
Stationnarité relative et approches connexes

**Patrick Flandrin¹, Cédric Richard², Pierre-Olivier Amblard³,
Pierre Borgnat¹, Paul Honeine⁴, Hassan Amoud⁴, André Ferrari²,
Jun Xiao¹, Azadeh Moghtaderi^{1,5} et Pepa Ramirez-Cobo³**

¹ *École Normale Supérieure de Lyon, Laboratoire de Physique, UMR 5672 CNRS
46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France*

² *Université de Nice Sophia-Antipolis, Observatoire de la Côte d'Azur
Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France*

³ *GIPSA-lab, UMR 5216 CNRS,
961, rue de la Houille Blanche, BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France*

⁴ *Université de Technologie de Troyes
12 rue Marie Curie, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France*

⁵ *Mathematics and Statistics Department, Queen's University
Kingston, Ontario, Canada, K7L 3N6*

RÉSUMÉ. Cet article présente l'approche poursuivie dans le projet ANR StaRAC et en résume les résultats principaux. L'objectif était de re-considérer le concept de stationnarité dans le but de lui donner une forme opérationnelle, se prêtant à une interprétation relative à une échelle d'observation et permettant de le tester dans un sens statistique précis grâce à l'emploi de substituts temps-fréquence, ainsi que d'en fournir diverses extensions, en particulier au-delà de l'invariance en translation.

ABSTRACT. The paper is concerned with the approach developed within the ANR Project StaRAC, and it gives an overview of its main results. The objective was to reconsider the concept of stationarity so as to make it operational, allowing for both an interpretation relatively to an observation scale and the possibility of its testing thanks to the use of time-frequency surrogates, as well as to offer various extensions, especially beyond shift invariance.

MOTS-CLÉS : stationnarité, test, temps-fréquence, distances spectrales, apprentissage, auto-similarité

KEYWORDS: stationarity, test, time-frequency, spectral distances, learning, self-similarity

1. Extended summary

As explained in Section 2, the word “stationarity” is ubiquitous in signal processing and data analysis but, often used in a loose sense, it may correspond to different qualities that are not necessarily captured by what is referred to as “stationarity” in textbooks. Classically (Loève, 1962; Doob, 1967), stationarity refers to stochastic processes and is defined as the invariance in time of statistical properties or, in other words, as the independence of those properties with respect to some absolute time. In practice, however, stationarity is commonly advocated in rather different contexts and/or with additional features that implicitly enter the picture.

Two examples are mentioned in Section 2.1 for supporting this claim. The first one concerns speech signals which, when considered at time scales of several seconds, are unanimously considered as “nonstationary”, and for which methods have been proposed for, e.g., their segmentation into “stationary” parts. The way those parts are referred to as stationary however differs significantly from the standard definition. On the one hand, some time scale is taken into account, what needs some accommodation with respect to the actual definition that extends over all times. On the other hand, an identification between stationarity and periodicity is routinely made (cf. voiced segments), which is another departure from the standard definition given in a stochastic framework. A second example is given by Internet data, for which two distinct issues related to “stationarity” can be considered. If we first analyze such data at different time scales (thanks, e.g., to a wavelet decomposition), one can be interested as in the speech example in the time variability and its statistical significance. If we now look at the different scales jointly, we are faced with a different form of invariance that makes all of them look quite similar in terms of their variability (be it significant or not over the considered time scales) (Willinger, 1997; Park, 2000; Loiseau, 2010). This invariance across scales is coined “self-similarity” (Embrechts, 2002), but it clearly shares much with the idea of “stationarity”, provided that time shifts are replaced by dilations. These two examples may serve as an elementary motivation for the scientific objectives of StaRAC :

- propose and develop operational (i.e., interpretable, relative and testable) approaches to the concept of stationarity, with the purpose of filling existing gaps between theory and practice ;
- develop new methods to test and measure departures from stationarity ;
- extend the concept of stationarity to groups of transformations different from shifts.

Following Section 2.2 devoted to a state-of-the-art of existing approaches, Section 3 gives an overview of the framework in which the project has been developed. Section 3.1 first makes more precise the general concept of *relative stationarity*, whereas Section 3.2 details the way it is used in practice. The key point is to operate in a time-frequency (TF) domain and to explicitly introduce two time scales : a *global* one, fixed by the observation span, and a *local* one, aimed at evidencing variations within the former. From a practical point of view, the TF description relies on multi-taper

spectrograms, and the assessment of stationarity, relatively to the observation scale, results from a comparison between local spectra and the global one obtained by marginalization. In order to give a statistical significance to such comparisons, Section 3.3 then presents the original strategy that has been developed for characterizing the null hypothesis attached to stationarity. It is based on the use of a collection of *surrogate data*, constructed from the observation by randomizations of the phase of its spectrum (Theiler, 1992; Schreiber, 2000). It has been shown (Borgnat, 2010; Richard, 2010) that surrogates constructed this way are guaranteed to be stationary, paving the way for their use as stationarized versions of the data to be tested.

Given the outlined framework, the question of how to derive operational tests is the purpose of Section 4. Two main categories of tests have been envisioned (see (Borgnat, 2010) for a comprehensive presentation). The first one (Section 4.1) relies on “*distances*” between local and global spectra. A specific combination of the Kullback-Leibler divergence and the log-spectral deviation proved most useful, with a resulting test variable whose fluctuations follow approximately a Gamma distribution under the null hypothesis of stationarity (Xiao, 2007b; Xiao, 2008). This allows not only for a specified confidence in the detection, but also for the obtention of by-products such as a *degree* and a *typical scale* of nonstationarity. A second approach (Section 4.2) considers the collection of surrogates as a *learning set* attached to the stationary hypothesis, with possible tests using techniques aimed at outlier detection, such as, e.g., one-class support vector machines or others (Xiao, 2007c; Amoud, 2009). This part is concluded (Section 4.3) by an example where detection is achieved in a specific feature space adapted to amplitude- and frequency-modulated waveforms. For a same degree of nonstationarity, this allows for a quantitative characterization of the *type* of this nonstationarity (Amoud, 2009b).

Connected approaches are briefly discussed in Section 5. Section 5.1 introduces 2D surrogates aimed at detecting either transients with unknown shape and location in the TF plane (Borgnat, 2008) or nonstationary cross-correlations in bivariate signals (Borgnat, 2009). Section 5.2 mentions possible 2D time-scale extensions based on wavelet decompositions in place of spectrograms, with the purpose of testing homogeneity in images (Flandrin, 2008). A greater attention is paid in Section 5.3 to a generalization of the concept of stationarity in the specific context of self-similarity. Going beyond the so-called Lamperti transformation (Flandrin, 2003) which connects self-similar processes with stationary ones, emphasis is put on a two-parameter perspective, based on the affine group, that permits to guarantee the additional property of stationary increments while dealing with finite size effects (RamirezCobo, 2010). Finally, Section 5.4 addresses a problem that was not initially supposed to be dealt with in the project, namely a fresh perspective (based on Empirical Mode Decomposition (Huang, 1998)) on the problem of decomposing a given observation in a *trend* and a *fluctuation*. In fact, this problem shares much with the general viewpoint developed previously for stationarity, where both the definition and the analysis are explicitly made dependent on the observation scale, and the new approach is shown to compare favorably with existing ones (Moghtaderi, 2011a; Moghtaderi, 2011b).

2. Introduction et problématique

Le terme « stationnarité » est couramment utilisé en traitement du signal et analyse de données mais, pris souvent dans une acception large, il peut correspondre à différentes qualités qui ne correspondent pas nécessairement à ce que l'on appelle « stationnarité » dans les manuels. De façon classique (Loève, 1962; Doob, 1967), le concept de « stationnarité » se réfère à des processus stochastiques et est défini comme une invariance temporelle de propriétés statistiques ou, en d'autres termes, comme l'indépendance de ces propriétés par rapport à un temps absolu. En pratique cependant, la stationnarité est communément invoquée dans des contextes assez différents et/ou aménagée de considérations additionnelles.

2.1. Enjeux et motivation

Comme premier exemple illustrant les remarques introductives précédentes, on peut considérer les signaux de parole. Lorsqu'on les considère à des échelles de temps de plusieurs secondes, ceux-ci sont unanimement considérés comme « non stationnaires » et, en tant que tels, un très grand nombre de méthodes ont été proposées pour, par exemple, leur segmentation en zones « stationnaires ». La façon dont ces zones sont considérées comme « stationnaires » diffère cependant significativement de la définition standard. D'une part, une échelle de temps est prise en compte, ce qui nécessite un aménagement par rapport à la définition stricte qui est supposée s'appliquer à tous les temps. D'autre part, une identification implicite entre stationnarité et périodicité est couramment faite (par exemple dans les parties voisées), ce qui constitue un autre écart à la définition standard donnée dans un cadre stochastique.

