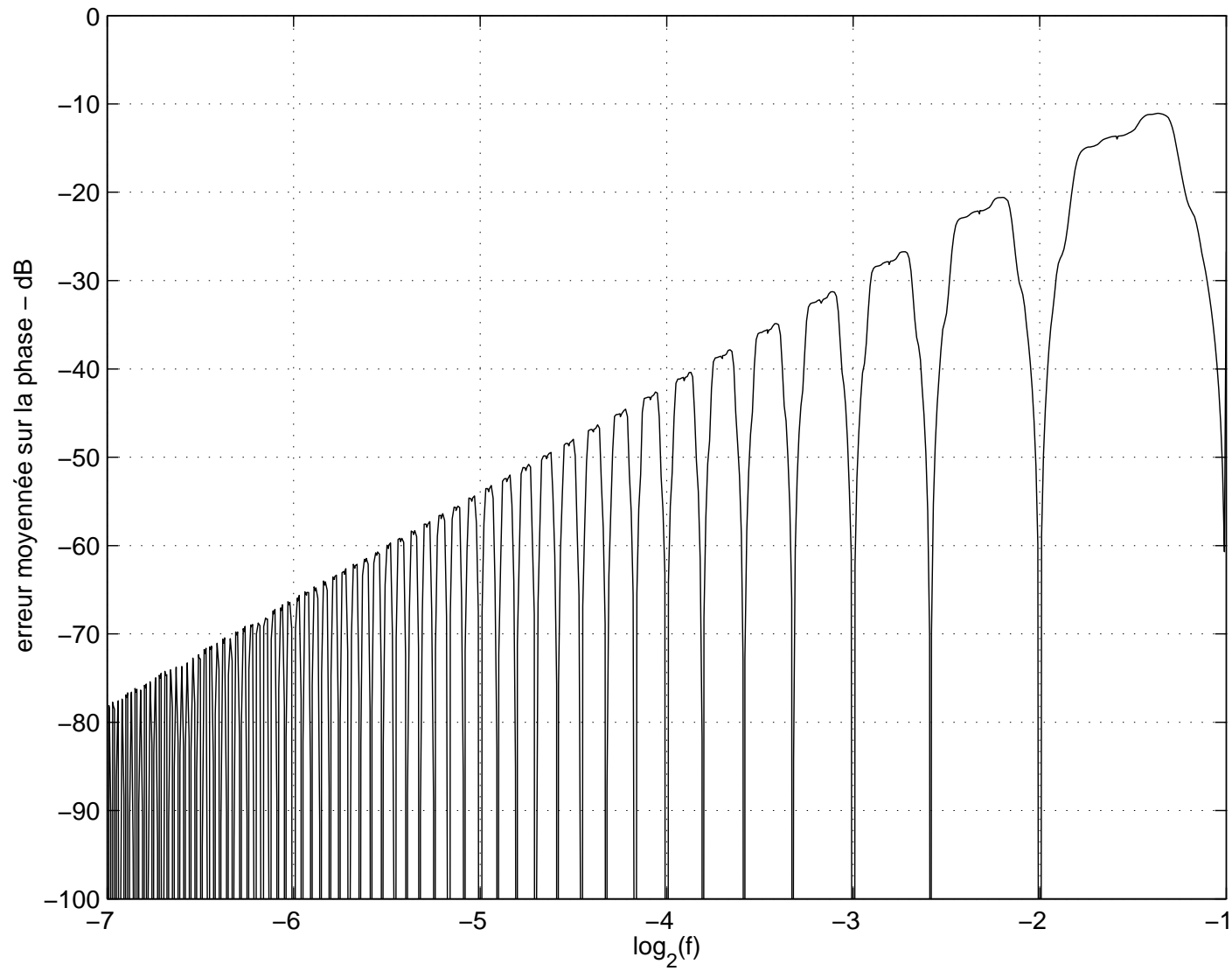
# erreur à phase nulle



# erreur moyennée sur la phase



en dB : -12 dB/octave



## caractéristiques intéressantes...

- l'erreur est *majorée* par une fonction proportionnelle au carré de la fréquence  $e(f, \varphi) \leq \lambda f^2$ .
- l'erreur s'annule pour les fréquences  $f = 1/2k$  avec  $k$  entier.
- à phase nulle il y a des pics d'erreur pour les fréquences  $f = 1/(2k + 1)$  et  $f = 2/(2k + 1)$ .
- en dehors de ces valeurs particulières, l'erreur à phase nulle est identique à l'erreur moyennée.

## Modélisation de la majoration — Hypothèses

*H1* — L'enveloppe des maxima est comprise entre le plus petit maximum et 1.

*H2* — Une unique itération de la boucle interne est suffisante pour calculer le premier mode de la décomposition.

*H3* — L'énergie de  $x_{f,\varphi}$  vaut  $N/2$ .

## Modélisation de la majoration — 1

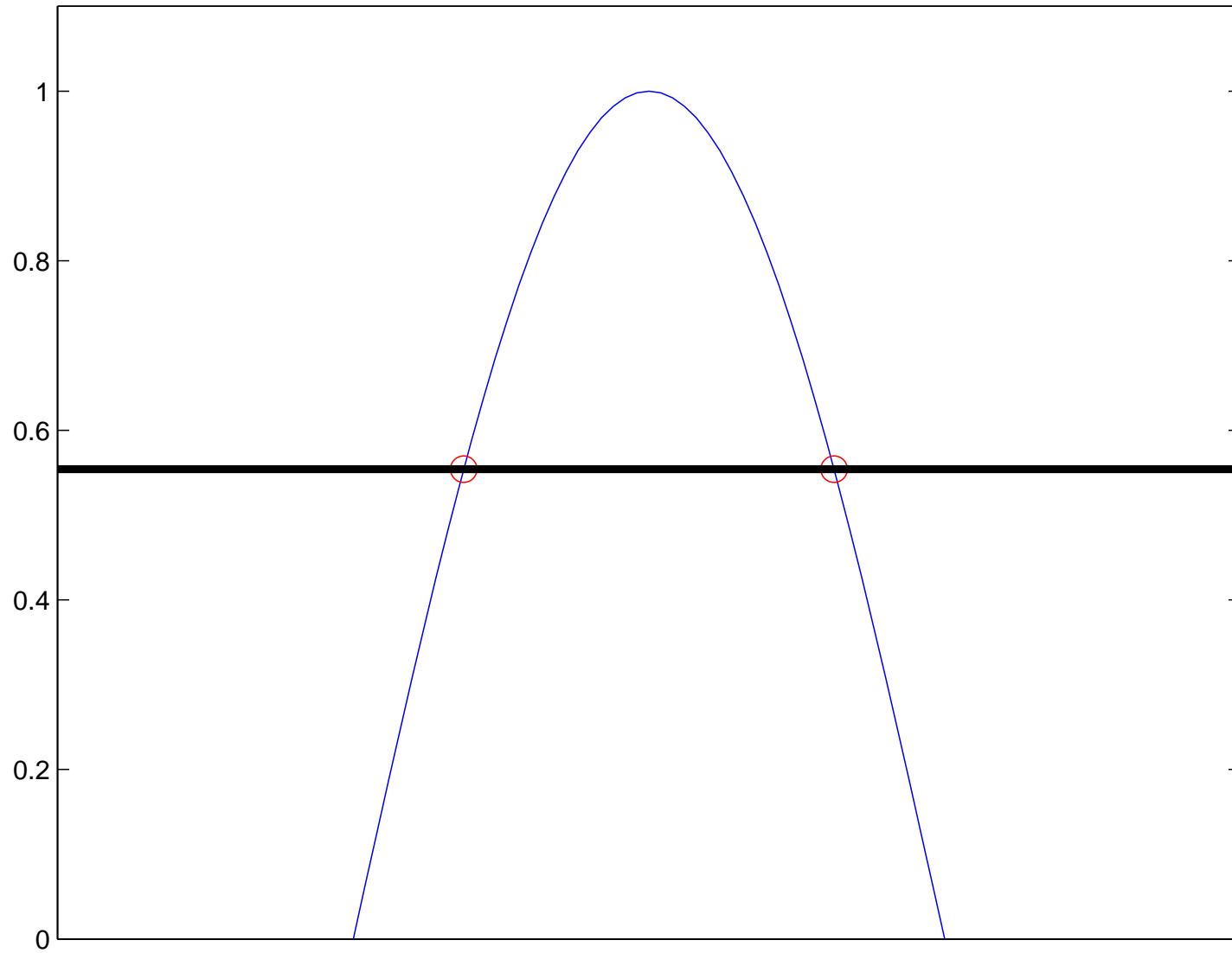
$$e(f, \varphi) = \left( \frac{\sum_{n=1}^N (x_{f,\varphi}[n] - d_1[n])^2}{\sum_{n=1}^N x_{f,\varphi}^2[n]} \right)^{1/2}$$

$$e(f, \varphi) = \left( \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N m_1^2[n] \right)^{1/2},$$

avec  $m_1$  la partie *oscillation lente* de  $x_{f,\varphi}$  :  $x_{f,\varphi} - m_1 = d_1$ .

$$|m_1| = \left| \frac{e_{min} + e_{max}}{2} \right| = \frac{|e_{max}| - |e_{min}|}{2} \leq \frac{\max(|e_{max}|) - \min(|e_{min}|)}{2}$$

