

Représentations temps-fréquence

des signaux non stationnaires (*)

Time-frequency representations for non-stationary signals



Patrick FLANDRIN

Laboratoire de Traitement du Signal, URA 346 CNRS, ICPI, 25, rue du Plat, 69288 LYON CEDEX 02.

Ingénieur (ICPI, Lyon, 1978), Docteur-Ingénieur (INPG, Grenoble, 1982) et Docteur d'Etat ès Sciences Physiques (INPG, Grenoble, 1987), Patrick Flandrin est actuellement Chargé de Recherche au CNRS et responsable du Laboratoire de Traitement du Signal de l'ICPI Lyon. Domaines de recherches : représentation et analyse des signaux non stationnaires, méthodes temps-fréquence, méthodes temps-échelle.

RÉSUMÉ

L'analyse spectrale des signaux non stationnaires nécessite de mettre en œuvre des outils spécifiques permettant de décrire une évolution temporelle de caractéristiques fréquentielles. De tels outils, appelés représentations temps-fréquence, peuvent être définis de manière objective en partant de contraintes imposées *a priori*. Si l'on se place dans un cadre aléatoire et non paramétrique, deux grandes classes d'approches sont offertes, suivant que l'on privilégie l'existence d'une décomposition doublement orthogonale, ou que l'on cherche à préserver le concept usuel de fréquence. Après avoir établi les définitions correspondantes et souligné l'importance de la transformation de Wigner-Ville, on s'intéresse à leurs possibilités d'estimation et on discute comment une représentation temps-fréquence peut être utilisée pour des opérations de traitement dépassant la seule description.

MOTS CLÉS

Signaux non stationnaires, représentations temps-fréquence, analyse spectrale, transformation de Wigner-Ville.

SUMMARY

Spectral analysis of non-stationary signals calls for specific tools which permit one to describe a time evolution of frequency characteristics. Such tools, referred to as time-frequency representations, can be defined in an objective way when imposing a priori constraints. Within a stochastic and non-parametric framework, two main approaches are offered, which either emphasize a doubly orthogonal decomposition, or preserve the usual concept of frequency. After having established the corresponding definitions and emphasized the importance of the Wigner-Ville transform, estimation problems are addressed and a discussion is provided for supporting the usefulness of time-frequency representations in processing operations which go beyond a mere description.

KEY WORDS

Non-stationary signals, time-frequency representations, spectral analysis, Wigner-Ville transform.

1. Introduction

De tous les outils dont peut disposer le traitement du signal, l'analyse spectrale est certainement l'un des plus importants. Les raisons de son excellence sont évidemment à chercher dans la relative universalité

du concept majeur sur lequel elle repose : celui de fréquence. Que ce soit dans des domaines s'intéressant à des ondes physiques (acoustique, vibrations, géophysique, optique, ...) ou reposant sur certaines périodicités d'événements (économie, biologie, astronomie, ...), une description fréquentielle est souvent à la base d'une plus grande intelligence des phénomènes mis en jeu, en fournissant un complément indispensable à la seule description temporelle (sortie de capteur ou suite d'événements), qui est généralement première pour l'analyse. Si l'on ajoute

(*) Texte d'une conférence présentée à l'Assemblée Générale de clôture du GRECO 69 CNRS « Systèmes Adaptatifs en Robotique, Traitement du Signal et Automatique », Paris, 14-15/01/1988.

à cela que l'approche fréquentielle s'accommode aussi d'une transposition au traitement spatial (imagerie acoustique, radio-astronomie, ...), on comprend qu'un très grand nombre d'études aient été et soient encore consacrées à l'analyse spectrale. On dispose ainsi aujourd'hui d'un arsenal de méthodes dont, au moins pour les plus simples et les plus robustes (et donc les plus éprouvées), les propriétés sont bien connues. A ces méthodes s'ajoute une batterie d'algorithmes, de logiciels, de processus, voire d'appareils, autant d'éléments assurant à l'analyse spectrale une place de choix dans la vie quotidienne des laboratoires.

Cependant, c'est l'expérience de cette même vie quotidienne qui nous contraint à fixer des limites de validité, mais surtout à présenter des objections de principe, à la notion classique d'analyse spectrale. En effet, cette dernière repose, implicitement et par l'intermédiaire du concept même de fréquence, sur une hypothèse de stationnarité ou de régime permanent. Force est cependant de constater que, pour fondamentale qu'elle soit d'un point de vue théorique, la classe des signaux stationnaires n'en constitue pas moins une exception si l'on considère l'immense majorité des signaux réels rencontrés dans la nature. Ceci conduit à une apparente contradiction entre l'importance reconnue de la notion de fréquence et le bien-fondé des méthodes permettant d'y accéder dans des cas le plus souvent non stationnaires. L'aspect paradoxal de cette situation est certainement renforcé par notre intuition selon laquelle, expérience de l'oreille à l'appui, devrait exister une description fréquentielle « instantanée » susceptible de réconcilier fréquence et non-stationnarité.

Le premier obstacle auquel se heurte toute démarche visant à une telle description simultanée en temps et en fréquence de signaux non stationnaires est le caractère imprécis de son objet. En effet, et comme cela a été plus d'une fois remarqué, la non-stationnarité est une « non-propriété », rendant improbable l'existence d'un outil unique qui soit également satisfaisant pour des situations physiquement très différentes (e. g. transitoires de chocs et trajectoires de formants). Ceci est particulièrement vrai pour toutes les approches paramétriques dans lesquelles la structure du modèle à identifier définit *a priori* une classe de non-stationnarité. Une deuxième difficulté consiste à situer l'analyse temps-fréquence cherchée par rapport à l'analyse spectrale classique. S'il est relativement clair et souhaitable que celle-là se réduise à celle-ci dans le cas des signaux stationnaires, le cheminement inverse (qui consiste à adjoindre une dépendance temporelle à une analyse spectrale) n'est pas une donnée immédiate et unique, et peut s'accorder d'au moins deux grands types d'approches. Le premier consiste à conserver les outils classiques et à chercher à les adapter localement aux variations caractéristiques des non-stationnarités mises en jeu. Le deuxième se propose d'introduire de nouveaux outils, considérant un signal non stationnaire comme tel, et sans référence directe aux méthodes destinées au cas stationnaire, cette deuxième philosophie étant à la fois plus générale et plus satisfaisante dans son principe que la première.

D'un point de vue historique, et sans remonter à Sommerfeld qui, en 1890, serait le premier à avoir

fait usage de « spectres instantanés » [1], il s'avère que l'analyse temps-fréquence des signaux non stationnaires est un thème récurrent dans la littérature, et d'un point de vue tant expérimental que théorique. Expérimental d'abord, car bon nombre d'applications ont utilisé ou utilisent des procédures temps-fréquence, explicites ou implicites et le plus souvent *ad hoc*, mais sans réellement faire état d'un support théorique correspondant. Théorique ensuite et cependant, car, régulièrement mais de manière isolée et dispersée, sont apparues dans la littérature des réflexions de principe conduisant à proposer des définitions dont la plupart semblent être souvent restées lettre morte, faute sans doute de facilité de mise en œuvre ou d'interprétation. Tout aussi régulièrement apparaissent quelques synthèses visant à mettre un peu d'ordre dans la zoologie des définitions proposées, voire à les comparer. Il est alors remarquable de constater, depuis le début des années 80, un saut quantitatif quant aux travaux sur ce sujet. On peut trouver à cela au moins deux raisons : la première pourrait être, suite au ratissage systématique des méthodes d'analyse spectrale stationnaire, un relatif essoufflement des travaux de base dans le domaine, incitant à élargir les hypothèses sur lesquelles ces méthodes reposent, en particulier la stationnarité. La deuxième est certainement liée au développement des moyens de calcul (logiciels comme matériels) qui, en permettant leur mise en œuvre pratique, ont donné un sang nouveau à des méthodes proposées pour certaines un demi-siècle plus tôt. Notons enfin que beaucoup de résultats pertinents doivent être cherchés dans la littérature de physique théorique, et en particulier de mécanique quantique, domaine dans lequel se posent des problèmes formellement analogues, et pour lesquels ont été développées historiquement les premières solutions.

2. Classes de méthodes

2.1. ADAPTATIF ET ÉVOLUTIF

Dans la mesure où l'idée de temps-fréquence est attachée à une notion d'évolution temporelle de caractéristiques fréquentielles, il est naturel de chercher à construire des extensions de l'analyse spectrale qui puisse la rendre explicitement dépendante du temps.