Un second exemple est fourni par les données de trafic Internet dont on sait (Willinger, 1997; Park, 2000; Loiseau, 2010) que l'observation à différents niveaux de résolution révèle des propriétés de ce que l'on appelle « auto-similarité » (Embrechts, 2002). Dans ce cas, on peut considérer deux questions distinctes liées à la « stationnarité ». Si, dans un premier temps, on analyse séparément les observations correspondant à différentes échelles temporelles, on peut s'intéresser, comme pour la parole, à leur variabilité dans le temps et à la signification statistique de celle-ci. Si, dans un deuxième temps, on considère l'ensemble des résolutions conjointement, on se retrouve face à une forme différente d'invariance qui les fait toutes se ressembler en termes de variabilité. Il est clair que cette invariance à travers les échelles s'apparente à une idée de « stationnarité », pourvu que l'on remplace les décalages temporels par des changements d'échelle.

Ces deux exemples fournissent une motivation élémentaire pour les objectifs du projet StaRAC “Stationnarité Relative et Approches Connexes”) :

- 1) Proposer et développer des approches opérationnelles (c'est-à-dire interprétables, relatives et testables) au concept de stationnarité, dans le but de combler le fossé existant entre théorie et pratique.

2) Développer de nouvelles méthodes pour mesurer, tester et modéliser des écarts à la stationnarité.

3) Étendre le concept de stationnarité et l'idée de test associée à des groupes généraux de transformations.

Cet article s'intéressera essentiellement à présenter les résultats principaux liés aux deux premiers points, se contentant d'indiquer les passerelles possibles avec le troisième. Il en résumera la teneur en renvoyant le lecteur intéressé vers les publications en détaillant le contenu.

2.2. *État de l'art*

Stationnarité locale. Des formes approchées de stationnarité ont été proposées dans le cadre de propriétés telles que stationnarité « locale », « quasi » stationnarité ou stationnarité « par morceaux » (Silverman, 1957; Dahlhaus, 1996; Mallat, 1998). De ces points de vue, la question est en général de rendre compte d'une évolution possible de caractéristiques au cours du temps en comparant des caractéristiques locales dans des fenêtres adjacentes, avec l'objectif soit de détecter un changement brutal significatif (rupture), soit de segmenter les données en zones homogènes. La généralisation de ce type d'approches conduit à des familles de méthodes qui posent plus globalement la question de l'évolution en temps (ou en espace) de grandeurs spectrales, ce qui s'inscrit (implicitement ou explicitement) dans le cadre de l'analyse temps-fréquence (Priestley, 1969; Martin, 1984; Martin, 1985; Priestley, 1988; Laurent, 1998; von-Sachs, 2000; Ijima, 2005).

Tests de stationnarité. Tester la stationnarité est une question qui a déjà été l'objet d'attentions multiples, mais peut-être pas autant qu'on pourrait l'imaginer eu égard à son importance. Parmi les différentes façons d'aborder le problème que l'on peut trouver dans la littérature, celles qui ont rencontré le plus de succès dans la communauté des séries temporelles (telles que le test KPSS (Kwiatkowski, 1992) et ses généralisations (Hobijn, 2004)) sont explicitement basées sur des idées de modélisation, avec une réjection de l'hypothèse nulle de stationnarité liée de façon étroite à une propriété de « racine unité » du cas considéré comme non stationnaire. Les non-stationnarités testées par ce genre de méthodes sont de ce fait assez spécifiques, se réduisant en général à des tendances ou des changements de moyenne. Pour dépasser cette limitation, des méthodes alternatives ont été proposées dans le domaine fréquentiel, en comparant les caractéristiques spectrales de fenêtres adjacentes et en construisant un test statistique pour décider d'une différence significative ou non entre elles (Priestley, 1969; Vaton, 1998; Fuentes, 2005; Brcich, 2006).

Théorie de l'apprentissage pour l'analyse temps-fréquence. Depuis les travaux fondateurs (Aronszajn, 50), la reconnaissance de formes basée sur la théorie des espaces de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS) n'a cessé de gagner en popularité. Ceci a conduit à de nouveaux algorithmes, aux performances accrues et à la complexité calculatoire réduite, pour des questions de régression non linéaire, de classification, d'es-

timisation de densité, etc., dans des espaces de grande dimensionnalité (cf., par exemple, (Boser, 1992; Scholkopf, 1998; Mika, 1999)), avec en outre des performances en généralisation garanties par la théorie de l'apprentissage statistique (Vapnik, 1995). Récemment, le cadre formel des machines à noyaux a été étendu à l'analyse temps-fréquence, montrant que certains noyaux reproduisant spécifiques permettent d'opérer dans le domaine temps-fréquence (Honeine, 2007).

Stationnarité généralisée. Si la possibilité de généraliser le concept usuel de stationnarité basé sur les translations (en temps ou en espace) en l'étendant à d'autres groupes de transformations a été formellement considéré il y a longtemps (Hannan, 1965), cette possibilité a cependant été peu remarquée, hormis quelques cas particuliers. L'exemple le plus connu concerne les changements d'échelle et, quoique datant du début des années soixante (Lamperti, 1962), il n'a refait surface que bien plus récemment (Burnecki, 1997; Nuzman, 2000; Flandrin, 2003; Avaro, 2006) après plusieurs re-découvertes partielles successives (Gray, 1988; Yazici, 1997). La stationnarité par les changements d'échelle s'identifie essentiellement à ce qu'on appelle maintenant l'auto-similarité (Embrechts, 2002), et la vision nouvelle offerte par la transformation de Lamperti pour de tels processus a permis le développement d'un certain nombre de variations relatives à des formes affaiblies (ou brisées) de cette stationnarité/auto-similarité et des outils associés (Perrin, 1999; Borgnat, 2002; Amblard, 2003; Lim, 2003; Clerc, 2003; Borgnat, 2005).

3. Cadre général

3.1. Stationnarité relative

L'idée de base poursuivie dans le projet est que la stationnarité n'est pas un concept absolu, mais qu'elle n'a de sens que relativement à une échelle d'observation. Ainsi, suivant que la mesure en est faite sur un horizon temporel ou un autre, un même signal peut être considéré comme stationnaire ou pas, le principe étant de s'intéresser à la permanence éventuelle de propriétés descriptives, mais à l'intérieur d'un intervalle servant de cadre de référence.

3.2. Cadre temps-fréquence

L'approche proposée met naturellement en jeu deux échelles de temps : une *globale* fixée par l'horizon de référence et une *locale* à même de mettre en évidence des variations de caractéristiques à l'intérieur de la première. De façon à concilier dans un cadre unique les deux acceptions mentionnées plus haut de la « stationnarité », liées à un point de vue tant stochastique (comportement statistique de descripteurs comme la moyenne, la variance, etc.) que déterministe (périodicités), le concept de stationnarité relative peut être défini en termes temps-fréquence. En effet, étant donnée une observation, une représentation temps-fréquence offre un cadre unique pour caractériser l'évolution de propriétés spectrales aussi bien déterministes (comme une modulation

de fréquence) qu'aléatoires (au sens d'un spectre dépendant du temps), la distribution calculée pouvant se voir indifféremment comme une caractérisation certaine ou comme l'estimée d'une quantité aléatoire. Dans l'un ou l'autre des cas, on conviendra d'appeler stationnaire, relativement à un horizon d'observation T , un signal dont le comportement spectral local est semblable à sa caractérisation globale obtenue par marginalisation.

D'un point de vue pratique, pour un signal donné $x(t)$, la représentation temps-fréquence choisie est un *spectrogramme multi-fenêtres* :

$$S_{x,K}(t, f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K S_x^{(h_k)}(t, f) \quad [1]$$

mettant en jeu une famille de spectrogrammes ordinaires

$$S_x^{(h_k)}(t, f) = \left| \int x(s) h_k(s-t) e^{-i2\pi fs} ds \right|^2 \quad [2]$$

pour lesquels les fenêtres à court-terme $h_k(t)$ sont des fonctions d'Hermite.

Le spectrogramme multi-fenêtres présente [1] l'avantage d'être un bon estimateur (au sens d'une variance réduite sans lissage temporel additionnel tendant à gommer les non-stationnarités) du spectre théorique de Wigner-Ville (Bayram, 2000; Xiao, 2007). En pratique, la moyenne [1] porte sur un nombre réduit de fenêtres, typiquement entre 5 et 10 (on pourra se reporter à (Bayram, 2000; Xiao, 2007) pour plus de détails). Il est en outre possible de varier la taille de ces fenêtres, indépendamment de leur forme. Ceci offre un degré de liberté supplémentaire en permettant de régler l'horizon de l'analyse locale relativement à l'échelle de temps globale fixée par la durée totale d'observation.

La caractérisation de la stationnarité relative revient alors à comparer les spectres locaux $S_{x,K}(t_n, f)$ (obtenus pour une séquence de N instants t_n répartis sur l'intervalle d'observation T avec un espacement proportionné à la taille des fenêtres à court-terme) au spectre global défini par la marginalisation :

$$\langle S_{x,K}(t_n, f) \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_{x,K}(t_n, f). \quad [3]$$

3.3. *Substituts*

Quelle que soit la mesure de dissimilarité retenue entre les spectres locaux et le spectre global, son calcul sur une observation unique ne donne jamais un résultat strictement nul dans le cas stationnaire, et la question est de savoir décider dans quelle mesure une valeur non nulle est significative ou liée aux fluctuations intrinsèques de l'estimation. Afin de poser cette question dans le cadre d'un test statistique, ceci revient à pouvoir disposer d'une référence caractérisant l'hypothèse nulle de stationnarité.