## Modélisation de la majoration — 2



## Modélisation de la majoration — 3

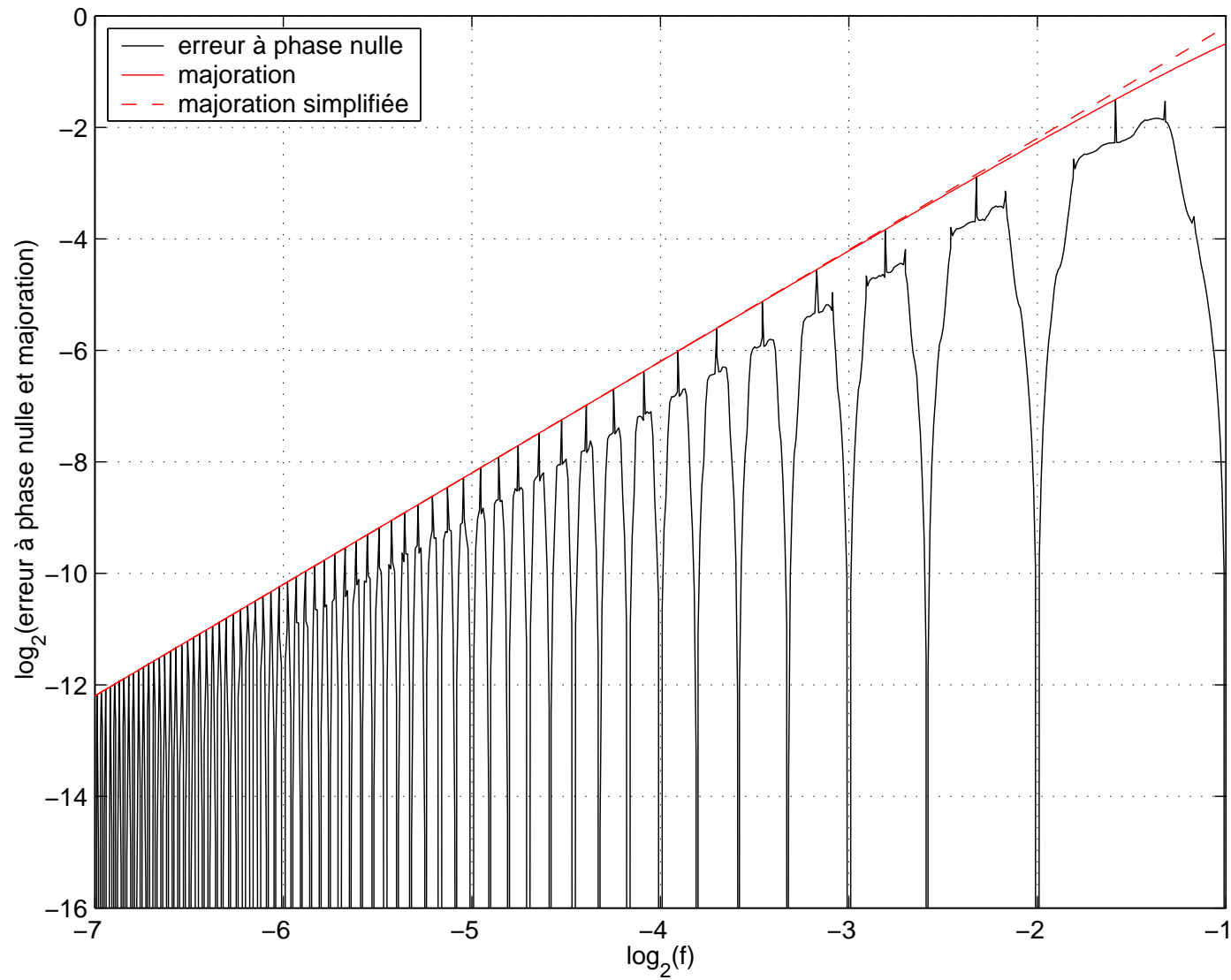
$$\cos(\pi f) \leq |e_{max}|, |e_{min}| \leq 1$$

$$|m_1| \leq \frac{1 - \cos(\pi f)}{2}$$

$$e(f, \varphi) \leq \frac{1 - \cos \pi f}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi^2 f^2}{2\sqrt{2}}$$

La majoration  $e(f, \varphi) \leq \frac{1 - \cos \pi f}{\sqrt{2}}$  est atteinte pour les fréquences  $f = 1/(2k + 1)$  à phase nulle.

# Modélisation de la majoration — 4



## Ordre de grandeur de l'erreur

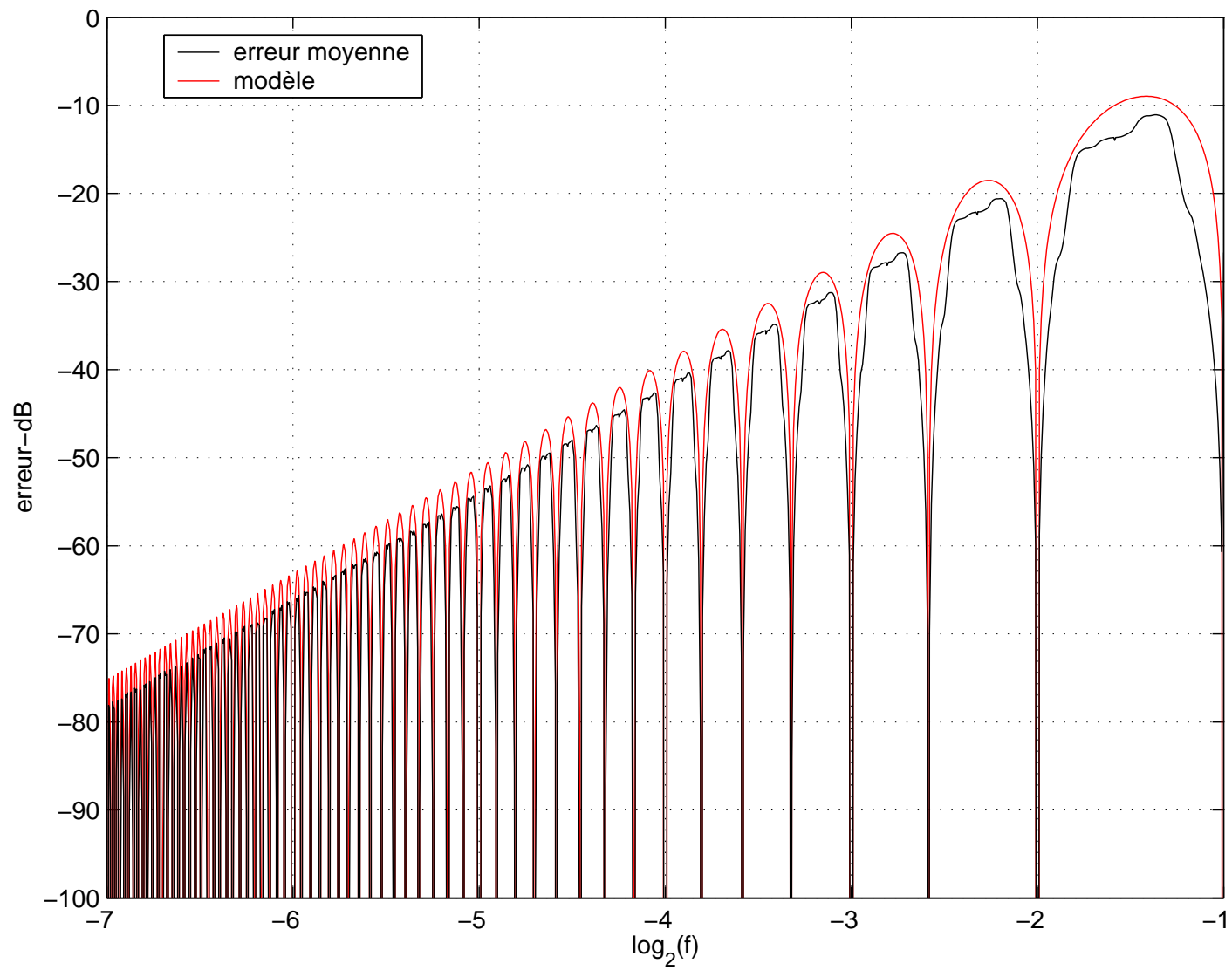
*Principe* — Évaluer la symétrie des enveloppes en comparant les valeurs de deux extrema consécutifs

$$\hat{e}(f) := \left( \mathbb{E}_\varphi \left\{ \left( \cos(2\pi f n + \varphi) + \cos(2\pi f n' + \varphi) \right)^2 \right\} \right)^{1/2}.$$

où  $n$  est la position d'un maximum et  $n'$  la position du minimum suivant.

*Résultat* — Modélisation par des paraboles sur les intervalles  $f \in [1/2(K + 1), 1/2K]$  :

