Prédiction linéaire

1 Principe d'orthogonalité

On considère un processus aléatoire à temps discret $\{z[n], n \in \mathbb{Z}\}$, supposé stationnaire et de fonction de corrélation $r_z[k] = \mathbb{E}\{z[n]z[n \pm k]\}$. Sur la base d'un certain nombre d'observations de ce processus, on souhaite alors élaborer, par combinaison linéaire de celles-ci, la "meilleure" estimée d'une quantité désirée, au sens d'une erreur de puissance minimale.

Plus précisément, on note d la quantité désirée et $\{z_m, m = 0, 1, \dots M-1\}$ les observations. Toute estimée linéaire $\hat{d}$ de d constructible sur la base de ces M observations prend alors la forme :

$$\hat{d} = a_0\, z_0 + a_1\, z_1 + \dots a_{M-1}\, z_{M-1},$$

et l'erreur associée s'écrit $e = d - \hat{d}$. La puissance de cette dernière, qui est une fonction des $\{a_m, m = 0, 1, \dots M-1\}$, vaut $P = \mathbb{E}\{e^2\}$ et sera minimisée si

$$\frac{\partial P}{\partial a_m} = 0, m = 0, 1, \dots M-1.$$

1. montrer que le meilleur jeu des coefficients $\{a_m, m = 0, 1, \dots M-1\}$ est obtenu comme solution du système linéaire :

$$\mathbb{E}\left\{[d - (a_0\, z_0 + a_1\, z_1 + \dots a_{M-1}\, z_{M-1})]\, z_m\right\} = 0;\ m = 0, 1, \dots M-1.$$

2. interprétation géométrique ?

2 Prédiction linéaire

On particularise le cadre général précédent au cas où les M observations sont de la forme $z_m = z[n-m]$ et où $d := d_l = z[n+l]$, avec $l \geq 1$ (prédiction linéaire à l pas sur la base de l'observation d'un passé d'horizon M).

1. montrer que le système linéaire devient alors :

$$a_0 r_z[m] + a_1 r_z[m-1] + \dots a_{M-1} r_z[m-M+1] = r_z[m+l];\ m = 0, 1, \dots M-1.$$

2. en déduire que la puissancce d'erreur minimale s'écrit :

$$P = r_z[0] - a_0 r_z[l] - a_1 r_z[l+1] - \dots a_{M-1} r_z[l+M-1].$$

3. donner la valeur du coefficient optimal a_0 et la puissance de l'erreur associée P_l dans le cas où $M = 1$.

4. même chose dans le cas où $M = 2$.

3 Exemples

On considère un bruit blanc à temps discret normalisé, i.e., une suite de variables aléatoires i.i.d. $\{e[n], n \in \mathbb{Z}\}$ de variance unité telles que $\mathbb{E}\{e[n]e[m]\} = \delta[n-m]$, où $\delta[n]$ est le symbole de Kronecker (valant 1 si $n = 0$ et 0 sinon).

3.1

On construit alors le processus $\{y[n], n \in \mathbb{Z}\}$ défini par

$$y[n] = e[n] + b\, e[n-N],$$

avec $N \geq 1$.

1. de quel type de processus s'agit-il ?
2. à quelle condition sur b est-il stable ?
3. montrer que sa fonction de corrélation $r_y[k] = \mathbb{E}\{y[n]y[n \pm k]\}$ s'écrit :

   $$r_y[k] = (1 + b^2)\, \delta[k] + b\, \delta[k-N] + b\, \delta[k+N]$$

   (et en déduire la forme de sa densité spectrale de puissance).
4. donner la valeur du coefficient optimal a_0 et la puissance de l'erreur associée P_l dans le cas où $M = 1$.
5. discuter en fonction de l'horizon de prédiction l.

3.2

On repart du bruit blanc $e[n]$ et on construit le processus $\{x[n], n \in \mathbb{Z}\}$ défini par

$$x[n] = a\, x[n-1] + e[n].$$

1. de quel type de processus s'agit-il ?
2. à quelle condition sur a est-il stable ?
3. montrer que sa fonction de corrélation $r_x[k] = \mathbb{E}\{x[n]x[n \pm k]\}$ s'écrit :

   $$r_x[k] = \frac{1}{1-a^2}\, a^{|k|}$$

   (et en déduire la forme de sa densité spectrale de puissance).
4. donner la valeur du coefficient optimal a_0 et la puissance de l'erreur associée P_l dans le cas où $M = 1$.
5. discuter en fonction de l'horizon de prédiction l.
6. même chose dans le cas où $M = 2$.