

# Extraction de phase en interférométrie speckle par encerclement du signal analytique associé

SEBASTIEN EQUIS<sup>1</sup>, PATRICK FLANDRIN<sup>2</sup>, PIERRE JACQUOT<sup>1</sup>

<sup>1</sup> EPFL, Nanophotonics and Metrology Laboratory, Lausanne, Switzerland

<sup>2</sup> Ecole Normale Supérieure de Lyon, Laboratoire de Physique (UMR 5672 CNRS), Lyon, France

[sebastien.equis@epfl.ch](mailto:sebastien.equis@epfl.ch), [pierre.jacquot@epfl.ch](mailto:pierre.jacquot@epfl.ch)

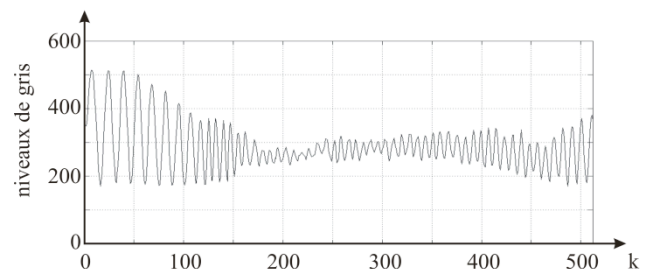
[flandrin@ens-lyon.fr](mailto:flandrin@ens-lyon.fr)

**Résumé** - Les signaux temporels d'interférométrie speckle (IS) se présentent sous la forme de signaux modulés en amplitude et en fréquence et comportent un fond continu fluctuant. Le calcul de la phase par la méthode analytique exige que le signal soit centré. Ici, à partir du signal brut, nous construisons par transformée de Hilbert un signal complexe et ajustons un cercle, au sens des moindres carrés (méthode de Kåsa), au nuage de points correspondant dans la représentation de Fresnel. L'ajustement du cercle est calculé à partir d'un nombre d'échantillons adapté localement au signal. Cette procédure (désignée par le sigle CFIT pour « circle fitting ») – nouvelle en IS – donne accès au fond continu, et permet aussi une estimation de la modulation et de la fréquence instantanée (FI). La méthode, appliquée à des signaux simulés et expérimentaux, est comparée à la décomposition modale empirique (DME). Les résultats montrent une grande robustesse dans le calcul des grandeurs recherchées en IS, en particulier dans les situations proches de l'échantillonnage critique et de fort suréchantillonnage, cas où le centrage des signaux par la DME est le plus entaché d'erreurs.

**Abstract** – In speckle interferometry (SI), temporal signals are AM-FM with a fluctuating background. Prior to phase computation by the analytic method, this background intensity must be eliminated. Here, our approach is to build a complex valued signal from the raw one, and to fit a circle through the points cloud in the Fresnel plane in the least square sense (Kåsa method). The circle fit (CFIT) is computed from a set of points whose length is locally adapted to the signal. This procedure – new in IS – yields the background and the modulation depth and an estimate of the instantaneous frequency (IF). The method, applied to simulated and experimental signals, is compared to the Empirical Mode Decomposition (EMD). It has shown great robustness in the computation of the sought quantities in SI, especially with signals close to the critical sampling or, on the contrary, highly oversampled, situations where the background elimination by the EMD is the most prone to errors.

## 1 Interférométrie speckle et signaux temporels

Il est unanimement reconnu, dans les cercles de la mécanique expérimentale, que l'interférométrie speckle est un outil puissant de caractérisation des déformations de surfaces diffusantes, en régime statique et quasi-statique, lorsque de faibles déplacements sont en jeu (typiquement inférieurs à une dizaine de microns). Le problème des régimes dynamiques avec de potentiels grands déplacements (typiquement de l'ordre de la centaine de microns) reste d'actualité. Les techniques classiques d'analyse de franges, en tête desquelles arrivent les méthodes à décalage de phase [1], s'avèrent inefficaces à traiter ce problème principalement à cause des décorrélations (défauts de similitude entre les champs de speckle avant et après déplacement et/ou déformation) qui accompagnent inévitablement toute mesure en IS. Ces dernières limitent le domaine des déplacements et/ou déformations mesurables au volume de corrélation (quelques microns transversalement et quelques dizaines longitudinalement) et entachent les résultats d'erreur aléatoires. L'analyse temporelle plutôt que spatiale des interférogrammes permet de s'affranchir de cette limite de corrélation sans toutefois éliminer les erreurs de phase aléatoires. Un signal typique obtenu dans un montage expérimental d'IS est montré dans la figure 1.