$$\hat{e}(f) \approx \frac{\pi^2}{2\sqrt{3}} (2(K + 1)f - 1)(1 - 2Kf)$$



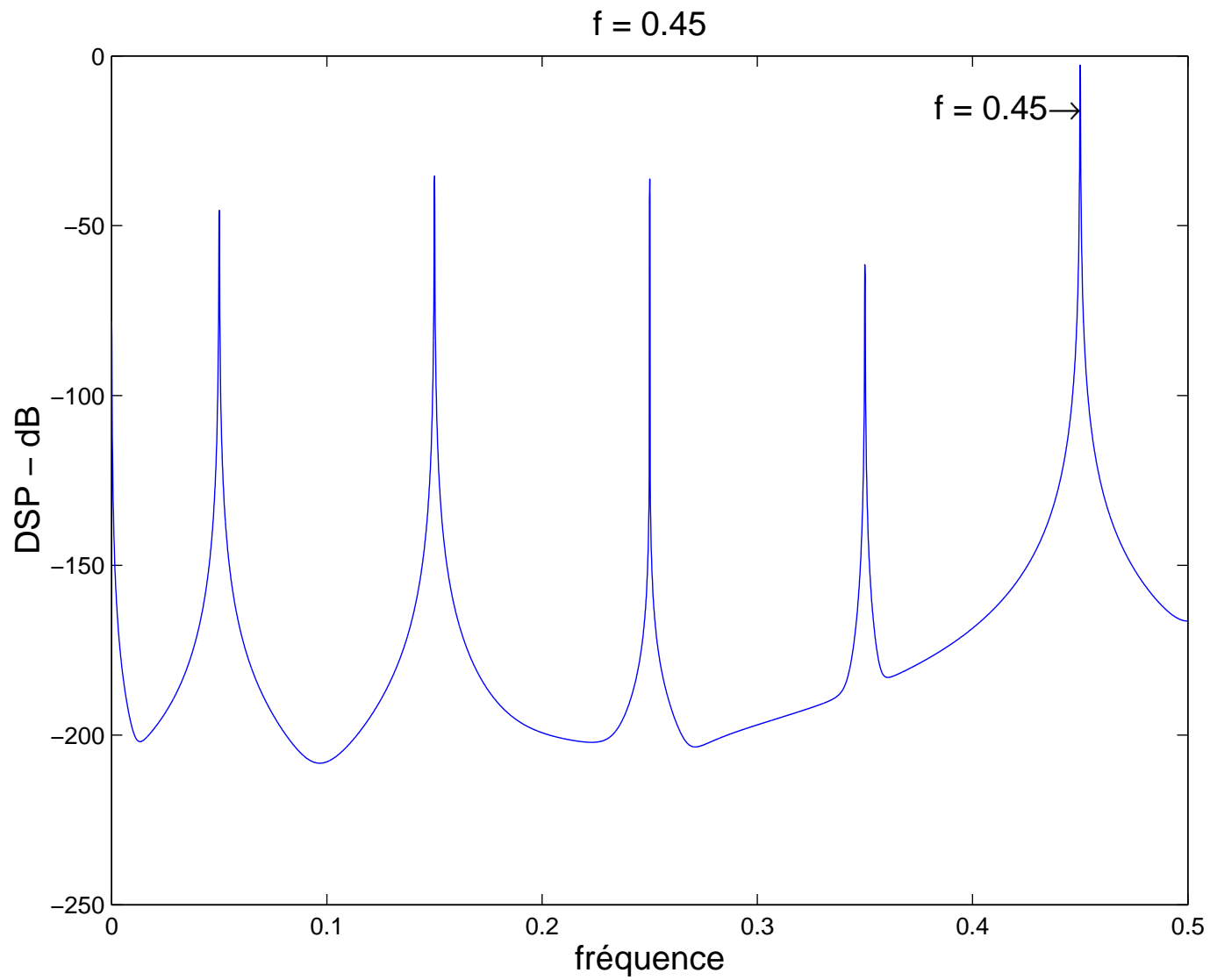
Répartition spectrale de l'erreur

## Répartition spectrale de l'erreur — 1

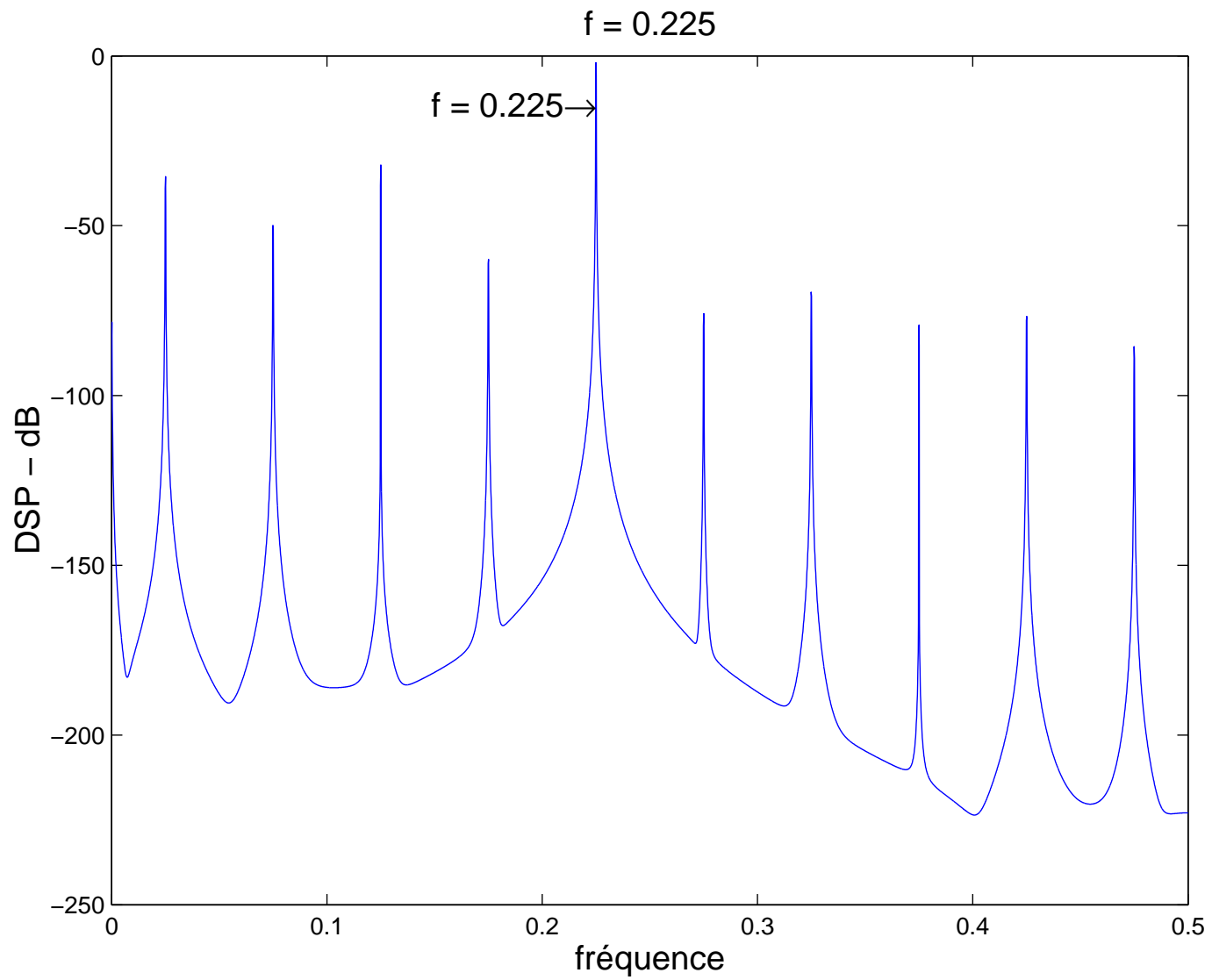
*Spectre du premier mode* — La différence entre le premier mode et le signal analysé se traduit spectralement par l'apparition de nouvelles fréquences.

*Propagation* — Pour calculer les modes suivants, on soustrait le premier mode au signal  
⇒ les fréquences apparaissant dans le premier mode se retrouvent dans les modes suivants.

