TD 5 : Fonctions harmoniques

Exercice 1. Montrer que la fonction $h : z \in \mathbb{C}^* \to \log|z|$ est harmonique.

Exercice 2. Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $h : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Montrer que si h^2 est harmonique, alors h est constante.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour toute fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$, la fonction $\operatorname{Re} f$ est harmonique.
2. On suppose de plus que Ω est simplement connexe. Soit $h : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. On souhaite démontrer qu'il existe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $h = \operatorname{Re} f$.
   (a) Montrer que la fonction $g = \partial_x h - i\partial_y h$ est holomorphe sur Ω.
   (b) Construire une telle fonction f recherchée en utilisant la fonction g.
   (c) Montrer que la fonction f est en fait unique à constante additive près.
3. *Application* : Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Montrer que si h est majorée ou minorée, alors h est constante.

Exercice 4. Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $h : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique.

1. Montrer que si h s'annule sur un ouvert non vide de Ω, alors h est identiquement nulle.

Dans les questions suivantes, on suppose de plus que $h(0) = 0$.

2. Montrer que l'origine n'est pas un zéro isolé de h.
3. Que dire plus précisément si la fonction h prend des valeurs positives ?

Exercice 5. Soit $r > 0$ et $f : D(0,r) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $0 < |f| < 1$. Montrer l'estimation suivante

$$\forall z \in D(0,r), \quad |f(z)| \leq |f(0)|^{\frac{r-|z|}{r+|z|}}.$$

Exercice 6.

1. Soit h une fonction harmonique définie sur un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,R)}$ avec $R > 0$. Etablir l'égalité

$$\forall r \in [0,R], \quad \sup_{|z|=r} h(z) \leq \frac{2r}{r+R} \sup_{|z|=R} h(z) + \frac{R-r}{R+r} h(0).$$

2. *Application* : Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique telle que

$$\liminf_{r\to+\infty} r^{-1} \sup_{|z|=r} h(z) \leq 0.$$

   Montrer que h est constante.

Exercice 7. Soit $(h_n)_n$ une suite croissante de fonctions harmoniques définies sur $D(0,1)$. Montrer que l'on est dans un des deux cas suivants

(i) $h_n \to +\infty$ uniformément sur les compacts de $D(0,1)$.

(ii) Il existe une fonction harmonique $h : D(0,1) \to \mathbb{R}$ telle que la suite $(h_n)_n$ converge localement uniformément vers h sur $D(0,1)$.