**Figure 1: signal temporel d'IS typique présentant des fluctuations aléatoires d'amplitude, de phase et de fond continu.**

L'analyse par transformée en ondelettes (Morlet) permet d'obtenir d'excellents résultats particulièrement avec une implémentation qui exploite le fait que la phase de l'ondelette est égale à celle du signal sur la crête de la distribution [2]. Si cette méthode a démontré une excellente capacité de filtrage du bruit, la convergence de l'algorithme peut être problématique lorsque les signaux analysés couvrent une large bande spectrale. Pour pallier cet inconvénient, une approche totalement différente a été adoptée dans [3] avec la décomposition modale empirique (DME) [4]. L'objectif était de mettre le signal dans une forme adéquate qui autoriserait une extraction de phase précise par la méthode analytique (MA). Pour les signaux qui nous intéressent, ceci revient à supprimer le fond continu

aléatoire. Cette dernière méthode, adaptative, performante et qui n'implique que des opérations relativement simples (complexité en  $O(n)$ ), s'appuie sur le calcul des enveloppes du signal qui repose lui-même sur la recherche des extrema, opération particulièrement sensible au bruit et à l'échantillonnage. Une exploitation différente du signal analytique a paru souhaitable.

## 2 Cercle osculateur au signal dans le plan complexe

### 2.1 Principe

L'idée de base est de construire un signal complexe  $z[k]$  à partir du signal original  $y[k]$  à l'aide de la transformée de Hilbert comme suit :

$$z[k] = y[k] + iHT\{y[k]\} \quad (1)$$

A chaque instant  $k$ , on considère un ensemble de  $N_k$  points  $Z[k] = \{z[p]\}$ , avec  $p \in [k, \dots, k+N_k]$ . Un cercle est ensuite ajusté dans le plan complexe au nuage de points  $Z[k]$  par la méthode de Kåsa brièvement rappelée plus loin. La méthode est illustrée dans la figure 2 :

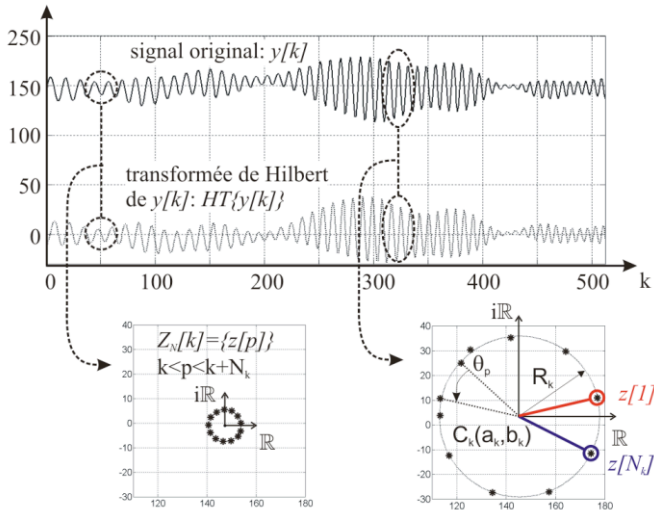


Figure 2: principe de la méthode du cercle osculateur à la trajectoire du signal complexe.

Le calcul du cercle osculateur permet, à partir des coordonnées de son centre et de son rayon, d'avoir accès à une estimée de la valeur moyenne locale (l'abscisse du centre du cercle,  $a_k$ ), la profondeur de modulation (le rayon du cercle  $R_k$ ) et la FI. De manière similaire à ce qui a été esquissé dans [5] et considéré indépendamment dans [6], la FI,  $\nu_k$ , dite circulaire peut

être estimée par la valeur moyenne des  $\theta_p - p$  dans l'intervalle  $[k, \dots, k+N_k-1]$ , angle entre deux rayons consécutifs du cercle ajusté :  $\nu_k = \langle \theta_p \rangle_{N_k}$ . La phase est directement obtenue par intégration numérique de la FI.