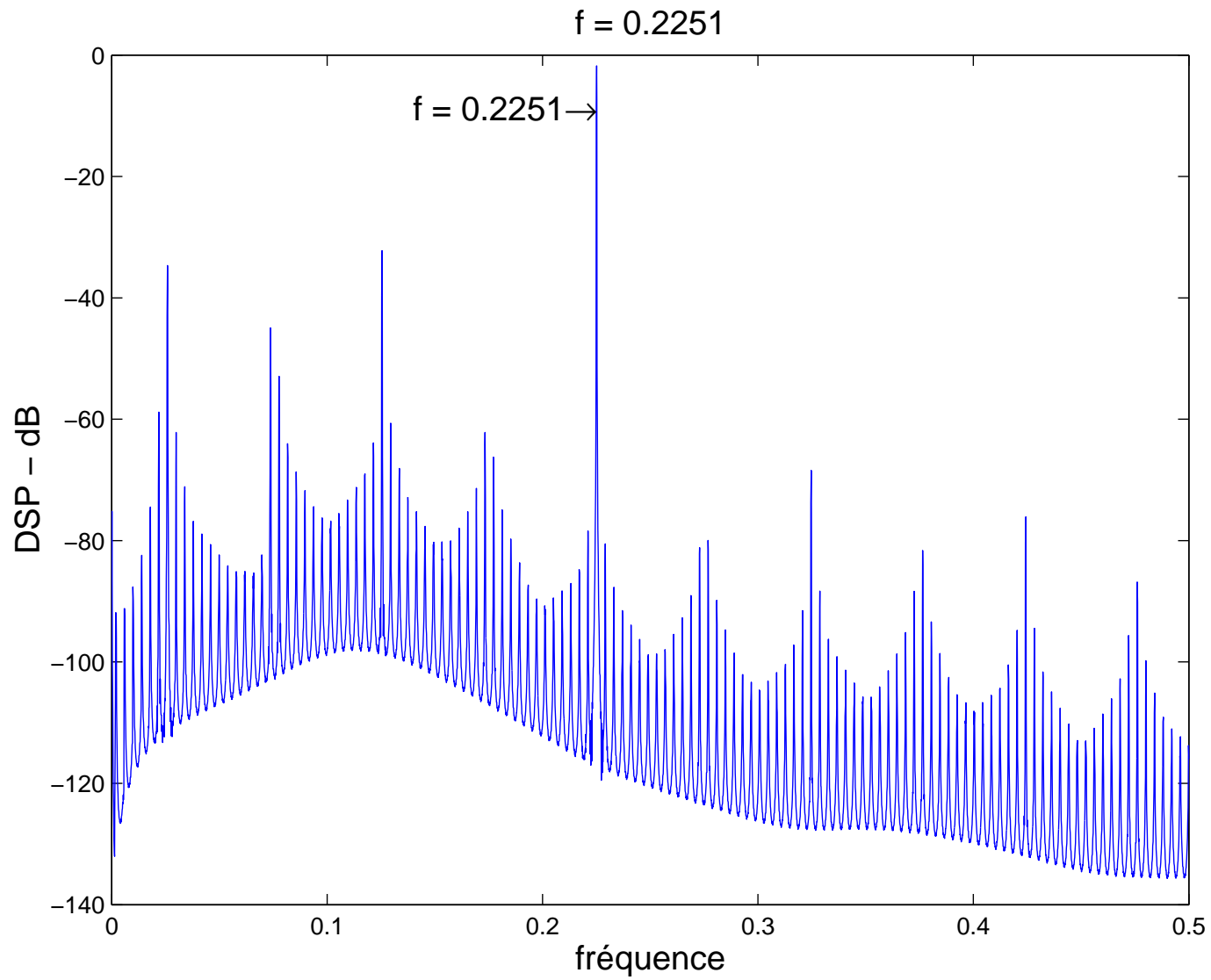
# Spectre du premier mode



# Spectre du premier mode



# Spectre du premier mode

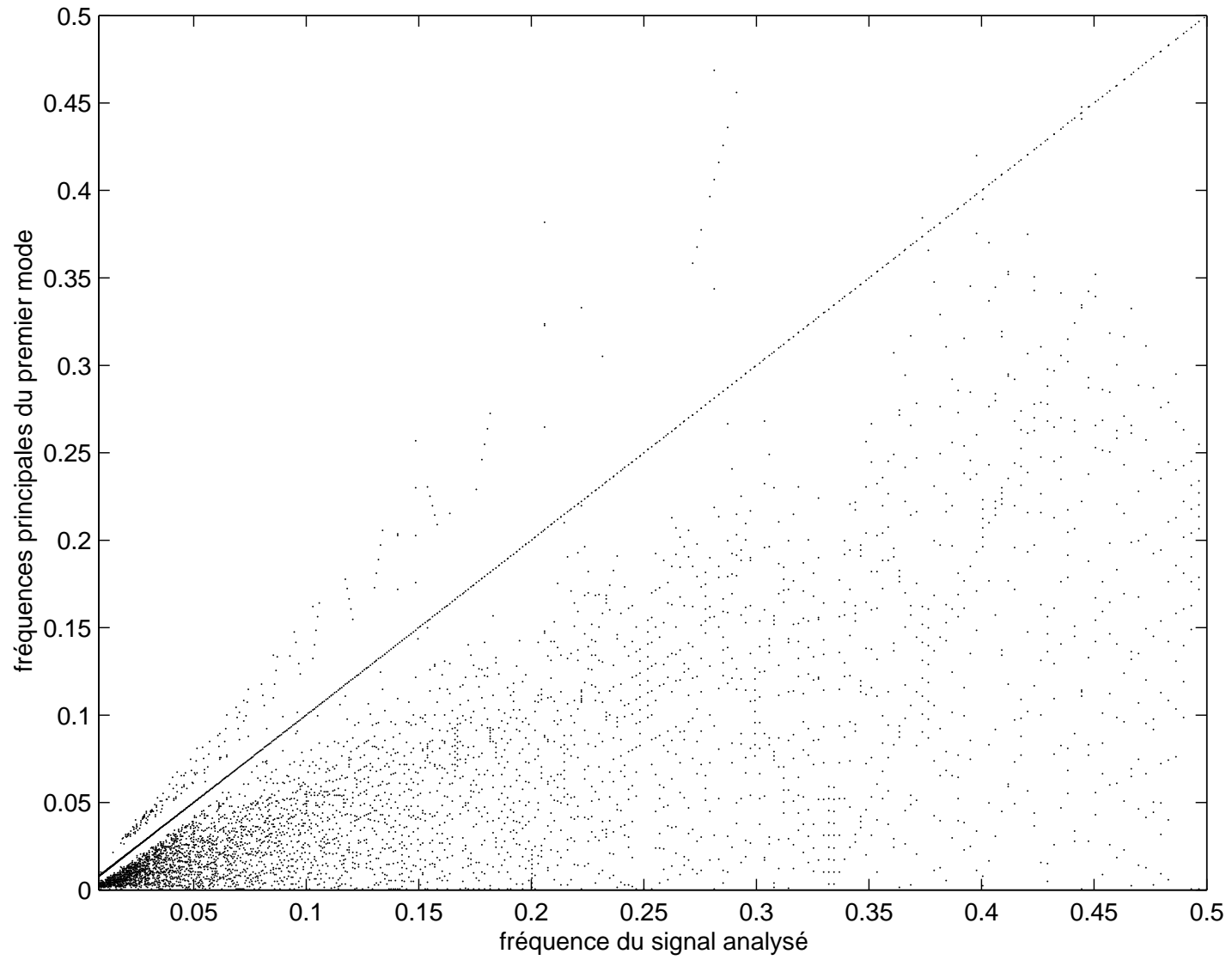


## Répartition spectrale de l'erreur — 2

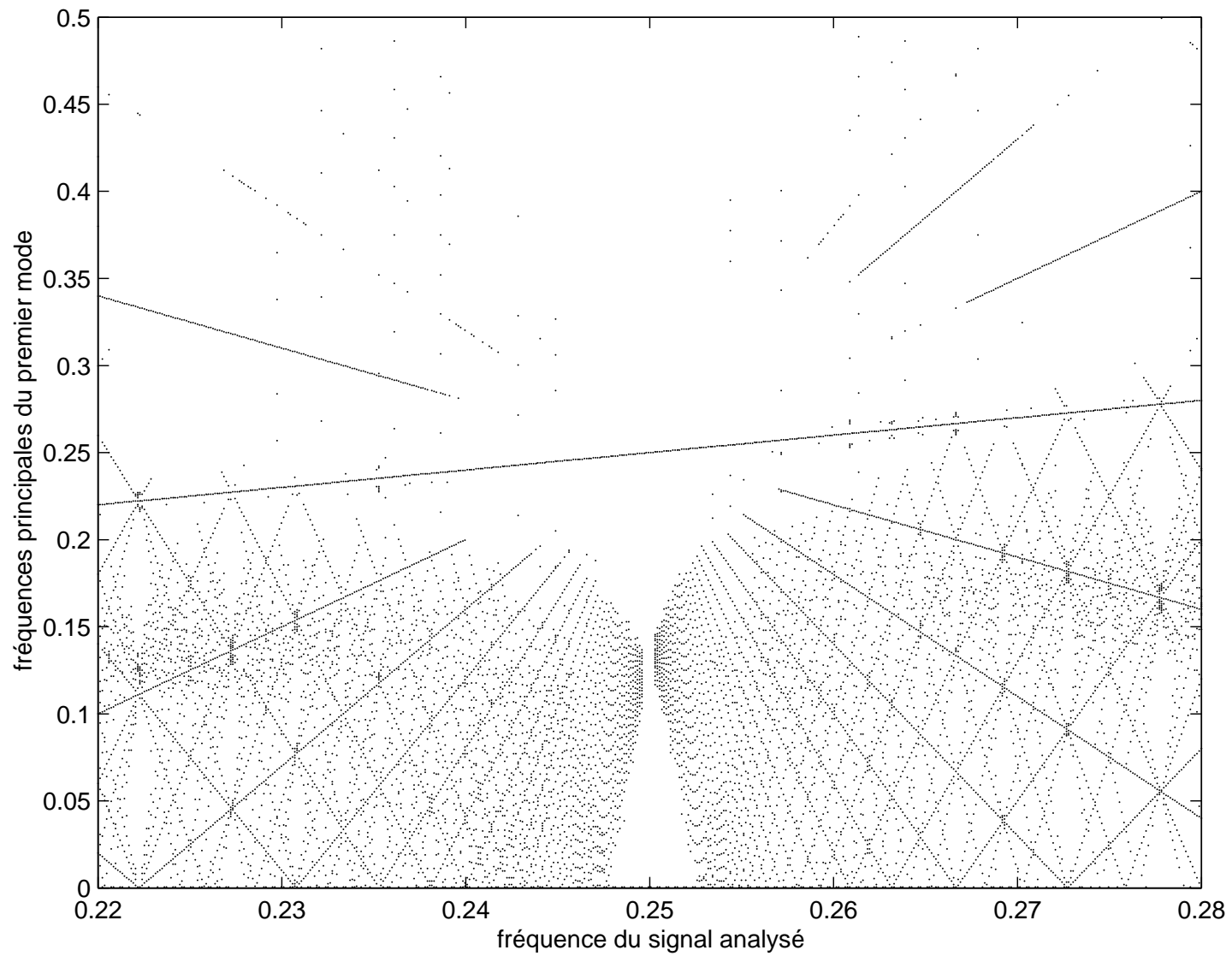
*Spectre discret* — L'erreur se manifeste par des nouveaux *pics* répartis de manière régulière.

*Position des pics* — Lien avec la fréquence du signal analysé ?

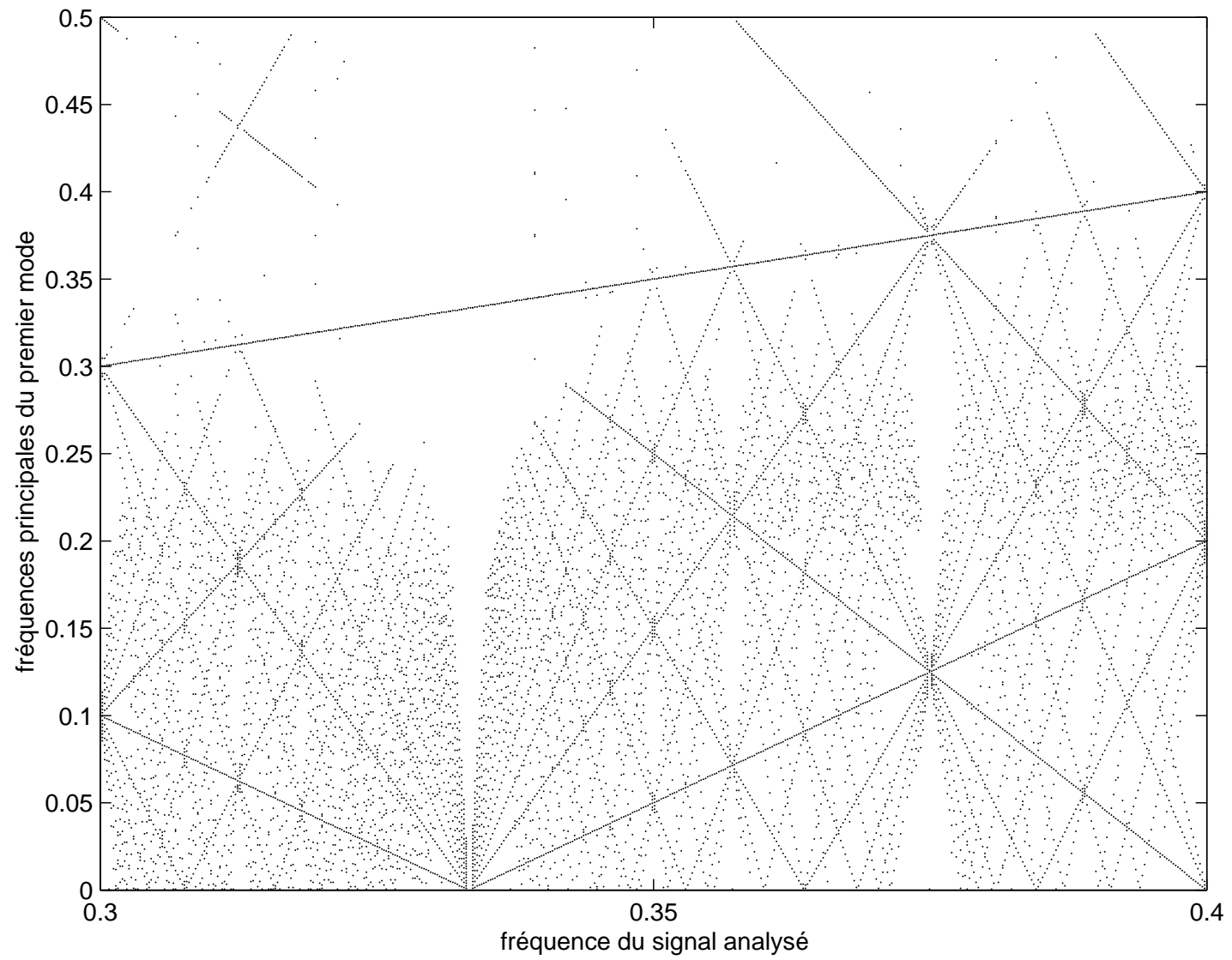
$$0 \leq f \leq 0.5$$



# $f$ autour de $1/4$



# $f$ autour de $1/3$



## Caractérisation des fréquences apparaissant

*Idée* — On peut les décrire par des relations affines en fonction de la fréquence du signal analysé.