Bien qu'on ne dispose par hypothèse que d'une observation, on a montré qu'une réponse à cette question était possible en recourant à la technique dite des « substitués » (*surrogate data* en anglais (Theiler, 1992; Schreiber, 2000)), qui s'inscrit dans le panel outils pilotés par les données. Cette technique repose sur une remarque très simple, à savoir que, pour un spectre marginal donné, l'idée de stationnarité évoquée correspond à la situation où la description spectrale n'est attachée à aucune structuration cohérente en temps. Hors, si le poids des différentes composantes spectrales d'un signal est mesuré par le module de son spectre de Fourier, c'est dans la phase de celui-ci que sont codées les relations entre composantes pouvant conduire à des comportements temporels structurés. Ainsi, un signal stationnaire se différenciant d'un signal non stationnaire de même spectre par une phase spectrale aléatoire, il suffit de rendre aléatoire la phase du spectre d'une observation quelconque pour la « stationnariser ». De façon plus pratique, soit $X[k] := A[k]e^{i\phi[k]}$ la transformée de Fourier discrète du signal observé $x[n]$, supposé de longueur T . Un substitut $s[n]$ est engendré en remplaçant la phase $\phi[k]$ par une séquence $\psi[k]$ de variables indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $[-\pi, \pi[$, soit

$$s[n] = \frac{1}{T} \sum_k A[k] e^{i\psi[k]} e^{i2\pi nk/T}. \quad [4]$$

La stationnarité des substitués $s[n]$, introduite intuitivement ci-dessus et illustrée en Figure 1, a été justifiée de façon rigoureuse dans (Borgnat, 2010; Richard, 2010).

Sur la base de ce résultat, il est immédiat de créer autant de substitués (stationnarisés) que l'on opère de « randomisations » sur la phase, ce qui permet la caractérisation d'une distribution d'ensemble de l'hypothèse nulle de stationnarité pour n'importe quel descripteur choisi en vue de comparer les propriétés locales et globales. Il devient alors possible, au vu de cette distribution, d'attacher un degré de signification à la valeur effective, unique, prise par le même descripteur pour l'observation.

4. Tests

Le principe de l'approche étant acquis, il reste à préciser la façon dont est conduite la comparaison « local *versus* global ». Essentiellement deux pistes ont été explorées, basée l'une sur une notion de « distance » et l'autre sur des idées issues de la théorie de l'apprentissage statistique.

4.1. Distances

La littérature offre une très grande variété de mesures de dissimilarité entre spectres (Basseville, 1989). On a pu montrer qu'un choix raisonnable pouvait être fait en considérant les « distances » les plus simples ayant déjà fait leurs preuves

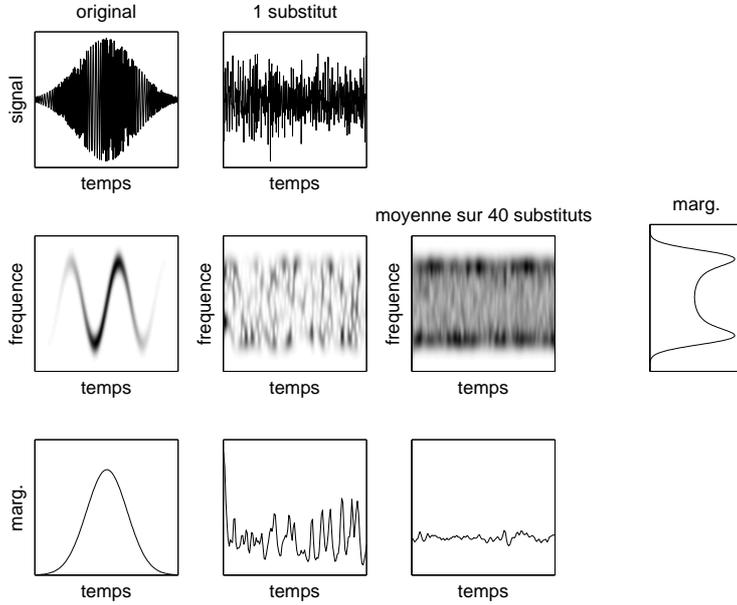


Figure 1. Stationnarisation par substituts — La colonne de gauche présente un signal « non stationnaire » (en haut), son spectrogramme (au milieu) et la distribution marginale en temps de ce dernier (en bas). La deuxième colonne présente de la même façon les informations relatives à un substitut et la troisième colonne celles correspondant à une moyenne calculée sur 40 substituts du même signal. La quatrième colonne présente enfin la distribution marginale en fréquence qui, par construction, est identique pour les trois spectrogrammes. Ces différentes distributions mettent en évidence une « stationnarisation » au sens où, pour un même spectre marginal, le comportement temporel local a perdu la forte structuration du signal original.

dans des contextes similaires. Plus précisément, la mesure retenue entre deux spectres $G(f)$ et $H(f)$ définis sur un intervalle fréquentiel Ω est de la forme

$$\kappa(G, H) := \kappa_{\text{KL}}(\tilde{G}, \tilde{H}) \cdot (1 + \kappa_{\text{LSD}}(G, H)), \quad [5]$$

combinant ainsi la divergence de Kullback-Leibler symétrisée

$$\kappa_{\text{KL}}(\tilde{G}, \tilde{H}) := \int_{\Omega} (\tilde{G}(f) - \tilde{H}(f)) \log \frac{\tilde{G}(f)}{\tilde{H}(f)} df \quad [6]$$

appliquée aux spectres normalisés $\tilde{G}(f)$ et $\tilde{H}(f)$ issus de $G(f)$ et $H(f)$, et la déviation log-spectrale

$$\kappa_{\text{LSD}}(G, H) := \int_{\Omega} \left| \log \frac{G(f)}{H(f)} \right| df. \quad [7]$$

L'intuition derrière ce choix est qu'une large famille de non-stationnarités peut être décrite par une modélisation de type AM-FM. La divergence de Kullback-Leibler étant essentiellement une mesure de dissimilarité entre formes spectrales normalisées, elle est par nature bien adaptée à la mise en évidence de structures FM mais, du fait de la normalisation des spectres, elle est insensible à un caractère purement AM. Celui-ci est par contre pris en charge par la déviation log-spectrale, justifiant l'usage combiné des deux mesures (Xiao, 2007b; Xiao, 2008).

Le test proprement dit passe alors par l'application de cette mesure de dissimilarité entre les spectres locaux et le spectre global associé, c'est-à-dire par l'évaluation de quantités

$$\{c_n^{(y)} := \kappa(S_{y,K}(t_n, \cdot), \langle S_{y,K}(t_n, \cdot) \rangle_n), n = 1, \dots, N\} \quad [8]$$

pour les signaux $y(t)$ correspondant tant à l'observation à tester ($y(t) = x(t)$) qu'à la collection de ses substituts ($y(t) = s_j(t); j = 1, \dots, J$).

La stationnarité étant supposée correspondre à une égalité entre les spectres locaux et le spectre global, on mesure ensuite un écart éventuel à celle-ci via les fluctuations en temps des mesures de dissimilarité [8]. Rapportant ces fluctuations à leur valeur moyenne définie par

$$\langle c_n^{(y)} \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N c_n^{(y)}, \quad [9]$$

le choix le plus simple consiste à faire usage de la distance quadratique, conduisant à l'évaluation de la statistique de décision

$$\Theta(y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(c_n^{(y)} - \langle c_n^{(y)} \rangle_n \right)^2 \quad [10]$$

pour le signal testé $x(t)$ et les J substituts $s_j(t), j = 1, \dots, J$.

Dans la mesure où, comme on l'a dit précédemment, il est facile de générer autant de substituts stationnaires que l'on veut, il est alors possible d'accéder à la distribution empirique du descripteur de fluctuations [10] conditionnellement à l'hypothèse nulle de stationnarité, et ainsi de caractériser celle-ci. Ce faisant, pour une erreur de première espèce prescrite, on peut identifier un seuil γ à partir des $\Theta(s_j)$, et rejeter ou accepter l'hypothèse de stationnarité selon que la condition $\Theta(x) > \gamma$ est satisfaite ou non.

Une étude plus précise de cette approche a conduit à un certain nombre de résultats que l'on peut résumer de la façon suivante :

1) *Modélisation*. Sous l'hypothèse nulle, la distribution de la statistique des fluctuations [10] est modélisable par une loi Gamma. Ceci peut se comprendre par la struc-

ture quadratique de la mesure choisie et le caractère fortement mélangeant des prétraitements conduisant aux grandeurs sur lesquelles cette mesure opère. L'intérêt de ce résultat est que la charge de calcul attachée au calcul de substituts peut être significativement réduite en ramenant un problème d'évaluation empirique de densité par histogramme à une modélisation à deux paramètres pouvant être conduite, par exemple, au sens du maximum de vraisemblance. On a pu noter en ce sens, qu'à performances comparables, la seconde approche nécessite plusieurs ordres de grandeurs de moins que la première quant au nombre de substituts à utiliser (Xiao, 2007d; Xiao, 2008).