De la même façon que dans [7] où les auteurs étudient l'influence de l'échantillonnage sur la DME, on compare ici l'erreur de phase due à l'échantillonnage pour les 2 cas suivants : *i*) DME appliquée à un signal monochromatique de fréquence  $f_s$  suivie de la méthode analytique et *ii*) phase donnée directement par la méthode CFIT. L'analyse comparative est réalisée pour 3 rapports signal sur bruit (RSB) : 100 dB, 30 dB et 3 dB (voir figure 3). En guise de repère, on a ajouté deux limites habituellement admises pour l'incertitude de mesure en interférométrie classique qui sont le  $1/100^\circ$  et le  $1/10^\circ$  de frange (courbes vertes en pointillé).

### 2.2 Méthode d'ajustement de Kåsa

Nous revenons ici plus en détails sur la méthode d'ajustement choisie. Le problème d'ajuster un cercle à un nuage de points au sens des moindres carrés se formalise de la manière suivante :

$$\min \sum_{p=1}^{N_k} \left\{ \sqrt{(x_p - a_k)^2 + (y_p - b_k)^2} - R_k \right\}^2, \quad (2)$$

où  $(x_p, y_p)$  sont les données de départ. L'indice  $k$  renvoie une fois de plus au numéro de trame et rappelle donc que le calcul est valable pour cet instant précis. Le problème posé ainsi est non-linéaire et peut être résolu par des méthodes itératives de type Gauss-Newton. Il existe une alternative à cette formulation non-linéaire :

$$\min \sum_{p=1}^{N_k} \left\{ (x_p - a_k)^2 + (y_p - b_k)^2 - R_k^2 \right\}^2 \quad (3)$$

Il est montré dans [8] que cette formulation se réduit facilement à un problème linéaire de moindres carrés plus simple et rapide à résoudre et plus robuste aux outliers. En écrivant

$$J_k = \sum_{p=1}^{N_k} \left\{ (x_p - a_k)^2 + (y_p - b_k)^2 - R_k^2 \right\}^2, \quad (4)$$

l'annulation des dérivées de  $J_k$  par rapport à  $a_k, b_k$  et  $R_k$ , donne immédiatement une équation matricielle  $3 \times 3$  dont l'inversion conduit aux paramètres du cercle recherchés.

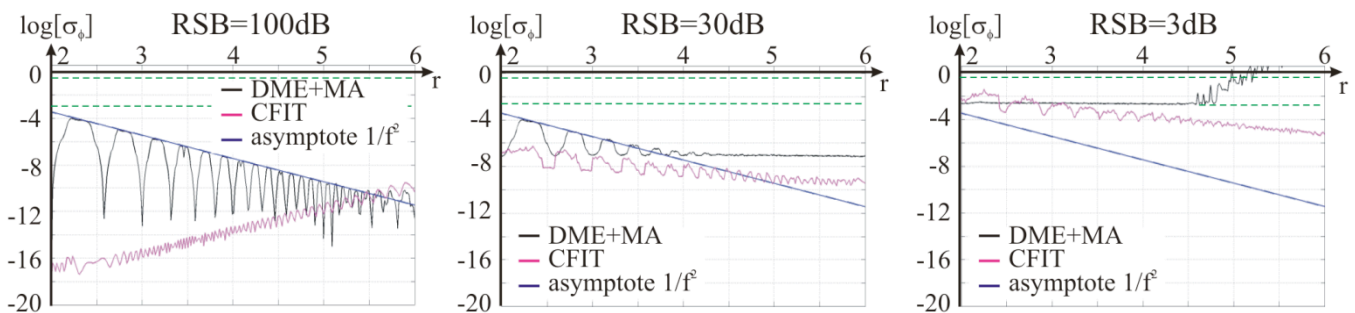


Figure 3 : erreur de phase représentée en échelles logarithmiques en fonction de  $r$  ( $r=2^r$ ) et commise pour différents RSB de 100 à 3dB pour les deux méthodes considérées.