Une première façon de procéder est alors de partir du cas stationnaire (et du savoir-faire associé à la panoplie des algorithmes existant d'analyse spectrale [2]) en considérant qu'une situation non stationnaire correspond à une concaténation de situations quasi stationnaires pour lesquelles les méthodes classiques sont pertinentes [3-4]. Une telle approche peut être qualifiée d'*adaptive* [5] en ce sens qu'elle ne repose sur aucun concept spécifiquement différent de ceux du cas stationnaire, l'idée de base étant plutôt de suivre des grandeurs qui évoluent à l'aide d'outils destinés par principe à des situations stabilisées. Il en résulte que le champ d'applications de telles méthodes se trouve limité à des évolutions « lentes », pour donner sens à la fois à une interprétation de quasi-stationnarité et à une possibilité d'estimation locale. Ainsi, dans le cas du signal de parole, il est connu que les

méthodes adaptatives de type « fenêtre glissante » sont plus aptes à décrire les trajectoires de formants d'une voyelle que le transitoire associé à une plosive.

Face à ces limitations de principe, une deuxième façon de procéder est alors de considérer une situation non stationnaire comme telle, sans référence spéciale à une quasi-stationnarité hypothétique. Une telle approche peut être qualifiée d'évolutive [5] en ce sens qu'elle cherche à décrire des évolutions quelconques d'un signal non stationnaire en partant, non de ce qu'est l'analyse spectrale dans le cas stationnaire, mais de ce qu'elle devrait être dans le cas non stationnaire.

2. 2. PARAMÉTRIQUE ET NON PARAMÉTRIQUE

D'une manière indépendante de la distinction entre adaptatif et évolutif, on peut envisager une seconde classification suivant que les méthodes temps-fréquence recherchées font usage ou non d'une modélisation (généralement paramétrique) du signal analysé.

Dans le premier cas, l'intérêt est évidemment proportionnel à *a priori* que l'on peut avoir sur la nature des signaux. La prise en compte du caractère non stationnaire revient alors à rendre explicitement dépendants du temps les différents paramètres à identifier, qui interviennent dans les modélisations possibles : pôles et zéros (ARMA), sinusoïdes pures (Pisarenko) ou à décroissance exponentielle (Prony). ... Bien que le plus souvent implicitement, le concept de paramétrisation sous-entend souvent celui de parcimonie, afin de condenser l'information essentielle véhiculée par un signal sur un petit nombre de descripteurs (les paramètres) à partir desquels pourra s'élaborer tout post-traitement (e. g. une classification). Ceci n'est cependant pas fondamentalement nécessaire et l'on peut noter l'existence d'approches à grand nombre de paramètres (AR longs [6]), voire y inclure les techniques basées sur des décompositions de signal en (un nombre éventuellement grand de) composantes élémentaires: décomposition de Gabor [7] ou transformée en ondelettes [8]. Dans l'ensemble des approches paramétriques, il est toutefois à noter que l'obtention d'une représentation temps-fréquence n'est généralement pas le but premier mais seulement un sous-produit possible de l'identification et que de plus, la signification physique des paramètres mis en jeu n'a pas toujours de raison *a priori* d'être liée à la notion de fréquence.

Dans le deuxième cas (non paramétrique), l'intérêt est de ne faire aucun présupposé sur la structure possible d'un signal inconnu, permettant ainsi une analyse « aveugle » dont le résultat peut évidemment être utilisé pour servir de base à une modélisation ultérieure. D'une manière schématique, le but recherché est alors, dans un contexte non stationnaire, de trouver une généralisation naturelle à l'analyse de Fourier.

3. Représentations temps-fréquence

Considérant les différentes voies possibles évoquées ci-dessus, nous conviendrons de nous intéresser ici essentiellement aux représentations temps-fréquence

évolutives et non paramétriques. Les signaux envisagés seront supposés aléatoires et connus au second ordre.

3. 1. CONSTRUCTION SOUS CONTRAINTES

Le contenu spectral d'un signal stationnaire est correctement décrit par sa densité spectrale, quantité indépendante du temps. Dans le cas d'un signal non stationnaire, il devient nécessaire d'introduire de nouveaux outils pouvant prendre en compte l'évolution temporelle du contenu spectral. Pour ce faire, une construction effective de représentation temps-fréquence est possible en imposant *a priori* des contraintes devant être satisfaites et en cherchant les candidats susceptibles de les remplir. Cette approche, qui a déjà été utilisée à diverses reprises [5, 9-11, 13-15], repose sur une idée maîtresse : une représentation temps-fréquence doit fournir une extension, dépendante du temps, à la notion stationnaire de densité spectrale et à ses propriétés.

L'ensemble des contraintes envisageables concerne des soucis liés à la définition et à l'estimation d'une représentation temps-fréquence, ainsi qu'à l'utilisation que l'on peut en faire. Appelant $\rho_x(t, \nu)$ la représentation temps-fréquence cherchée d'un signal temporel $x(t)$, on peut les regrouper par exemple de la façon suivante :

1. $\rho_x(t, \nu)$ est une fonction réelle du temps et de la fréquence (physique), partout non négative. Elle se réduit à la densité spectrale ordinaire si le signal est stationnaire et ses distributions marginales en temps et en fréquence donnent accès aux propriétés globales respectives du signal au second ordre.
2. $\rho_x(t, \nu)$ est compatible avec les transformations usuelles en traitement du signal : translations, filtrage linéaire, modulation, corrélation, troncatures, ...
3. $\rho_x(t, \nu)$ fournit une image satisfaisante des non-stationnarités d'un signal dans le plan temps-fréquence et peut être estimée à partir d'une réalisation observée.

Comme on le voit, la première famille de contraintes concerne la nature de la représentation et son statut postulé de déploiement temporel d'un contenu spectral global. La deuxième famille s'attache davantage à ce qu'une telle représentation traduise directement en termes temps-fréquence l'effet de transformations courantes. La troisième enfin adopte le point de vue de l'utilisateur pour lequel la lisibilité d'une image temps-fréquence est importante, ainsi que la facilité de son obtention.

Ces contraintes étant fixées (il est clair que celles citées ci-dessus n'épuisent pas la totalité de ce que l'on peut imaginer, et que la classification synthétique adoptée ne fait qu'esquisser les grandes lignes d'un cahier des charges précis, cf. e. g. [5], [10] ou [14]), se pose le problème de la construction objective des représentations cherchées. Se plaçant ici dans un contexte de signaux aléatoires, on a là encore deux possibilités suivant que l'on prenne comme point de départ une représentation spectrale du signal ou sa fonction de covariance. Avant de procéder à de telles constructions effectives, on va voir que, malheureusement, le problème, tel qu'il a été posé jusqu'ici, n'a

pas de solution dans sa plus grande généralité, ce qui se traduit par l'existence théorique potentielle d'une multiplicité de solutions associées à des contraintes partielles.

3. 2. NON-EXISTENCE D'UNE SOLUTION GÉNÉRALE

Si l'on envisage d'abord la classe des signaux stationnaires d'ordre deux, on sait [16] qu'ils admettent une représentation spectrale

$$(1) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i 2 \pi \nu t} dX(\nu)$$

qui est doublement orthogonale en ce sens que

$$(2 a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i 2 \pi (\nu_1 - \nu_2) t} dt = \delta(\nu_1 - \nu_2);$$

$$(2 b) \quad E[dX(\nu_1) dX^*(\nu_2)] = dS_x(\nu_1) \delta(\nu_1 - \nu_2) d\nu_2.$$

Dans (2b), E représente l'opérateur d'espérance mathématique (moyenne d'ensemble) et S_x décrit la distribution spectrale du signal le long de la diagonale principale du plan fréquence-fréquence.

Par l'intermédiaire de l'exponentielle complexe, la variable de décomposition ν acquiert son statut de fréquence et on peut rappeler que, d'après (1) et (2a), la covariance d'un signal stationnaire centré s'écrit

$$(3) \quad r_x(t_1, t_2) \equiv E[x(t_1) x^*(t_2)] \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i 2 \pi \nu (t_1 - t_2)} dS_x(\nu)$$

et donc ne dépend que de la différence des dates. Dans le cas absolument continu pour lequel existe une fonction partout non négative $\Gamma_x(\nu)$, appelée densité spectrale de puissance,

$$(4) \quad dS_x(\nu) \equiv \Gamma_x(\nu) d\nu,$$

on a alors simplement

$$(5) \quad r_x(t_1, t_2) = \gamma_x(t_1 - t_2),$$

où $\gamma_x(t)$ est la transformée de Fourier de $\Gamma_x(\nu)$ (théorème de Wiener-Khinchine).