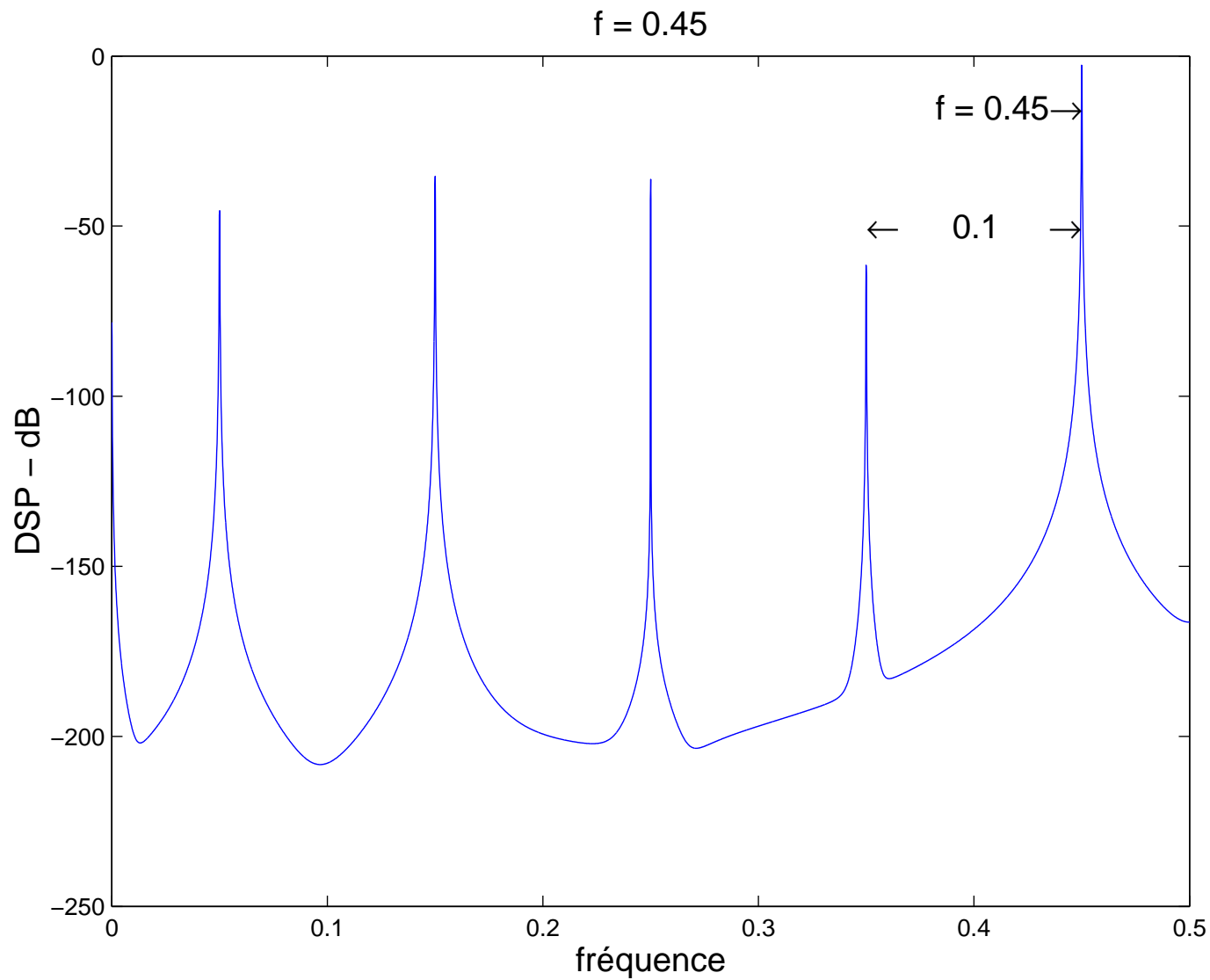
$$f' = \lambda f + \mu$$

*Résultats* — Les coefficients des droites sont *entiers* et de la forme :

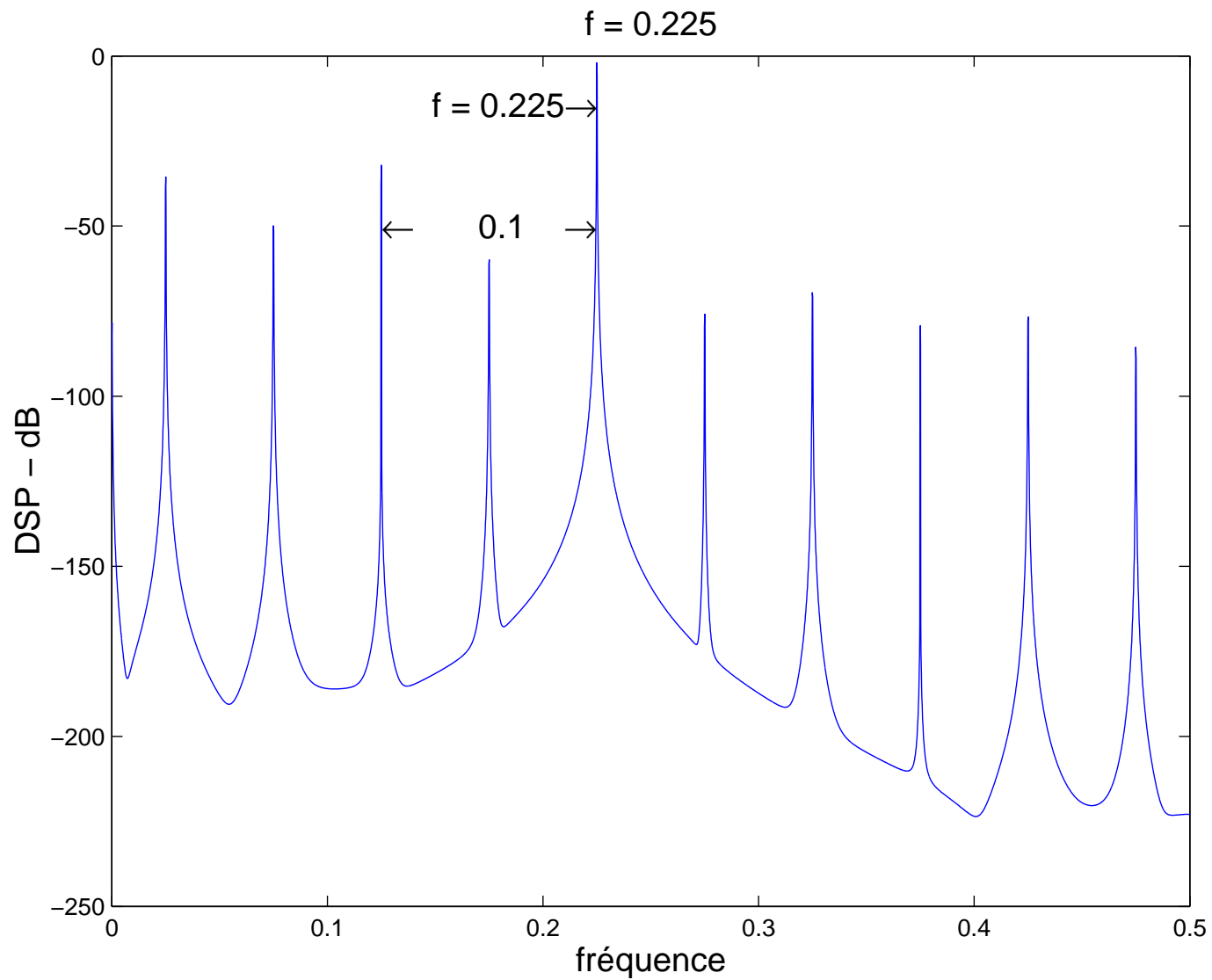
$$f' = \pm f + k + k'(1 - 2Kf), \text{ avec } k, k' \in \mathbb{Z}.$$

et  $K \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{2K+1} \leq f \leq \frac{1}{2K-1}$ .