Kâsa dérive les équations à partir de cette dernière formulation dans [9] où il propose également une analyse d'erreur complète. Il est à noter qu'une formulation légèrement différente de cette méthode est proposée dans [10] pour un gain significatif en précision, lorsque les données sont distribuées sur un arc de faible longueur, mais avec un coût calculatoire légèrement plus important. La longueur de l'arc décrit par l'échantillon de points considéré est cruciale et la solution algorithmique proposée est décrite dans le paragraphe suivant.

### 2.3 Algorithme

Pour minimiser les erreurs d'ajustement, la longueur de l'intervalle  $N_k$ , doit être adaptée au signal afin que le nuage de points couvre  $n$  périodes locales ( $n \geq 1$ ).

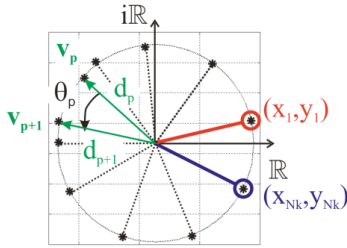


Figure 4 : nuage de points dans le plan complexe à l'instant k.

En se référant à la figure 4, l'angle  $d\theta_p$  est directement calculé pour chaque couple de vecteurs  $(\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1})$  de la manière suivante :

$$\theta_p = \arctan\left(\frac{\det(\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1})}{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_{p+1}}\right) \quad (5)$$

Comme déjà mentionné, la moyenne algébrique des  $d\theta_p$  donne une estimation de la FI moyenne,  $v_k$ , sur l'intervalle de points considérés, i.e.  $n$  périodes locales. La valeur  $N_k$  est alors mise à jour très simplement comme suit :

$$N_k = 2n\pi / \langle \theta_p \rangle_{N_k} \quad (6)$$

Le choix de  $n$  repose donc sur un compromis entre localisation temporelle et finesse spectrale, comme toujours.

En outre, pour lisser l'évolution de  $N_k$  au cours du temps, une moyenne glissante de typiquement 3 échantillons est implémentée :

$$N_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m N_{k-j} \quad (7)$$

Enfin, pour alléger la charge de calcul, il est possible d'effectuer l'interpolation circulaire tous les  $u_k$  instants, l'évolution temporelle de chaque grandeur étant simplement obtenue à chaque instant par interpolation en fin de procédure.

Nous avons déjà dit quelques mots sur la nature non stationnaire des signaux à traiter. Les pertes de modulation sont inévitables en IS et rendent le calcul de la phase dans ces zones fortement entaché d'erreurs

aléatoires et finalement dénué de sens. Lorsque des points sont trop proches du centre du cercle estimé (distance par rapport au centre  $d_p$  inférieur à une modulation minimale  $\mu$ ), il est donc préférable de ne pas en tenir compte. Si parmi ces  $N_k$  points, trop peu sont valides (la procédure en requiert au minimum 3), la FI  $v_k$  est attribuée la valeur  $v_{k-1}$ . Nous signalons ici l'existence d'une solution au problème des pertes de modulation en IS dans [3] et [11].

Le déroulement de l'algorithme dans son ensemble est détaillé dans la figure 5.

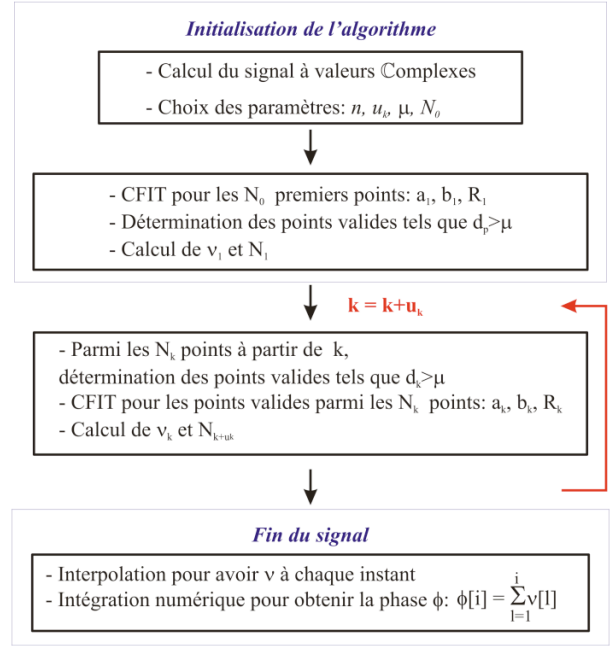


Figure 5 : algorithme complet.