La double orthogonalité (1)-(2) étant une propriété caractéristique de la stationnarité, il est clair qu'elle ne pourra être conservée telle quelle dans le cas non stationnaire. L'alternative offerte est alors la suivante :

— soit préserver l'existence d'une représentation doublement orthogonale, ceci ne pouvant se faire qu'au prix de remplacer les exponentielles complexes par d'autres fonctions de base : on perd dans ce cas la notion stricte de fréquence (problème quant à la nature de la représentation);

— soit préserver le choix des exponentielles complexes comme fonctions de base, mais accepter en contrepartie une corrélation entre incréments spectraux pouvant se traduire par exemple par des effets d'interaction entre bandes fréquentielles disjointes (problème alors quant à l'interprétation et à l'utilisation).

Dans l'un ou l'autre cas, il apparaît déjà que le problème n'admet pas de solution générale, les seules solutions possibles pouvant résulter de contraintes partielles choisies par l'utilisateur suivant leur importance et leur pertinence pour un problème spécifique.

Une autre façon de voir la même difficulté est de partir de la covariance du signal. Postulant, ce qui semble raisonnable, une relation linéaire entre covariance et représentation temps-fréquence [10] :

$$(6) \quad \rho_x(t, \nu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} D(t, \nu; t_1, t_2) r_x(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

où D est un noyau intégral, on conçoit que la détermination de $\rho_x(t, \nu)$ soit maintenant ramenée à celle de D. Là encore, on peut montrer qu'il existe pas de noyau satisfaisant à toutes les contraintes envisageables, y compris celles semblant les plus simples comme par exemple positivité et distributions marginales [17]. A titre d'exemple, on peut rapidement justifier [56] que la positivité (semblant nécessaire quant à la nature de la représentation) est incompatible avec une conservation du produit scalaire du type

$$(7) \quad \iint_{-\infty}^{+\infty} \rho_x(t, \nu) \rho_y^*(t, \nu) dt d\nu \\ = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt \right|^2,$$

structure semblant intuitive pour toute opération de comparaison de signaux non stationnaires en termes de corrélation. Il est clair en effet que si l'on choisit dans (7) $x(t)$ et $y(t)$ comme étant deux signaux certains orthogonaux sur la droite réelle, le membre de gauche doit s'annuler, ce qui ne peut manifestement se produire si les deux représentations sont partout non négatives [56].

De toutes les contraintes envisageables, il est remarquable de constater que la seule invariance par translations conduit à réduire (6) à la forme simplifiée

$$(8) \quad \rho_x(t, \nu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(u-t, \tau) r_x\left(u + \frac{\tau}{2}, u - \frac{\tau}{2}\right) \\ \times e^{-i 2 \pi \nu \tau} du d\tau,$$

où F est une fonction bitemporelle, normalisée mais arbitraire. On obtient ainsi l'équivalent, dans le cas aléatoire, de la classe de Cohen du cas certain [19-21]. On peut ainsi aborder de façon systématique la traduction de contraintes sur $\rho_x(t, \nu)$ en termes de propriétés d'admissibilité de F et montrer que l'intersection des ensembles correspondants est vide [14, 21]. Une étude plus fine montre qu'en fait, la positivité est exclusive à elle seule de la quasi-totalité des autres propriétés souhaitables [22], des solutions existant alors si l'on accepte l'occurrence de valeurs négatives locales.

Nous allons maintenant revenir sur la construction des représentations possibles, gardant présent à l'esprit que chacune repose en fait sur un *a priori* quant aux propriétés qu'elle satisfait.

3.3. SOLUTIONS PRÉSERVANT L'ORTHOGONALITÉ

3.3.1. Décomposition de Karhunen

Comme on l'a mentionné plus haut, une solution est de maintenir l'existence d'une décomposition doublement orthogonale pour les signaux non stationnaires en abandonnant le choix des exponentielles complexes comme éléments de décomposition. On est ainsi conduit à écrire

$$(9) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t, \nu) dX(\nu),$$

avec

$$(10a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t, \nu_1) \Psi^*(t, \nu_2) dt = \delta(\nu_1 - \nu_2)$$

et

$$(10b) \quad E[dX(\nu_1) dX^*(\nu_2)] = dS_x(\nu_1) \delta(\nu_1 - \nu_2) d\nu_2.$$

De telles décompositions existent pour les signaux de second ordre [16], mais la variable muette ν n'a aucune raison *a priori* d'être interprétée comme une fréquence.

Il suit de (9) et (10b) que

$$(11) \quad r_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t_1, \nu) \Psi^*(t_2, \nu) dS_x(\nu),$$

d'où

$$(12) \quad \text{Var}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t, \nu)|^2 dS_x(\nu).$$

L'interprétation de cette dernière relation est alors de fournir un déploiement « spectral » de la variance du signal, ce qui, dans le cas (4), revient à introduire comme représentation temps-« fréquence » possible la quantité

$$(13) \quad K_x(t, \nu) \equiv |\Psi(t, \nu)|^2 \Gamma_x(\nu).$$

On a bien là une grandeur réelle, partout non négative, qui se réduit à la densité spectrale dans le cas stationnaire, mais son interprétation spectrale pose problème. Néanmoins, son introduction est justifiée par le fait qu'elle sert de prototype à deux définitions proches qui vont maintenant être discutées.

3.3.2. Le spectre évolutif de Priestley

Adoucissant quelque peu la contrainte stricte de double orthogonalité, Priestley propose [23-24] d'utiliser formellement (9) avec

$$(14) \quad \Psi(t, \nu) \equiv A(t, \nu) e^{i 2 \pi \nu t},$$

où $A(t, \nu)$ est une fonction de modulation à évolution temporelle lente : les signaux associés (signaux dits *oscillants*) sont ainsi décrits par une évolution temporelle relative à chaque fréquence. Sous la condition d'évolution lente, un compromis est trouvé entre la structure de la décomposition, qui est presque ortho-

gonale, et l'interprétation de la variable de décomposition, qui s'apparente alors à celle d'une fréquence.

Le spectre évolutif qui s'en déduit s'écrit

$$(15) \quad P_x(t, \nu) \equiv |A(t, \nu)|^2 \Gamma_x(\nu)$$

et présente un certain nombre d'avantages. C'est clairement une quantité réelle, partout non négative, qui se réduit à la densité spectrale usuelle dans le cas stationnaire; il fournit de plus une extension approchée aux relations entrée-sortie des filtres linéaires.

Cependant, il présente aussi des inconvénients qui en ont limité l'usage. D'un point de vue de définition, une difficulté concerne la classe des signaux oscillants qui n'est pas suffisamment bien définie [11] : il n'y a en effet pas de critère d'appartenance à une telle classe et, de plus, elle n'est pas stable par addition. Ensuite, d'un point de vue d'estimation, il apparaît que les procédures proposées perdent le caractère évolutif de la définition pour s'identifier à des procédures à court-terme dont on connaît par ailleurs les limitations.

Plus précisément, si le signal dont le spectre évolutif est à estimer, est supposé observé à temps discret ($t=0, 1, \dots, T$), Priestley propose [24] de faire usage de la procédure à court-terme (dite de démodulation complexe) calculant

$$(16) \quad S_x(t, \nu) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} h(u) x(t-u) e^{-i 2 \pi \nu (t-u)},$$

où $h(t)$ est une fenêtre d'observation, normalisée et de largeur équivalente T_h , $x(t)$ étant la réalisation observée du signal. Le signal étant supposé en outre posséder une durée caractéristique T_x telle que

$$(17) \quad T_h \ll T_x \ll T,$$

le principe de la procédure est de moduler la réalisation observée par une exponentielle complexe, puis de passer le résultat dans un filtre passe-bas [dont $h(t)$ est la réponse impulsionnelle] et d'effectuer enfin une détection d'enveloppe. On peut montrer [24] que l'on a alors

$$(18) \quad E[|S_x(t, \nu)|^2] \cong \int_{-1/2}^{+1/2} |H(n)|^2 P_x(t, \nu+n) dn,$$

où $H(\nu)$ est la transformée de Fourier de $h(t)$. Ceci montre que l'on obtient une version lissée en fréquence du spectre réel, tout en ayant d'après (16) une résolution temporelle de l'ordre de T_h . On se trouve ainsi confronté à un problème d'incertitude [25] ou de compromis temps-fréquence puisque augmenter la résolution en temps (resp. en fréquence) ne peut se faire qu'au prix de diminuer corrélativement la résolution en fréquence (resp. en temps).