2) *Reproduction*. Dans la mesure où le test proposé est essentiellement un test de rejet de l'hypothèse nulle de stationnarité, il convient de s'assurer d'une reproduction convenable de cette dernière dans le cas où l'observation est effectivement stationnaire. Les études conduites en ce sens ont montré que le taux d'erreur de première espèce observé était légèrement plus important que la valeur prescrite, conduisant ainsi à un test pessimiste (Xiao, 2008; Borgnat, 2010). Une amélioration à ce comportement a depuis été proposée en introduisant une famille plus permissive de substituts, dits *de transition* (Borgnat, 2011), à la stationnarité modulable continûment en lieu et place de la stationnarité au sens fort de [4]. On a pu caractériser ainsi le contrôle à apporter au signal de phase des substituts pour améliorer les performances de reproduction de l'hypothèse nulle sans sacrifier celles de détection.

3) *Caractérisation*. Bien que le test soit binaire, la valeur de la statistique $\Theta(x)$ apporte des informations complémentaires quant à l'importance éventuelle de la non-stationnarité détectée. Un sous-produit de la détection est en particulier la définition possible d'un *indice* de non-stationnarité en rapportant $\Theta(x)$ à sa valeur moyenne obtenue pour les substituts :

$$\text{INS} := \sqrt{\frac{\Theta(x)}{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \Theta(s_j)}}. \quad [11]$$

De plus, si le test est par définition relatif à l'échelle d'observation définie par la durée T du signal analysé, il est aussi fonctionnellement dépendant de la taille T_h des fenêtres à court-terme permettant de contraster les spectres locaux et le spectre global. La conséquence en est que l'on dispose d'un degré de liberté supplémentaire, le test pouvant être conduit pour plusieurs tailles de fenêtres. Ceci offre alors la possibilité de définir une *échelle* typique de non-stationnarité (ENS) selon :

$$\text{ENS} := \frac{1}{T} \arg \max_{T_h} \{\text{INS}(T_h)\}. \quad [12]$$

4.2. Apprentissage

Une deuxième voie d'approche consiste à considérer la famille des substituts construits à partir du signal observé comme un *ensemble d'apprentissage* de la situation stationnarisée correspondante. Un des intérêts de ce point de vue est qu'il évite le choix d'une mesure de dissimilarité telle que [5] et d'une statistique de décision as-

sociée [10]. La méthode retenue repose sur la mise en œuvre de Machines à Vecteurs Supports à une classe (Xiao, 2007c).

Plus précisément, en considérant un ensemble d'apprentissage $\{s_1, \dots, s_J\}$ pouvant correspondre, soit aux substituts eux-même, soit à des descripteurs qui s'en déduisent, on cherche à déterminer l'hypersphère de centre a_0 qui rend compte au mieux du support de la distribution des données selon $a_0 = \arg \min_a \max_{j=1, \dots, J} \|s_j - a\|^2$. Ceci peut se traduire par le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \min_{a, r, \xi} \quad & r^2 + \frac{1}{\nu J} \sum_{j=1}^J \xi_j \\ \text{avec} \quad & \|s_j - a\|^2 \leq r^2 + \xi_j, \quad \xi_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad [13]$$

où le paramètre $\nu \in]0, 1]$ définit un compromis entre la minimisation du rayon r de l'hypersphère, et le contrôle de variables de relaxation $\xi_j = [\|s_j - a\|^2 - r^2]_+$ destinées à rendre l'approche plus robuste à la présence éventuelle de données aberrantes. La résolution de ce problème, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, permet de déterminer numériquement le centre a_0 et le rayon r_0 de l'hypersphère recherchée. Il en résulte la statique de décision

$$\Theta(y) = \|y - a_0\|^2 - r_0^2 \quad [14]$$

que l'on compare à un seuil γ strictement positif, à définir en fonction de la sensibilité du test recherchée. Si $\Theta(x) \geq \gamma$, le signal testé $x(t)$ – ou ses descripteurs – figure à l'extérieur de l'hypersphère définie grâce aux substituts et est déclaré non stationnaire.

L'étude de cette stratégie, qui contraste avec la précédente par son caractère non paramétrique, a mené à un certain nombre d'enseignements que l'on peut résumer de la façon suivante :

1) *Représentation*. Le caractère non paramétrique du test offre d'innombrables possibilités quant au choix de la représentation des substituts et du signal à tester, puisqu'il n'est pas nécessaire ici de modéliser et manipuler des densités. Selon le contexte, nous avons été amenés à extraire des attributs tels que les variances temporelles de la puissance (P) et de la fréquence (F) instantanées, comme dans (Xiao, 2007c; Amoud, 2009b; Borgnat, 2010). Voir Figure 2 également, issue de (Amoud, 2009b). Nous avons également pu considérer les séquences temporelles directement, et/ou appliquer une transformation non linéaire aux données en introduisant un noyau reproduisant dans [13]-[14], comme dans (Amoud, 2009).

2) *Caractérisation*. Le choix du seuil γ conditionne évidemment les performances du test de stationnarité. Il a été démontré que, avec une probabilité supérieure à $1 - \delta$, on peut borner la probabilité de fausse alarme que le test qualifie un substitut de non stationnaire, par la quantité suivante (Borgnat, 2010)

$$\frac{1}{\gamma J} \sum_{j=1}^J \xi_j + \frac{6R^2}{\gamma\sqrt{J}} + 3\sqrt{\frac{\ln(2/\delta)}{2J}} \quad [15]$$

où R est le rayon de la boule centrée à l'origine contenant le support de la distribution des substituts. Une valeur approchée de cette borne, donnée par le premier terme de

l'expression ci-dessus puisque les deux suivants tendent vers 0 à mesure que J croît, est indiquée sur la Figure 2 pour différentes valeurs du seuil γ . Celle-ci fournit une information intéressante sur un signal testé qui serait jugé non stationnaire puisqu'il est possible de la décliner en un indice de non stationnarité semblable à [11]. Pour cela, on note que $\Theta(x) = \gamma$ est la valeur seuil pour laquelle x est considéré comme non stationnaire, et que $\xi_j = [\Theta(s_j)]_+$. En prenant l'inverse de la borne approchée évoquée pour que l'indice de non stationnarité varie inversement par rapport à la probabilité de fausse alarme et, en considérant la racine carrée du résultat pour faire apparaître un rapport de distances, ou écart-types estimés comme dans [11], on aboutit à

$$\text{INS} := \sqrt{\frac{\Theta(x)}{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J [\Theta(s_j)]_+}}. \quad [16]$$

Si elle n'a pas été étudiée dans le cadre du projet, une échelle de non-stationnarité pourrait être définie à partir de [16] comme dans [12].

4.3. Un exemple

On s'intéresse dans cet exemple à une classe de signaux d'enveloppe temporelle gaussienne et à modulation de fréquence linéaire, définis par

$$x(t) = e^{-\pi\gamma t^2} (1 + \alpha e^{2j\pi f_0 t}) e^{j\pi\beta t^2},$$

combinant donc modulations d'amplitude et de fréquence. Leurs proportions relatives, ainsi que le degré de non-stationnarité, sont définies par la pente de modulation β et la largeur de l'enveloppe gaussienne $\delta t = 1/\sqrt{\gamma}$. En particulier, pour $\beta = 0$, on note que $x(t)$ se réduit à une modulation d'amplitude. Si l'on se concentre sur la composante

$$x_1(t) = e^{-\pi\gamma t^2} e^{2j\pi f_0 t} e^{j\pi\beta t^2}, \quad [17]$$

étant entendu que les propriétés de $x(t)$ s'en déduisent directement, on montre qu'on contrôle le type de non-stationnarité de ce signal en modifiant β (Amoud, 2009b). En effet, le spectre de $x_1(t)$ est une fonction gaussienne, entièrement définie par sa largeur de bande δf et on montre que $\delta f^2 = (\beta^2 + \gamma^2)/\gamma$, soit encore

$$\delta f^2 = \beta^2 \delta t^2 + 1/\delta t^2. \quad [18]$$

Il est alors possible de générer un ensemble de signaux, paramétrés par $(\delta t, \beta)$, incarnant des degrés et formes de non-stationnarités distincts, mais tous dotés du même spectre global défini par δf . En fixant en particulier la largeur de bande δf , cette classe de signaux a la particularité d'avoir la même densité spectrale d'énergie tout en décrivant une transition continue de la modulation d'amplitude à la modulation de fréquence. Il en résulte qu'il leur correspond à tous une même famille de substitués, l'écart à ceux-ci permettant de caractériser la nature de la non-stationnarité dont un signal testé ferait l'objet.