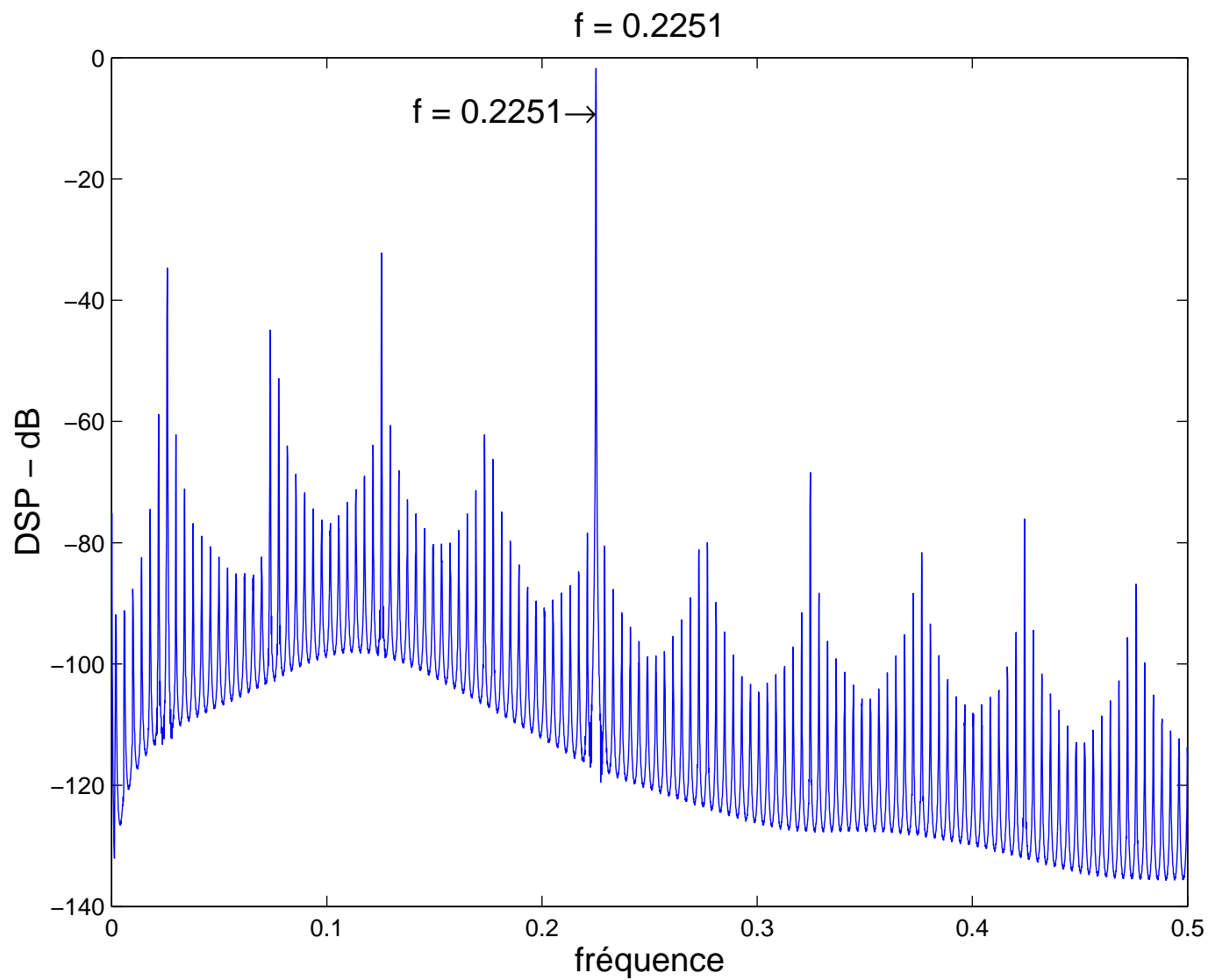
$$f = 0.45, K = 1, |2Kf - 1| = 0.1$$



$$f = 0.225, K = 2, |2Kf - 1| = 0.1$$



$$f = 0.2251, K = 2, |2Kf - 1| = 0.0996$$



RÉOLUTION

## Résolution — 1

*Signal* —  $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$

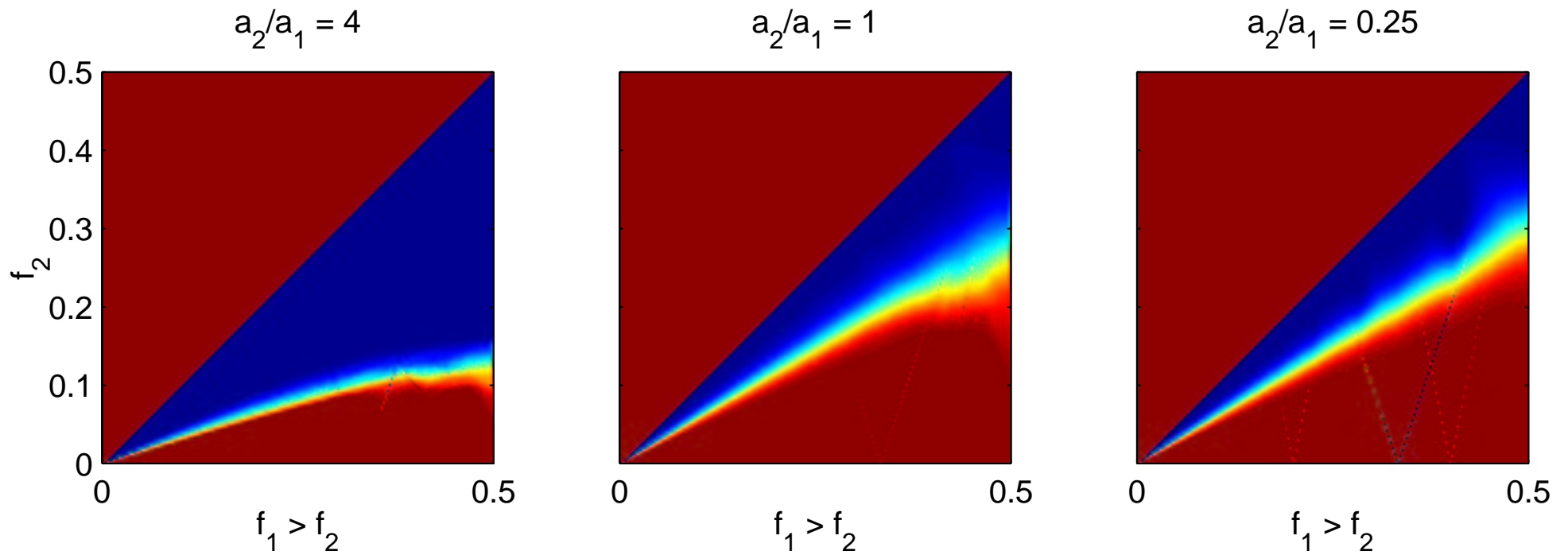
avec  $x_1[n] = a_1 \cos(2\pi f_1 n)$ ,  $x_2[n] = a_2 \cos(2\pi f_2 n + \varphi)$  et  $f_1 > f_2$ .

*Séparation* — ssi 1<sup>er</sup> mode =  $x_1$  et 2<sup>ème</sup> mode =  $x_2$

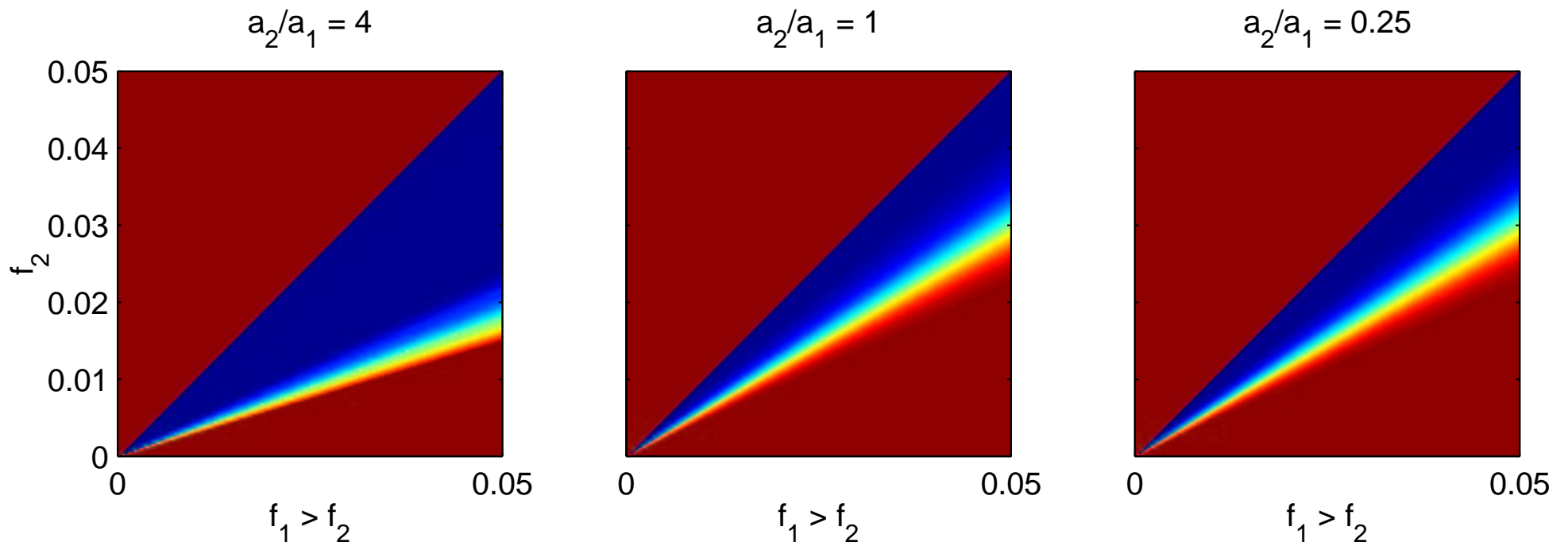
*Critère* — basé sur la composante de Fourier correspondant à la fréquence  $f_2$  du 1<sup>er</sup> mode.

$$\frac{\left| \sum_{n=1}^N d_1[n] e^{2i\pi f_2 n} \right|^2}{\left| \sum_{n=1}^N x[n] e^{2i\pi f_2 n} \right|^2}$$

