TD 7 : Théorème de Riesz–Thorin et inégalité de Strichartz

Exercice 1 (Lemme des trois droites d'Hadamard).
Soit $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$. On considère une fonction continue bornée $F : \overline{B} \to \mathbb{C}$ qui est également holomorphe sur B, et on pose $M(\theta) = \sup_{\operatorname{Re} z = \theta} |F(z)|$. Montrer que l'on a

$$\forall \theta \in [0,1], \quad M(\theta) \leq M(0)^{1-\theta} M(1)^{\theta}.$$

Exercice 2 (Théorème de Riesz–Thorin).
Soient $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$ tels que $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$, et $\Omega, U \subset \mathbb{R}^d$ des ouverts. On considère également un opérateur T borné de $L^{p_i}(\Omega)$ dans $L^{q_i}(U)$ de norme d'opérateur M_i, pour $i = 0, 1$. L'objectif est de démontrer que T est également borné de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(U)$ pour tout couple (p, q) satisfaisant la relation

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \theta \in (0,1),$$

avec de plus

$$\|T\|_{L^p(\Omega) \to L^q(U)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

1. On note q' l'exposant conjugué de q, *i.e.* tel que $1/q + 1/q' = 1$, et

   $$\langle h, g \rangle = \int_U h(y) g(y) \, \mathrm{d}y,$$

   dès que l'intégrale a un sens. Montrer qu'il suffit de vérifier que

   $$|\langle Tf, g \rangle| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

   pour toutes fonctions $f \in C_0(\Omega)$ et $g \in C_0(U)$ telles que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$.
2. * Pour $f \in C_0(\Omega)$, $g \in C_0(U)$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, on pose

   $$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q(z)} = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1},$$

   ainsi que

   $$\varphi(x,z) = f(x)|f(x)|^{p/p(z)-1} \quad \text{et} \quad \psi(y,z) = g(y)|g(y)|^{q'/q(z)'-1}.$$

   Montrer que l'expression

   $$F(z) = \langle (T\varphi)(\cdot, z), \psi(\cdot, z) \rangle,$$

   définit une fonction F vérifiant les hypothèses du lemme des trois droites d'Hadamard.
3. Conclure.
4. *Application 1 :* Soit $p \in [1,2]$. Démontrer que la transformée de Fourier se prolonge en une application linéaire continue $\mathscr{F} : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^{p'}(\mathbb{R}^d)$.

5. *Application 2 : Théorème de Young.* Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, où $p, q \geq 1$ vérifient $1/p + 1/q \geq 1$. Démontrer que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ pour
$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$
avec de plus
$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Exercice 3 (Inégalité de Strichartz).
Soit $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une famille d'opérateurs linéaires satisfaisant les bornes suivantes pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} \|S(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C, \\ \|S(t)S(s)^*\|_{L^1(\mathbb{R}^d)\to L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C|t-s|^{-\sigma}, \end{cases}$$
où $C > 0$ et $\sigma > 0$ sont des constantes fixés. L'inégalité de Strichartz stipule que l'on a alors l'estimation suivante pour toute fonction $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$,
$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|S(t)u_0\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)} \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1}$$
et pour tout couple (p, q) satisfaisant les conditions
$$\frac{2}{p} + \frac{2\sigma}{q} = \sigma, \quad 2 \leq p \leq \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (p,q) \neq (2,\infty). \tag{2}$$
L'objectif est ici de démontrer ce résultat dans le cas le plus simple où $p = q$.

1. En appliquant le théorème de Riesz–Thorin, démontrer que l'on a pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,
$$\|S(t)S(s)^*\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)\to L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C|t-s|^{-\sigma(2/p'-1)},$$
où $p' \in [1, 2]$ vérifie $1/p + 1/p' = 1$.
2. En déduire que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et pour toutes fonctions $F, G \in L^{p'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, on a
$$|\langle S(t)^*G(t,\cdot), S(s)^*F(s,\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \leq C|t-s|^{-\sigma(2/p'-1)} \|G(t,\cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \|F(s,\cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}.$$
3. On rappelle l'inégalité de Hardy–Littlewood–Sobolev, qui stipule que pour $K_a(t) = |t|^{-a}$ et $0 < a < 1$, on a
$$\|K_a * u\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^{r'}(\mathbb{R})} \quad \text{avec} \quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + a.$$
Démontrer que l'estimation suivante est vérifiée pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and $G \in L^{p'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$,
$$\left|\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} (S(t)u_0)(x)G(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)}.$$
4. Conclure.
5. *Application* : En admettant que l'inégalité (2) est vraie pour les couples (p, q) vérifiant les conditions (2), montrer que l'on a pour toute fonction $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$,
$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|e^{it\Delta}u_0\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)}\right)^{1/p} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$
pour tout couple (p, q) d-admissible, *i.e.* satisfaisant les conditions suivantes
$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}, \quad 2 \leq p \leq \infty, \quad (p,q,d) \neq (2,\infty,2).$$