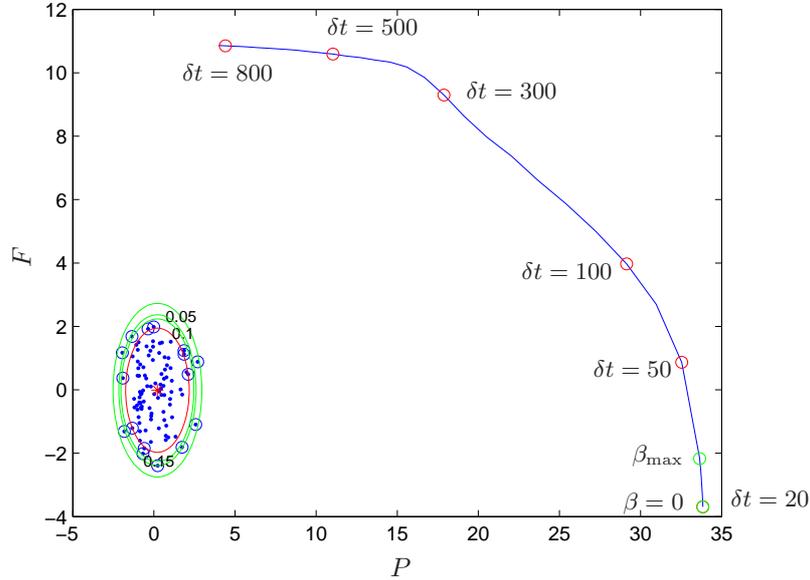


Figure 2. Représentation de 100 substitués d'un signal $x(t)$ dans le plan (P, F) , ceints par la frontière de décision obtenue par résolution du problème [13], soit $\gamma = 0$, représentée ici par une ellipse en trait noir (rouge dans la version en couleur). Les ellipses grises (vertes dans la version en couleur) illustrent les frontières de décision successives pour différentes valeurs de seuil $\gamma > 0$ associées aux probabilités 0.15, 0.10 et 0.05 de mauvaise attribution d'un signal stationnaire, selon le sens qui en est donné par les substitués, à la classe des signaux non stationnaires. En d'autres termes, elles correspondent à des iso-valeurs de l'indice de stationnarité [16]. La trajectoire représente les lieux des signaux $x(t)$ testés. Il s'agit d'une classe de signaux décrite dans (Amoud, 2009b), mêlant des lois de modulation d'amplitude et de fréquence paramétrées différemment, mais théoriquement caractérisée par les mêmes substitués. Quel que soit ce paramétrage adopté pour $x(t)$, chacun de ces signaux est déclaré non stationnaire par le test.

La Figure 2 illustre dans le cadre du test par apprentissage, les positions dans le plan (P, F) de 100 substitués et la frontière de décision associée, ainsi que la trajectoire parcourue par les signaux $x(t)$ à largeur de bande constante $\delta f = 0.05$, paramétrée par δt et β , avec $f_0 = 0.2$ et $\alpha = 1/2$. Pour tous ces signaux, le test rejette l'hypothèse de stationnarité. De plus, tout en attachant à chacun un degré de non-stationnarité comparable (mesuré par la distance à la zone de stationnarité définie par les substitués), il met en évidence un continuum de comportements allant d'une variance P élevée pour le cas à modulation d'amplitude dominante, à une variance F élevée lorsque la

modulation de fréquence devient prépondérante. Cette observation ouvre la voie à une possibilité de caractérisation fine de types de non-stationnarité, par exemple à des fins de classification.

5. Approches connexes

5.1. *Substituts dans le domaine temps-fréquence : transitoires, signaux bivariés*

Un développement du projet a été de s'intéresser aux données substituts non plus construites en temps, mais directement dans le plan temps-fréquence en appliquant une procédure de « randomisation » à une estimation du spectre temps-fréquence plutôt qu'à la transformée de Fourier du signal. Le principe central de la procédure est le même que jusqu'ici, à savoir mettre une phase aléatoire sans structure dans le domaine de Fourier, mais l'application de ce principe à une représentation temps-fréquence conduit cette fois à remplacer la phase de la fonction d'ambiguïté du signal par une phase aléatoire, puis à reconstruire un substitut temps-fréquence en faisant attention à satisfaire lors de l'inversion la positivité de ce substitut (afin de le comparer à des spectrogrammes positifs). Le détail de l'algorithme itératif permettant de le faire est décrit dans (Borgnat, 2008; Borgnat, 2009).

Le premier usage de cette technique est de construire un test de détection de transitoires en employant les substituts temps-fréquence pour caractériser l'hypothèse nulle de bruit sans transitoire (Flandrin, 2008b; Borgnat, 2008). Le deuxième usage est de s'intéresser à des signaux bivariés pour lesquels il faut tester si la corrélation croisée entre les signaux est stationnaire ou non. Les substituts multivariés, tels qu'originellement proposés dans (Prichard, 1994), ne peuvent servir dans ce cadre puisqu'ils préservent, entre les substituts, l'inter-corrélation des signaux. Nous avons proposé dans (Borgnat, 2009) d'employer des substituts construits comme les substituts temps-fréquence mais en partant du domaine temps-retard, et construit de ce fait un test de stationnarité des inter-corrélations.

5.2. *Du temps-fréquence au temps-échelle*

Analyser un signal ou une image en fonction de son échelle est une démarche du même ordre que l'analyse dans un cadre temps-fréquence. Classiquement en effet, l'analyse temps-échelle peut être vue comme une extension de l'analyse temps-fréquence s'appuyant sur la transformée en ondelettes au lieu de celle de Fourier pour estimer le spectre dépendant du temps. L'autre point de vue connectant temps-fréquence et temps-échelle a été développé dans l'exposé de la problématique générale : regarder à travers les échelles permet de caractériser l'invariance d'échelle comme une forme généralisée de stationnarité. Il est donc naturel d'étendre la méthode de test de stationnarité à un test de la stationnarité en échelle en comparant, *mutatis mutandis*, comment le "global" de la décomposition en échelle ressemble au

“local”. Une proposition dans ce sens a été faite dans (Flandrin, 2008), illustrant ainsi ce qu’est une image stationnaire, via une lecture à travers les échelles.

5.3. Stationnarités généralisées à d’autres groupes de transformations

Un travail parallèle aux travaux présentés jusqu’ici consiste à sortir du cadre habituel de la stationnarité, en revenant à son interprétation initiale en tant qu’invariance sous un groupe de transformations du signal, usuellement les translations dans le temps, et en généralisant le cadre. La stationnarité au sens usuel s’écrit, pour un signal indexé par \mathbb{R} , $x(t) \stackrel{d}{=} x(t + \tau), \forall \tau \in \mathbb{R}$, l’égalité ayant lieu au sens de l’égalité de toutes les distributions de dimension finie. Ainsi que déjà discuté, une autre forme de stationnarité, appelée auto-similarité (de paramètre $H \in]0, 1[$), existe. Elle concerne des signaux indexés par le demi-axe réel et est définie par $x(t) \stackrel{d}{=} \lambda^{-H} x(\lambda t), \forall \lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. Dans ces deux cas, l’ensemble d’indexation est un groupe, et diverses pistes ont été explorées pour utiliser ce concept à des fins de généralisations de ces stationnarités habituelles.

1) *Groupe à un paramètre.* Une première approche repose sur le lien existant entre stationnarité temporelle et auto-similarité (Borgnat, 2002; Flandrin, 2003). La première repose sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$ et la deuxième sur le groupe $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$. Ces deux groupes sont équivalents par le morphisme de groupe donné par l’exponentiation. Ce lien est mis en évidence par la transformée de Lamperti \mathcal{L}_H (Lamperti, 1962) qui met en correspondance de manière univoque un signal stationnaire y et un signal auto-similaire x selon $x(t) = (\mathcal{L}_H y)(t) := t^H y(\log t)$ ou, réciproquement, $y(t) = (\mathcal{L}_H^{-1} x)(t) := e^{-Ht} x(e^t)$. Ainsi, le mouvement brownien sur l’axe positif est l’image du processus d’Ornstein-Uhlenbeck par \mathcal{L}_H . Cette approche a permis d’examiner des versions faibles de stationnarité dans l’espace transformé par \mathcal{L}_H . Par exemple, la cyclostationnarité se transforme en l’invariance d’échelle discrète (Sornette, 1998), invariance pour laquelle l’autosimilarité n’est vérifiée que pour une gamme discrète de dilatations λ . Ensuite, la généralisation de l’équivalence entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ permet de définir une transformée de Lamperti pour un groupe (\mathbb{G}, \oplus) isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ en obtenant explicitement la transformée qui envoie un signal stationnaire sur un signal indexé par \mathbb{G} et stationnaire dans le sens $x(t) \stackrel{d}{=} f(g)x(g \otimes t), \forall g \in \mathbb{G}$ (Amblard, 2003; Borgnat, 2005). À titre d’illustration, et motivés par la notion d’invariance d’échelle de taille finie, nous avons ainsi mis en évidence des groupes (\mathbb{G}, \oplus) où \mathbb{G} peut être un intervalle ou une demi-droite quelconque de l’axe réel.