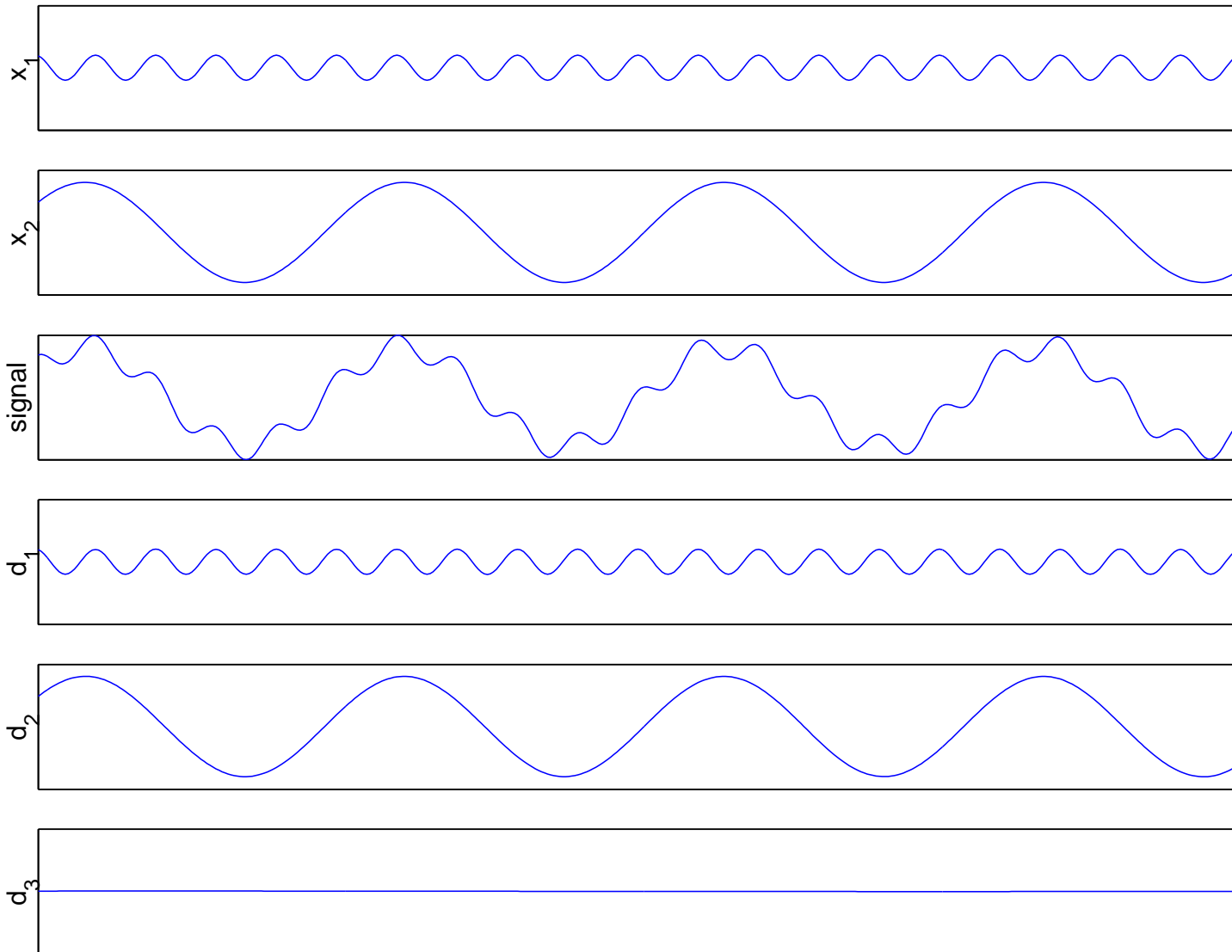
# Séparation en fonction de $f_2 \leq f_1 \leq 0.5$



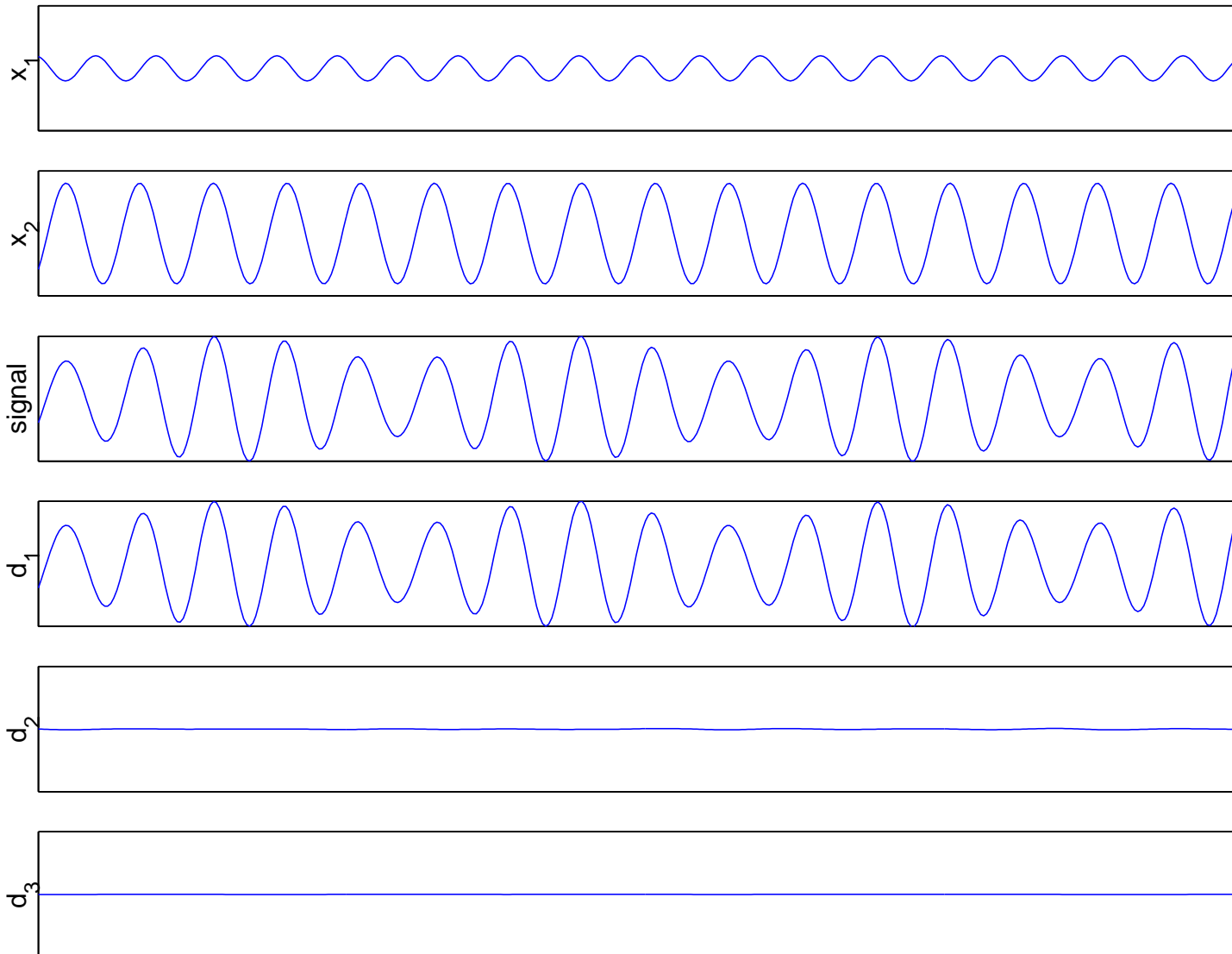
# Séparation en fonction de $f_2 \leq f_1 \leq 0.05$



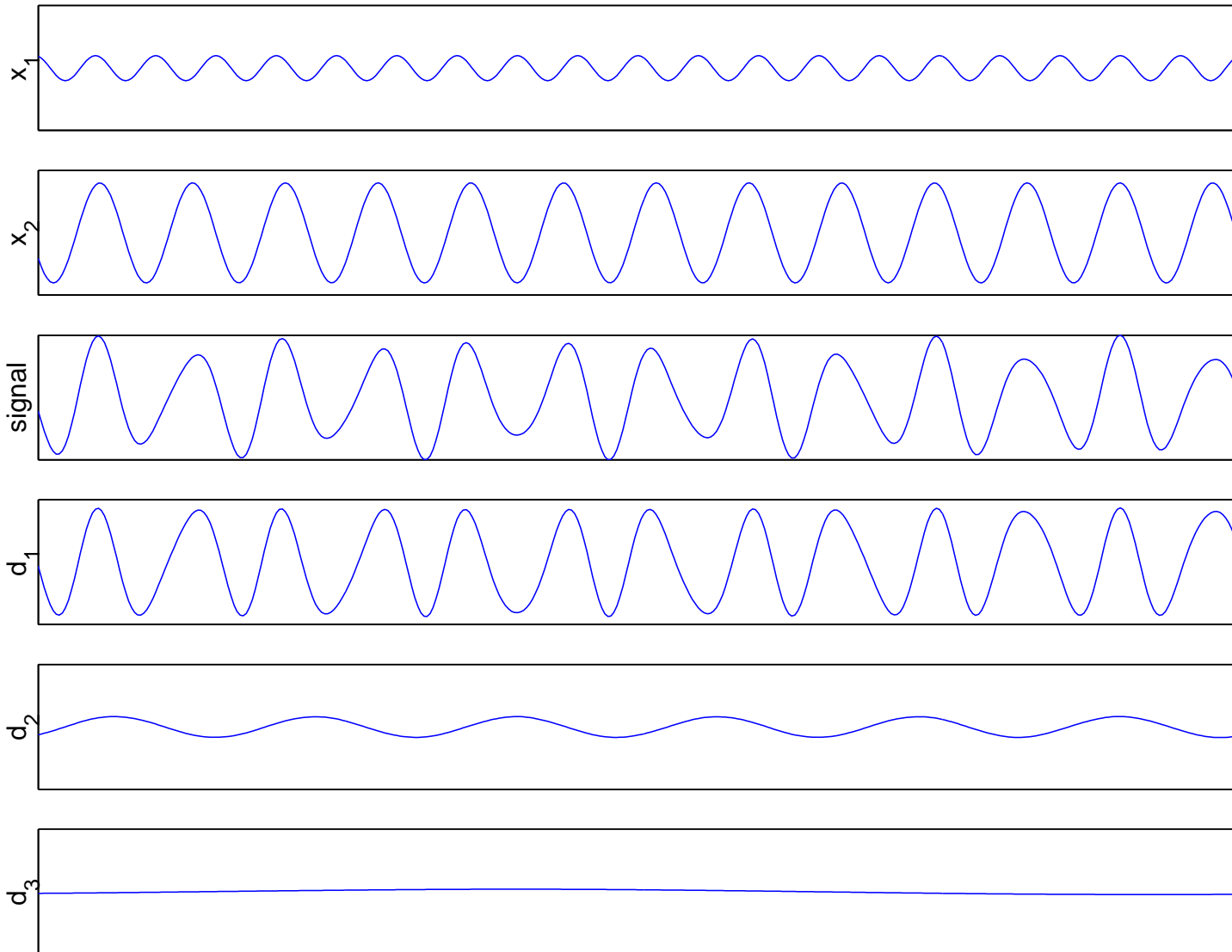
signal = 2 componentes sinusoidales



signal = 1 composante AM-FM



entre les deux...