### 3 Résultats expérimentaux

Afin de tester la méthode proposée, un montage d'IS avec sensibilité dans le plan d'observation est utilisé pour suivre la rotation continue d'une plaque de métal sablée (voir figure 6). Il s'agit d'un montage classique, où la surface à analyser est éclairée par deux faisceaux de lumière laser symétriques par rapport à la normale à la surface de directions unitaires  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$ . La surface est observée avec une caméra sous incidence normale. La phase extraite est alors proportionnelle au vecteur déplacement  $\mathbf{L}$  du point de la surface selon :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \alpha L_x, \quad (8)$$

où l'axe x est orienté selon le vecteur sensibilité  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2$  et contient le centre de rotation de la plaque O.

La vitesse de rotation est fixée de façon à avoir la plus grande bande passante de mesure compte-tenu de la fréquence d'acquisition de la caméra. Avec ce type de montage et ce déplacement de corps rigide, les lignes d'égal déplacement sont des droites parallèles à l'axe (O,x). On s'attend ainsi à avoir pour chaque moitié de plaque un plan pour champ de déplacement, la

composante  $L_x$  des points sur l'axe (O,x) étant nulle puisque  $L$  est orthogonal à  $S$  sur cet axe.

Les signaux interférométriques temporels pour 3 points situés à différentes distances de l'axe (O,x) sont également donnés dans la figure 6 à titre d'exemples.

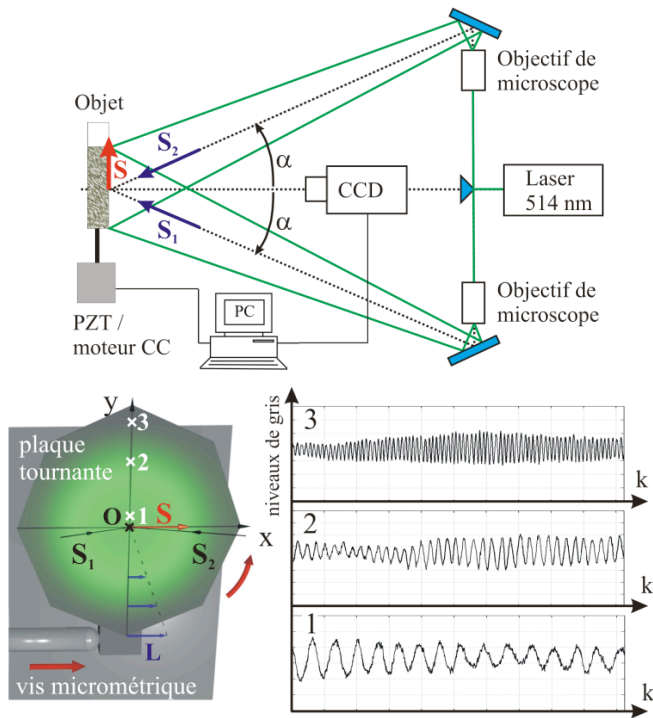


Figure 6 : montage de type Leendertz avec sensibilité  $S$  dans le plan d'observation selon  $x$ .

Les signaux correspondant respectivement aux positions 1, 2 et 3 contiennent 15, 36 et 81 franges ce qui correspond à des déplacements d'environ 10, 23 et 52  $\mu\text{m}$ .

Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par l'application combinée de la DME et de la méthode analytique. On présente dans la figure 7 le résultat de tout le champ d'intérêt pour le déplacement maximal de 59  $\mu\text{m}$  (pour les points de la plaque les plus éloignés de l'axe (O,x)).