Ces généralisations échouent cependant à modéliser la classe des signaux à accroissements stationnaires, qui est importante pour s’intéresser à des données réelles. Par exemple, les signaux de vitesse dans des expériences de turbulence développée sont à accroissements stationnaires et cette propriété est utilisée pour construire des théories de la turbulence (voir par exemple (Borgnat, 2006)). Le champ de vitesse est alors étudié à travers ses accroissements et leurs statistiques (appelées fonctions

de structure). A partir d'un signal temporel $x(t)$, le calcul d'une fonction de structure passe par la création d'un champ $\delta x(t, \tau) := x(t + \tau) - x(t)$, où τ a la dimension d'un temps mais l'interprétation d'une échelle puisqu'il donne accès à une comparaison de taille du signal pris à deux instants différents. Notons que l'estimation des fonctions de structure peut passer par la transformée en ondelettes, qui permet le calcul d'accroissements régularisés par un noyau lisse. Pour la turbulence, un résultat célèbre est le comportement en loi de puissance de la densité spectrale des accroissements de vitesse (fonction de structure d'ordre 2). Physiquement, ce comportement est observé de façon remarquable, mais sur une gamme d'échelles de taille finie, entre une taille macroscopique appelée échelle intégrale τ_L (taille typique d'injection de l'énergie dans le fluide) et une taille microscopique τ_l appelée échelle de Taylor, à laquelle l'énergie est dissipée sous forme de chaleur. Cet exemple a conduit à s'intéresser à l'invariance d'échelle sur un intervalle fini d'échelles (Dubrulle, 2000), motivant l'étude des modélisations possibles de cette taille finie pour des signaux à accroissements stationnaires.

2) *Groupe à deux paramètres : accroissements stationnaires.* Une nouvelle approche de généralisation de la stationnarité a alors été l'étude des processus aléatoires auto-similaires à accroissements stationnaires de taille finie, à travers un cadre d'équivalence de groupes, cette fois à deux paramètres (RamirezCobo, 2010). Le groupe fondamental pour le problème étudié ici est le groupe affine $(\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \star)$ où la loi de composition est définie par $(\sigma_1, t_1) \star (\sigma_2, t_2) = (\sigma_1 \sigma_2, \sigma_1 t_2 + t_1)$. Une représentation mathématique du groupe affine est la transformée en ondelettes. Il est alors possible de montrer qu'un processus aléatoire est auto-similaire (de paramètre H) et à accroissements stationnaires si et seulement si $D_{H+1/2, (\lambda, \tau)} W_x(a, t) \stackrel{d}{=} W_x(a, t)$, où $W_{x, \psi}(a, t)$ définit la transformée en ondelettes, et $D_{H, (\lambda, \tau)} u(\eta, t) := \lambda^{-H} u[(\lambda, \tau) \star (\eta, t)] = \lambda^{-H} u(\lambda \eta, \lambda t + \tau)$ est l'opérateur de déplacement dans le groupe affine.

Le groupe affine peut être généralisé en utilisant des groupes isomorphes à \mathbb{R}^{*+} et \mathbb{R} (RamirezCobo, 2010), et en utilisant les résultats sur la théorie des représentations covariantes de signaux à l'aide de groupes à deux paramètres (Hlawatsch, 2002). On considère (\mathbb{T}, \oplus) un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ par l'isomorphisme $\varphi_T : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, et le groupe (\mathbb{A}, \odot) isomorphe à $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ par l'isomorphisme $\varphi_\odot : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$. On montre que $(\mathbb{A} \times \mathbb{T}, \circ)$, où la loi de composition \circ est définie par

$$(\sigma_1, \tau_1) \circ (\sigma_2, \tau_2) = (\sigma_2 \odot \sigma_1, \varphi_T^{-1}(\varphi_T(\tau_2)\varphi_\odot(\sigma_1)) \oplus \tau_1). \quad [19]$$

est un groupe. De plus il est isomorphe au groupe affine par l'isomorphisme $\varphi_{\mathbb{A} \times \mathbb{T}}(\sigma, \tau) = (\varphi_\odot(\sigma), \varphi_T(\tau))$. On peut alors construire l'opérateur de déplacement dans le groupe affine généralisé selon

$$\begin{aligned} D_{H, (\lambda, \tau)}^g u(\eta, t) &\equiv \varphi_\odot(\lambda)^{-H-1/2} u[(\lambda, \tau) \circ (\eta, t)] \\ &= \varphi_\odot(\lambda)^{-H-1/2} u(\lambda \odot \eta, \varphi_T^{-1}[\varphi_T(t)\varphi_\odot(\lambda)] \oplus \tau) \end{aligned} \quad [20]$$

puis définir des processus aléatoires auto-similaires à accroissements stationnaires généralisés de la même manière que dans le cas usuel mais en travaillant sur une transformée en ondelettes généralisée et sur des accroissements généralisés (voir

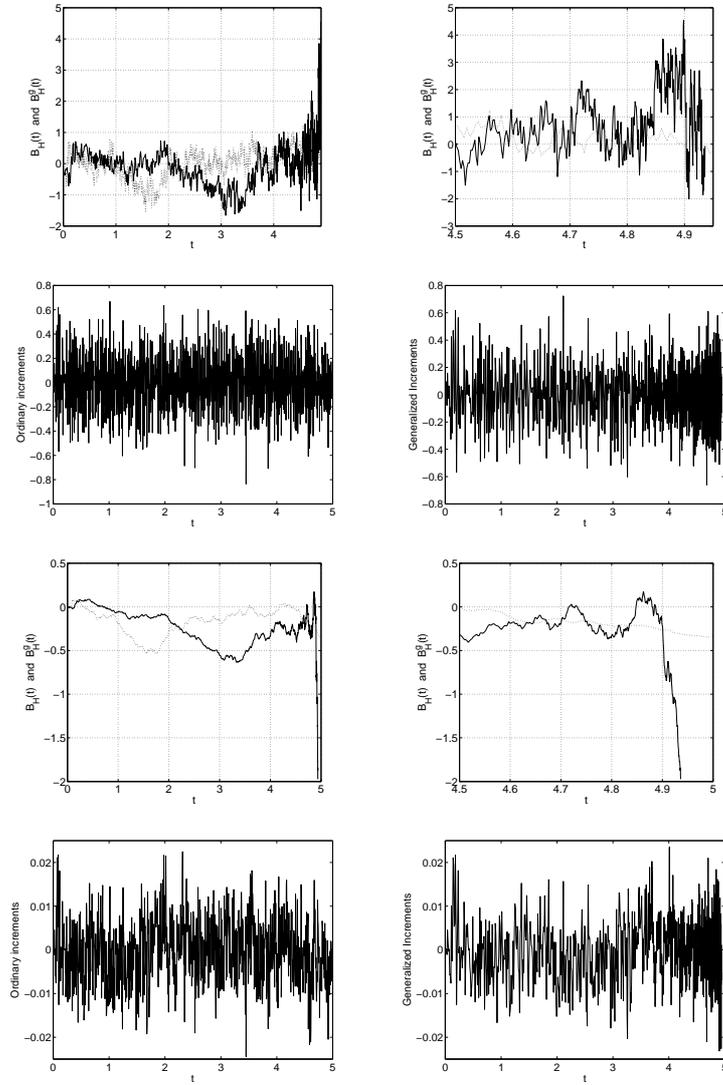


Figure 3. *Mouvement brownien fractionnaire généralisé indexé par $\mathbb{T} = (-3, 5)$ avec une loi d'addition analogue à la loi d'addition des vitesses en relativité restreinte. $H = 0.2$ pour les deux premières lignes et $H = 0.7$ pour les deux dernières. 1ère ligne : à gauche, fBm sur l'axe positif, à droite, zoom sur la zone de coupure. 2ème ligne : à gauche, incréments du fBm usuel ; à droite, incréments généralisés du fBm généralisés.*

(RamirezCobo, 2010) pour les détails). À titre d'illustration, sont montrées en Figure 3 des traces de mouvements browniens fractionnaires (fBm) généralisés définis sur $\mathbb{T} = (-3, 5)$ avec une loi d'addition analogue à la loi d'addition des vitesses en relativité restreinte. En traits pointillés sont superposées les traces des fBm usuels ayant les mêmes paramètres de Hurst. Deux valeurs du paramètre de Hurst sont utilisés : $H = 0.2$ et $H = 0.7$. Les accroissements du processus usuels et les accroissements généralisés du processus généralisé sont également représentés.

Les traces du fBm généralisé peuvent aussi être obtenues par anamorphose (liée aux morphismes de groupe) des traces du fBm usuel correspondant. L'explosion asymptotique de la variance du fBm se retrouve donc ici comprimée au bord de l'intervalle d'indexation. Cette propriété pourrait faire de ces modèles des candidats à des modèles de ruptures, par exemple en physique statistique.