De plus, comme il est connu dans le cas du périodogramme à court-terme [26], la variabilité de l'estimateur est très grande puisque, dans le cas gaussien, on a

$$(19) \quad \text{Var}[|S_x(t, \nu)|^2] \cong \left| \int_{-1/2}^{+1/2} |H(n)|^2 P_x(t, \nu+n) dn \right|^2.$$

Une amélioration de cette situation est possible en introduisant un lissage secondaire en temps qui, de fait, diminue la variance d'estimation mais qui, en contrepartie, augmente le biais temporel : on se trouve ainsi en présence également d'un exemple de compromis biais-variance.

Malgré ces difficultés de définition et d'estimation, le spectre évolutif de Priestley admet une interprétation temporelle complémentaire et intéressante [11]. En effet, supposons que la fonction de modulation $A(t, \nu)$ admette la décomposition

$$(20) \quad A(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, s) e^{-i 2 \pi \nu s} ds.$$

Partant de (10 b), on peut construire un signal stationnaire $x_0(t)$ en posant

$$(21) \quad x_0(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i 2 \pi \nu t} dX(\nu).$$

Par suite, en portant (14) et (20) dans (9), on obtient

$$(22) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, s) x_0(t-s) ds.$$

Ceci signifie qu'un signal oscillant peut être vu comme la sortie d'un filtre linéaire variant dans le temps dont l'entrée est stationnaire. Cette interprétation physique suggère une approche complémentaire, opérant directement dans le domaine temporel.

3.3.3. Le spectre évolutif de Tjøstheim et Mélard et le relief de Grenier

L'idée générale est de partir de la décomposition de Cramér-Hida d'un signal non stationnaire, généralisation de la décomposition de Wold d'un signal stationnaire. Dans le cas d'un signal non stationnaire purement non prédictible, on peut écrire [29] :

$$(23) \quad x(t) = \sum_{m=1}^M \int_{-\infty}^t h_m(t, s) dB_m(s),$$

où les $B_m(t)$ sont des processus aléatoires de type brownien, mutuellement orthogonaux, et où M est la multiplicité du signal. Physiquement, une telle décomposition revient à interpréter un signal non stationnaire comme la sortie d'une superposition de filtres linéaires variables dans le temps et excités en entrée par un bruit blanc.

En utilisant la stationnarité des incréments des $B_m(t)$, on peut introduire formellement la représentation

$$(24 a) \quad dB_m(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i 2 \pi \nu s} dE_m(\nu) \cdot ds$$

avec

$$(24 b) \quad E[dE_m(\nu_1) dE_n^*(\nu_2)] = \delta_{mn} \cdot \delta(\nu_1 - \nu_2) d\nu_1 d\nu_2.$$

Par suite, en portant (24) dans (23), on obtient

$$(25) \quad \text{Var}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{m=1}^M \left| \int_{-\infty}^t h_m(t, s) e^{i 2 \pi \nu s} ds \right|^2 \right] d\nu.$$

On obtient ainsi une décomposition du type (12)-(13) d'où l'on peut déduire un spectre évolutif [11] :

$$(26) \quad \text{TM}_x(t, \nu) \equiv \sum_{m=1}^M \left| \int_{-\infty}^t h_m(t, s) e^{i 2 \pi \nu s} ds \right|^2.$$

Ceci constitue une généralisation à temps continu du spectre défini à temps discret par Tjøstheim [28] et Mélard [27]. Dans le cas discret, la situation est simplifiée puisque le problème de la possible multiplicité ne se pose plus [11]. Partant alors d'une décomposition de type moyenne ajustée (MA) dépendante du temps :

$$(27 a) \quad x(t) = \sum_{s=-\infty}^t h(t, s) e(s),$$

où $e(t)$ est un bruit blanc à temps discret de variance unité, on peut montrer [11, 27-28] qu'un choix canonique de spectre évolutif est

$$(27 b) \quad \text{TM}_x(t, \nu) \equiv \left| \sum_{s=-\infty}^t h(t, s) e^{i 2 \pi \nu s} \right|^2.$$

Là encore, la représentation obtenue est réelle, partout non négative et elle se réduit à la densité spectrale usuelle dans le cas stationnaire. Elle satisfait de plus des propriétés souhaitables comme celle de distribution marginale correcte en temps ou d'invariance par translation. Néanmoins, la nature essentiellement causale du spectre de Tjøstheim et Mélard introduit des difficultés comme la non-localité ou l'absence de biunivocité avec la covariance, deux signaux différents pouvant avoir même spectre évolutif [27]. De plus son estimation peut poser problème (modèle MA d'ordre éventuellement infini).

Une amélioration significative peut cependant être apportée au spectre évolutif de Tjøstheim et Mélard lorsqu'il est possible de réaliser la décomposition MA infinie (27 a) par un modèle auto-régressif à moyenne ajustée (ARMA) fini [30] :

$$(28) \quad \sum_{s=0}^p a_s(t-s) x(t-s) = \sum_{s=0}^q b_s(t-s) e(t-s).$$

Moyennant le jeu des indices choisi dans (28), la représentation temps-fréquence associée, ou relief de Grenier [30], s'écrit alors

$$(29 a) \quad G_x(t, \nu) \equiv \left| \frac{B(t, z) B(t, z^{-1})}{A(t, z) A(t, z^{-1})} \right|_{z=e^{i 2 \pi \nu}},$$

avec :

$$(29 b) \quad \begin{aligned} A(t, z) &\equiv \sum_{s=0}^p a_s(t-1) z^{-s}; \\ B(t, z) &\equiv \sum_{s=0}^q b_s(t) z^{-s}. \end{aligned}$$

Outre les bonnes propriétés liées à cette définition, il est à noter qu'une estimation efficace de (29) peut être réalisée en décomposant les coefficients évolutifs

du modèle sur une base choisie *a priori* [12, 30] :

$$(30) \quad a_s(t) = \sum_{k=0}^m a_{sk} f_k(t); \quad b_s(t) = \sum_{k=0}^m b_{sk} f_k(t).$$

Ceci permet en effet de transformer l'identification d'un modèle scalaire non stationnaire en celle d'un modèle vectoriel mais stationnaire, problème pour lequel existent des solutions.

Les avantages apportés par de telles représentations sont évidemment à tempérer par la nécessité d'hypothèses *a priori* concernant l'adéquation entre le modèle sous-jacent utilisé (ARMA) et le signal analysé.

3. 4. SOLUTIONS PRÉSERVANT LA FRÉQUENCE

Après avoir envisagé des solutions partageant le principe d'être construites à partir d'une décomposition tendant à privilégier l'aspect double orthogonalité, quitte à sacrifier l'interprétation spectrale, nous allons maintenant considérer l'autre terme de l'alternative : construire des représentations dépendant du temps et basées explicitement sur la fréquence.

3. 4. 1. Signaux harmonisables

Repasant de (1), une extension possible au cas non stationnaire est de remplacer (2b) par

$$(31) \quad E[dX(v_1) dX^*(v_2)] = \Phi_x(v_1, v_2) dv_1 dv_2.$$

où, à l'inverse de (2b), la corrélation entre incréments spectraux est décrite par une fonction de distribution spectrale qui n'est plus assujettie à n'exister que sur la diagonale principale du plan fréquence-fréquence.

Une telle décomposition existe si

$$(32) \quad \iint_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_x(v_1, v_2)| dv_1 dv_2 < +\infty,$$

les signaux non stationnaires correspondants étant dits *harmonisables* [16]. L'harmonisabilité d'un signal se transporte à sa covariance qui s'écrit

$$(33) \quad r_x(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i 2 \pi (v_1 t_1 - v_2 t_2)} \Phi_x(v_1, v_2) dv_1 dv_2.$$

Covariance et fonction de distribution spectrale forment alors une paire de transformées de Fourier à deux dimensions, ce qui constitue une généralisation au cas non stationnaire de (5) et s'y réduit naturellement dans le cas stationnaire.

