Filtrage de Wiener

On considère un processus à temps continu $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$, réel, stationnaire, centré et de fonction de corrélation $R_x(\tau) := \mathbb{E}\{x(t)x(t \pm \tau)\}$. On suppose que l'on dispose d'une observation $\{y(t), t \in \mathbb{R}\}$, dépendante de $x(t)$, et l'on souhaite élaborer à partir de celle-ci une estimée $\hat{d}(t)$ d'une quantité désirée $d(t)$ liée à $x(t)$.

1 Filtrage optimal

On se restreint dans ce qui suit à la classe des estimées linéaires non causales telles que

$$\hat{d}(t) = (\mathbf{H}y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)\, y(s)\, ds.$$

1. Appliquer le principe d'orthogonalité et exprimer la fonction de transfert $H_*(f)$ du filtre optimal (i.e., à erreur quadratique moyenne minimale) en fonction de la densité spectrale $S_y(f)$ et de l'inter-spectre $S_{d,y}(f)$, transformées de Fourier respectives de $R_y(\tau)$ et de la fonction d'inter-corrélation $R_{d,y}(\tau) := \mathbb{E}\{d(t)y(t \pm \tau)\}$.
2. Donner l'expression de l'erreur associée.

2 Filtrage inverse

On spécifie la classe des observations au modèle $y(t) = (\mathbf{G}x)(t) + b(t)$, où

$$(\mathbf{G}x)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)\, x(s)\, ds$$

est la sortie d'un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle ("fonction d'appareil") est supposée connue, et $b(t)$ un bruit additif, stationnaire, centré et de densité spectrale $S_b(f)$.

1. Expliciter dans ce cas la forme générale de $H_*(f)$.
2. Écrire la solution dans le cas du filtrage inverse où $d(t) = x(t)$.
3. Que devient la solution dans le cas sans bruit où $S_b(f) = 0$?
4. Même question dans le cas du filtrage simple où $G(f) = 1$.
5. Interpréter.