5.4. Tendances et fluctuations

Une dernière problématique reliée à la détection de non-stationnarité a été abordée, qui serait plutôt à rapprocher des test de type « racine unité » (Kwiatkowski, 1992), et qui vise à savoir décomposer un signal en une tendance (généralement basse fréquence et non stationnaire) et ses fluctuations, généralement plus haute fréquence mais pas nécessairement stationnaires. Un point commun avec l'approche développée précédemment pour la stationnarité est le caractère relatif et non absolu de la question, une même composante d'un signal pouvant par exemple s'interpréter comme une tendance à une certaine échelle d'observation et comme une fluctuation à une autre. Dans un développement du projet (qui n'avait pas été programmé à l'origine), nous avons formulé cette question sous la forme d'un test empirique piloté par les données toujours, s'appuyant cette fois sur la décomposition modale empirique (ou EMD, pour *Empirical Mode Decomposition*) (Huang, 1998), algorithme de décomposition qui extrait des modes de type AM-FM d'un signal en partant des plus rapides pour aller vers les plus lents. Nous avons montré dans (Moghtaderi, 2011a) comment utiliser deux propriétés des modes extraits de l'EMD pour séparer une tendance de ses fluctuations. La première propriété caractéristique des fluctuations à large bande fréquentielle est que le rapport du nombre de passages à zéro d'un mode de l'EMD au suivant est usuellement autour de 2, reflétant en cela la nature spontanée de décomposition dyadique en fréquence observée dans l'EMD (Flandrin, 2004). La deuxième propriété attendue est que les modes ont une énergie décroissante pour une large classe de processus. Combinant ces deux caractéristiques, nous avons proposé un test statistique pour extraire une composante de tendance, obtenue comme la superposition des modes de l'EMD à partir de celui qui ne satisfait plus ces deux caractéristiques.

Nous avons validé statistiquement cette approche dans (Moghtaderi, 2011a) et montré comment elle s'applique sur différents exemples, y compris des données réelles. Dans (Moghtaderi, 2011b), une comparaison est faite entre cette approche pilotée par les données (et par les propriétés de l'EMD), et l'algorithme classique d'Hodrick-Prescott pour estimer une tendance (ajustement de la tendance au sens des

moindres carrés régularisés par une valeur faible d'une norme de la dérivée de la tendance) (Hodrick, 1997), ainsi que par l'algorithme plus récent pénalisant l'ajustement de la tendance par une norme ℓ_1 de la dérivée (Kim, 2009). Les résultats sont concluants en ce que la méthode développée à partir de l'EMD permet d'extraire avec une bonne fidélité les tendances, sans avoir à ajuster un paramètre de compromis tel qu'on le trouve dans les approches d'Hodrick-Prescott ou de Kim *et al.*, qui fixe a priori l'importance de l'attache aux données par rapport à la régularité de la tendance.

6. Conclusion

Le projet StaRAC s'est attaché à reconsidérer le concept de stationnarité en lui donnant un sens relatif et opérationnel qui en permet un test statistique, ainsi qu'à l'élargir en le rattachant à un principe général d'invariance par rapport à un groupe de transformations ne se restreignant pas aux seules translations. Ces points de vue ont été déclinés en un certain nombre de variations prouvant la faisabilité des approches proposées.

Sur la base des résultats acquis, on peut imaginer plusieurs développements à ce projet. Il serait ainsi intéressant d'aboutir à une convergence entre les deux volets relatifs respectivement aux tests et aux généralisations, en adaptant aux modèles de stationnarités généralisées la méthodologie développée dans le cadre standard des translations. D'une façon complémentaire, il serait utile de pousser plus avant l'extension des approches actuelles à des situations multidimensionnelles, celles-ci pouvant en outre offrir un cadre plus riche quant aux invariances mises en jeu (directionnalité, isotropie, etc.).

Enfin, si le projet a permis d'établir un cadre méthodologique général susceptible de renouveler les points de vue classiques sur la stationnarité, il convient de mettre celui-ci à l'épreuve de davantage de situations réelles permettant d'en mieux cerner les possibilités et limitations, en particulier en faisant usage des codes Matlab ayant été développés, disponibles librement à l'adresse <http://perso.ens-lyon.fr/pierre.borgnat/codes.html>.

7. Bibliographie

- Amblard, P.-O., Borgnat P., Flandrin, P., « Stochastic processes with finite size scale invariance, » *Proc. SPIE Conf. on Noise and Fluctuations*, vol. 5114, p. 161-172, Santa Fe, NM (USA), 2003.
- Amoud, H., Honeine, P., Richard, C., Borgnat, P., Flandrin, P., « Time-Frequency Learning Machines For NonStationarity Detection Using Surrogates, » *IEEE Workshop on Statistical Signal Processing SSP-2009*, Cardiff (UK), p. 565-568, 2009.
- Amoud, H., Richard, C., Honeine, P., Borgnat, P., Flandrin, P., « Sur la caractérisation de non-stationnarité par la méthode des substituts, » *22e Colloque sur le Traitement du Signal et des Images. GRETSI-2009*, Dijon (France), 2009b.

- Aronszajn, N., « Theory of reproducing kernels, » *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 68, pp. 337-404, 1950.
- Avaro, O., Donescu, I., Roux, C., Hillion, A. « Generalized second-order invariance in texture modeling, » *Machine Graphics & Vision*, vol.15, n° 1, p. 73-97, 2006.
- Basseville, M., « Distances measures for signal processing and pattern recognition, » *Signal Proc.*, vol. 18, n° 4, p. 349-369, 1989.
- Bayram, B., Baraniuk, R.G., « Multiple window time-varying spectrum estimation », *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing*, (W.J. Fitzgerald *et al.*, éditeurs), Cambridge Univ. Press, 2000.
- Borgnat, P., Flandrin P., Amblard, P.-O. , « Stochastic Discrete Scale Invariance, » *IEEE Sig. Proc. Lett.*, vol. 9, n° 6, p. 181-184, 2002.
- Borgnat, P., Amblard, P.-O., Flandrin, P., « Scale Invariances and Lamperti Transformations for Stochastic Processes, » *J. Phys. A : Math. Gen.*, vol. 38, p. 2081-2101, 2005.
- Borgnat, P., « Signal Processing Methods related to Models of Turbulence, » *Harmonic Analysis and Rational Approximation : Their rôles in signals, control, and dynamical systems theory*, (J.D. Fournier, J. Grimm, J. Leblond et J.R. Partington, editeurs), *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 327, p. 277-301, Springer, 2006.
- Borgnat, P., Flandrin, P., «Time-Frequency Surrogates for Nonstationary Signal Analysis, » *8th IMA International Conference on Mathematics in Signal Processing*, Cirencester (UK), 2008
- Borgnat, P., Flandrin, P., « Stationarization via surrogates, » *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment : Special issue UPoN 2008*, P01001, 2009.
- Borgnat, P., Flandrin, P., Honeine, P., Richard, C., Xiao, J., «Testing stationarity with surrogates : A time-frequency approach, » *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 58, n° 7, p. 3459-3470, 2010.
- Borgnat, P., Flandrin, P., Ferrari, A., Richard, C., « Transitional Surrogates, » *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc., ICASSP 2011*, Prague (République Tchèque), p. 3600-3603, 2011.
- Boser, B., Guyon, I., Vapnik, V. « A training algorithm for optimal margin classifiers, » *Proc. Fifth Annual Workshop on Computational Learning Theory*, p. 144-152, 1992.
- Breich, R.F., Iskander, D.R., « Testing for stationarity in the frequency domain using a sphericity statistic, » *Proc. ICASSP-06*, vol. III, p. 464-467, Toulouse (France), 2006.
- Burnecki, K., Maejima, M. Weron, A., « The Lamperti transformation for self-similar processes, » *Yokohama Math. J.*, vol. 44, p. 25-42, 1997.
- Clerc, M. Mallat, S., « Estimating deformations of stationary processes, » *Ann. Stat.*, vol. 31, n° 6, 2003.
- Dahlhaus, R., « Asymptotic statistical inference for nonstationary processes with evolutionary spectra, » *Athens Conference on Applied Probability and Time Series, vol. II, Lecture Notes in Statistics 115*, p. 145-159, Springer, 1996.
- Doob J., *Stochastic Processes*, New York, Wiley & Sons, 1967.
- Dubrulle, B., « Finite size scale invariance », *Eur. Phys. J. B*, vol. 14, p. 757-771, 2000
- Embrechts, P., Maejima, M., *Selfsimilar processes*, Princeton Univ. Press, 2002.
- Flandrin, P., « Scale-Invariant Wigner spectra and self-similarity, » *Signal Processing V : Theories and Applications* (L. Torres *et al.*, editeurs.), p. 149-152, Elsevier, 1990.