3. 4. 2. Le spectre de Wigner-Ville. Définition

Puisque les signaux harmonisables admettent deux descriptions équivalentes, l'une temps-temps et l'autre fréquence-fréquence, il est naturel de considérer la représentation temps-fréquence recherchée comme devant fournir une description intermédiaire

$$(34) \quad \begin{array}{ccc} r_x(t_1, t_2) & \leftrightarrow & \Phi_x(v_1, v_2) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \rho_x(t, v) & \end{array}$$

Étant données les relations de transformation de Fourier entre r_x et Φ_x d'une part, et la linéarité postulée

entre r_x et ρ_x d'autre part, le problème posé est alors celui de trouver une représentation ρ_x qui assure la commutativité du diagramme (34) lorsque les flèches représentent des transformations de Fourier. On montre alors [31] que, sous hypothèse d'invariance par translations, les seules solutions admissibles prennent les deux formes équivalentes

$$(35a) \quad \rho_x(t, v; \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_x\left(t - \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau, t - \left(\sigma + \frac{1}{2}\right)\tau\right) e^{-i 2 \pi v \tau} d\tau,$$

ou

$$(35b) \quad \rho_x(t, v; \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x\left(v - \left(\sigma + \frac{1}{2}\right)n, v - \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)n\right) e^{-i 2 \pi n t} dn,$$

avec en outre la condition

$$(36) \quad |\sigma| \leq 1/2$$

pour assurer la propriété de conservation de supports [32].

De cette quantité, appelée *spectre de Wigner-Ville généralisé*, on peut extraire deux cas particuliers intéressants :

$$(37a) \quad W_x(t, v) \equiv \rho_x(t, v; 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_x\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i 2 \pi v \tau} d\tau$$

et

$$(37b) \quad R_x(t, v) \equiv \rho_x(t, v; 1/2) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_x(t, t - \tau) e^{-i 2 \pi v \tau} d\tau,$$

appelés respectivement *spectre de Wigner-Ville* [33] et *spectre de Rihaczek*, par référence aux distributions associées dans le cas certain [34-36]. Le lien existant entre le *spectre de Wigner-Ville* (37a) et la *distribution de Wigner-Ville* utilisée dans le cas des signaux certains passe par l'introduction, à l'intérieur de l'intégrale, d'une moyenne d'ensemble. On peut alors montrer [33] que, sous réserve d'existence de moments du quatrième ordre, un spectre de Wigner-Ville n'est autre que la moyenne d'ensemble des distributions de Wigner-Ville de chaque réalisation, considérées comme intégrales stochastiques.

Dans le cas général, le spectre de Wigner-Ville généralisé prend des valeurs complexes. Imposer la contrainte de réalité (mais pas nécessairement de positivité) suffit alors à fixer le paramètre libre à la seule valeur nulle : il en résulte que le spectre de Wigner-Ville est l'unique représentation temps-fréquence admissible relativement à l'ensemble des contraintes imposées [31].

3. 4. 3. Le spectre de Wigner-Ville. Propriétés

Le spectre de Wigner-Ville possède un grand nombre de propriétés intéressantes que l'on peut énumérer relativement aux contraintes du paragraphe 3. 1.

1. $W_x(t, \nu)$ est une fonction réelle du temps et, par construction, de la fréquence. Il se réduit à la densité spectrale ordinaire dans le cas stationnaire et ses distributions marginales reflètent les propriétés globales de second ordre du signal puisque

$$(38 a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \nu) d\nu = \text{Var} [x(t)];$$

$$(38 b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \nu) dt = \Phi_x(\nu, \nu).$$

2. $W_x(t, \nu)$ est invariant par translations et conserve les supports temporel et fréquentiel d'un signal. De plus il subit une transformation satisfaisante par filtrage linéaire, puisque les aspects convolutif en temps et multiplicatif en fréquence se retrouvent combinés dans la relation :

$$(39) \quad W_y(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_h(s, \nu) W_x(t-s, \nu) ds,$$

lorsque $y(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$ dont l'entrée est $x(t)$.

3. $W_x(t, \nu)$ présente malheureusement des valeurs négatives et des interactions entre fréquences disjointes, ce qui rend délicate son interprétation. Nous allons cependant voir qu'une amélioration de la lisibilité est possible, qui coïncide avec la procédure d'estimation la plus souple.

3.4.4. *Le spectre de Wigner-Ville. Estimation*

Supposons comme précédemment que l'on dispose d'une observation à temps discret. La définition du spectre de Wigner-Ville devient alors [37] :

$$(40) \quad W_x(t, \nu) = 2 \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} r_x(t+\tau, t-\tau) e^{-i4\pi\nu\tau}$$

et, moyennant que l'on prenne la précaution, s'il est réel, de suréchantillonner le signal d'un facteur au moins égal à deux ou de travailler avec le signal analytique associé, les propriétés de (37a) se transposent à (40). Le problème d'estimer (40) passe alors par celui d'estimer la covariance symétrisée. Si l'on ne dispose que d'une seule réalisation observée, une hypothèse d'évolution « lente » est là encore nécessaire pour pouvoir faire usage de moyennes temporelles significatives. Une classe générale d'estimateurs de $W_x(t, \nu)$ est alors fournie par [38]

$$(41 a) \quad W_x^e(t, \nu) = 2 \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} r_x^e(t+\tau, t-\tau) e^{-i4\pi\nu\tau}$$

avec

$$(41 b) \quad r_x^e(t+\tau, t-\tau) \equiv \sum_{s=-\infty}^{+\infty} F(s, 2\tau) x(t+s+\tau) x^*(t+s-\tau),$$

où $F(s, 2\tau)$ est une fonction arbitraire (dont la durée en s est supposée faible à l'échelle du temps de stationnarité local du signal) et où l'estimée est calculée sur la réalisation observée.

On reconnaît dans (41) la forme à temps discret de la représentation générale de Cohen (8) calculée sur la réalisation (signal certain). L'arbitraire de la fonction de pondération sert maintenant à qualifier l'estimation, permettant en retour de concevoir des estimateurs aux propriétés satisfaisantes.

Ainsi, on peut montrer que le périodogramme à court-terme, déjà considéré dans le cas du spectre évolutif de Priestley, peut être obtenu comme cas particulier de (41), et donc être aussi envisagé comme estimateur du spectre de Wigner-Ville [37-38]. Ce choix n'est cependant pas très judicieux car, tout comme dans le cas du spectre de Priestley, les performances en temps et en fréquence se trouvent alors être antagonistes, car ne dépendant toutes deux que d'un seul degré de liberté : le choix de la fenêtre d'analyse à court-terme. Une amélioration significative est alors apportée en exploitant les deux degrés de liberté offerts par la fonction de pondération, c'est-à-dire en mettant *a priori* cette dernière sous une forme séparable en temps et en fréquence. L'estimateur résultant, appelé *pseudo-Wigner lissé* [38] s'écrit :

$$(42) \quad \text{PWL}_x(t, \nu) = 2 \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|^2 \times \left[\sum_{s=-\infty}^{+\infty} g(s) x(t+s+\tau) x^*(t+s-\tau) \right] e^{-i4\pi\nu\tau},$$

où $h(t)$ est toujours une fenêtre d'analyse à court-terme (contrôlant donc la résolution fréquentielle) et $g(t)$ une fenêtre de lissage temporel.

L'indépendance entre les comportements temporel et fréquentiel se retrouvent dans les propriétés statistiques de premier et second ordres. En effet, on a au premier ordre

$$(43) \quad E[\text{PWL}_x(t, \nu)] = \int_{-1/4}^{+1/4} \left[\sum_{s=-\infty}^{+\infty} g(s-t) W_x(s, \nu) \right] W_h(0, \nu-n) dn$$

et, par suite, si $g(t)$ est une impulsion de Dirac (pas de lissage temporel), on vérifie que le biais ne concerne que la direction fréquentielle.

Au second ordre, on obtient une décorrélation approchée pour un espacement suffisant. Plus précisément, on a

$$(44) \quad \text{Cov} [\text{PWL}_x(t_1, \nu_1), \text{PWL}_x(t_2, \nu_2)] \cong 0; \quad \begin{matrix} |t_1 - t_2| > M \\ |\nu_1 - \nu_2| > 1/N \end{matrix}$$

si M (resp. N) est la durée de la fenêtre de lissage temporel $g(t)$ [resp. de la fenêtre d'analyse $h(t)$]. Si, de plus, $g(t)$ est une fenêtre rectangulaire suffisamment large, on a également le résultat approché

$$(45) \quad \text{Var} [\text{PWL}_x(t, \nu)] \cong \frac{2}{M} W_x^2(t, \nu).$$

Dans le cas d'une analyse par estimation pseudo-Wigner lissée, le problème n'est donc plus, comme c'était le cas pour le périodogramme à court-terme,

de trouver un compromis entre comportements temporel et fréquentiel (qui peuvent être contrôlés indépendamment l'un de l'autre), mais de choisir le degré de lissage temporel à appliquer : seul subsiste donc un compromis de type biais-variance pour lequel des procédures de sélection automatique ont été proposées [39].