On observe une réduction sensible du bruit dans la zone centrale de la plaque avec la méthode CFIT par rapport à la combinaison DME-méthode analytique. Autrement dit, la méthode présentée permet une extraction de phase pour des signaux AM-FM contenant

une moyenne fluctuante et ce, sur une bande passante bien plus importante que la méthode analytique combinée à la DME.

## Références

- [1] K. Creath. Phase-shifting speckle interferometry. *Appl. Opt.* **24**(18), 3053–8 (1985).
- [2] M. Cherbuliez, P. Jacquot, and X. Colonna de Lega. Wavelet processing of interferometric signals and fringe patterns. *Proc. of the SPIE* **3813**, 692–702 (1999).
- [3] S. Equis and P. Jacquot. The empirical mode decomposition: a must have tool in speckle interferometry?, *Opt. Express* **17**, 611-23 (2009).
- [4] N.E. Huang *et al.* The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis. *Proc. R. Soc. Lond. A* **454A**(1971), 903–95 (1998).
- [5] D. Aboutajdine, M. Najim and J.G. Postaire. A new definition of instantaneous frequency with applications in seismology. *Proc. EUSIPCO-80* (Short Communications digest), 57-58, Lausanne (1980).
- [6] P.F. Pai. Circular instantaneous frequency. *Adv. Adapt. Data Anal.* **2**(1), 39-64 (2010).
- [7] G. Rilling and P. Flandrin. On the influence of sampling on the empirical mode decomposition. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 444-7 (2006).
- [8] I.D. Coepe. Circle fitting by linear and nonlinear least squares. *J. Optimiz. Theory App.*, **76** (2), 381-8 (1993).
- [9] I. Kása. A circle fitting procedure and its error analysis, *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-25**, 8-14 (1976).
- [10] N.I. Chernov and G.A. Ososkov. Effective algorithms for circle fitting. *Comput. Phys. Commu.*, **33**, 329-33 (1984).
- [11] S. Equis. and P. Jacquot. Coping with low modulation in speckle interferometry: a novel approach based on the Delaunay triangulation. *Proceedings of the International Conference Speckle 2010, Florianopolis, Brazil, Proc. SPIE* **7387**, 738709 1-10 (2010).

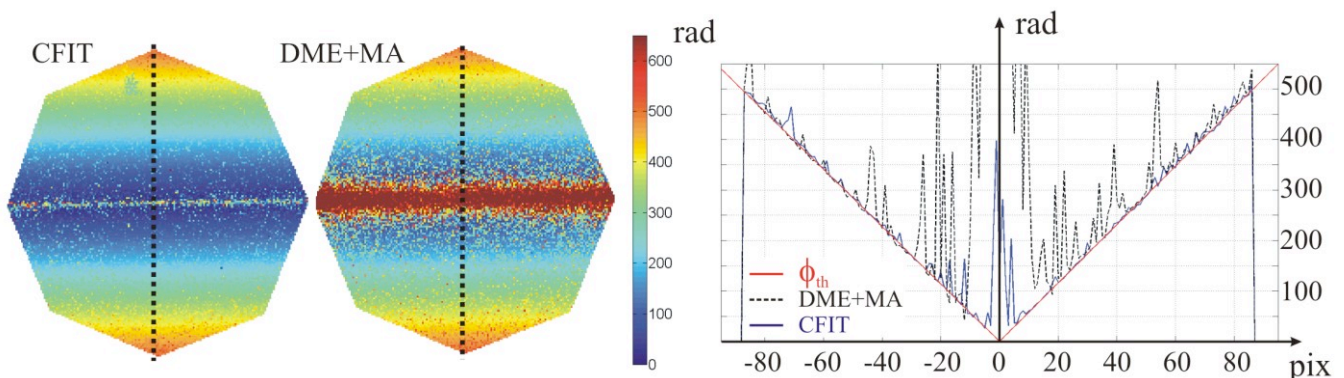


Figure 7: cartes de phase correspondant au déplacement total (l'échelle est directement donnée en radians) ; les profils des cartes de phase (selon les pointillés verticaux) sont donnés avec la phase théorique ( $\phi_{th}$ ) induite par le déplacement mesuré.