- Flandrin, P., Borgnat, P., Amblard, P.-O., « From stationarity to self-similarity, and back : Variations on the Lamperti transformation, » *Processes with Long-Range Correlations : Theory and Applications* (G. Raganjara et M. Ding, editeurs), *Lectures Notes in Physics*, vol. 621, p. 88-117, Springer, 2003.
- Flandrin, P., Rilling, G., Gonçalves, P., « Empirical Mode Decomposition as a filter bank, » *IEEE Sig. Proc. Lett.*, vol. 11, n° 2, p. 112-114, 2004.
- Flandrin, P., Borgnat, P., « Revisiting and testing stationarity, » *J. Phys : Conf. Series "2008 Euro American Workshop on Information Optics WIO'08"*, vol. 139, p. 012004, 2008.
- Flandrin, P., « Time-frequency surrogates, » invited talk at the *AMS Joint Mathematics Meeting*, San Diego, CA (USA), 2008b. http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/talkAMS08_handout.pdf
- Fuentes, M., « A formal test for nonstationarity of spatial stochastic processes, » *J. Multiv. Anal.*, vol. 96, p. 30-54, 2005.
- Gray, H. L., Zhang, N. F. « On a class of nonstationary processes, » *J. Time Series Anal.*, vol. 9, no. 2, p. 133-154, 1988.
- Hannan, E., *Group Representations and Applied Probability*, Suppl. Rev. Series in Applied Proba., vol. 3, Methuinen and Co., 1965.
- Hlawatsch, F., Tauböck, G., Twaroch, T., « Covariant time-frequency analysis, » *Wavelets and Signal Processing* (L. Debnath, editeur). Birkhäuser, Boston, 2002.
- Hobijn, B., Franses, P.H., Ooms, M., « Generalizations of the KPSS-test for stationarity, » *Statistica Neerlandica*, vol. 58, p. 483-502, 2004.
- Honeiné, P., Richard, C., Flandrin, P., « Time-frequency learning machines, » *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 55, n° 7, p. 3930-3936, 2007.
- Hodrick, R. J., Prescott, E. C., « Postwar U.S. business cycles : An empirical investigation, » *Journal of Money, Credit, and Banking*, vol. 29, n° 1, p. 1-16, 1997.
- Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., Wu, M. L., Shih, H. H., Zheng, Q., Yen, N. C., Tung, C. C., Liu, H. H., « The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis, » *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 454, p. 903-995, 1998.
- Ijima, H., Okui, R., Ohsumi, A., « Detection of signals in nonstationary random noise via stationarization and stationarity test, » *Proc. IEEE Stat. Sig. Proc. Workshop SSP-05*, Bordeaux (France) 2005.
- Kim, S. J., Koh, K., Boyd, S., and Gorinevsky, D., « ℓ_1 trend filtering, » *SIAM Review*, vol. 51, n° 2, pp. 339-360, 2009.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., Shin, Y., « Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root, » *J. of Econometrics*, vol. 54, p. 159-178, 1992.
- Lamperti, J.W., « Semi-stable stochastic processes, » *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 104, p. 62-78, 1962.
- Laurent, H., Doncarli, C., « Stationarity index for abrupt changes detection in the time-frequency plane, » *IEEE Sig. Proc. Lett.*, vol. 5, n° 2, p. 43-45, 1998.
- Lim, S.C., Muniandy, S.V., « Generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and associated self-similar processes, » *J. Phys. A : Math. Gen.*, vol. 36, p. 3961-3982, 2003.
- Loève M., *Probability Theory*, Princeton, D. von Nostrand Comp., 1962.

- Loiseau, P., Gonçalves, P., Dewaele, G., Borgnat, P., Abry, P., Vicat-Blanc Primet, P. « Investigating self-similarity and heavy-tailed distributions on a large scale experimental facility, » *IEEE/ACM Trans. on Networking*, vol. 18, n° 4, p. 1261 - 1274, 2010.
- Mallat, S., Papanicolaou, G., Zhang, Z. « Adaptive covariance estimation of locally stationary processes, » *Ann. Stat.*, vol. 24, n° 1, p. 1–47, 1998.
- Martin, W., « Measuring the degree of non-stationarity by using the Wigner-Ville spectrum, » *Proc. IEEE ICASSP-84*, San Diego, California (USA), p. 41B.3.1–41B.3.4, 1984.
- Martin, W., Flandrin, P., « Detection of changes of signal structure by using the Wigner-Ville spectrum, » *Signal Proc.*, vol. 8, p. 215-233, 1985.
- Mika, S., Rätsch, G., Weston, J., Schölkopf, B., Müller, K., « Fisher discriminant analysis with kernels, » *Advances in Neural Networks for Signal Processing IX* (Y.-H. Hu, J. Larsen, E. Wilson, S. Douglas, editeurs), p. 41-48, 1999.
- Moghtaderi, A., Flandrin, P., Borgnat, P., « Trend Filtering via Empirical Mode Decompositions, » *Computational Statistics & Data Analysis*, In Press, Corrected Proof Available online, 2011a.
- Moghtaderi, Borgnat, P., A., Flandrin, P., « Trend Filtering : Empirical Mode Decompositions vs. ℓ_1 and Hodrick-Prescott, » *Advances in Adaptive Data Analysis*, vol. 3, n° 1-2, p. 41-61, 2011b.
- Nuzman, C., Poor, V., « Linear Estimation of Self-Similar Processes via Lamperti's Transformation, » *J. Appl. Prob.*, vol. 37, n° 2, p. 429-452, 2000.
- Park, K., Willinger, W., *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*. New York, Wiley & Sons, 2000.
- Perrin, O., Senoussi, R. « Reducing non-stationary stochastic processes to stationarity by a time deformation, » *Stat. and Prob. Lett.*, vol. 43, p. 393-397, 1999.
- Priestley, M.B., Subba Rao, T., « A test for non-stationarity of time-series, » *J. Roy. Stat. Soc. B*, vol. 31, n° 1, pp. 140-149, 1969.
- Priestley, M.B., *Non-Linear and Non-Stationary Time Series*, Acad. Press, 1988.
- Prichard, D., Theiler, J., « Generating surrogate data for time series with several simultaneously measured variables, » *Physical Review Letters*, vol. 73, n° 7, p. 951-954, 1994.
- Richard, C., Ferrari, A., Amoud, H., Honeine, P., Flandrin, P., Borgnat, P., « Statistical hypothesis testing with time-frequency surrogates to check signal stationarity, » *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Dallas, TX (USA), p. 720-724, 2010.
- Ramirez-Cobo, P., Amblard, P.-O., Borgnat, P., Flandrin, P., « Generalized selfsimilar stochastic processes with stationary increments, » Research Report, GIPSA-lab& LP-ENS de Lyon, 2010.
- Schölkopf, B., Smola, A., Müller, K., « Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem, » *Neural Comp.*, vol. 10, n° 5, p. 1299-1319, 1998.
- Schreiber, T., Schmitz, A., « Surrogate time series, » *Physica D*, vol. 142, n° 3-4, p. 346–382, 2000.
- Silverman, R.A., « Locally stationary random processes, » *IRE Trans. on Info. Theory*, vol. 3, pp. 182-187, 1957.
- Sornette, D., « Discrete scale invariance and complex dimensions, » *Phys. Rep.*, vol. 297, p. 239–270, 1998.

- Theiler, J., Eubank, S., Longtin, S., Galdrikian, B., Farmer, J. D., « Testing for nonlinearity in time series : the method of surrogate data, » *Physica D*, vol. 58, n° 1-4, p. 77–94, 1992.
- Vapnik, V.N., *The Nature of Statistical Learning Theory*, New York, Springer, 1995.
- Vaton, S., « A new test of stationarity and its application to teletraffic data, » *Proc. IEEE ICASSP-98*, vol. 6, p. 3449-3452, Seattle, 1998.
- von Sachs, R., Neumann, M., « A wavelet-based test for stationarity, » *J. Time Series Anal.*, vol. 21, p. 597-613, 2000.
- Willinger, W., Taqqu, M.S., Sherman, R., Wilson, D.V., « Self-similarity through high-variability : statistical analysis of ethernet LAN traffic at the source level, » *IEEE/ACM Trans. on Networking*, vol. 5, n° 1, p. 71-86, 1997.
- Xiao, J., Flandrin, P., « Multitaper time-frequency reassignment for nonstationary spectrum estimation and chirp enhancement, » *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 55, n°6 (Part 2), p. 2851–2860, 2007.
- Xiao, J., Borgnat, P., Flandrin, P., « Testing stationarity with time-frequency surrogates, » *Proc. EUSIPCO-07*, Poznan (Poland), p. 2020-2024, 2007b.
- Xiao, J., Borgnat, P., Flandrin, P., Richard, C., « Testing Stationarity with Surrogates – A One-Class SVM Approach, » *IEEE Workshop on Statistical Signal Processing SSP-2007*, Madison, Wisconsin (USA), 2007c.
- Xiao, J., Borgnat, P., Flandrin, P., « Sur un test temps-fréquence de stationnarité, » *21e Colloque sur le Traitement du Signal et des Images. GRETSI-2007*, Troyes (France), 2007d.
- Xiao, J., Borgnat, P., Flandrin, P., « Sur un test temps-fréquence de stationnarité, » *Traitement du Signal*, vol. 25, n° 4, p. 357-366, 2008.
- Yazici, B., Kashyap, R. L. « A class of second-order stationary self-similar processes for 1/f phenomena, » *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 45, n° 2, p. 396-410, 1997.