Le fait remarquable que l'estimateur général (41) du spectre de Wigner-Ville d'un signal aléatoire s'identifie à la représentation générale de Cohen de la réalisation (certaine) observée et, en particulier, que l'estimateur le plus souple soit du type pseudo-Wigner lissé fournit un cadre unique pour l'analyse des signaux certains et aléatoires. La nécessité d'un lissage temporel, introduit ici sur des considérations d'ordre statistique, se double alors d'un bénéfice en termes d'amélioration de lisibilité dans le plan temps-fréquence, ceci résultant de la structure oscillante des interactions entre composantes distinctes [18, 40-41].

4. Un exemple

Afin d'illustrer par un cas réel quelques possibilités et limitations de méthodes discutées précédemment, on peut considérer l'exemple du signal de parole présenté en figure 1. Il s'agit d'une situation dans laquelle interviennent simultanément différentes structures, tant temporelles que fréquentielles, ainsi que différents types de non-stationnarités. Ainsi, à une première partie très transitoire (explosion brève, localisée en temps et large bande, de la plosive « p ») succède une transition (*u-i*) entre deux sons voisés qui, individuellement pourraient être considérés comme stationnaires. Cette seconde partie est fortement structurée en temps (périodicité liée au fondamental) et en fréquence (harmoniques du fondamental et résonances formantiques). On constate que la transition est caractérisée par une non-stationnarité relativement douce : on observe en effet une trajectoire de formant caractéristique de l'évolution temporelle d'une fréquence de résonance du conduit vocal. La comparaison des figures 1 a et 1 b permet de mesurer les mérites respectifs d'un estimateur pseudo-Wigner lissé et d'un périodogramme à court-terme (ou spectrogramme) conventionnel. Dans les deux cas, le choix des paramètres d'analyse répond à un souci de compromis satisfaisant quant à la mise en évidence des caractéristiques temporelles et fréquentielles. Il ressort clairement de cette comparaison que l'analyse à base de transformation de Wigner-Ville réalise l'équivalent d'une déconvolution sur le spectrogramme [18], le gain obtenu en résolution étant à tempérer par l'apparition d'une structure interférentielle d'interprétation plus délicate. Cet exemple illustre donc aussi l'utilité qu'il peut y avoir à disposer de plusieurs outils pour analyser un même signal, l'interprétation étant facilitée et confortée par la mise en perspective de résultats différents, chacun imparfait, mais tous complémentaires.

En outre, l'indépendance entre les comportements temporel et fréquentiel de l'estimateur pseudo-Wigner lissé permet, pour une résolution fréquentielle donnée, de s'intéresser avec précision à des non-stationnarités

rapides en temps [57-58], comme par exemple la réponse du conduit vocal à l'échelle d'une période de fondamental : c'est ce qui est illustré à la figure 2.

5. Utilisations

Si les approches présentées aux paragraphes précédents ont pour but premier de fournir une description satisfaisante des signaux non stationnaires dans le plan temps-fréquence, elles présentent aussi un intérêt qui dépasse la seule description pour en faire des outils de traitement proprement dit. Remplacer un signal temporel par une représentation temps-fréquence peut alors être vu comme un changement d'espace de représentation dont l'avantage est de fournir, non un gain d'information évidemment, mais une meilleure structuration de celle-ci pour une utilisation ultérieure.

Schématiquement, on peut considérer qu'un tel souci revient à envisager le diagramme indirect suivant :

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \rightarrow & \mathbf{F}[x(t)] \\ \downarrow & & \uparrow \\ \rho_x(t, \nu) & \rightarrow & \mathbf{H}[\rho_x(t, \nu)] \end{array}$$

consistant à remplacer une opération directe $\mathbf{F}[x(t)]$ sur un signal temporel par un chemin mettant en jeu une transformation \mathbf{H} portant sur une représentation temps-fréquence $\rho_x(t, \nu)$ associée. Plus précisément, quelques problèmes admettant une approche de ce type peuvent être :

- une *analyse* : par exemple la caractérisation individuelle de composantes non stationnaires se recouvrant simultanément en temps et en fréquence. \mathbf{H} correspond alors à une opération de masquage visant à isoler une composante dans le plan temps-fréquence, la flèche de remontée vers $\mathbf{F}[x(t)]$ correspondant à la mise en œuvre de propriétés spécifiques (ex. : estimation de la fréquence instantanée par moment local d'ordre n dans le cas du spectre de Wigner-Ville [33, 42]);

- un *filtrage* dépendant du temps, l'opération portant sur la représentation masquée étant alors du type synthèse : il s'agit de trouver le signal dont la représentation temps-fréquence s'approche au mieux (par exemple au sens d'un critère des moindres carrés) de la fonction temps-fréquence modifiée obtenue par masquage. Ce problème a reçu plusieurs solutions effectives dans le cas Wigner-Ville [43-46];

- une *décision* : détection, estimation, reconnaissance ou classification de signaux non stationnaires. La philosophie générale est alors d'utiliser une signature temps-fréquence comme ingrédient de base, le lien avec les procédures optimales classiques ressortissant d'équivalences du type (7). L'intérêt de cette approche est, d'une part, de pouvoir particulariser la décision à une zone réduite du plan temps-fréquence [47] et, d'autre part, de proposer des implantations alternatives de récepteurs optimaux lorsque les structures classiques ne sont pas réalisables [48-49].

On peut noter enfin que l'utilisation d'un seul et même outil, une représentation temps-fréquence judi-