## Résolution — 2

### Deux comportements

1.  **$f_1$  proche de  $f_2$**  : la DME considère le signal comme modulé en amplitude et en fréquence avec

$$|a_1 - a_2| \leq \text{amplitude} \leq a_1 + a_2$$

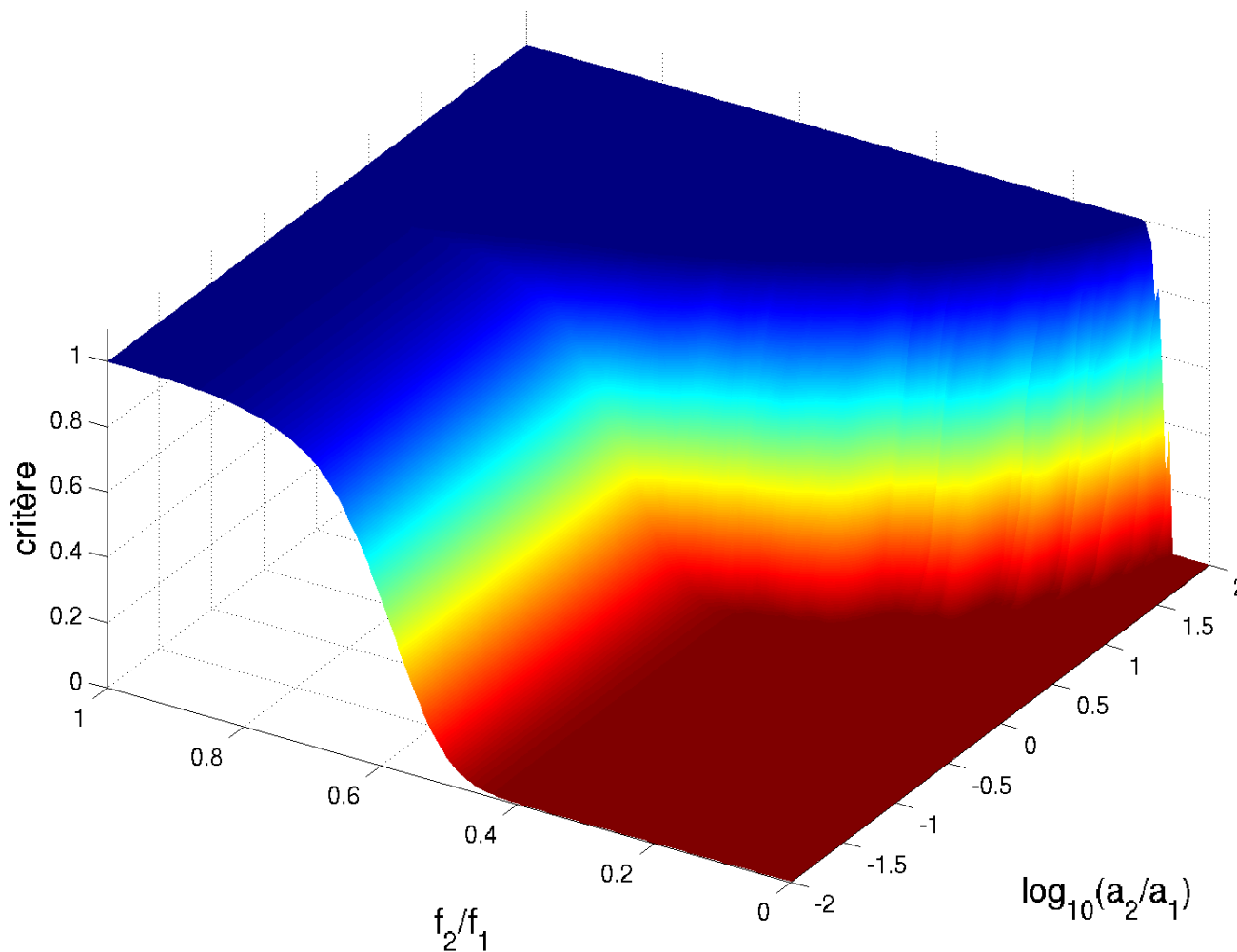
$$\left| \frac{a_1 f_1 - a_2 f_2}{a_1 - a_2} \right| \leq \text{fréquence} \leq \frac{a_1 f_1 + a_2 f_2}{a_1 + a_2}$$

2.  **$f_1$  moins proche de  $f_2$**  : la DME considère le signal comme effectivement la somme de deux composantes sinusoïdales.

### Deux domaines

1.  **$f \lesssim 0.25$**  : pour un rapport d'amplitudes donné, le résultat ne dépend que du rapport  $f_1/f_2$ .
2.  **$f \gtrsim 0.25$**  : l'influence de l'échantillonnage complique le résultat.

# Séparation en fonction de $f_2/f_1$ et $a_2/a_1$



## Résolution — 3

*Pour un rapport d'amplitudes fixé* — L'évolution du critère de séparation en fonction du rapport de fréquences est d'allure sigmoïde.

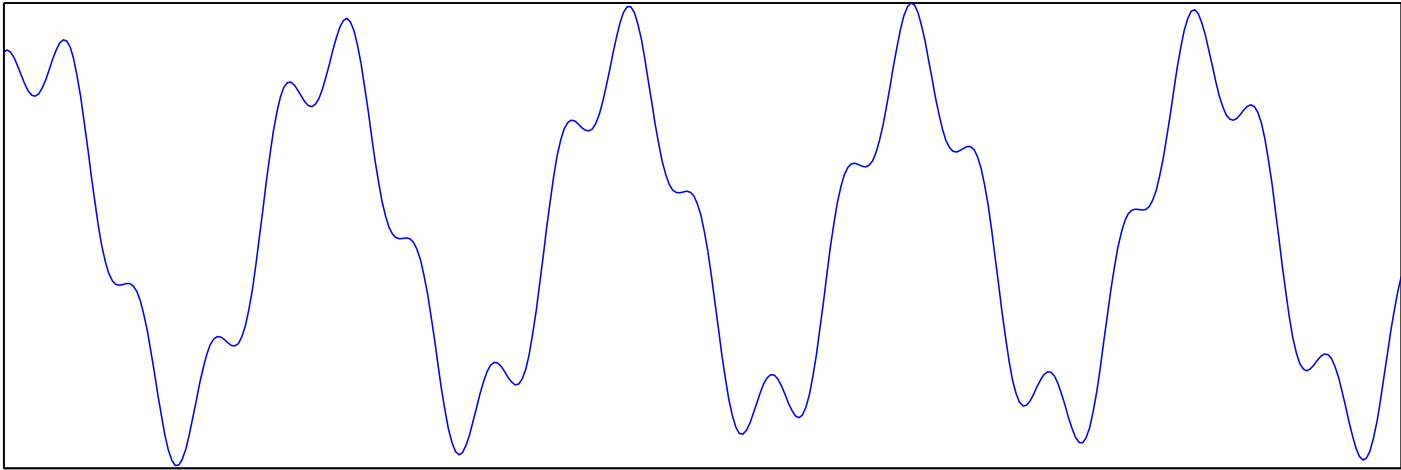
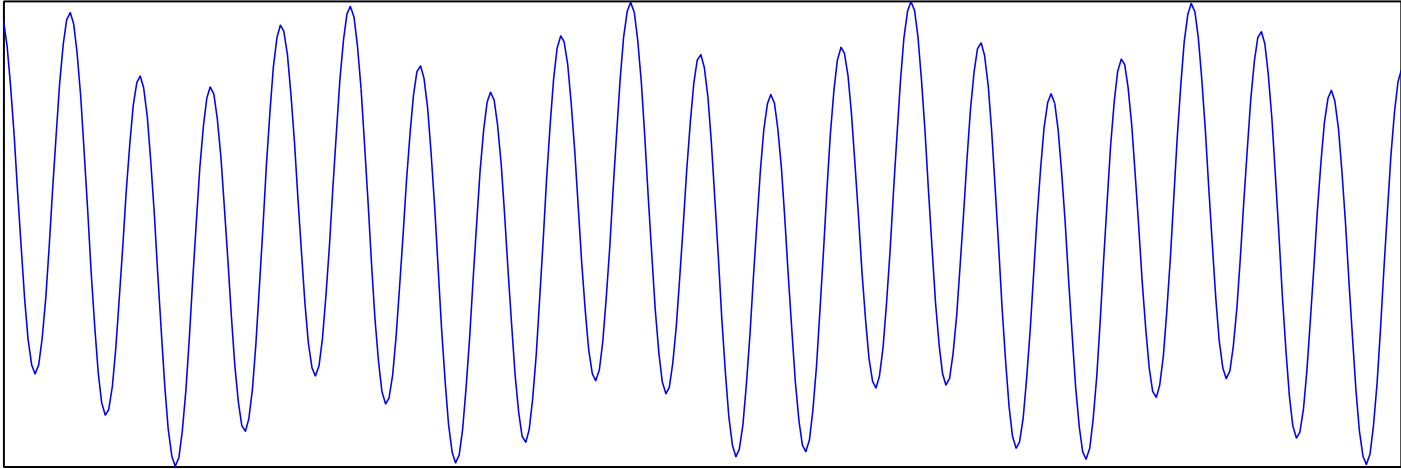
On caractérise la position du saut par un rapport de fréquences critique  $f_2/f_1 = r(a_2/a_1)$ .

*Haute fréquence prépondérante* — Le rapport de fréquences critique est indépendant du rapport d'amplitudes :

$$r(a_2/a_1) \approx 0.6 \quad \text{pour} \quad a_2/a_1 \lesssim 0.8.$$

*Basse fréquence prépondérante* — Le rapport de fréquences critique est lié au rapport d'amplitudes par

$$r(a_2/a_1) \sim (a_2/a_1)^{-1/2} \quad \text{pour} \quad a_2/a_1 \gtrsim 0.8.$$



## En résumé...

### *Échantillonnage*

- décroissance de l'erreur proportionnelle à  $f^2$  : -12 dB/octave
- apparition de fréquences discrètes réparties régulièrement dans le spectre

### *Résolution*

- deux interprétations : 2 composantes *ou* 1 composante modulée AM–FM
- dans de bonnes conditions d'échantillonnage : essentiellement 2 paramètres  $a_1/a_2$  et  $f_1/f_2$
- rôles dissymétriques des deux composantes : si la haute fréquence est prépondérante  $\rightarrow$  1 seul paramètre  $f_1/f_2$ 
  - + “séparation ssi  $f_2 \lesssim f_1/2$ ” cohérent avec “banc de filtres quasi-dyadique équivalent”

Références, pré-tirages, logiciels, démos

`http ://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/`