Détection de saut de moyenne

On s'intéresse dans ce problème à la détection séquentielle d'une rupture dans un signal stationnaire. L'observation $\mathbf{Y} = \{y[1], y[2], \ldots, y[N]\}$, qui sera supposée formée de N échantillons indépendants, est alors modélisée par le schéma à deux hypothèses suivant :

- H_0 : les N échantillons $y[n]$ sont tous de même loi de densité de probabilité $p_0(y[n])$.
- H_1 : seuls les $(r-1)$ premiers échantillons sont de loi $p_0(y[n])$, les suivants étant de loi $p_1(y[n])$.

On se propose dans un premier temps de détecter s'il y a rupture sur l'intervalle d'observation et dans un deuxième temps d'estimer l'instant de rupture (test de Page-Hinkley).

1. **Détection bloc**. On suppose connu l'instant r de la rupture éventuelle.

   (a) Donner les lois $p(\mathbf{Y}|H_0)$ et $p(\mathbf{Y}|H_1)$.

   (b) En déduire le rapport de vraisemblance et la structure du test permettant de décider s'il y a eu ou non rupture en r.

   (c) Particulariser ce résultat au cas d'une détection de *saut de moyenne*, lorsque les lois p_0 et p_1 sont gaussiennes (respectivement $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma)$ et $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma)$, avec $\mu_1 > \mu_0$). On exprimera le résultat à l'aide de

   $$S(N, r) = (\mu_1 - \mu_0) \sum_{n=r}^{N} \left(y[n] - \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} \right).$$

2. **Détection séquentielle et estimation**. L'instant r de la rupture éventuelle est maintenant supposé inconnu et remplacé par son estimation à maximum de vraisemblance.

   (a) Justifier que la procédure de détection revient alors à comparer à un seuil la quantité

   $$\max_{1 \leq r \leq N} S(N, r).$$

   (b) En donner une structure séquentielle (c'est-à-dire permettant d'opérer avec un nombre N d'échantillons croissant) équivalente en remarquant que

   $$\max_{1 \leq r \leq N} S(N, r) = S(N, 1) - \min_{1 \leq k \leq N} S(k, 1).$$

   (c) Donner l'allure du comportement du test et interpréter.