TD 6 : Inégalité de Caccioppoli, régularité intérieure et surfaces minimales

Exercice 1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $A \in L^\infty(\Omega, M_d(\mathbb{R}))$ satisfaisant la condition d'ellipticité suivante

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d, \quad A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2.$$

On considère également $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, ainsi que l'opérateur L défini par

$$L = -\operatorname{div}(A(x)\nabla \cdot) + b(x) \cdot \nabla + c(x).$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant $Lu = f$. Montrer que pour tout ouvert $\Omega' \Subset \Omega$, on a l'inégalité de type Caccioppoli suivante

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega')} \leq c\big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\big),$$

où la constante $c > 0$ ne dépend que des fonctions A, b et c.
Indication : on pourra utiliser comme fonction test $\eta^2 u$ où $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ et vaut 1 sur Ω'.

Exercice 2. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $A \in C^{0,1}(\Omega, M_d(\mathbb{R}))$ une fonction à valeurs matricielles vérifiant la condition d'ellipticité suivante

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d, \quad A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2.$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et pour toute fonction u, on note

$$\tau_h u = u(x+h) \quad \text{et} \quad \Delta_h u = |h|^{-1}(u(x+h) - u(x)).$$

On considère également des ouverts $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$.

1. Rappeler pourquoi, pour $u \in H^1(\Omega)$ et h assez petit

$$\|\tau_h u - u\|_{L^2(\Omega'')} \leq |h| \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$.

2. Montrer que pour tout h assez petit et $\phi \in H^1(\Omega)$ à support dans Ω'', on a

$$\int_\Omega (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u) \cdot \nabla \phi = \int_\Omega (\Delta_h f)\phi - \int_\Omega (\Delta_h A)\nabla u \cdot \nabla \phi.$$

3. En s'inspirant de la démonstration de l'inégalité de Caccioppoli, montrer que

$$\|\nabla \Delta_h u\|_{L^2(\Omega')} \leq c\big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\big),$$

   où la constante $c > 0$ ne dépend que de la fonction A.
   Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 1.

4. En déduire l'estimation suivante
$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega')} \leq c\big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

On considère maintenant le problème de Dirichlet
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) &= f \quad \text{dans } R, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial R. \end{cases}$$
où R est le rectangle $[0,1] \times [-1,1]^{n-1}$.

5. Montrer que
$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(R')} \leq c\big(\|f\|_{L^2(R)} + \|u\|_{L^2(R)}\big).$$
où $R' = [0, 1/2] \times [-1/2, 1/2]^{n-1}$.

Exercice 3. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier connexe et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction donnée régulière. On introduit l'espace affine suivant
$$H^1_g(\Omega) = \big\{u \in H^1(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = g\big\}.$$
Considérons une fonction $u \in H^1_g(\Omega)$. On note $S(u)$ la surface
$$S(u) = \big\{(x, u(x)) : x \in \Omega\big\},$$
et $A(u)$ l'aire de $S(u)$, définie par
$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,\mathrm{d}x.$$
On dit que $S(u)$ est une surface minimale si
$$A(u) = \inf_{v \in H^1_g(\Omega)} A(v).$$

1. Montrer que si $S(u)$ est une surface minimale, alors
$$H(u) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0,$$
au sens où
$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \qquad \int_\Omega \frac{\nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1}$$

2. * Montrer que si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ est solution de l'équation (1), alors on a en fait $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ et $\operatorname{div}(A(x)\nabla\partial_k u) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq d$, où $A = (\partial_i\partial_j F(\nabla u))_{1 \leq i,j \leq d}$ avec $F(\zeta) = \sqrt{1 + |\zeta|^2}$. Pour cela, on pourra montrer que la fonction u satisfait
$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d c^h_{i,j}(x)\partial_{x_j}(\Delta_{he_k} u)\partial_{x_i} v\,\mathrm{d}x = 0,$$
pour tout h assez petit et pour toute fonction test $v \in H^1_0(\Omega)$, où $\Delta_h u$ désigne la dérivée discrète de u définie dans l'exercice précédent et où la matrice $(c^h_{i,j}(x))_{i,j}$ est elliptique uniformément par rapport au paramètre h. On pourra ensuite conclure en s'inspirant de la démonstration de l'inégalité de Caccioppoli.

Remarque : on peut démontrer grâce au théorème de Schauder que si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifie $H(u) = 0$, alors $u \in C^\infty(\Omega)$.