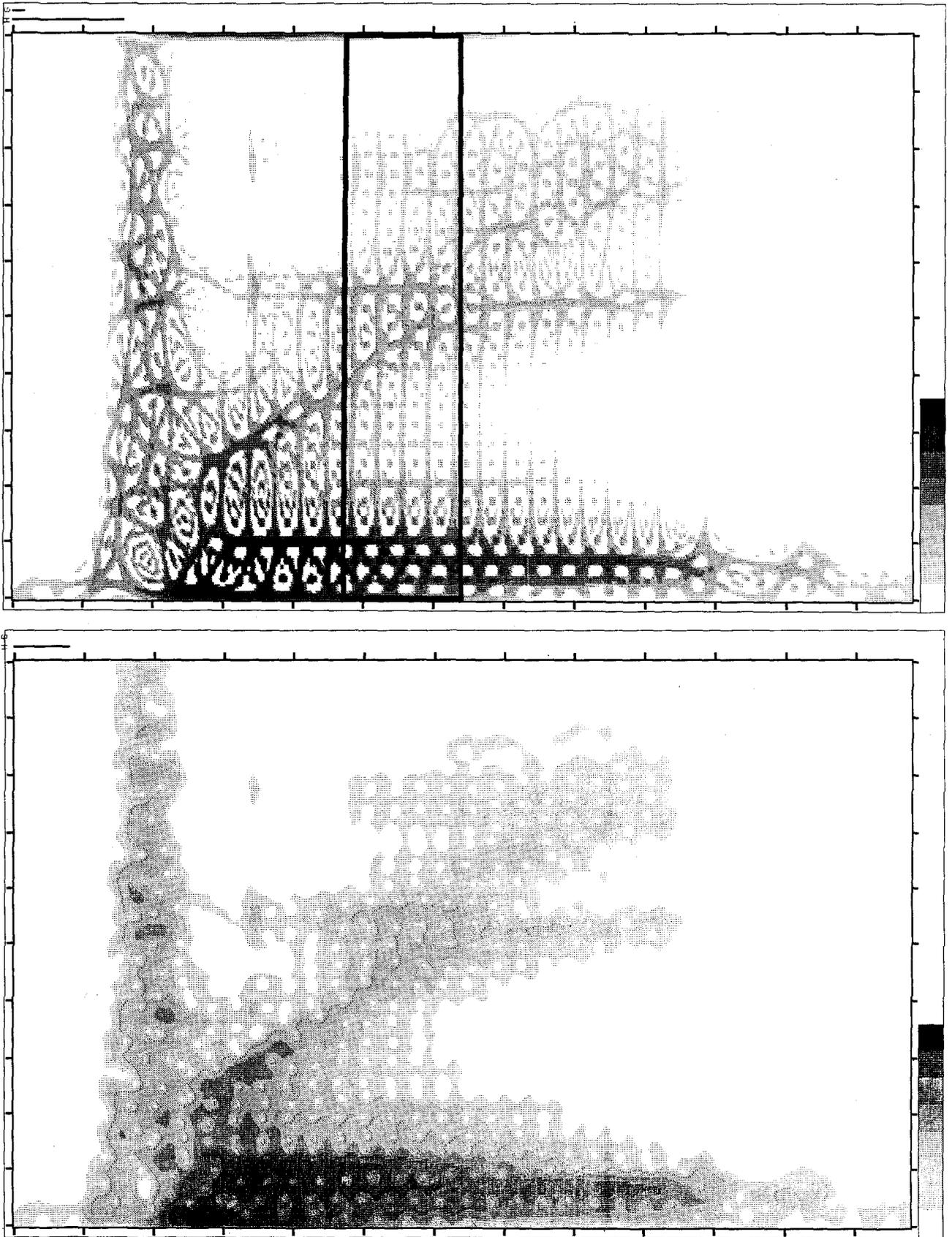


Fig. 1. — Deux analyses temps-fréquence d'un même signal de parole. (a) *Estimateur pseudo-Wigner lissé.* La durée des fenêtres (de type Kaiser-Bessel) utilisées est matérialisée par les traits portés en haut à gauche du diagramme (trait inférieur : fenêtre à court-terme h ; trait supérieur : fenêtre de lissage g). Échelle des temps (axe horizontal) : 20 ms/div. Échelle des fréquences (axe vertical) : 400 Hz/div. Dynamique de représentation : 50 dB. (b) *Périodogramme à court-terme, ou spectrogramme.* La durée de la fenêtre (de type Kaiser-Bessel) utilisée est matérialisée par le trait porté en haut à gauche du diagramme. Échelle des temps (axe horizontal) : 20 ms/div. Échelle des fréquences (axe vertical) : 400 Hz/div. Dynamique de représentation : 50 dB.

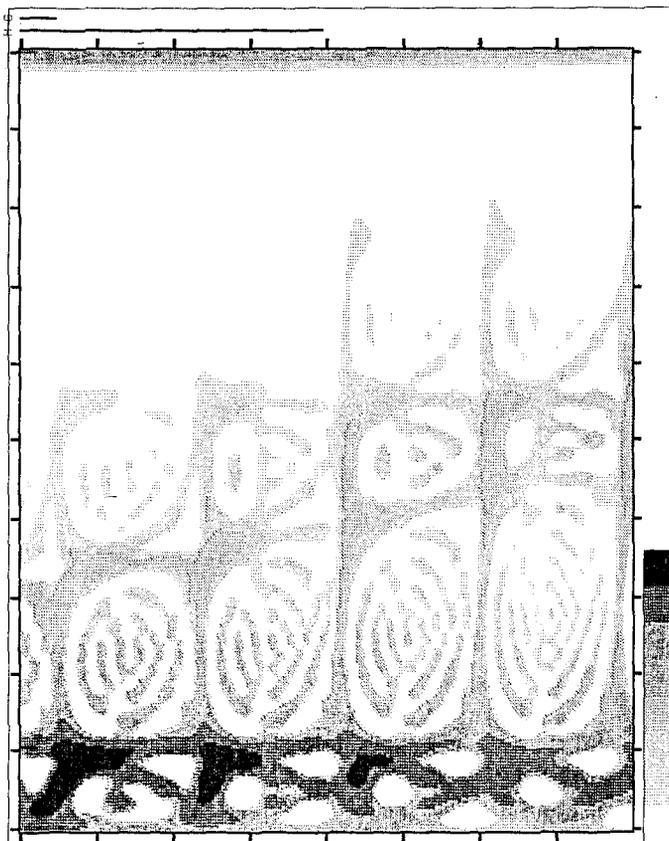


Fig. 2. — Analyse temps-fréquence fine, par estimation pseudo-Wigner lissée, de la zone encadrée dans la figure 1 a. La durée des fenêtres (de type Kaiser-Bessel) utilisées est matérialisée par les traits portés en haut à gauche du diagramme (trait inférieur : fenêtre à court-terme h ; trait supérieur : fenêtre de lissage g). Échelle des temps (axe horizontal) : 4 ms/div. Échelle des fréquences (axe vertical) : 400 Hz/div. Dynamique de représentation : 40 dB.

cieusement choisie, peut permettre d'aborder *simultanément* différents problèmes, comme par exemple les trois qui viennent d'être évoqués [50].

6. Conclusion

Si l'on considère son histoire déjà longue, l'analyse spectrale des signaux non stationnaires semble soulever des problèmes destinés à rester sans réponse, les solutions discutées ici n'y apportant certainement pas un point final. Néanmoins, on a vu que, dans un contexte non paramétrique, rechercher la définition raisonnée d'une représentation temps-fréquence conduisait essentiellement à deux approches se cristallisant, l'une autour du concept d'orthogonalité et du spectre de Priestley, l'autre autour du concept de fréquence et du spectre de Wigner-Ville.

Pour des raisons tant de considérations objectives que d'expérience personnelle, l'accent a été mis sur les avantages de ce dernier qui fournit un cadre d'analyse global et cohérent, d'un point de vue à la fois de définition et d'estimation, et dont l'utilisation s'est montré pertinente dans des applications concrètes [51-58].

Non paramétriques par nature, les méthodes présentées ici ne nécessitent pas de modèle *a priori*. En conséquence, elles sont toutes désignées pour une analyse « aveugle » de signaux de structure peu ou

pas connue, le résultat de leur emploi pouvant alors naturellement servir de base à une modélisation ultérieure. Plus généralement, les représentations temps-fréquence fournissent, lorsqu'elles sont convenablement définies, un complément naturel aux méthodes classiques opérant soit en temps, soit en fréquence. Grâce aux deux degrés de liberté offerts par les deux dimensions du plan temps-fréquence, une souplesse d'emploi accrue est rendue possible, qui permet à la fois d'obtenir des descriptions satisfaisantes de signaux non stationnaires (pour lesquels les deux aspects temporel et fréquentiel sont simultanément pertinents) et aussi d'appréhender de façon plus naturelle leur traitement.

Manuscrit reçu le 15 mars 1988.

Version révisée le 22 février 1989.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. PIMONOW, *Vibrations en Régime Transitoire*, Dunod, Paris, 1962.
- [2] S. M. KAY, *Modern Spectral Estimation*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [3] J. B. ALLEN et L. R. RABINER, A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis, *Proc. IEEE*, 65, n° 11, 1977, p. 1558-1564.

- [4] N. MARTIN, An AR spectral analysis of non-stationary signals, *Signal Proc.*, 10, n° 1, 1986, p. 61-74.
- [5] Y. GRENIER, Modélisation de signaux non-stationnaires, *Thèse Doct. État ès Sc. Phys.*, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1984.
- [6] A. HOUACINE et G. DEMOMENT, Approche bayésienne de l'analyse spectrale adaptative : modèles AR longs et filtrage de Kalman rapide, *Traitement du Signal*, 4, n° 5, 1987, p. 389-397.
- [7] D. GABOR, Theory of communication, *J. IEE*, 93, n° 111, 1946, p. 429-457.
- [8] I. DAUBECHIES, *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*, Preprint AT & T Bell Labs, Murray Hill, 1987.
- [9] A. BLANC-LAPIERRE et B. PICINBONO, Remarques sur la notion de spectre instantané de puissance, *Publ. Sci. Univ. Alger B*, 1, 1955, p. 2-32.
- [10] R. M. LOYNES, On the concept of the spectrum for non-stationary processes, *J. Roy. Stat. Soc. B*, 30, n° 1, 1968, p. 1-20.
- [11] Y. GRENIER, Parametric time-frequency representations, in *Traitement du Signal/Signal Processing*, J. L. LACOUME, T. S. DURRANI et R. STORA éd., Les Houches, Session XLV, 1987, p. 339-397, North-Holland, Amsterdam.
- [12] Y. GRENIER, Modèle ARMA à coefficients dépendant du temps : estimateurs et applications, *Traitement du Signal*, 3, n° 4-5, 1986, p. 219-233.
- [13] W. F. G. MECKLENBRÄUKER, A tutorial on non-parametric bilinear time-frequency signal representations, in *Traitement du Signal/Signal Processing*, J. L. LACOUME, T. S. DURRANI et R. STORA éd., Les Houches, Session XLV, 1987, p. 277-336, North-Holland, Amsterdam.
- [14] P. FLANDRIN, Représentations temps-fréquence des signaux non stationnaires, *Thèse Doct. État ès Sc. Phys.*, INPG, Grenoble, 1987.
- [15] P. FLANDRIN, Time-dependent spectra for non-stationary stochastic processes, *Notes de cours*, CISM, Udine, 1987 (à paraître).
- [16] A. BLANC-LAPIERRE et B. PICINBONO, *Fonctions Aléatoires*, Masson, Paris, 1981.
- [17] E. P. WIGNER, Quantum-mechanical distribution functions revised, in *Perspectives in Quantum Theory*, W. YOURGRAU et A. VAN DER MERWE éd., 1971, p. 25-36, MIT Press, Cambridge.
- [18] P. FLANDRIN et B. ESCUDIÉ, Principe et mise en œuvre de l'analyse temps-fréquence par transformation de Wigner-Ville, *Traitement du Signal*, 2, n° 2, 1985, p. 143-151.
- [19] L. COHEN, Generalized phase-space distribution functions, *J. Math. Phys.*, 7, n° 5, 1966, p. 781-786.
- [20] B. ESCUDIÉ et J. GRÉA, Sur une formulation générale de la représentation en temps et fréquence dans l'analyse des signaux d'énergie finie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 283, série A, 1976, p. 1049-1051.
- [21] T.A.C.M. CLAASEN et W. F. G. MECKLENBRÄUKER, The Wigner distribution. A tool for time-frequency signal analysis. Part III : Relations with other time-frequency signal transformations, *Philips J. Res.*, 35, n° 6, 1980, p. 372-389.
- [22] A. J. E. M. JANSSEN, Positivity of time-frequency distribution functions, *IMA Int. Conf. on Math. in Signal Proc.*, Bath, 1985.
- [23] M. B. PRIESTLEY, Evolutionary spectra and non-stationary processes, *J. Roy. Stat. Soc. B*, 27, n° 2, 1965, p. 204-237.
- [24] M. B. PRIESTLEY, *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press, New York, 1981.
- [25] Y. H. TSAO, Uncertainty principle in frequency-time methods, *J. Acoust. Soc. Am.*, 75, n° 5, 1984, p. 1532-1540.
- [26] P. D. WELCH, The use of Fast Fourier Transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms, *IEEE Trans. on Audio-Electroacoustics*, AU-15, 1967, p. 70-73.
- [27] G. MÉLARD, Propriétés du spectre évolutif d'un processus non stationnaire, *Ann. Inst. H.-Poincaré B*, XIV, n° 4, 1978, p. 411-424.
- [28] D. TjøSTHEIM, Spectral generating operators for non-stationary processes, *Adv. Appl. Prob.*, 8, 1976, p. 831-846.
- [29] H. CRAMÉR, Structural and statistical problems for a class of stochastic processes, *The first S. S. Wills Lecture at Princeton University*, 1970, 1971, p. 1-30.
- [30] Y. GRENIER, Time-dependent ARMA modeling of nonstationary signals, *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, ASSP-31, n° 4, 1983, p. 899-911.
- [31] P. FLANDRIN et W. MARTIN, sur les conditions physiques assurant l'unicité de la représentation de Wigner-Ville comme représentation temps-fréquence, *9^e Coll. GRETSI sur le Traitement du Signal et ses Applications*, Nice, 1983, p. 43-49.
- [32] A. J. E. M. JANSSEN, On the locus and spread of pseudo-density functions in the time-frequency plane, *Philips J. Res.*, 37, n° 3, 1982, p. 79-110.
- [33] W. MARTIN, Time-frequency analysis of random signals, *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-82*, Paris, 1982, p. 1325-1328.
- [34] E. P. WIGNER, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.*, 40, 1932, p. 749-759.
- [35] J. VILLE, Théorie et applications de la notion de signal analytique, *Câbles et Transm.*, 2^e A., n° 1, 1948, p. 61-74.
- [36] A. W. RIHACZEK, Signal energy distribution in time and frequency, *IEEE Trans. on Info. Theory*, IT-14, n° 3, 1968, p. 369-374.
- [37] W. MARTIN et P. FLANDRIN, Wigner-Ville spectral analysis of nonstationary processes, *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, ASSP-33, n° 6, 1985, p. 1461-1470.
- [38] P. FLANDRIN et W. MARTIN, A general class of estimators for the Wigner-Ville spectrum of non-stationary processes, in : *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 62 : *Analysis and Optimization of Systems*, A. BENSOUSSAN et J.-L. LIONS éd., Springer-Verlag, Berlin, 1984, p. 15-23.
- [39] W. MARTIN et P. FLANDRIN, Detection of changes in signal structure by using the Wigner-Ville spectrum, *Signal Proc.*, 8, n° 2, 1985, p. 215-233.
- [40] P. FLANDRIN, Some features of time-frequency representations of multicomponent signals, *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-84*, San Diego, 1984, p. 41 B. 4. 1-4. 1 B. 4. 4.
- [41] F. HLAWATSCH, Interference terms in the Wigner distribution, in : *Digital Signal Processing-84*, V. CAPPELLINI et A. G. CONSTANTINIDES éd., 1984, p. 363-367, North-Holland, Amsterdam.
- [42] T. A. C. M. CLAASEN et W. F. G. MECKLENBRÄUKER, The Wigner distribution. A tool for time-frequency signal analysis. Part I : Continuous-time signals, *Philips J. Res.*, 35, n° 3, 1980, p. 217-250.

- [43] G. F. BOUDREAU-BARTELS et T. W. PARKS, Time-varying filtering and signal estimation using Wigner distribution synthesis techniques, *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, ASSP-34, n° 3, 1986, p. 442-451.
- [44] G. F. BOUDREAU-BARTELS, Time-varying signal processing using the Wigner distribution time-frequency signal representation, in *Advances in Geophysical Data Processing*, 2, M. SIMAAN éd., 1985, p. 33-79, JAI Press, Greenwich.
- [45] F. HLAWATSCH et W. KRATTENTHALER, Signal synthesis from unitary time-frequency signal representations, in *Signal Processing III: Theories and Applications*, I.T. YOUNG et al. éd., 1986, p. 37-40, North-Holland, Amsterdam.
- [46] W. KRATTENTHALER, F. HLAWATSCH et W. MECKLENBRÄUKER, An iterative algorithm for signal synthesis from modified pseudo-Wigner distributions, *IEEE 1986 Digital Signal Processing Workshop*, Chatham, 1986, p. 7.3.1.-7.3.2.
- [47] S. KAY et G. F. BOUDREAU-BARTELS, On the optimality of the Wigner distribution for detection, *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-85*, Tampa, 1985, p. 27.2.1.-27.2.4.
- [48] P. FLANDRIN, On detection-estimation procedures in the time-frequency plane, *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-86*, Tokyo, 1986, p. 2331-2334.
- [49] P. FLANDRIN, A time-frequency formulation of optimum detection, *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, ASSP-36, n° 9, 1988, p. 1377-1384.
- [50] P. FLANDRIN, Time-frequency processing of bat sonar signals, in *Animal Sonar Systems*, P. NACHTIGALL éd., Plenum Press, New York (sous presse).
- [51] R. JÖRRES, W. MARTIN et K. BRINKMANN, Identification of the temperature masking of the circadian system of *Euglena Gracilis*, in *Cybernetics and Systems Research II*, R. TRAPPL éd., 1984, p. 293-297, North-Holland, Amsterdam.
- [52] M. CHIOLLAZ, P. FLANDRIN et N. GACHE, Utilisation de la représentation de Wigner-Ville comme outil de diagnostic des défauts de fonctionnement de moteurs thermiques, 11° *Coll. GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Nice, 1987, p. 579-582.
- [53] J. K. HAMMOND et R. F. HARRISON, Wigner-Ville and evolutionary spectra for covariance equivalent non-stationary random processes, *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-85*, Tampa, 1985, p. 27.4.1.-27.4.4.
- [54] P. FLANDRIN, J. SAGELOLI, J. P. SESSAREGO et M. ZAKHARIA, Application of time-frequency analysis to the characterization of surface waves on elastic targets, *Acoust. Lett.*, 10, n° 2, 1986, p. 23-28.
- [55] W. MARTIN et K. KRÜGER-ALEF, Application of the Wigner-Ville spectrum to the spectral analysis of a class of bio-acoustical signals blurred by noise, *Acustica*, 61, 1986, p. 176-183.
- [56] N. YEN, Time and frequency representation of acoustic signals by means of the Wigner distribution function : implementation and interpretation, *J. Acoust. Soc. Am.*, 81, n° 6, 1987, p. 1841-1850.
- [57] W. WOKUREK, F. HLAWATSCH et G. KUBIN, Wigner Distribution Analysis of Speech Signals, in *Digital Signal Processing-87*, V. CAPPELLINI et A. G. CONSTANTINIDES éd., North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [58] J. F. ALLARD, R. BOURDIER et C. DEPOLLIER, Utilisation de la pseudo-distribution de Wigner-Ville lissée pour la détermination de l'instant de fermeture de la glotte, *Traitement du Signal*, 4, n° 4, 1987, p. 305-310.